Функциональный анализ 6 семестр

Конспект лекций Додонова Н. Ю.

shared with ♡ by artemZholus

Содержание

1 Линейные операторы в банаховых пространствах

1.1 Сопряженный оператор

Здесь и далее, если не оговорено иного, считаем, что мы находимся в -пространствах.

Определение (сопряженное пространство)**.** $X^* = \left\{ f : X \xrightarrow[\text{непр.}]{\text{лин.}} \mathbb{R} \right\}$ — пространство сопряженное к X.

Заметим, что это пространство линейных функционалов, а значит, мы можем ввести в нем норму как норму линейного функционала.

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

По свойствам числовой оси получаем, что X^* всегда банахово (независимо от X).

Рассмотрим теперь $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Пусть $f(x) = \varphi(Ax)$, где $\varphi \in Y^*$.

Определение. Сопряженный оператор к A имеет вид $A^*(\varphi) = \varphi \circ A$.

Утверждение 1.1. *Если A нерперывный, то A^* тоже непрерывный.*

Доказательство. Пусть A непрерывен, тогда он ограничен. Тогда справедливо

$$\|A^*(\varphi)\| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|A\| . \tag{3}$$

Переходя к sup по φ получаем непрерывность A^*. □

Теорема 1.2. $\|A^*\| = \|A\|$

Доказательство. Мы доказали неравенство в одну сторону (неравенство 3). Докажем в другую. По определению sup: $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon : \|x_\varepsilon\| = 1 \implies \|A\| - \varepsilon < \|Ax_\varepsilon\|$. Пусть $Z = \mathcal{L}(Ax_\varepsilon)$. Рассмотрим $f : Z \to \mathbb{R}$, $f(z) = \alpha \|Ax_\varepsilon\|$. Очевидно, что $f \in Y^*$. Поэтому, по теореме Хана-Банаха распространим f на все Y, и назовем ее φ_ε. Тогда, по свойствам f, $\|\varphi_\varepsilon\| = 1$, $\varphi_\varepsilon(Ax_\varepsilon) = \|Ax_\varepsilon\|$. Следовательно, $\|A\| - \varepsilon < \varphi_\varepsilon(Ax_\varepsilon) = A^*(\varphi_\varepsilon, x_\varepsilon)$. Тогда $\|A\| - \varepsilon < \|A^*\| \cdot \|\varphi_\varepsilon\| \cdot \|x_\varepsilon\| = \|A^*\|$. Переходя к sup по ε получаем нужное неравенство. □

Пример: **TODO**

Теорема 1.3 (теорема Рисса)**.** *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда $\forall f \in H^*$, f можно представить как $f(x) = \langle x, y \rangle$, где $y \in H$, $\|f\| = \|y\|$.*

Доказательство. Докажем в 3 этапа.

1. Построим соотвестсвующий функционал по данному y.
   Пусть $g(x) = \langle x, y \rangle$. Очевидно, что это линейный функционал. По неравенству Шварца $|g(x)| \leqslant \|y\| \|x\| \implies \|g\| \leqslant \|y\|$. Это значит, что g ограничен. Возьмем $x = \frac{y}{\|y\|}$.
   $$g\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = \frac{1}{\|y\|} \langle y, y \rangle = \|y\|$$
   Сопоставляя это с тем, что $\|g\| \leqslant \|y\|$, получаем, что $\|g\| = \|y\|$.

2. Докажем, что этому функционалу соответствует только один y.
   Пусть для какого-то $\widetilde{y}$ справедливо $g(x) = \langle x, \widetilde{y} \rangle$. Тогда $0 = \langle x, y \rangle - \langle x, \widetilde{y} \rangle = \langle x, y - \widetilde{y} \rangle$. Пусть $x = y - \widetilde{y}$, тогда $\langle y - \widetilde{y}, y - \widetilde{y} \rangle = 0 \implies y = \widetilde{y}$

