Вопросы к экзамену по курсу «Алгебра и аналитическая геометрия»

(1 семестр, 2022-23 уч. г., С.А. Колбина)

1. **Комплексные числа**: определение, алгебраическая форма записи.

Комплексным числом называется число $z = x + iy$.

$x, y \in \mathbb{R}, i$ – мнимая единица

$i = \sqrt{-1}$, $x = Re(z)$ – вещественная часть, $y = Im(z)$ – мнимая часть.

2. **Геометрическое изображение, модуль и аргумент комплексного числа**.

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \text{точка } M(x, y)$$

Точка M изображает комплексное число z на комплексной плоскости. O_x – вещественная ось, O_y – мнимая ось. $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радиус вектор точки M.

Длина вектора, изображающего комплексное число z называется **модулем** комплексного числа. $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Величина угла между положительным направлением вещественной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число z, называется **аргументом** этого комплексного числа.

$$Arg(z) = arg(z) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$arg(z) \in [0,2\pi)$ – главное значение аргумента.

3. Тригонометрическая и экспоненциальная формы записи комплексного числа.

$z = x + iy$ – **алгебраическая** форма записи.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – **тригонометрическая** форма записи.

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $cos\,\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $sin\,\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\varphi = arg(z) \in (0,2\pi)$

$z = re^{i\varphi}$ – **показательная** (**экспоненциальная**) форма записи.

Формула Эйлера – $e^{i\varphi} = cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi$

4. **Арифметические действия с комплексными числами**.

Сумма:

$$z = z_1 + z_2 = (x + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Разность:

$$z = z_1 - z_2, \text{ так что } z + z_2 = z_1$$

1) $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
2) $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = dist(M_1, M_2)$

Произведение:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

1) $\mathrm{z_1 z_2 = z_2 z_1}$
2) $(z_1 z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
3) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Формула Муавра: $z^n = r^n(cos(n\varphi) + i\, sin(n\varphi))$

Частное:

$\frac{z_1}{z_2} = z$, такое что $z_2 \neq 0, z \cdot z_2 = z_1$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

5. Операция **комплексного сопряжения** и ее свойства.

$z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются **сопряженными**.

1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2}$
2) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}, (z_2 \neq 0)$
4) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

6. Многочлены: определение, правило деления многочленов. Теорема Безу.

Многочленом степени n называется функция $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, где $a_k \in \mathbb{C}$ коэффициенты многочлена.

Правило деления многочленов:

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$
$Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0$
$a_n \neq 0, b_m \neq 0, n > m.$
$\forall P_{(z)}, Q_{(z)}\ \exists!\, S(z), R(z): \frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{R(z)}{Q(z)}$, степень $R(z) <$ степени $Q(z)$.

Комплексное число z_0 называется корнем (нулем) многочлена $P(z)$, если $P(z_0) = 0$
Теорема Безу:
$z_0 \in \mathbb{C}$ является корнем многочлена $P(z)$ тогда и только тогда, когда $\exists S(z)$:
$$P(z) = (z - z_0)S(z)$$

7. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на множители.
Основная теорема алгебры: $\forall P(z), n > 0$ имеет хотя бы один корень.
Разложение многочлена на множители: $\forall P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, где $a_n \neq 0, n > 0$, имеет n корней с учетом кратности, т.е. его можно представить: $P(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_r)^{k_r}$, где $z_1, z_2, \dots, z_r$ корни многочлена, а $k_1, k_2, \dots, k_r$ соответствующие кратности, $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$. Причем такое разложение единственное с точностью до перестановки сомножителей.

