

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ, 6 СЕМЕСТР
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ Додонова Н. Ю.

<https://github.com/artemZholus/funcan>

Содержание

1	Линейные операторы в банаховых пространствах	2
1.1	Сопряженный оператор	2
1.2	Ортогональное дополнение в банаховых пространствах	3
2	Элементы спектральной теории линейных операторов	5
2.1	Определение спектра и резольвенты оператора	5
2.2	Альтернатива Фредгольма-Шаудера	6
3	Теорема Гильберта-Шмидта	7

Линейные операторы в банаховых пространствах

Сопряженный оператор

Здесь и далее, если не оговорено иного, считаем, что мы находимся в В-пространствах.

Определение (сопряженное пространство). $X^* = \left\{ f : X \xrightarrow[\text{непр.}]{\text{лин.}} \mathbb{R} \right\}$ — пространство сопряженное к X .

Заметим, что это пространство линейных функционалов, а значит, мы можем ввести в нем норму как норму линейного функционала.

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \quad (1)$$

По свойствам числовой оси получаем, что X^* всегда банахово (независимо от X).

Рассмотрим теперь $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Пусть $f(x) = \varphi(Ax)$, где $\varphi \in Y^*$.

Определение. Сопряженный оператор к A имеет вид $A^*(\varphi) = \varphi \circ A$.

Утверждение 1.1. Если A непрерывный, то A^* тоже непрерывный.

Доказательство. Пусть A непрерывен, тогда он ограничен. Тогда справедливо

$$\|A^*(\varphi)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|A\|. \quad (2)$$

Переходя к \sup по φ получаем непрерывность A^* . □

Теорема 1.2. $\|A^*\| = \|A\|$

Доказательство. Мы доказали неравенство в одну сторону (неравенство 2). Докажем в другую. По определению \sup : $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon : \|x_\varepsilon\| = 1 \implies \|A\| - \varepsilon < \|Ax_\varepsilon\|$. Пусть $Z = \mathcal{L}(Ax_\varepsilon)$. Рассмотрим $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$, $f(z) = \alpha \|Ax_\varepsilon\|$. Очевидно, что $f \in Y^*$. Поэтому, по теореме Хана-Банаха распространим f на все Y , и назовем ее φ_ε . Тогда, по свойствам f , $\|\varphi_\varepsilon\| = 1$, $\varphi_\varepsilon(Ax_\varepsilon) = \|Ax_\varepsilon\|$. Следовательно, $\|A\| - \varepsilon < \varphi_\varepsilon(Ax_\varepsilon) = A^*(\varphi_\varepsilon, x_\varepsilon)$. Тогда $\|A\| - \varepsilon < \|A^*\| \cdot \|\varphi_\varepsilon\| \cdot \|x_\varepsilon\| = \|A^*\|$. Переходя к \sup по ε получаем нужное неравенство. □

Пример: **TODO**

Теорема 1.3 (теорема Рисса). Пусть H — гильбертово пространство. Тогда $\forall f \in H^*$, f можно представить как $f(x) = \langle x, y \rangle$, где $y \in H$, $\|f\| = \|y\|$.

Доказательство. Докажем в 3 этапа.

1. Построим соответствующий функционал по данному y .

Пусть $g(x) = \langle x, y \rangle$. Очевидно, что это линейный функционал. По неравенству Шварца $|g(x)| \leq \|y\| \|x\| \implies \|g\| \leq \|y\|$. Это значит, что g ограничен. Возьмем $x = \frac{y}{\|y\|}$.

$$g\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = \frac{1}{\|y\|} \langle y, y \rangle = \|y\|$$

Сопоставляя это с тем, что $\|g\| \leq \|y\|$, получаем, что $\|g\| = \|y\|$.

2. Докажем, что этому функционалу соответствует только один y .

Пусть для какого-то \tilde{y} справедливо $g(x) = \langle x, \tilde{y} \rangle$. Тогда $0 = \langle x, y \rangle - \langle x, \tilde{y} \rangle = \langle x, y - \tilde{y} \rangle$. Пусть $x = y - \tilde{y}$, тогда $\langle y - \tilde{y}, y - \tilde{y} \rangle = 0 \implies y = \tilde{y}$

3. Найдем y для данного функционала f .