3. Найдем y для данного функционала f.
   Рассмотрим произвольный функционал $f \in H^*$. Как известно, $\operatorname{Ker} f$ — гиперплоскость, т.е. $\operatorname{codim} H_1 = \dim H_2 = 1$, где $H_1 = \operatorname{Ker} f$, $H_2 = H_1^\perp$, и $H = H_1 \oplus H_2$. Это по определению значит, что x единственным образом представим как $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$. Поэтому, $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2) = f(\alpha e) = \alpha \cdot f(e)$, так как $x_1 \in \operatorname{Ker} f$, а e — базисный вектор из H_2. Итак, $\alpha \cdot f(x) = \langle x, y \rangle \Leftrightarrow f(e) = \langle e, y \rangle$. Очевидно, y можно брать из H_2, так как если у него будет компонента из $\operatorname{Ker} f$, то она будет ортогональна e. Поэтому, считаем, что $y = \beta e$. Получаем $f(e) = \langle e, \beta e \rangle = \beta \cdot \|e\|^2$. Положим $\beta = \frac{f(e)}{\|e\|^2}$, тогда $y = \frac{f(e)}{\|e\|^2} e$.

□

Пример: **TODO**

1.2 Ортогональное дополнение в банаховых пространствах

Определение (ортогональное дополнение в B-пространстве)**.** Пусть $S \subset X$.
Тогда $S^{\perp} = \{f \mid f \in X^*, \forall x \in S \implies f(x) = 0\}$.

Определение (ортогональное дополнение в сопряженном пространстве)**.** Пусть $S \subset X^*$.
Тогда $S^{\perp} = \{x \mid x \in X, \forall f \in S \implies f(x) = 0\}$.

Заметим, что независимо от S, $S^{\perp}$ замкнуто в силу непрерывности $f(x)$

Утверждение 1.4.

1. $X^{\perp} = \{0\}$;
2. $X^{*\perp} = \{0\}$.

Доказательство.

1. $f \in X^{\perp}$. Если $\forall x \in X, f(x) = 0$, то $f \equiv 0$.
2. Рассмотрим $\forall f \in X^*$. Очевидно, $f(0) = 0$, а это значит, что $0 \in X^{*\perp}$. Предположим, что $\exists x_0 \neq 0 : x_0 \in X^{*\perp}$. По теореме 1.2:
$$\exists f \in X^* : f(x_0) = \|x_0\| \neq 0 \implies x_0 \notin X^{*\perp}.$$ □

Определение (множество значений оператора)**.** $R(A) \overset{\text{def}}{=} \{Ax \mid x \in X\}$.

Теорема 1.5. $\operatorname{Cl} R(A) = (\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}$.

Доказательство.

1. Пусть $y \in R(A)$, это значит, что $y = Ax$ для некоторого x. Рассмотрим $\varphi \in \operatorname{Ker} A^*$. По определению, $A^*\varphi = 0$, это значит, что $\forall x \in X \implies \varphi(Ax) = \varphi(y) = 0$. Следовательно, $y \in (\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}$
2. Пусть теперь $y \in \operatorname{Cl} R(A) \implies \exists y_n : y_n \to y$. По предыдущему пункту, $y_n \in (\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}$. $\forall \varphi \in \operatorname{Ker} A^* \implies \varphi(y_n) = 0$, при этом, φ непрерывен. $\varphi(y_n) \to \varphi(y) = 0 \implies y \in (\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}$.
3. Осталось проверить, что $(\operatorname{Ker} A^*)^{\perp} \subset \operatorname{Cl} R(A)$. Вместо этого, мы проверим эквивалентный факт: $y \notin \operatorname{Cl} R(a) \implies y \notin (\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}$. Итак, пусть $L = \operatorname{Cl} R(A)$. Очевидно, это линейное подпространство в Y. Пусть $\widehat{L} = \{z + ty \mid z \in L, t \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, $\widehat{L}$ — линейное подпространство Y. Рассмотрим $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\varphi(z+ty) \overset{\text{def}}{=} t$. По теорема Хана-Банаха его можно продлить на Y с сохранением нормы: $\exists \widehat{\varphi} \in Y^* : \widehat{\varphi}\big|_{\widehat{L}} = \varphi$. Причем, если $z \in L$, то $\widehat{\varphi}(z) = 0$, значит $\widehat{\varphi} \in \operatorname{Ker} A^*$. Но, при этом $\widehat{\varphi}(y) = 1 \implies y \notin (\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}$. □

Теорема 1.6. $R(A) = \operatorname{Cl} R(A) \implies R(A^*) = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$.