8. Разложение на множители многочлена с вещественными коэффициентами.
$\forall P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, где $a_n \neq 0, n > 0$; $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$
$P(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_r)^{k_r} (z^2 + p_1 z + q_1)^{l_1} (z^2 + p_2 z + q_2)^{l_2} \dots (z^2 + p_s z + q_s)^{l_s}$; $z_1, z_2, \cdots, z_r \in \mathbb{R}$ различные корни многочлена, $k_1, k_2, \dots, k_r$ соответствующие кратности; $z^2 + p_m z + q_m$ $(m = 1,2, \cdots, s)$ имеет два комплексно-сопряженных корня; $k_1 + k_2 + \cdots + k_r + 2l_1 + 2l_2 + \cdots + 2l_s = n$.

9. Рациональные дроби. Разложение правильной дроби в сумму простейших.
Пусть $P(z)$ – многочлен степени n, $Q(z)$ – многочлен степени m, $Q(z) \not\equiv 0$, тогда функция $\frac{P(z)}{Q(z)}$ называется **рациональной дробью**.

1) $(z - z_1)^{k_1}$ соответствует k_1 простейших дробей:
$$\frac{A_1}{(z - z_1)} + \frac{A_2}{(z - z_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(z - z_1)^{k_1}}$$
2) $(z^2 + p_1 z + q)$ соответствует l_1 простейших дробей:
$$\frac{B_1 z + C_1}{z^2 + p_1 z + q} + \frac{B_2 z + C_2}{(z^2 + p_1 z + q)^2} + \cdots + \frac{B_{l_1} z + C_{l_1}}{(z^2 + p_1 z + q)^{l_1}}$$

10. Матрицы. Сложение матриц, умножение матрицы на число, свойства.
Числовой матрицей A размера $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел $a_{ij} \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ расположенных в виде прямоугольной таблицы. (m строк, n столбцов).

A, B матрицы размера $m \times n$, **Суммой** матриц A и B называется матрица C размера $m \times n$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

A матрица размера $m \times n$, $\alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$, **Произведением** αA называется матрица D размера $m \times n$, элементы которой $d_{ij} = \alpha a_{ij}$.

1) $A + B = B + A$
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
5) $(\alpha\beta)A = (\alpha A)\beta = \alpha(\beta A)$

11. Транспонированная матрица, сопряженная матрица.

A матрица размера $m \times n$, матрица $B = A^T$ размера $n \times m$ называется **транспонированной** по отношению к A, если $b_{ji} = a_{ij}$.

1) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
3) $(A^T)^T = A$

A матрица размера $m \times n$, матрица $B = A^*$ размера $n \times m$ называется **сопряженной** по отношения к A, если $c_{ji=}\overline{a_{ij}}$.

1) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$
2) $(A + B)^* = A^* + B^*$
3) $(A^*)^* = A$

*Матрица называется симметричной, если $A = A^T$

*Матрица называется самосопряжённой, если $A = A^*$

12. Умножение матриц, его свойства.

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$ называется матрица C размера $m \times k$, такая что $c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot b_{pj}$

1) $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$
2) $A \cdot (B + C) = AB + AC$
   $(A + B) \cdot C = AC + BC$
3) $\alpha(AB) = \alpha A \cdot B = A \cdot \alpha B$
4) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

5) $(AB)^* = B^* \cdot A^*$

13. Системы линейных уравнений. Матричная запись.

Решением системы называется набор чисел, при подстановке которых в уравнения системы вместо соответствующих неизвестных, каждое уравнение системы становится верным числовым равенством. Если система не имеет решений, то говорят, что она несовместна, если имеет – совместна.
Две системы с одинаковым количеством неизвестных называются равносильными, если они имеют одинаковые множества решений.

14. Допустимые преобразования. Метод Гаусса-Жордана.

1) Перестановка уравнений в системе
2) Перестановка соответствующих неизвестных во всех уравнениях
3) Умножение обеих частей произвольного уравнения системы на число, отличное от 0
4) Прибавление к одному из уравнений системы другого ее уравнения, умноженного на какое-либо число.

