Функциональный анализ, 6 семестр

Конспект лекций Додонова Н. Ю.

https://github.com/artemZholus/funcan

Содержание

Линейные операторы в банаховых пространствах

Сопряженный оператор

Здесь и далее, если не оговорено иного, считаем, что мы находимся в B-пространствах.

Определение (сопряженное пространство)**.** $X^* = \left\{ f : X \xrightarrow[\text{непр.}]{\text{лин.}} \mathbb{R} \right\}$ — пространство сопряженное к X.

Заметим, что это пространство линейных функционалов, а значит, мы можем ввести в нем норму как норму линейного функционала.

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \tag{1}$$

По свойствам числовой оси получаем, что X^* всегда банахово (независимо от X).

Рассмотрим теперь $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Пусть $f(x) = \varphi(Ax)$, где $\varphi \in Y^*$.

Определение. Сопряженный оператор к A имеет вид $A^*(\varphi) = \varphi \circ A$.

Утверждение 1.1. *Если A нерперывный, то A^* тоже непрерывный.*

Теорема 1.2. $\|A^*\| = \|A\|$

Пример: **TODO**

Теорема 1.3 (теорема Рисса)**.** *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда $\forall f \in H^*$, f можно представить как $f(x) = \langle x, y \rangle$, где $y \in H$, $\|f\| = \|y\|$.*

Пример: **TODO**

Пусть $H = L_2(E)$, $\varphi \in L_2^*(E)$. Тогда $\varphi(f) = \int_E g \cdot f d\mu$. Согласно теореме Рисса, возвращаясь к сопряженному оператору, мы видим следующее. $A^*(\varphi, x) = \varphi(Ax) = \langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$ - последнее равенство по теореме Рисса. Причем y и z выбираются единственным образом, и $z = A^*(y)$. В гильбертовом пространстве это может служить определением сопряженного оператора:

Определение (Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве)**.** Пусть $x, y \in H$. Пусть $A : H \to H$. Тогда A^* - такой, что $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$.

Ортогональное дополнение в банаховых пространствах

Определение (ортогональное дополнение в B-пространстве)**.** Пусть $S \subset X$.
Тогда $S^\perp = \{ f \mid f \in X^*, \forall x \in S \implies f(x) = 0 \}$.

Определение (ортогональное дополнение в сопряженном пространстве)**.** Пусть $S \subset X^*$.
Тогда $S^\perp = \{ x \mid x \in X, \forall f \in S \implies f(x) = 0 \}$.

Заметим, что независимо от S, $S^\perp$ замкнуто в силу непрерывности $f(x)$

Утверждение 1.4.

1. $X^\perp = \{0\}$;
2. $X^{*\perp} = \{0\}$.

Определение (множество значений оператора)**.** $R(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{ Ax \mid x \in X \}$.

Теорема 1.5. $\operatorname{Cl} R(A) = (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$.

Теорема 1.6. $R(A) = \operatorname{Cl} R(A) \implies R(A^*) = (\operatorname{Ker} A)^\perp$.

В силу того, что во второй теореме требуется замкнутость, возникает вопрос: а когда это действительно будет? Одним из инструментов, дающих ответ на этот вопрос, является *априорная оценка решения операторного уравнения.*

Определение (априорная оценка решения операторного уравнения)**.** Пусть $A : X \to Y$ - линейный оператор, $y \in R(A)$, $\exists \alpha = \text{const}$, такая что $\|x\| \leqslant \alpha \|y\|$, где $y = Ax$. Коэффициент α называется *априорной оценкой.*

Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема:

Теорема 1.7. *Если A — линейный ограниченный оператор, такой что для уравнения $y = Ax$ существует априорная оценка, то $R(A)$ — замкнуто.*

Элементы спектральной теории линейных операторов

Определение спектра и резольвенты оператора

Определение (регулярная точка)**.** Число $\lambda \in \mathbb{C}$, называется *регулярной точкой* для оператора A, если оператор $\lambda I - A$ — непрерывно обратим.

Определение (резольвента)**.** Множество всех регулярных точек называется *резольвентой* (обозначается $\rho(A)$) оператора A.

Определение (резольвентный оператор)**.** Оператор $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ называется *резольвентным оператором.*

Определение (спектр)**.** Множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром* оператора A.

Рассмотрим $\lambda \in \sigma(A)$. Может быть два случая:

1. $\operatorname{Ker}(\lambda I - A) \neq \{\mathbf{0}\}$. Это значит, что оператор $\lambda I - A$ имеет нетривиальное собственное подпространство, в котором (по определению) выполняется $Ax = \lambda x$, $x \neq \mathbf{0}$, для некоторых x (то, что часто называется собственными числами и векторами).
2. $\operatorname{Ker}(\lambda I - A) = \{\mathbf{0}\}$. Здесь необходимо рассмотреть два подслучая:
   (a) $\dim X < +\infty$. В конечномерном случае из сюрьективности следует биективность, поэтому обратный оператор всегда существует. А спектр будет состоять из собственных значений.
   (b) $\dim X = +\infty$. В этом случае может отсутствовать непрерывная обратимость. Если при этом $\operatorname{Cl} R(\lambda I - A) = X$, то говорят, что λ принадлежит непрерывной части спектра. Иначе говорят, что λ принадлежит остаточной части спектра. (те λ для которых ядро нетривиально называют дискретной частью спектра).