Рассмотрим произвольный функционал $f \in H^*$. Как известно, $\text{Ker } f$ — гиперплоскость, т.е. $\text{codim } H_1 = \dim H_2 = 1$, где $H_1 = \text{Ker } f$, $H_2 = H_1^\perp$, и $H = H_1 \oplus H_2$. Это по определению значит, что x единственным образом представим как $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$. Поэтому, $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2) = f(\alpha e) = \alpha \cdot f(e)$, так как $x_1 \in \text{Ker } f$, а e — базисный вектор из H_2 . Итак, $\alpha \cdot f(x) = \langle x, y \rangle \Leftrightarrow f(e) = \langle e, y \rangle$. Очевидно, y можно брать из H_2 , так как если у него будет компонента из $\text{Ker } f$, то она будет ортогональна e . Поэтому, считаем, что $y = \beta e$. Получаем $f(e) = \langle e, \beta e \rangle = \beta \cdot \|e\|^2$. Положим $\beta = \frac{f(e)}{\|e\|^2}$, тогда $y = \frac{f(e)}{\|e\|^2} e$.

□

Пример: **TODO**

Пусть $H = L_2(E)$, $\varphi \in L_2^*(E)$. Тогда $\varphi(f) = \int_E g \cdot f d\mu$. Согласно теореме Рисса, возвращаясь к сопряженному оператору, мы видим следующее. $A^*(\varphi, x) = \varphi(Ax) = \langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$ - последнее равенство по теореме Рисса. Причем y и z выбираются единственным образом, и $z = A^*(y)$. В гильбертовом пространстве это может служить определением сопряженного оператора:

Определение (Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве). Пусть $x, y \in H$. Пусть $A : H \rightarrow H$. Тогда A^* - такой, что $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$.

Ортогональное дополнение в банаховых пространствах

Определение (ортогональное дополнение в В-пространстве). Пусть $S \subset X$.

Тогда $S^\perp = \{f \mid f \in X^*, \forall x \in S \implies f(x) = 0\}$.

Определение (ортогональное дополнение в сопряженном пространстве). Пусть $S \subset X^*$.

Тогда $S^\perp = \{x \mid x \in X, \forall f \in S \implies f(x) = 0\}$.

Заметим, что независимо от S , S^\perp замкнуто в силу непрерывности $f(x)$

Утверждение 1.4.

1. $X^\perp = \{0\}$;
2. $X^{*\perp} = \{0\}$.

Доказательство.

1. $f \in X^\perp$. Если $\forall x \in X, f(x) = 0$, то $f \equiv 0$.
2. Рассмотрим $\forall f \in X^*$. Очевидно, $f(0) = 0$, а это значит, что $0 \in X^{*\perp}$. Предположим, что $\exists x_0 \neq 0 : x_0 \in X^{*\perp}$. По теореме 1.2:

$$\exists f \in X^* : f(x_0) = \|x_0\| \neq 0 \implies x_0 \notin X^{*\perp}. \quad \square$$

Определение (множество значений оператора). $R(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{Ax \mid x \in X\}$.

Теорема 1.5. $\text{Cl } R(A) = (\text{Ker } A^*)^\perp$.

Доказательство.

1. Пусть $y \in R(A)$, это значит, что $y = Ax$ для некоторого x . Рассмотрим $\varphi \in \text{Ker } A^*$. По определению, $A^*\varphi = 0$, это значит, что $\forall x \in X \implies \varphi(Ax) = \varphi(y) = 0$. Следовательно, $y \in (\text{Ker } A^*)^\perp$.
2. Пусть теперь $y \in \text{Cl } R(A) \implies \exists y_n : y_n \rightarrow y$. По предыдущему пункту, $y_n \in (\text{Ker } A^*)^\perp$. $\forall \varphi \in \text{Ker } A^* \implies \varphi(y_n) = 0$, при этом, φ непрерывен. $\varphi(y_n) \rightarrow \varphi(y) = 0 \implies y \in (\text{Ker } A^*)^\perp$.
3. Осталось проверить, что $(\text{Ker } A^*)^\perp \subset \text{Cl } R(A)$. Вместо этого, мы проверим эквивалентный факт: $y \notin \text{Cl } R(A) \implies y \notin (\text{Ker } A^*)^\perp$. Итак, пусть $L = \text{Cl } R(A)$. Очевидно, это линейное подпространство в Y . Пусть $\widehat{L} = \{z + ty \mid z \in L, t \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, \widehat{L} — линейное подпространство Y . Рассмотрим $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(z + ty) \stackrel{\text{def}}{=} t$. По теореме Хана-Банаха его можно продлить на Y с сохранением нормы: $\exists \widehat{\varphi} \in Y^* : \widehat{\varphi}|_{\widehat{L}} = \varphi$. Причем, если $z \in L$, то $\widehat{\varphi}(z) = 0$, значит $\widehat{\varphi} \in \text{Ker } A^*$. Но, при этом $\widehat{\varphi}(y) = 1 \implies y \notin (\text{Ker } A^*)^\perp$. \square

Теорема 1.6. $R(A) = \text{Cl } R(A) \implies R(A^*) = (\text{Ker } A)^\perp$.

