پاسخ سری تمرینات سوم نظریه میدان‌های ~~کوانتوم~~ کوانتومی ۱

به پراکندگی دو ذره، $2\to2$، که تکانه‌ها به صورت $p_i+p_A\to p_f+p_B$ تبدیل شوند، سطح مقطع دیفرانسیلی در مختصات سکون ذره‌ی A، به صورت ذیل به دست آید:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{64\pi^2 m_A}\left[E_B+E_f\left(1-\frac{|\vec{p}_i|}{|\vec{p}_f|}\cos\theta\right)\right]^{-1}\frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}|\mathcal{M}|^2$$

که در آن θ زاویه‌ی بین p_i و p_f می‌باشد.

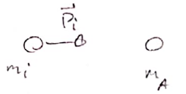
(Exercise 5.1 of Schwartz)

اثبات: برای نشان دادن این موضوع باید از رابطه‌ی بین $d\sigma$ و $|\mathcal{M}|^2$ در 5.22 استفاده کنیم اما ابتدا فضای فاز ناوردای لورنتس را حساب می‌کنیم. برای این کار، مشابه 5.26 می‌توان نوشت:

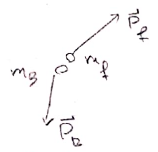
$$d\Pi_{LIPS}=(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\frac{d^3p_B}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_B}$$

$$=\frac{d\Omega}{16\pi^2}\int dp_f\frac{p_f^2}{E_fE_B}\delta(E_f+E_B-E_i-E_A)$$ مشابه 5.27:

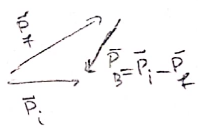
توجه شود که در مختصات سکون ذره‌ی A:



«قبل از برخورد.»



«بعد از برخورد.»



«رابطه‌ی میان تکانه‌ها»

$$E_i=\sqrt{\vec{p}_i^{\,2}+m_i^2}$$

$$E_A=m_A$$

$$E_f=\sqrt{\vec{p}_f^{\,2}+m_f^2}$$

$$E_B=\sqrt{\vec{p}_B^{\,2}+m_B^2}=\sqrt{(\vec{p}_i-\vec{p}_f)^2+m_B^2}$$

بنابراین می‌توان نوشت :

$$d\Pi_{LIPS} = \frac{d\Omega}{16\pi^2}\int dp_f \, \frac{p_f^2}{E_f E_B}\,\delta(E_f+E_B-E_i-m_A) \qquad (2)$$

با تعریف $x \equiv E_f+E_B-E_i-m_A$ و با توجه به (1) می‌توان گفت :

$$E_f=\sqrt{\vec{p}_f^{\,2}+m_f^2} \longrightarrow \frac{dE_f}{dp_f}=\frac{p_f}{E_f}$$

$$E_B=\sqrt{\vec{p}_i^{\,2}+\vec{p}_f^{\,2}-2p_ip_f\cos\theta+m_B^2} \longrightarrow \frac{dE_B}{dp_f}=\frac{p_f-p_i\cos\theta}{E_B}$$

بنابراین :

$$\frac{dx}{dp_f}=\frac{dE_f}{dp_f}+\frac{dE_B}{dp_f}$$

$$=\frac{p_f}{E_f}+\frac{p_f-p_i\cos\theta}{E_B}$$

$$=p_f\,\frac{E_B-E_f+E_f\frac{p_i}{p_f}\cos\theta}{E_fE_B}$$

یا به عبارتی :

$$dx=\frac{dp_f\,p_f}{E_fE_B}\;E_B-E_f\left(1-\frac{p_i}{p_f}\cos\theta\right)$$

بنابراین با تعریف x و عبارت فوق، با جایگذاری در (2) می‌توان نوشت :

$$d\Pi_{LIPS}=\frac{d\Omega}{16\pi^2}\int dx\;p_f\left\{E_B-E_f\left(1-\frac{p_i}{p_f}\cos\theta\right)\right\}^{-1}\delta(x)$$

$$=\frac{d\Omega}{16\pi^2}\,p_f\left[E_B-E_f\left(1-\frac{p_i}{p_f}\cos\theta\right)\right]^{-1}. \qquad (3)$$