Метод Гаусса-Жордана:

Шаг *I*

1) Выбираем ведущий элемент a_{11} и помещаем в первую строку, первый столбец, используя допустимые преобразования.
2) Умножаем все элементы первой строки на число, обратное ведущему элементу.
3) Используя допустимые преобразования, получаем нули в первом столбце, за исключением ведущего элемента.
4) Если в ходе преобразований получилась строка $[0\ 0 \cdots 0|b], b \neq 0 \Rightarrow \emptyset$
5) Если в ходе преобразований получилась строка $[0\ 0 \cdots 0|0] \Rightarrow$ убираем нулевую строку.

Шаг *II*

1) Выбираем ведущий элемент a_{22} и помещаем во вторую строку, второй столбец, используя допустимые преобразования.
2) Умножаем все элементы второй строки на число, обратное ведущему элементу.
3) Используя допустимые преобразования, получаем нули во втором столбце, за исключением ведущего элемента.
4) Если в ходе преобразований получилась строка $[0\ 0 \cdots 0|b], b \neq 0 \Rightarrow \emptyset$

5) Если в ходе преобразований получилась строка $[0\ 0 \cdots 0|0] \Rightarrow$ убираем нулевую строку.

Далее аналогично, до получения единичной матрицы слева от столбца свободных коэффициентов.

15. Определитель квадратной матрицы (определение). A квадратная матрица

1) $A = [a_{11}] = det(A) = a_{11}$
2) $det\left(\widetilde{A_{ij}}\right) = M_{ij}(A)$ – минор матрицы A, соответствующий элементу a_{ij}

$A_{ji} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}(A)$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A

3) $det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot A_{1k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} \cdot a_{1k} \cdot M_{1k}(A)$ – разложение по 1 строке

16. Основные свойства определителей.

1) $det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot M_{ik}(A)$ – разложение по i строке
2) $det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot M_{kj}(A)$ – разложение по j столбцу
3) $det(A) = det(A^T)$
4) $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$
5) При перестановке двух строк (столбцов) в матрице определитель меняет знак на противоположный.
6) Общий множитель всех элементов произвольной строки (столбца) можно вынести за знак определителя
7) Если все элементы какой-нибудь строки (столбца) представлены в виде суммы двух слагаемых, то ее определитель равен сумме определителей двух матриц, к одной из которых соответствующая строка (столбец) состоит из первых слагаемых, а у другой из вторых слагаемых. Все остальные строки (столбцы) не изменяются.
8) Если к элементам строки (столбца) матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на один и тот же множитель, то определитель полученной матрицы будет равен определителю исходной.
9) Сумма произведений произвольной строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна 0.
10) Определитель произведения двух квадратных матриц одинакового порядка равен произведению определителей матриц сомножителей.

17. Теорема Крамера. Формулы Крамера.

1) Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица системы невырожденная ($det(A) \neq 0$)

2) Если $det(A) \neq 0$, где A матрица системы, тогда единственное решение этой системы находится по формулам $x_k = \frac{det(B_k)}{det(A)}$; $k = \overline{1, n}$; B_k получается из матрицы A заменой k столбца столбцом свободных членов.

18. Однородные системы линейных уравнений.

1) Если в однородной системе количество неизвестных больше количества уравнений, тогда система имеет бесконечно много решений.
2) Однородная система из равного количества уравнений и неизвестных имеет единственное тривиальное решение тогда и только тогда, когда матрица этой системы невырожденная.

19. Обратная матрица. Условия существования, вычисление.

A – квадратная матрица n порядка, I – единичная матрица n порядка;
A^{-1} – квадратная матрица n порядка называется обратной матрицей для матрицы A, если выполняется равенство: $A \cdot A^{-1} = I$ $(A^{-1} \cdot A = I)$

Произвольная квадратная невырожденная матрица имеет обратную матрицу. (Если матрица вырожденная, то обратной матрицы не существует).

Вычисление:

1) Решить уравнение $A \cdot X = I$
2) Заменяем каждый элемент его алгебраическим дополнением, транспонируем матрицу, каждый элемент делим на определитель изначальной матрицы.