Доказательство. Рассмотрим $f \in R(A^*)$. По определению, для некоторого φ , $f = A^*\varphi$. Возьмем теперь $x \in \text{Ker } A$. $Ax = 0 \implies f(x) = (\varphi \circ A)(x) = \varphi(Ax) = \varphi(0) = 0$. Значит, $R(A^*) \subset (\text{Ker } A)^\perp$.

Пусть теперь $f \in (\text{Ker } A)^\perp$. В силу того, что $R(A)$ - В-пространство (как замкнутое линейное подпространство другого В-пространства), Возьмем произвольный $y \in R(A)$, и x такой, что $y = Ax$, и запишем φ как $\varphi(y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$. Покажем, что такое определение действительно корректное. Пусть $y = Ax'$; тогда

$A(x - x') = 0 \implies x - x' \in \text{Ker } A$. Поэтому $f(x - x') = 0 \implies f(x) = f(x')$. Это значит, что значение φ не зависит от выбора конкретного x . Значит, наша формула корректная. Осталось показать ограниченность $\|\varphi\|$.

Рассмотрим ассоциированный оператор $\mathcal{U}_A : X/\text{Ker } A \rightarrow R(A)$. Покажем, что он непрерывен.

$\|\mathcal{U}_A\| = \sup_{\|[x]\|=1} \|\mathcal{U}_A[x]\|$, так как $\|[x]\| = \inf_{z \in [x]} \|z\| = 1$, то существует $x' \in [x] : \|x'\| \leq 2$. Возьмем x' в качестве представителя. Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_A\| &= \sup_{\|[x]\|=1} \|\mathcal{U}_A[x]\| \leq \sup_{\|x\| \leq 2} \|Ax\| \leq \sup_{\|y\| \leq 1} \|A(2y)\| \\ &= 2 \cdot \sup_{\|y\| \leq 1} \|Ay\| = 2\|A\| \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим еще, что он биективен, так как все точки x для которых $y = Ax$ (для какого-то одного фиксированного y) лежат в одном классе эквивалентности. Это значит, что по теореме Банаха о гомеоморфизме, \mathcal{U}_A^{-1} непрерывен. Напомним, что норма на элементах $X/\text{Ker } A$ определяется как

$$\|[x]\| \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{z \in [x]} \|z\| \quad (4)$$

По непрерывности обратного оператора получаем $\|[x]\| \leq K \cdot \|y\|$. Нам нужно сделать неравенство строгим, поэтому считаем, что $\|[x]\| < 2K \cdot \|y\|$. Дальше, по определению инфимума, $\exists z \in [x] : \|z\| < 2K \cdot \|y\|$. Значит, $z - x \in \text{Ker } A$. В силу того, что значение функционала f одно и то же внутри класса эквивалентности, можно вместо x взять z . Таким образом, $|\varphi(y)| \leq 2K \cdot \|f\| \cdot \|y\|$, из этого следует, что φ непрерывен. Далее, по теореме Хана-Банаха, продолжим φ на все пространство и получим, что $\exists \hat{\varphi} \in Y^* : f = A^* \hat{\varphi} \implies f \in R(A^*)$. \square

В силу того, что во второй теореме требуется замкнутость, возникает вопрос: а когда это действительно будет? Одним из инструментов, дающих ответ на этот вопрос, является *априорная оценка решения операторного уравнения*.

Определение (априорная оценка решения операторного уравнения). Пусть $A : X \rightarrow Y$ - линейный оператор, $y \in R(A)$, $\exists \alpha = \text{const}$, такая что $\|x\| \leq \alpha \|y\|$, где $y = Ax$. Коэффициент α называется *априорной оценкой*.

Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема:

Теорема 1.7. Если A — линейный ограниченный оператор, такой что для уравнения $y = Ax$ существует априорная оценка, то $R(A)$ — замкнуто.