حال با جایگذاری ③ در 5.22 که در آن به جای $|\vec{v}_i - \vec{v}_A|$ ، $|\vec{v}_i|$ را باشد؛

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_i)(2E_A)|\vec{v}_i|} |\mathcal{M}|^2 d\Pi_{LIPS}$$

توجه شود که $|\vec{v}_i| = \frac{|\vec{P}_i|}{E_i}$ می‌باشد و $E_A = m_A$ ؛

$$d\sigma = \frac{d\Omega}{64\pi^2 m_A} \left[E_B - E_f\left(1 - \frac{|\vec{P}_i|}{|\vec{P}_f|}\cos\theta\right)\right]^{-1} \frac{|\vec{P}_f|}{|\vec{P}_i|} |\mathcal{M}|^2$$

④ در فرایند پراکندگی $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ با فرض بدون جرم بودن که در بخش 5.3 کتاب بررسی کردیم، e^- و e^+ روی محور z

به سوی هم با تکانه‌های ذیل در راستای هم حرکت کرده‌اند:

$$p^{e^+} = (E,0,0,E) \; ; \; p^{e^-} = (E,0,0,-E)$$

و بعد از پراکندگی $\mu^-\mu^+$ روی صفحه yz ، با تکانه‌های ذیل به حرکت ادامه می‌دهند:

$$p^{\mu^+} = E(1,0,\sin\theta,\cos\theta) \; ; \; p^{\mu^-} = E(1,0,-\sin\theta,-\cos\theta)$$

(Exercise 5.6 of Schwartz)

الف) حال متغیرهای ذیل را تعریف کرده که به متغیرهای «مندلستام» موسوم می‌باشند:

$$s = (P_{e^+} + P_{e^-})^2$$

$$= |(2E,0,0,0)|^2 = 4E^2 = E_{cm}^2$$

$$t = (P_{\mu^-} - P_{e^-})^2$$

$$= |(0,0,-E\sin\theta, -E\cos\theta + E)|^2 = -2E^2 + 2E^2\cos\theta = -\frac{E_{cm}^2}{2}(1+\cos\theta)$$

$$u = (P_{\mu^+} - P_{e^-})^2$$

$$= |(0,0,E\sin\theta, E\cos\theta + E)|^2 = -2E^2 - 2E^2\cos\theta = -\frac{E_{cm}}{2}(1-\cos\theta)$$

(ب) می‌توان نشان داد که بین متغیرهای ماندلستم، در صورت بدون جرم در نظر گرفتن رابطه‌ی ذیل برقرار است؛

$$s+t+u=0$$

برای تحقیق این مورد می‌توان مثال $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ بدون جرم را با توجه به سوال ۲ (الف) نوشت:

$$4E^2-2E^2+2E^2\cos\theta-2E^2-2E^2\cos\theta=0$$

(ج) همانطور که در بخش 5.3 کتاب به دست آوردیم سطح مقطع را:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{e^4}{64\pi^2E_{cm}^2}(1+\cos^2\theta) \quad (1)$$

حال می‌توان این مورد را بر حسب متغیرهای Mandelstam به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{e^4}{64\pi^2E_{cm}^2}\frac{2(t^2+u^2)}{s^2}$$
$$=\frac{e^4}{32\pi^2}\frac{t^2+u^2}{s^3}$$

ابتدا t^2, u^2 را تشکیل می‌دهیم از سوال ۲ (الف):

$$t^2=\frac{E_{cm}^2}{4}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)$$

$$u^2=\frac{E_{cm}^2}{4}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)$$

همچنین می‌دانیم: $$S=E_{cm}^2$$

بنابراین می‌توان نوشت: $$\frac{2(t^2+u^2)}{s^2}=(1+\cos^2\theta)$$

که با جایگذاری در ① به نتیجه‌ی مطلوب می‌توان رسید.

