چند حل معادله‌ی میدان اینشتین

- کلی‌ترین متریک با تقارن کروی

• در مختصات فضایی زمانی کروی (t, r, θ, φ) به (t, r) تقلیل پیدا می‌کند اگر تقارن کروی داشته باشیم و میتوان ادعا کرد که فرم کلی متریک با تقارن کروی به شکل ذیل در می‌آید:

$$ds^2 = A(r,t)\, dt^2 + B(r,t)\, dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2). \qquad (1)$$

که در آن $A(r,t)$ و $B(r,t)$ توابع نامشخص ما باشند که باید با توجه به معادله‌ی میدان تعیین شوند.

* اثبات در کتاب نظریه‌ی واینبرگ

- قضیه‌ی بیرخوف

• هر متریک متقارن کروی اگر بخواهد پاسخ خلاء معادله‌ی میدان اینشتین باشد باید ایستا باشد.

به عبارتی دیگر $A = A(r)$ و $B = B(r)$ در معادله‌ی (1) در می‌شود.

* اثبات در کتاب نظریه

* به عنوان مثال اگر یک جسم کروی داشته باشیم که تپش‌های کوچک می‌کند (به هر دلیلی!) متریک حوالی آن که خلاء باشد، بدون تغییر زمانی باقی می‌ماند!

— متریک شوارتزشیلد

• ساده‌ترین پاسخ معادلات میدان که موسوم به متریک شوارتزشیلد می‌باشد به نواحی اطراف توده‌ای کروی که خالی باشد همانند ستاره یا سیاه‌چاله کارایی دارد، و توصیف می‌کند:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) \quad (1)$$

* به دست آوردن این متریک همانطور که دانستیم کلی‌ترین متریک متقارن کروی را در نظر می‌گیریم و به ترتیب مشتقات اول و دوم آن را حساب کرده و سپس تانسور ریمان، تانسور ریچی و اسکالر ریچی این متریک یعنی (1) حل را می‌سازیم؛

به سهولت محاسبات از نرم‌افزار میپل برای این کارهای مذکور در فوق کمک می‌گیریم توجه شود از دیگر نرم‌افزارها نیز استفاده کنیم:

```
schw.mw.
> restart : with(tensor):
> coord := [t, r, th, ph]
> g_compts:= array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
> g_compts[1,1]:=-A(r) : g_compts[2,2]:= B(r): ...
> g:=create([-1,-1], eval(g_compts));
> ginv:= invert(g, 'detg');
> D1g:= d1metric(g, coord): D2g:=d2metric(D1g, coord):
> Cf1:= Christoffel1(D1g).
> RMN:= Riemann(ginv, D2g, Cf1):
> RICCI:= Ricci(ginv, RMN);
> RS:= Ricciscalar(ginv, RICCI);
> Estn:= Einstein(g, RICCI, RS);
```

خروجی برنامه، تشکیل تانسور ریچی می‌بینیم به صورت زیر می‌شود:

$$R_{r\theta} = R_{rt} = R_{r\varphi} = R_{t\theta} = R_{t\varphi} = R_{\theta\varphi} = 0$$

$$R_{tt} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{A'}{rB} \qquad (2)$$

$$R_{rr} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{B'}{rB} \qquad (3)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) \qquad (4)$$

اسکالر ریچی نیز به صورت زیر یافت می‌شود:

$$R = \frac{1}{r^2}\left(r^2 A'' + 4A' - 2A\right) \qquad (5)$$

* در بیرون (r>a) با توجه به اینکه در خلأ هستیم $T_{ab}=0$ و طبق معادلات میدان $G_{ab}=0$ و البته $R_{ab}=0$ و همینطور تانسور ریچی و اسکالر ریچی صفر می‌شوند. حال باید از معادلات فوق استفاده کرده و تانسور ریچی (یا اسکالر ریچی را، البته اگر با اسکالر ریچی کار کنیم نگران از دست دادن اطلاعات خواهیم بود) را برابر صفر بگذاریم؛ بنابراین:

با اینکار ابتدا (2) را در $\frac{1}{A}$ و (3) را در $\frac{1}{B}$ ضرب کرده و با هم جمع می‌کنیم و به صورت زیر می‌شود اگر برابر صفر بگذاریم:

$$\frac{A'}{rAB} + \frac{B'}{rB^2} = 0$$

با ضرب در rB:

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0$$

حال با توجه به:

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = \frac{d}{dr}\ln A + \frac{d}{dr}\ln B = \frac{d}{dr}(\ln A + \ln B) = \frac{d}{dr}\ln(AB)$$

$$\frac{d}{dr}\ln(AB) = 0$$

و این یعنی اینکه ثابت است $A(r)B(r) = const$.