Доказательство. Рассмотрим последовательность значений оператора $y_n \in R(A)$, такую что $y_n \rightarrow y$. Проверим, что тогда $y \in R(A)$. Пусть $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$, в силу банаховости пространства Y , можем написать ряд утверждений:

$$\begin{aligned} \text{для } \varepsilon_1 \exists n_1 : \forall n, m \geq n_1 &\implies \|y_m - y_n\| \leq \varepsilon_1 \\ \text{для } \varepsilon_2 \exists n_2 : \forall n, m \geq n_2 &\implies \|y_m - y_n\| \leq \varepsilon_2 \\ &\dots \\ \text{для } \varepsilon_k \exists n_k : \forall n, m \geq n_k &\implies \|y_m - y_n\| \leq \varepsilon_k \\ &\dots \end{aligned}$$

при этом, очевидно, что $n_k \leq n_{k+1}$. Теперь рассмотрим ряд $y_{n_1} + (y_{n_2} - y_{n_1}) + (y_{n_3} - y_{n_2}) + \dots = y$. Слагаемое этого ряда мажорируется сходящейся геометрической прогрессией, поэтому, он сходится абсолютно.

Так как $R(A)$ — подпространство, значит $y_{n_{k+1}} - y_{n_k} \in R(A)$. Следовательно, $y_{n_{k+1}} - y_{n_k} = Ax_k$. По условию теоремы, для x_k выполняется $\|x_k\| \leq \alpha \|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| \leq \alpha \varepsilon_k$. Возьмем ряд $x_0 + x_1 + x_2 + \dots$, где $y_{n_1} = Ax_0$. Ряд из норм его слагаемых можно ограничить сходящимся рядом: $\|x_0\| + \|x_1\| + \|x_2\| + \dots \leq \|x_0\| + \alpha \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots) = \|x_0\| + \alpha$. Поэтому у него есть предел x , и мы можем применить к нему оператор почленно (в силу его непрерывности): $Ax = Ax_0 + Ax_1 + Ax_2 + \dots = y_{n_1} + (y_{n_2} - y_{n_1}) + (y_{n_3} - y_{n_2}) + \dots = y$. Таким образом, $y \in R(A)$. \square

Элементы спектральной теории линейных операторов

Определение спектра и резольвенты оператора

Определение (регулярная точка). Число $\lambda \in \mathbb{C}$, называется *регулярной точкой* для оператора A , если оператор $\lambda I - A$ — непрерывно обратим.

Определение (резольвента). Множество всех регулярных точек называется *резольвентой* (обозначается $\rho(A)$) оператора A .

Определение (резольвентный оператор). Оператор $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ называется *резольвентным оператором*.

Определение (спектр). Множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром* оператора A .

Рассмотрим $\lambda \in \sigma(A)$. Может быть два случая:

1. $\text{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\}$. Это значит, что оператор $\lambda I - A$ имеет нетривиальное собственное подпространство, в котором (по определению) выполняется $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, для некоторых x (то, что часто называется собственными числами и векторами).
2. $\text{Ker}(\lambda I - A) = \{0\}$. Здесь необходимо рассмотреть два подслучая:
 - (a) $\dim X < +\infty$. В конечномерном случае из сюръективности следует биективность, поэтому обратный оператор всегда существует. А спектр будет состоять из собственных значений.
 - (b) $\dim X = +\infty$. В этом случае может отсутствовать непрерывная обратимость. Если при этом $\text{Cl } R(\lambda I - A) = X$, то говорят, что λ принадлежит непрерывной части спектра. Иначе говорят, что λ принадлежит остаточной части спектра. (те λ для которых ядро нетривиально называют дискретной частью спектра).

Утверждение 2.1. Резольвентное множество является открытым в \mathbb{C} .

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, тогда $\lambda_0 I - A$ — непрерывно обратим. Напишем тождество: $\lambda I - A = (\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - A$. $I = (\lambda_0 I - A)R_{\lambda_0}(A)$. Отсюда, $\lambda I - A = (\lambda_0 I - A) \cdot (R_{\lambda_0}(\lambda - \lambda_0) - I)$. Заметим, что если $\|R_{\lambda_0}\| \cdot |\lambda - \lambda_0| < 1$, то по теореме Банаха о непрерывной обратимости оператора $I - C$, оператор $R_{\lambda_0}(\lambda - \lambda_0) - I$ — непрерывно обратим. Получается, что если $\lambda : |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$, то $\lambda \in \rho(A)$. \square

Следствие 2.2. Спектр — замкнутое множество.