Свойства:

1) $\exists (A^{-1})^{-1} = A$
2) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

20. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$. Линейно зависимые и независимые системы векторов (определение).

Вектором размерности n называется упорядоченный набор n чисел

Совокупность всех n мерных векторов с **вещественными** координатами называется **линейным векторным пространством** $\mathbb{R}^n$

Совокупность всех n мерных векторов с **комплексными** координатами называется **линейным векторным пространством** $\mathbb{C}^n$

Система векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ называется **линейно зависимой**, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, такие что хотя бы одно из них $\neq 0$ и выполняется равенство $\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\vec{x}_2 + \dots + \alpha_n\vec{x}_n = \vec{0}$

Система векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ называется линейно **независимой**, если равенство $\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\vec{x}_2 + \dots + \alpha_n\vec{x}_n = \vec{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда все коэффициенты линейной комбинации = 0.

21. Свойства, связанные с линейной зависимостью.

1) Если в системе векторов есть нулевой вектор, то система векторов линейно зависима
2) Если система векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ линейно зависима, то система $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}, \vec{y}$ будет линейно зависима.
3) Если система векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ содержит линейно зависимую подсистему из $l \leq n$ векторов, то система $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ также линейно зависима.
4) Если система векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ линейно независима, то любая из ее подсистем также линейно независима

22. Теорема о линейно зависимой системе векторов.

Система векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один вектор этой системы является линейной комбинацией остальных векторов этой системы

23. Базис в $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$. Теорема о единственности разложения вектора по базису.

$\forall$ упорядоченный набор n линейных независимых векторов из $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ называется **базисом** этого пространства.

Пусть $\vec{e}_1, \overrightarrow{e_2}, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ – базис, тогда $\forall x \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ можно представить единственным образом в виде линейной комбинации векторов.

24. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

Пусть $\forall$ паре $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ можно поставить в соответствие число $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k\,\overline{y_k}$ скалярное произведение $\vec{x},\vec{y}$, если:

1) $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle \in \mathbb{R}, \langle\vec{x},\vec{x}\rangle \geq 0, \langle\vec{x},\vec{x}\rangle = 0$ только если $\vec{x} = \vec{0}$
2) $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \overline{\langle\vec{y},\vec{x}\rangle}$
3) $\langle\alpha\vec{x},\vec{y}\rangle = \alpha\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$
4) $\langle\vec{x}+\vec{y},\vec{z}\rangle = \langle\vec{x},\vec{z}\rangle + \langle\vec{y},\vec{z}\rangle$

25. **Неравенство Коши-Буняковского:** $\forall\vec{x},\vec{y}\ \langle\vec{x},\vec{y}\rangle \leq \sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}\cdot\sqrt{\langle\vec{y},\vec{y}\rangle}$

26. **Норма** в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

Пусть любому вектору $\vec{x} \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ можно поставить в соответствие число $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} \in \mathbb{R}$. Это число называется нормой вектора $\vec{x}$, если:

1) $\|\vec{x}\| \geq 0 \forall x \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$
   $\|\vec{x}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} = \vec{0}$
2) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{x}\|, \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$
3) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

27. **Ортогональная система векторов**.

Два вектора из $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ называются ортогональными, если скалярное произведение $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = 0$

Система векторов называется ортогональной, если она состоит из ненулевых попарно ортогональных векторов.

Система векторов называется ортонормированной, если она ортогональна и норма каждого вектора = 1.

28. **Ортогональный и ортонормированный базисы**. Коэффициенты Фурье.

Ортогональным базисом называется базис, образованный ортогональной системой векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e_n} \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$

Ортонормированным базисом называется базис, образованный ортонормированной системой векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e_n} \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$

29. **Скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^3$**.

$|\vec{a}|$ – длина вектора $\vec{a}$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ называется число

$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$; $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

30. Векторное произведение, его свойства.

Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ называется правой, если из конца третьего $\vec{c}$ кратчайший поворот на $0 < \alpha < \pi$ от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден как поворот против часовой стрелки.