* حال در این مرحله فرض می‌کنیم به صورت مجانبی در بی‌نهایت دور فضا زمان تخت باشد. به عبارتی

$A(r\to\infty)=1$ و $B(r\to\infty)=1$ باشد. یا به عبارتی $A(\infty)B(\infty)=1$ و با توجه به نتیجه قسمت قبل

مقدار ثابت برابر یک می‌باشد فلذا:

$$A(r)=\frac{1}{B(r)} \qquad (6)$$

* حال با قید (6) یکی از معادلات (2)، (3)، (4) را برابر صفر قرار دهیم:

$$B'=-\frac{A'}{A^2}$$

$$A-1+rA'=0$$

$$rA'=1-A$$

$$\int\frac{dA}{1-A}=\int\frac{dr}{r}$$

با تعریف $A_0=A(r_0)$:

$$\ln\left(\frac{A-1}{A_0-1}\right)=-\ln\frac{r}{r_0}$$

فلذا بدست می‌آید:

$$A(r)=1-(1-A_0)\frac{r_0}{r}$$

و همچنین $B(r)$ بدست می‌آید. می‌توان به سادگی با تعریف $C\equiv(1-A_0)r_0$ به صورت زیر نوشت:

$$A(r)=1-\frac{C}{r} \quad \text{و} \quad B(r)=\left(1-\frac{C}{r}\right)^{-1}$$

* در این مرحله با توجه به اینکه اگر C برابر صفر باشد متریک تخت می‌دهد انتظار داریم C متناسب با جرم توده کروی واقع در مبدأ مختصات باشد. و ما خاصیت این مقدار را بازتعریف کنیم با توجه به تطابق از آن در حد ضعیف که توسط گرانش نیوتنی بدست می‌آید.

از معادله (10.42) اینشتین داریم $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ که $\phi = -\frac{GM}{r}$ به ازای ϕ پتانسیل نیوتنی

به متریک شوارتزشیلد تبدیل می‌شود $g_{00} = 1 - \frac{C}{r}$ بنابراین با این مقایسه، C به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C = 2GM$$

و با اطلاعات $A(r)$, $B(r)$ متریک (1) را به دست آورد:

- متریک رایسنر - نوردشتروم

• متریکی که به توصیف فضای یک توده کروی باردار بدون دوران توسط به متریک رایسنر-نوردشتروم است به صورت زیر است:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \qquad (1)$$

* توجه‌ای ساده به متریک نشان می‌دهد این را نتواند باشد که به توصیف غیر خلا $T_{ab} \neq 0$ کار کند، در این صورت معادلات بسیار پیچیده می‌شود. اما به حالتی که $T = T^a{}_a = 0$ باشد (رد انرژی تکانه صفر باشد) معادلات به آسانی حل خواهد داشت و این سودمند است چرا که تانسور انرژی تکانه ماکسول به همین شکل است:

$$T_{bc} = \frac{1}{4\pi}\left\{F_{ab}F^a{}_c - \frac{1}{4}F_{mn}F^{mn}g_{bc}\right\}. \qquad (2)$$

و به همین صورت رد آن می‌شود:

$$g^{bc}T_{bc} = \frac{1}{4\pi}\left\{g^{bc}F_{ab}F^a{}_c - F_{mn}F^{mn}\right\}.$$

$$T^b{}_b = 0 \qquad (3)$$

* وقتی $T^a{}_a = 0$ باشد میتوان از روی معادلات میدان گفت:

$$R \propto T = 0 \qquad (4)$$

و بنابراین $R = 0$

ولی توجه شود که $R_{ab} \neq 0$ می‌باشد

بنابراین باید معادله ⑤ صفحه ۳ را برابر صفر قرار داد که برای سهولت از میپل استفاده می‌کنیم:

```
> dsolve( r^2 A'' + 4 A' - 2A = 0 , A(r) );
```

که پاسخ آن به صورت زیر می‌شود:

$$A(r) = \frac{c_1}{r^2} + \frac{c_2}{r} + 1$$

* همانند متریک شوارتزشیلد $B(r)$ را داریم. وقتی میدان ضعیف داریم $r \to \infty$ ، $c_2 = 2GM$ بدست می‌آید.

* برای یافتن c_1 ولی باید یکی از معادلات انیشتین (مثلاً برابر G_{11} با ۱) برابر کنیم و برای این کار، ابتدا تانسور انرژی تکانه را باید داشته باشیم. مثلاً:

$$T_{tt} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{at}F^{a}{}_{t} - \frac{1}{4}F_{mn}F^{mn}g_{tt}\right)$$

توجه شود که قانون کولن را همچنان داریم و میدان الکترومغناطیسی می‌خواهیم بستگی کروی داشته باشد. و این دو حالت دارد. یا باید انواع شعاعی باشند یا کلاً ثابت شوند. میدان مغناطیسی نیز داریم که شعاعی باشد چرا که تک قطبی نداریم پس فقط میدان الکتریکی شعاعی داریم که به صورت وجود بار می‌باشد. و حال مجدداً از بحث تطابق این دفعه با پتانسیل کولنی $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ مقدار $c_1 = Q^2$ را پیدا کرد.

— متریک دوسیته

• متریکی که برای نواحی خلاء در حضور ثابت کیهان‌شناسی بیان می‌شود به صورت زیر است. در مختصات کروی

$$ds^2 = -\left(1-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)dt^2 + \left(1-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

* برای بدست آوردن این متریک دو صفحه پیوست را مطالعه کنید.