Теорема 2.3. Пусть A — ограничен, тогда $\sigma(A) \neq \emptyset$

Определение (Спектральный радиус оператора).

$$r_\gamma(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

Утверждение 2.4. $\exists \lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r_\gamma(A)$

Доказательство. Очевидно, что всегда существует $\inf_n \sqrt[n]{\|A^n\|} = r$. Итак, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \sqrt[n]{\|A^{n_0}\|} < r + \varepsilon$. Рассмотрим теперь $n > n_0$. $n = m_n \cdot n_0 + d_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} &= \|A^{m_n \cdot n_0} \cdot A^{d_n}\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A^{n_0}\|^{\frac{m_n}{n}} \cdot \|A\|^{\frac{d_n}{n}}, \text{ где } \|A\|^{\frac{d_n}{n}} \rightarrow 0. \\ \|A^{n_0}\|^{\frac{m_n}{n}} &< \left(\|A^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}} \right)^{\frac{n_0 \cdot m_n}{n}} < (r + \varepsilon)^{\frac{m_n \cdot n_0}{n}} \end{aligned}$$

Следовательно, $r \leq \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (1 + \alpha_n) \cdot (r + \varepsilon)^{1 - \frac{d_n}{n}} = (1 - \alpha_n) \cdot (r - \varepsilon)^{\frac{d_n}{n}} \cdot (r + \varepsilon) = (1 + \gamma_n) \cdot (r + \varepsilon)$. \square

Пример. Пространство $C[0, 1]$. Оператор $A(f, t) = t \cdot f(t)$. Очевидно, что $\|A(f)\| \leq \|f\|$. Пусть $\lambda I - A = A_\lambda$. $A_\lambda(f, t) = (\lambda - t) \cdot f(t) = g(t) \implies f(t) = \frac{g(t)}{\lambda - t}$. При каких λ , A_λ непрерывно обратим? Очевидно, при $\lambda \notin [0, 1]$. Это значит, что если $\lambda \in [0, 1] \implies \lambda \in \rho(A)$. Поэтому $\sigma(A) = [0, 1]$.

Пример. Пространство $C[0, 1]$. $A(f, x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \in [0, 1]$. Вычислим его спектральный радиус.

$$\begin{aligned} A(f, x) &= \int_0^x f(t)dt \\ A^2(f, x) &= \int_0^x \left(\int_0^{x_1} f(t)dt \right) dx_1 \\ A^n(f, x) &= \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n+1}} f(t)dt \leq \frac{\|f\|}{n!} \\ \|f\| \leq 1 &\implies \|A^n\| \leq \frac{1}{n!} \implies r_n \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0 \implies r_\sigma(A) = 0 \end{aligned}$$

Теорема 2.5 (Об отображении спектра полиномами). $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$

Лемма 2.6. $P(A)$ - непрерывно обратим $\Leftrightarrow 0 \notin P(\sigma(A))$

Доказательство. 1. Необходимость.

Сначала проверим следующий факт. Если два оператора коммутируют и их произведение непрерывно обратимо, то и каждый из них непрерывно обратим. $T = A \cdot B = B \cdot A$, $\exists T^{-1}$ - непрерывно обратимый. $I = T^{-1}T = T^{-1} \cdot (AB) = (T^{-1}A) \cdot B = B^{-1}B$. Для A аналогично. В общем случае, $p(t)$ имеет вид $p(t) = a(t - \lambda_1)^{m_1} \cdot (t - \lambda_2)^{m_2} \cdots (t - \lambda_n)^{m_n}$, а $p(A) = a(A - \lambda_1 I)^{m_1} \cdot (A - \lambda_2 I)^{m_2} \cdots (A - \lambda_n I)^{m_n}$. Так как $p(A)$ - непрерывно обратим, то, по доказанному, каждый из множителей непрерывно обратим. Это значит, что каждое из $\lambda_j \in \rho(A)$. Поэтому, если $0 \in p(\sigma(A))$, то одно из λ_j является корнем уравнения $p(t) = 0$. То есть, при каком-то λ_j , $p(\lambda_j) = 0$, это значит что $\lambda_j \in \sigma(A)$. Но $\lambda_j \in \rho(A)$. Противоречие.

2. Достаточность. Тут все аналогично необходимости, только в другую сторону. □

Доказательство теоремы. Рассмотрим полином $p_1(t) = p(t) - \lambda$. Тогда, по лемме, $p_1(A)$ - непрерывно обратим тогда и только тогда когда $0 \notin p_1(\sigma(A))$, что эквивалентно $p(A) - \lambda I$ - непрерывно обратим, тогда и только тогда когда $\lambda \notin p(\sigma(A))$. Но $\exists (p(A) - \lambda I)^{-1} \Leftrightarrow \lambda \notin p(\sigma(A))$ □

Альтернатива Фредгольма-Шаудера

Определение (Компактный оператор). Оператор $A : X \rightarrow Y$ называется *компактным* если $\forall M$ - ограниченное множество, $A(M)$ - относительно компактен.

TODO пример оператора фредгольма.

Утверждение 2.7 (Компактность произведения). Пусть A - компактный оператор, а B - ограниченный. Тогда AB и BA - компактны.