(د) در صورتی که فرایند پراکندگی به ذرات دارای جرم باشند، میان متغیرهای ماندلستم یک رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$s+t+u=\sum_{j} m_j^2$$

اثبات — با توجه به تعاریف متغیرهای ماندلستم می‌توان نوشت:

$$s+t+u=(P_{e^+}+P_{e^-})^2+(P_{\mu^-}-P_{e^-})^2+(P_{\mu^+}-P_{e^-})^2$$

$$=P_{e^+}^2+P_{e^-}^2+2P_{e^+}P_{e^-}+P_{\mu^-}^2+P_{e^-}^2-2P_{\mu^-}P_{e^-}+P_{\mu^+}^2+P_{e^-}^2-2P_{\mu^+}P_{e^-}$$

$$=m_{e^+}^2+m_{e^-}^2+m_{\mu^-}^2+m_{\mu^+}^2+2P_{e^-}P_{e^-}+2P_{e^+}P_{e^-}-2P_{\mu^-}P_{e^-}-2P_{\mu^+}P_{e^-}$$

$$=\sum_j m_j^2+2P_{e^-}(P_{e^-}+P_{e^+}-P_{\mu^-}-P_{\mu^+})$$

با توجه به پایستگی انرژی تکانه $P_{e^-}+P_{e^+}-P_{\mu^-}-P_{\mu^+}=0$ می‌باشد. لذا جمله آخر صفر شده و به نتیجه می‌رسیم.

۲- لاگرانژی ذیل مفروض می‌باشد که برهم‌کنش میدان نرده‌ای جرم‌دار، «ϕ^3» مربوط می‌باشد:

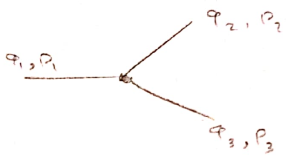
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi\,(\Box + m^2)\,\phi + \frac{g}{3!}\phi^3$$

که طی آن فرآیند واپاشی به صورت ذیل را داریم:

$$\phi \to \phi\,\phi$$

Exercise 7.1 of Schwartz

الف- می‌توان نشان داد که تنها نمودار بدون loop (به عبارتی tree-level) این فرآیند به صورت ذیل است:



که با توجه به قواعد فاینمن برای آن «عنصر ماتریس» را داریم:

$$i\mathcal{M} = ig$$

الف = با توجه به اینکه ذرات ورودی و خروجی، در کل ۳ تا هستند، ابتدا 3 point func. را با توجه به رابطه 7.64 کتاب حساب می‌کنیم:

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle = \frac{\langle 0|T\{\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\phi_0(x_3)\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}_{int}}\}|0\rangle}{\langle 0|T\{e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}_{int}}\}|0\rangle}$$

که با اعمال $\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{3!}\phi^3$ ، می‌توان صورت عبارت اخیر را بسط تیلور داد (همانند 7.66 کتاب):

$$\langle\phi_1\phi_2\phi_3\rangle = \frac{1}{\langle 0|T\{e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}_{int}}\}|0\rangle}\Big\{\langle 0|T\{\phi_0(x_1)\,\phi_0(x_2)\,\phi_0(x_3)\}|0\rangle$$

$$+\frac{ig}{3!}\int d^4x\,\langle 0|T\{\phi_0(x_1)\,\phi_0(x_2)\,\phi_0(x_3)\,\phi_0^3(x)\}|0\rangle$$

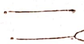
$$+O(g^2)\Big\}.$$

با توجه به اینکه مرتبه صفرم شامل تعداد فرد، 3، میدان است، صفر می‌شود،

به مرتبه اول نیز با توجه به قضیه Wick می‌توان نوشت:

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_x\phi_x\phi_x\}|0\rangle = 6\,D_{1x}D_{2x}D_{3x}$$

$$+3D_{12}D_{3x}D_{xx} + 3D_{23}D_{1x}D_{xx} + 3D_{13}D_{2x}D_{xx}$$

که با توجه به اینکه سه جمله آخر، عامل bubble هستند:  ، با اعمال مخرج در محاسبه 3 point func. از بین می‌روند و تنها جمله اول که به صورت  می‌باشد باقی می‌ماند:

$$\langle\phi_1\phi_2\phi_3\rangle = 6\,D_{1x}D_{2x}D_{3x} + O(g^2)$$

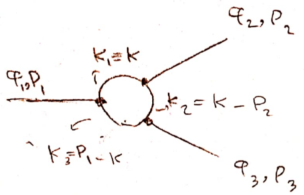
این جمله را، در فضای تکانه نیز می‌توان یا با اعمال D_F ها یا با توجه به قواعد فاینمن که در بخش 7.3 کتاب

گفتیم، به صورت زیر بنویسیم:

$$i\mathcal{M} = ig$$

چرا که تنها شامل یک vertex می‌باشد و هیچ propagator ای وجود ندارد.