Утверждение 2.1. *Резольвентное множество является открытым в $\mathbb{C}$.*

Следствие 2.2. *Спектр - замкнутое множество.*

Теорема 2.3. *Пусть A - ограничен, тогда $\sigma(A) \neq \varnothing$*

Определение (Спектральный радиус оператора)**.**

$$r_\gamma(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

Утверждение 2.4. $\exists \lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r_\gamma(A)$

Пример. Пространство $C[0,1]$. Оператор $A(f,t) = t \cdot f(t)$. Очевидно, что $\|A(f)\| \leqslant \|f\|$. Пусть $\lambda I - A = A_\lambda$. $A_\lambda(f,t) = (\lambda - t) \cdot f(t) = g(t) \implies f(t) = \frac{g(t)}{\lambda - t}$. При каких λ, A_λ непрерывно обратим? Очевидно, при $\lambda \notin [0,1]$. Это значит, что если $\lambda \in [0,1] \implies \lambda \in \rho(A)$. Поэтому $\sigma(A) = [0,1]$.

Пример. Пространство $C[0,1]$. $A(f,x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \in [0,1]$. Вычислим его спектральный радиус.

$$A(f,x) = \int_0^x f(t)dt$$
$$A^2(f,x) = \int_0^x \left(\int_0^{x_1} f(t)dt \right) dx_1$$
$$A^n(f,x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n+1}} f(t)dt \leqslant \frac{\|f\|}{n!}$$
$$\|f\| \leqslant 1 \implies \|A^n\| \leqslant \frac{1}{n!} \implies r_n \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 \implies r_\sigma(A) = 0$$

Теорема 2.5 (Об отображении спектра полиномами)**.** $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$

Лемма 2.6. *$P(A)$ - непрерывно обратим $\Leftrightarrow 0 \notin P(\sigma(A))$*

Альтернатива Фредгольма-Шаудера

Определение (Компактный оператор)**.** Оператор $A : X \to Y$ называется *компактным* если $\forall M$ - ограниченное множество, $A(M)$ - относительный компакт.

TODOпример оператора фредгольма.

Утверждение 2.7 (Компактность произведения)**.** *Пусть A - компактный оператор, а B - ограниченный. Тогда AB и BA - компактны.*

Утверждение 2.8. *В бесконечномерных пространствах, компактный оператор не может быть непрерывно обратимым.*

В классе сепарабельных банаховых пространств важную роль имеют пространства с базисом *Шаудера.*

Определение (базис Шаудера)**.** Пусть X - баназово пространство. $\exists e_1, \dots, e_n, \dots$ - линейно независимые точки. $\forall x \in X$, $x = \sum_1^{+\infty} \alpha_j e_j$. Тогда e_j - называется *базисом Шаудера.*

Теорема 2.9 (О почти конечномерности компактного оператора)**.** *Пусть $A : X \to X$ - компактный оператор. X - имеет базис Шаудера. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists B, C : \dim R(B) < +\infty, \|C\| \leqslant \varepsilon, A = B + C$*

Утверждение 2.10. *Если A - компактный оператор, то A^* - тоже компактный.*

Для функционального анализа фундаментальную роль играют уравнения вида

$$y = (\lambda I - A)x \tag{2}$$

и, в частности, $y = (I - A)x = Tx$.

Утверждение 2.11. *Пусть A - компактный оператор. Тогда* $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$.

Теорема 2.12. *Пусть оператор A - компактный. Тогда* $\operatorname{Cl} R(T) = R(T)$ *($R(T)$ - подпространство X).*

Теорема Гильберта-Шмидидта

Определение (Гильбертово пространство)**.** H - гильбертово пространство над $\mathbb{C}$, если.

- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$

Пример ($\mathbb{C}^n$ – конечномерный случай)*.* $z = (z_1, z_2, \dots, z_n), z_i \in \mathbb{C}$
$\langle z, u \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{u}_i$
$\langle x, x \rangle \geqslant 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$

Определение (Самосопряженный оператор)**.** Линейный оператор $A : X \to X$ называется самосопряженным, если выполняется условие: $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$.

Пример. $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $A = \bar{A}^T$ – эрмитовски симметричная

Утверждение 3.1. *Если $\int_a^b K(k,t) f(t) dt$ - интегральный оператор, то $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$*

Утверждение 3.2. *A – самосопряженный оператор, $\lambda = \mu + i\nu$. Тогда $\forall x \in H \Rightarrow \|Ax - \lambda x\| \geqslant |\nu| \cdot \|x\|$*

Утверждение 3.3. *Пусть A - линейный оператор в H, тогда $Cl\, R(A) = (Ker A^*)^\perp$*

Следствие 3.4. *$H = Cl\, R(A) \oplus Ker A^*$*

Теорема 3.5. *Пусть оператор A самосопряженный,тогда $\sigma(A) \subset R$.*

Теорема 3.6. *A – самосопряженный и ограниченный в H.*

1. $\lambda \in \rho \Leftrightarrow \exists m > 0 : \forall x \in H \quad \|(A - \lambda I)x)\| \geqslant m \|x\|$

2. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists x_m : \|x_m\| = 1 \quad \|(A - \lambda I)x_m\| \to 0$

Определение. Нижняя и верхняя граница оператора A
$m_- = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \quad m_+ = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$

Утверждение 3.7. $|\langle Ax, x\rangle| \leqslant \|Ax\| \cdot \|x\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|^2 = \|A\|$
То есть $|m_-|, |m_+| \leqslant$

Теорема 3.8.

1. $\sigma(A) \subset [m_-, m_+]$
2. $m_-, m_+ \in \sigma(A)$