Доказательство. Достаточно проверить компактность в единичном шаре. Пусть V_1 - замкнутый шар единичного радиуса, проверим, что $B(A(V_1))$ - относительно компактен. Так как $A(V_1)$ - относительно компактен, можем подобрать конечную ε -сеть. $\forall \varepsilon \exists y_1, \dots, y_n \forall x \in V_1 \exists j \|A(x) - y_j\| < \varepsilon$. Пусть $z_j = B(y_j)$. $\forall x \in V_1 \|B(A(x)) - z_j\| = \|B(A(x) - y_j)\| \leq \|A(x) - y_j\| \cdot \|B\| \leq \varepsilon \|B\|$ □

Утверждение 2.8. В бесконечномерных пространствах, компактный оператор не может быть непрерывно обратимым.

Доказательство. Пусть A - компактный, $\exists A^{-1}$ - непрерывный. Тогда $I = A \cdot A^{-1}$ - компактный. Однако, это не так (потому что бесконечномерная сфера - не компакт). □

В классе сепарабельных банаховых пространств важную роль имеют пространства с базисом *Шаудера*.

Определение (базис Шаудера). Пусть X - банахово пространство. $\exists e_1, \dots, e_n, \dots$ - линейно независимые точки. $\forall x \in X$, $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j e_j$. Тогда e_j - называется *базисом Шаудера*.

Теорема 2.9 (О почти конечномерности компактного оператора). Пусть $A : X \rightarrow X$ - компактный оператор. X - имеет базис Шаудера. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists B, C : \dim R(B) < +\infty, \|C\| \leq \varepsilon, A = B + C$

Доказательство. По условию, $x = \sum_1^\infty \alpha_j e_j$, пусть $S_n(x) = \sum_1^n \alpha_j e_j$, $R_n(x) = (I - S_n)x$. Проверим, что оператор S_n непрерывен. Для начала, рассмотрим пространство $F = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) \mid \sum_1^\infty \alpha_j e_j \text{ сходится в } X\}$. Введем на этом множестве норму $\|\alpha\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_n \|S_n(x)\|$. Очевидно, что это норма, также можно показать, что F - банахово (Пространство F - это по сути то же пространство X только в координатном смысле). **TODO** Рассмотрим оператор $T : F \rightarrow X$, $T(x) = \sum_0^\infty \alpha_j e_j$ - это линейный оператор. Очевидно, $\|T(\alpha)\| \leq \|\alpha\|$. В силу единственности разложения в ряд и того, как действует T , у него существует обратный оператор, который, по теореме Банаха о гомеоморфизме, будет ограниченным. $T^{-1} : X \rightarrow F$, $\|T^{-1}(x)\| \leq m \cdot \|x\|$. С другой стороны, $T^{-1}(x) = \alpha$, $\|\alpha\| \leq m \cdot \|x\| \implies \forall n \|S_n(x)\| \leq \|x\|$. Последовательность операторов S_n - поточечно сходится, и каждый из них непрерывен, тогда по теореме Банаха-Штейнгауза $\sup_n \|S_n\| = M < \infty$. Итак, мы доказали, что $I = S_n + R_n$, где S_n - непрерывный. Очевидно, что R_n - тоже непрерывен. Напишем тождество: $A = S_n A + R_n A$. Из них $S_n A$ - конечномерный. Проверим, что $\|R_n\| < \varepsilon$.

Так как оператор A - компактный, то у множества $A(V_1)$ есть конечная ε -сеть. Итак, $\forall \varepsilon \exists y_1, \dots, y_n$ - ε -сеть для $A(V_1)$. $\forall x \in V_1 \|R_n(Ax)\| \leq \|R_n(Ax - y_j)\| + \|R_n(y_j)\| \leq \|R_n\| \cdot \|Ax - y_j\| \leq \varepsilon$. Первое слагаемое меньше ε за счет ε -сети, второе, становится маленьким, за счет увеличения n . \square

Утверждение 2.10. Если A - компактный оператор, то A^* - тоже компактный.

Доказательство. TODO \square

Для функционального анализа фундаментальную роль играют уравнения вида

$$y = (\lambda I - A)x \quad (5)$$

и, в частности, $y = (I - A)x = Tx$.

Утверждение 2.11. Пусть A - компактный оператор. Тогда $\dim \text{Ker } T < \infty$.

Доказательство. Пусть $x \in \text{Ker } T \implies x = Ax$. Таким образом, ядро - это множество неподвижных точек оператора A . И $\text{Ker } T$ - подпространство X . Рассмотрим $V_1 \subset \text{Ker } T$ - единичная сфера в этом подпространстве. Тогда, очевидно, $A(V_1) = V_1$. По лемме Рисса о почти перпендикуляре, в бесконечномерном пространстве, единичная сфера - не компакт. А у нас - компакт, значит, пространство не бесконечномерное. \square

Теорема 2.12. Пусть оператор A - компактный. Тогда $\text{Cl } R(T) = R(T)$ ($R(T)$ - подпространство X).