Векторным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, такой что:

1) $\vec{c}$ ортогонален $\vec{a}$, ортогонален $\vec{b}$
2) $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$
3) Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является правой.

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$ или хотя бы один из векторов $= \vec{0}$

$s_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Свойства:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
2) $(\lambda\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

   $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

31. Смешанное произведение. Геометрический смысл.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$их смешанным произведением называется число $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$.

$|\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle| = V_{\text{парал}}$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$

32. Плоскость в $\mathbb{R}^3$.

Фиксируем декартовую систему координат в $\mathbb{R}^3$. Положение любой плоскости Π в $\mathbb{R}^3$ определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$ и вектором $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, $\vec{n} \perp \Pi$ $(\vec{n} \neq 0)$ – нормальный вектор.

<u>Канонические уравнения плоскости Π:</u>

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Обозначим $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \ \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости $(A^2 + B^2 + C^2) > 0$

33. Прямая в $\mathbb{R}^3$.

Фиксируем декартовую систему координат в $\mathbb{R}^3$. Положение любой прямой L определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ и вектором $\vec{a} = \begin{pmatrix} m \\ k \\ p \end{pmatrix}$, $\vec{a} \parallel L$ $(\vec{a} \neq 0)$ – направляющий вектор.

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Канонические уравнения прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

34. Собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы: определение, нахождение.

A – квадратная матрица n порядка, $\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{x} \neq \vec{0}, \lambda \in \mathbb{C}(\lambda \neq 0)$. Если выполняется равенство $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, то λ называется **собственным числом** матрицы A, а $\vec{x}$ называется **собственным вектором** матрицы A, соответствующим собственному числу λ.

A – квадратная матрица n порядка, $\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{x} \neq \vec{0}, \lambda \in \mathbb{C}(\lambda \neq 0)$и выполняется равенство $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. I – единичная матрица n порядка, тогда $A\vec{x} = \lambda I\vec{x} \Rightarrow A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = \vec{0}$ $\Rightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$. Т.к $\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow det(A - \lambda I) = 0$

- λ является собственным числом квадратной матрицы A тогда и только тогда, когда λ решение уравнения $det(A - \lambda I) = 0$
- Любое ненулевое решение однородной системы $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, является собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному числу λ.

35. Собственные числа и собственные векторы самосопряженной матрицы (вещественной симметричной матрицы). Существование собственного базиса.

- Собственные числа самосопряженной матрицы вещественны.
- Собственные векторы самосопряженной матрицы, соответствующие различным собственным числам ортогональны.
- Собственные векторы самосопряженной матрицы n порядка образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}^n$. Этот базис называется собственным.

36. **Квадратичные формы**. Приведение к каноническому виду.

A – вещественная симметричная матрица n порядка. $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Квадратичной формой с матрицей A называется функция $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такая что
$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle A\vec{x}, \vec{x}\rangle \in \mathbb{R}$; $V(\vec{x}) = \langle A\vec{x}, \vec{x}\rangle$

$$V(\vec{x}) = V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

Канонический вид: $V(\vec{x}) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2$

Для всякой квадратичной формы существует базис, в котором она имеет канонический вид.

37. Классификация квадратичных форм.

1) $V(\vec{x})$ называется **положительно-определенной**, если $V(\vec{x}) > 0$ для $\forall \vec{x} \neq \vec{0}$
2) $V(\vec{x})$ называется **отрицательно-определенной**, если $V(\vec{x}) < 0$ для $\forall \vec{x} \neq \vec{0}$
3) $V(\vec{x})$ называется **неотрицательной**, если $V(\vec{x}) \geq 0$ для $\forall \vec{x}$
4) $V(\vec{x})$ называется **неположительной**, если $V(\vec{x}) \leq 0$ для $\forall \vec{x}$
5) $V(\vec{x})$ называется **знакопеременной**, если принимает значения разных знаков