ب- یکی از نمودارهای مراتب بالاتر که دارای loop نیز می‌باشد به صورت ذیل است:



$\equiv \xi$

که عنصر ماتریس آن را می‌توان نوشت:

$$i\mathcal{M}\Big|_{\xi} = -g^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2-m^2} \frac{1}{(k-p_2)^2-m^2} \frac{1}{(p_1-k)^2-m^2}$$

اثبات: برای نوشتن عنصر ماتریس از روی نمودار کافیست به ازای هر vertex، ig قرار دهیم و به ازای هر propagator، $\frac{i}{k^2+m^2}$ قرار دهیم، لذا:

$$i\mathcal{M}\Big|_{\xi} = (ig)^3 \frac{i}{k_1^2-m^2} \frac{i}{k_2^2-m^2} \frac{i}{k_3^2-m^2}$$

که با قرار دادن $k_1 = k$ و $k_2 = k - p_2$، $k_3 = p_1 - k$ به نتیجه‌ی مطلوب می‌رسیم.

ج- عنصر ماتریس الف ب را در فضای مکان نیز می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$\langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \rangle\Big|_{\xi} = (ig)^3 \int d^4x\, d^4y\, d^4z\, D_{1x} D_{xy} D_{y2} D_{yz} D_{z3} D_{zx}$$

د- حال با قرار دادن عبارت ۱.۲ در رابطه‌ی LSZ (رابطه‌ی ۶.۱ کتاب)، می‌توان درستی رابطه‌ی ذیل (۷.۸۵ کتاب) را برای نمودار مطرح شده در دو قسمت قبل را بررسی کرد؟

$$\langle f|S|i\rangle\Big|_{\xi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1-p_2-p_3)\, i\mathcal{M}\Big|_{\xi}$$

البته برای این کار کافیست اول را در رابطه LSZ ا.ط.ش - قرار دهیم :

$$\langle f|S|i\rangle\Big|_{3} = \left\{ i\int d^4x_1\, e^{-ip_1x_1}(\Box_1+m^2)\right\}\left\{ i\int d^4x_2\, e^{+ip_2x_2}(\Box_2+m^2)\right\}\left\{ i\int d^4x_3\, e^{+ip_3x_3}(\Box_3+m_3)\right\}$$

$$\times (ig)^3 \int d^4x\, d^4y\, d^4z\; D_{1x} D_{xy} D_{y2} D_{yz} D_{z3} D_{zx}$$

$$= \cdots$$

لاگرانژین ذیل مفروض باشد که به «نظریه» برهم‌کنش آوردن، فوتون بدون اسپین «موج» است:

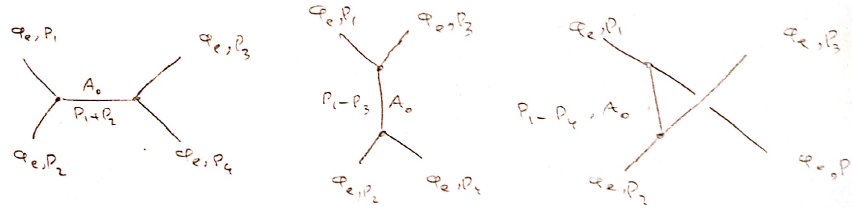
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi_e(\Box + m_e^2)\phi_e - \frac{1}{2}A_0\Box A_0 + e m_e A_0\phi_e\phi_e$$

که طی آن فرآیند پراکندگی موسوم به Møller را داریم:

$$e^-e^- \to e^-e^-$$

Exercise 7.3 of Schwartz

الف) مرتبه‌ی اول را که نمودارهای بدون loop (tree-level) مربوط به این فرآیند به صورت ذیل اند:



که با تعاریف متغیرهای Mandelstam به صورت 7.(97 – 99) کتاب ← عناصر ماتریس نشان به صورت ذیل می‌شود:

$$i\mathcal{M} = \frac{-i(em_e)^2}{s} + \frac{-i(em_e)^2}{t} + \frac{-i(em_e)^2}{u}$$

اثبات: با توجه به اینکه ذرات ورودی و خروجی، در مجموع ۴ چهار تا است؛ ابتدا 4-point func. را با توجه به رابطه‌ی

7.64 کتاب ← می‌نویسیم که با اعمال $\mathcal{L}_{int} = e m_e A_0 \phi_e \phi_e$، مانند نظریه‌ی ϕ^3 مرتبه‌ی دوم ← با این تفاوت که

یکی از میدان‌ها متمایز از دوتای باقی است و ابتدا به جای g، em_e را داریم.

$$\langle \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\rangle = \frac{\langle 0|T\{\phi_e(x_1)\phi_e(x_2)\phi_e(x_3)\phi_e(x_4)\, e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{int}}\}|0\rangle}{\langle 0|T\{e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{int}}\}|0\rangle}$$

کما اینکه نمایی را [illegible] و بسط تیلور می‌توان نوشت!

$$\langle\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\rangle = \frac{1}{\langle 0|T\{e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}_{int}}\}|0\rangle}\Big\{\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle$$

$$+\, iem_e\int d^4x\, \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 A_x \phi_x^2\}|0\rangle$$

$$+\, (iem_e)^2\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 A_x\phi_x^2 A_y\phi_y^2\}|0\rangle$$

$$+\, O((em)^3)\Big\}$$

مرتبه‌ی صفرم، با اعمال تعمیم Wick ، شامل bubble است، ، لذا با اعمال $\frac{1}{\langle 0|T\{e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}_{int}}\}|0\rangle}$ از بین می‌رود.

مرتبه‌ی اول، با توجه به اینکه شامل تعداد فرد میدان می‌باشد، صفر می‌دهد.

اما مرتبه‌ی دوم را با اعمال تعمیم Wick می‌توان حساب کرد که بعد از حذف bubbleها می‌شود!

$$\langle\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\rangle = D_{1x}D_{2x}D_{xy}D_{y3}D_{y4} + D_{1x}D_{2y}D_{xy}D_{x3}D_{y4} + D_{1x}D_{2y}D_{xy}D_{x4}D_{y3} + O(e^3)$$

که همان نمودارهای s و t و u ، (93-95) از کتاب هستند که البته با propagatorهای بدون جرم.

ب — باید توجه کرد که نمودار s مذکور در ۲.الف در عمل قابل انجام نمی‌باشد؛ چرا که قانون بقای بار الکتریکی این اجازه را نمی‌دهد که در هر vertex، $q=\pm 2$ باشد.

لذا تنها دو حالت t و u باقی می‌ماند به انجام چنین فرایندی.

ج — با توجه به ۲.ب، سهم ماتریس به مقدار ذیل کاهش می‌یابد:

$$iM = \frac{-i(em_e)^2}{t} + \frac{-i(em_e)^2}{u}$$

د) با در نظر گرفتن اسپین به فرآیند مذکور؛ برای هر الکترون دو حالت ممکن بوده و به عبارتی حالت‌ها

با t به $2\times2\times2\times2=16$ حالت تقسیم می‌یابد و u نیز همینطور، به ۱۶ حالت.

اما با در نظر داشتن قانون بقای اسپین در هر vertex، تنها حالت‌های ۱۱–۱۱ و ۱۲–۱۲، ۲۱–۲۱، ۲۲–۲۲

و ۱۲–۲۱ مجاز خواهند بود، که به ۴ حالت و u نیز همینطور به ۴ حالت تقلیل می‌یابند.

ه) بدون در نظر گرفتن اسپین 2.2 صادق بوده و می‌توان طبق 5.33 کتاب، سطح مقطع دیفرانسیلی

چنین پراکندگی را محاسبه کرد:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 E_{cm}^2}\,|M|^2$$

$$= \frac{1}{64\pi^2 E_{cm}^2}\left\{\frac{(e m_e)^2}{t} + \frac{(e m_e)^2}{u}\right\}^2$$