Доказательство. Пусть $\text{Ker } T = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Для доказательства замкнутости, нужно показать существование априорной оценки. y можно представить как $y = T(x + \sum_1^n \alpha_k \varphi_k)$. Чтобы убедиться в существовании оценки, возьмем

$$\hat{x} = \min_{\alpha_j, j=1, n} \left\| x + \sum_1^n \alpha_k \varphi_k \right\| \quad (6)$$

Покажем, что \hat{x} всегда существует и $\exists \alpha : \|\hat{x}\| \leq \alpha \cdot \|y\|$. Пусть $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(\alpha) = \|x + \sum_1^n \alpha_k \varphi_k\|$. $|f(\alpha + \delta\alpha) - f(\alpha)| \leq \sum_1^n |\alpha_k| \cdot \|\varphi_k\| \leq \sqrt{\sum_1^n \|\varphi_k\|^2} \cdot \sqrt{\sum_1^n \delta\alpha_k^2}$. Таким образом, $|f(\alpha + \delta\alpha) - f(\alpha)| \leq C \cdot \|\delta\alpha\|$ - f - непрерывна. Обозначим $d = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \|\hat{x} + \sum_1^n \alpha_k \varphi_k\|$. Нужно найти такие α , что $\|x + \sum_1^n \alpha_k \varphi_k\| = f(\alpha) \geq 2d$. Если α таковы что $\|\sum_1^n \alpha_k \varphi_k\| \geq 2d + \|\hat{x}\|$ и $\exists \gamma : \|\sum_1^n \alpha_k \varphi_k\| \leq \gamma \|\alpha\|$ (γ существует потому что в конечномерных пространствах все нормы эквивалентны), то $\gamma \|\alpha\| \geq 2d + \|\hat{x}\|$. Обозначим $r = \frac{2d + \|\hat{x}\|}{\gamma} \leq \|\alpha\|$. Тогда вне шара $V_r(0) \subset \mathbb{R}^n$, будет выполняться $f(\alpha) \geq 2d$.

d - инфимум значений f , \square

Теорема Гильберта-Шмидта

Определение (Гильбертово пространство). H - гильбертово пространство над \mathbb{C} , если.

- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$

Пример (\mathbb{C}^n – конечномерный случай). $z = (z_1, z_2, \dots, z_n), z_i \in \mathbb{C}$

$$\langle z, u \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{u}_i$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

Определение (Самосопряженный оператор). Линейный оператор $A : X \rightarrow X$ называется самосопряженным, если выполняется условие: $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$.

Пример. $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, A = \bar{A}^T$ – эрмитовски симметричная

Утверждение 3.1. Если $\int_a^b K(k, t)f(t)dt$ – интегральный оператор, то $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$

Доказательство. **TODO**

Домножить векторы на матрицу поворота

Утверждение 3.2. A – самосопряженный оператор, $\lambda = \mu + i\nu$. Тогда $\forall x \in H \Rightarrow \|Ax - \lambda x\| \geq |\nu| \cdot \|x\|$

Доказательство.

1. Если матрица состоит из вещественных чисел: $\|Ax - \lambda x\|^2 = \langle Ax - \lambda x, Ax - \lambda x \rangle =$

$$= \left\langle \underbrace{Ax - \mu x}_{Lx, \mu \in \mathbb{R}} - i\nu x, Ax - \mu x - i\nu x \right\rangle = \underbrace{\langle Lx, Lx \rangle}_{\|Lx\|^2=0} - \underbrace{\langle Lx, i\nu x \rangle}_{-i\nu \langle Lx, x \rangle} - \underbrace{\langle i\nu x, Lx \rangle}_{i\nu \langle Lx, x \rangle} + |\nu|^2 \|x\|^2 \geq |\nu|^2 \|x\|^2$$
2. Если $Im(a) \neq 0$,
 $Ker(A - \lambda i) = \{0\} \Rightarrow$ Собственные числа могут быть только вещественными. $\Rightarrow |\nu| = |\nu| \|x\| = 0$

Утверждение 3.3. Пусть A – линейный оператор в H , тогда $Cl R(A) = (Ker A^*)^\perp$

Доказательство.

Н. В. 3.4. В общем случае уже доказывали, сейчас выведем независимо.

TODO Написать, где доказательство.