— متریک FRW

• متریکی که برای نواحی خلاء در حضور ثابت کیهان‌شناسی بیان می‌شود به صورت زیر است. در مختصات تخت که در آن $a(t) = e^{Ht}$ ، $H = \frac{\dot{a}}{a}$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right)$$

* برای بدست آوردن این متریک کافیست تبدیلات ای بزنیم روی متریک دوسیته.

- متریک دوسیته - شوارتزشیلد

• متریکی برای نواحی اطراف توده کروی که تهی از ماده (خلاء) باشد همانند ستاره یا سیاه‌چاله در حضور ثابت کیهان‌شناسی (انبساط عالم یا انرژی تاریک) به صورت زیر می‌باشد:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{r}-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)dr^2 + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \quad (1)$$

الف

* برای نشان دادن متریک فوق ابتدا باید ثابت کیهان‌شناسی را در معادله‌ی میدان انیشتین بیافزاییم:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab} \quad (2)$$

یا به عبارتی:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab}.$$

* حال از قبل معادلات (2) تا (5) ص 3 بدست آوردیم که برای متریک‌های متقارن کروی تانسور و اسکالر ریچی به چه صورت می‌شود.

بنابراین با فرض اینکه تهی از ماده است، $T_{ab}=0$، با قرار دادن تانسور و اسکالر ریچی در عبارت فوق، همانند متریک شوارتزشیلد می‌توان $A(r)=B^{-1}(r)$ را بدست آورد و با اصل انطباق ضرایب را تعیین کرد.

- متریک دوسیته - رایسنر - نوردشتروم

• متریکی که برای نواحی اطراف توده کروی باردار که تهی از ماده (خلاء) باشد، در حضور ثابت کیهان‌شناسی به صورت زیر است:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)dr^2 + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \quad (1)$$

ب

* برای نشان دادن این مورد نیز همانند فوق کافیست از عبارت (2) رد بگیریم و از (3) ص 5 می‌دانیم که برای میدان الکترومغناطیس رد انرژی تکانه صفر است. لذا (4) ص 5 به صورت زیر می‌شود.

$$R = 4\Lambda$$

* حال با توجه به اسکالر ریچی متریک عام کروی (5) ص 3 می‌توان $A(r)=B^{-1}(r)$ را بدست آورد و با اصل انطباق ضرایب را تعیین نمود.

* لازم به ذکر است که در هنگام تعیین ضرایب ① از مطالب خصوصی که همان $-\frac{1}{3}\Lambda r^2$ می‌باشد
الف و ب

به دلیل خیلی کوچک بودنش صرف نظر می‌کنیم و بعد از تعیین ضرایب آن جمله را دوباره برمی‌گردانیم.

○ می‌توان ضرایب متریک دوسیته - رایسنر نوردشتروم ① ب را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$A(r) = B^{-1}(r) = 1 - \frac{2G}{r}\left[M_0 + M_\Lambda(r)\right] + \frac{Q^2}{r^2} \qquad ② \text{ الف}$$

که در آن، با تعریف $M_\Lambda(r) \equiv \left(\frac{4\pi}{3} r^3\right)\rho_\Lambda$ و $M_{tot} = M + M_\Lambda(r)$ می‌توان نوشت:

$$A(r) = B^{-1}(r) = 1 - \frac{2GM_{tot}(r)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \qquad ③ \text{ ب}$$

که به این معنی است که فضا مملو از ρ_Λ که ثابت است می‌باشد.

* برای نشان دادن این موضوع ابتدا انرژی تکانه سیال کامل را مرور می‌کنیم که به صورت زیر می‌باشد:

$$T_{ab} = (\rho + p) U_a U_b + p\, g_{ab}$$

که در آن p فشار، و ρ چگالی و U^a چاربردار سیال است که قید $U^a U_a = -1$ برای آن حاکم است.

بنابراین اگر سیال سرعت نداشته باشد $U^\mu = \delta^\mu_0$، انرژی تکانه اش می‌شود:

$$T^a{}_b = (p + \rho) U^a U_a + p\, \delta^a{}_b$$

$$\doteq \begin{pmatrix} -\rho & & & \\ & p & & 0 \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix}$$

* حال در معادلات میدان اینشتین با تعریف $T^{(\Lambda)}_{ab} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{ab}$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$G_{ab} = 8\pi G \left(T_{ab} + T^{(\Lambda)}_{ab}\right)$$

که در واقع $T^{\Lambda a}{}_b$ در صورت تنسور ماکسول می‌باشد با تعریف $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}$ ، $P_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$ همانند سیال کامل:

$$T^{(\Lambda)a}{}_b \doteq \begin{pmatrix} -\rho_\Lambda & & & \\ & P_\Lambda & & 0 \\ & & P_\Lambda & \\ 0 & & & P_\Lambda \end{pmatrix}$$

و با این تعریف می‌توان به ③ رسید با جایگذاری این تعریف در ①