Доказательство. Рассмотрим $f \in R(A^*)$. По определению, для некоторого φ, $f = A^*\varphi$. Возьмем теперь $x \in \operatorname{Ker} A$. $Ax = 0 \implies f(x) = (\varphi \circ A)(x) = \varphi(Ax) = \varphi(0) = 0$. Значит, $R(A^*) \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$.

Пусть теперь $f \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$. В силу того, что $R(A)$ - B-пространство (как замкнутое линейное подпространство другого B-пространства), Возьмем произвольный $y \in R(A)$, и x такой, что $y = Ax$, и запишем φ как $\varphi(y) \overset{\text{def}}{=} f(x)$. Покажем, что такое определение действительно корректное. Пусть $y = Ax'$; тогда $A(x - x') = 0 \implies x - x' \in \operatorname{Ker} A$. Поэтому $f(x - x') = 0 \implies f(x) = f(x')$. Это значит, что значение φ не зависит от выбора конкретного x. Значит, наша формула корректная. Осталось показать ограниченность $\|\varphi\|$.

Рассмотрим ассоциированный оператор $\mathcal{U}_A : {}^{X}\!/_{\operatorname{Ker} A} \to R(A)$. Покажем, что он непрерывен.

$\|\mathcal{U}_A\| = \sup_{\|[x]\|=1} \|\mathcal{U}_A [x]\|$, так как $\|[x]\| = \inf_{z \in [x]} \|z\| = 1$, то существует $x' \in [x] : \|x'\| \leqslant 2$. Возьмем x' в качестве представителя. Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_A\| &= \sup_{\|[x]\|=1} \|\mathcal{U}_A [x]\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 2} \|Ax\| \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant 1} \|A(2y)\| \\ &= 2 \cdot \sup_{\|y\|\leqslant 1} \|Ay\| = 2\,\|A\| \end{aligned} \tag{4}$$

Заметим еще, что он биективен, так как все точки x для которых $y = Ax$ (для какого-то одного фиксированного y) лежат в одном классе эквивалентности. Это значит, что по теореме Банаха о гомеоморфизме, $\mathcal{U}_A^{-1}$ непрерывен. Напомним, что норма на элементах ${}^{X}\!/_{\operatorname{Ker} A}$ определяется как

$$\|[x]\| \overset{\text{def}}{=} \inf_{z\in[x]} \|z\| \tag{5}$$

По непрерывности обратного оператора получаем $\|[x]\| \leqslant K \cdot \|y\|$. Нам нужно сделать неравенство строгим, поэтому считаем, что $\|[x]\| < 2K \cdot \|y\|$. Дальше, по определению инфимума, $\exists z \in [x] : \|z\| < 2K \cdot \|y\|$. Значит, $z - x \in \operatorname{Ker} A$. В силу того, что значение функционала f одно и то же внутри класса эквивалентности, можно вместо x взять z. Таким образом, $|\varphi(y)| \leqslant 2K \cdot \|f\| \cdot \|y\|$, из этого следует, что φ непрерывен. Далее, по теореме Хана-Банаха, продолжим φ на все пространство и получим, что $\exists \widehat{\varphi} \in Y^* : f = A^* \widehat{\varphi} \implies f \in R(A^*)$. □

В силу того, что во второй теореме требуется замкнутость, возникает вопрос: а когда это действительно будет? Одним из инструментов, дающих ответ на этот вопрос, является *априорная оценка решения операторного уравнения.*

Определение (априорная оценка решения операторного уравнения)**.** Пусть $A : X \to Y$ - линейный оператор, $y \in R(A)$, $\exists \alpha = \text{const}$, такая что $\|x\| \leqslant \alpha \|y\|$, где $y = Ax$. Коэффициент α называется *априорной оценкой.*

Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема:

Теорема 1.7. *Если A — линейный ограниченный оператор, такой что для уравнения $y = Ax$ существует априорная оценка, то $R(A)$ — замкнуто.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность значений оператора $y_n \in R(A)$, такую что $y_n \to y$. Проверим, что тогда $y \in R(A)$. Пусть $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$, в силу банаховости пространства Y, можем написать ряд утверждений:

$$\begin{gathered}
\text{для } \varepsilon_1\ \exists n_1 : \forall n, m \geqslant n_1 \implies \|y_m - y_n\| \leqslant \varepsilon_1 \\
\text{для } \varepsilon_2\ \exists n_2 : \forall n, m \geqslant n_2 \implies \|y_m - y_n\| \leqslant \varepsilon_2 \\
\dots \\
\text{для } \varepsilon_k\ \exists n_k : \forall n, m \geqslant n_k \implies \|y_m - y_n\| \leqslant \varepsilon_k \\
\dots
\end{gathered}$$

при этом, очевидно, что $n_k \leqslant n_{k+1}$. Теперь рассмотрим ряд $y_{n_1} + (y_{n_2} - y_{n_1}) + (y_{n_3} - y_{n_2}) + \ldots = y$. Слагаемое этого ряда мажорируется сходящейся геометрической прогрессией, поэтому, он сходится абсолютно.

Так как $R(A)$ — подпространство, значит $y_{n_{k+1}} - y_{n_k} \in R(A)$. Следовательно, $y_{n_{k+1}} - y_{n_k} = Ax_k$. По условию теоремы, для x_k выполняется $\|x_k\| \leqslant \alpha \left\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\right\| \leqslant \alpha\varepsilon_k$. Возьмем ряд $x_0 + x_1 + x_2 + \ldots$, где $y_{n_1} = Ax_0$. Ряд из норм его слагаемых можно ограничить сходящимся рядом: $\|x_0\| + \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots \leqslant \|x_0\| + \alpha \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots) = \|x_0\| + \alpha$. Поэтому у него есть предел x, и мы можем применить к нему оператор почленно (в силу его непрерывности): $Ax = Ax_0 + Ax_1 + Ax_2 + \ldots = y_{n_1} + (y_{n_2} - y_{n_1}) + (y_{n_3} - y_{n_2}) + \ldots = y$. Таким образом, $y \in R(A)$. □

2 Элементы спектральной теории линейных операторов

2.1 Определение спектра и резольвенты оператора

Определение (регулярная точка)**.** Число $\lambda \in \mathbb{C}$, называется *регулярной точкой* для оператора A, если оператор $\lambda I - A$ — непрерывно обратим.

Определение (резольвента)**.** Множество всех регулярных точек называется *резольвентой* (обозначается $\rho(A)$) оператора A.

Определение (резольвентный оператор)**.** Оператор $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ называется *резольвентным оператором.*

Определение (спектр)**.** Множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром* оператора A.

Рассмотрим $\lambda \in \sigma(A)$. Может быть два случая:

1. $\mathrm{Ker}(\lambda I - A) \neq \{\mathbf{0}\}$. Это значит, что оператор $\lambda I - A$ имеет нетривиальное собственное подпространство, в котором (по определению) выполняется $Ax = \lambda x$, $x \neq \mathbf{0}$, для некоторых x (то, что часто называется собственными числами и векторами).

2. $\mathrm{Ker}(\lambda I - A) = \{\mathbf{0}\}$. Здесь необходимо рассмотреть два подслучая:

   (a) $\dim X < +\infty$. В конечномерном случае из сюрьективности следует биективность, поэтому обратный оператор всегда существует. А спектр будет состоять из собственных значений.

   (b) $\dim X = +\infty$. В этом случае может отсутствовать непрерывная обратимость. Если при этом $\mathrm{Cl}\, R(\lambda I - A) = X$, то говорят, что λ принадлежит непрерывной части спектра. Иначе говорят, что λ принадлежит остаточной части спектра. (те λ для которых ядро нетривиально называют дискретной частью спектра).