1. Рассмотрим $y \in R(A)$:
 $\forall z \in Ker A^* \Leftrightarrow A^* z = 0 \Rightarrow \langle y, z \rangle = \langle Ax, z \rangle = \langle x, A^* z \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$
 Таким образом, $\forall y \in R(A) \Rightarrow y \perp A^*$
 $y \in Cl R(A), y_n \in R(A), y_n \rightarrow y \Rightarrow 0 = \langle y_n, z \rangle \rightarrow \langle y, z \rangle \Rightarrow \langle y, z \rangle = 0$
 Итак, $Cl R(A) \subset (Ker A^*)^\perp$.
2. Проверим обратное включение $y \notin Cl R(A) \Rightarrow y \notin (Ker A^*)^\perp$.
 $Cl R(A) = H_1$ – подпространство $H, H = H_1 \oplus H_1^\perp$.
 Рассмотрим $y \notin H_1, \exists y_1 \in H_1, y_2 \in H_1^\perp, y_2 \neq 0 : y = y_1 + y_2$

$$y_2 \in Ker A^* \Leftrightarrow A^* y_2 = 0 \Leftrightarrow \langle A^* y_2, A^* y_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \underbrace{A(A^* y_2)}_{\in H_1}, \underbrace{y_2}_{\in H_1^\perp} \right\rangle = 0$$

 $\langle y, y_2 \rangle = \|y_2\|^2 \neq 0 \Rightarrow y \notin (Ker A^*)^\perp$

Следствие 3.5. $H = Cl R(A) \oplus Ker A^*$

Теорема 3.6. Пусть оператор A самосопряженный, тогда $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. $\lambda : Im \lambda \neq 0, R(A - \lambda x)$ – замкнуто

$$(A - \lambda I)^* = A - \bar{\lambda} I$$

$$\|(A - \bar{\lambda} I)x\| \geq \underbrace{|Im \lambda|}_{\neq 0} \cdot \|x\|$$

$$Ker(A - \lambda I)^* = \{0\}, H = R(A - \lambda I)$$

$$: \exists (A - \lambda I)^{-1} \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$$

Теорема 3.7. A – самосопряженный и ограниченный в H .

1. $\lambda \in \rho \Leftrightarrow \exists m > 0 : \forall x \in H \quad \|(A - \lambda I)x\| \geq m \|x\|$
2. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists x_m : \|x_m\| = 1 \quad \|(A - \lambda I)x_m\| \rightarrow 0$

Доказательство.

1. \Rightarrow :

$$\begin{aligned} \lambda \in \rho(A) &\Leftrightarrow \exists (A - \lambda I)^{-1} \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\| \cdot M \\ \|(A - \lambda I)^{-1}y\| &\leq M \|y\| \\ y &= (A - \lambda I)x \\ \frac{m}{M} \|x\| &\leq \|(A - \lambda I)x\| \end{aligned}$$

\Leftarrow :

Если неравенство выполнено, то $R(A - \lambda I)$ – замкнут.
 $Im(\lambda) \neq 0$, $\lambda = \bar{\lambda}$, $(A - \lambda I)^* = A - \lambda I$, $Ker(A - \lambda I) = \{0\}$
 $H = R(A - \lambda I)$ Значит, он сюръективный.

2. Математическое отрицание пункта 1, но $Ax_n \approx \lambda x_n$.

То есть, у самосопряженного оператора спектр состоит из почти собственных значений.

$$\langle Ax, x \rangle = \overline{\langle x, Ax \rangle} = \overline{\langle Ax, x \rangle} \Rightarrow \forall x \in H \quad \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Это называется кр. ф-ой самосопряженного оператора.

TODO Расшифровать сокращения в предыдущей строчке.

□

Определение. Нижняя и верхняя граница оператора A

$$m_- = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle \quad m_+ = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$$

Утверждение 3.8. $|\langle Ax, x \rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2 = \|A\|$

То есть $|m_-|, |m_+| \leq$

Доказательство. $m_- \leq \langle Ax, x \rangle \leq m_+ \quad \|x\| = 1$

$$m_- \underbrace{\|x\|^2}_{\langle x, x \rangle} \leq \langle Ax, x \rangle \leq m_+ \|x\|^2 \Rightarrow 0 \leq \langle (A - m_- I)x, x \rangle$$

□

Теорема 3.9.

1. $\sigma(A) \subset [m_-, m_+]$
2. $m_-, m_+ \in \sigma(A)$

Доказательство.

1. Так как числа с ненулевой мнимой частью резольв. множество, рассмотрим только вещественные.

TODO Расшифровать сокращение "резольв".

□