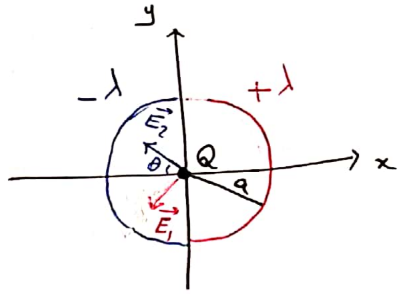
۱۴۰۱/۱/۲۹

پاسخ آزمونک ۱

①



با توجه به تقارن مسئله کافی است میدان حاصل از نیم کره ی بالایی را به دست آوریم و آن را دو برابر کنیم.

لازم به ذکر است که سوال نیم کره را در تمرینات حل کرده بودیم.

$\vec{E_1}$ میدان حاصل از ربع اول و $\vec{E_2}$ میدان حاصل از ربع دوم است.

واضح است که میدان برایند در جهت $-\hat{x}$ است.

$$|\vec{E_1}| = \int dE_1 = \int \frac{k\,dq}{a^2} = \frac{k}{a^2}\int a\lambda\, d\theta = \frac{k\lambda}{a}\int d\theta$$

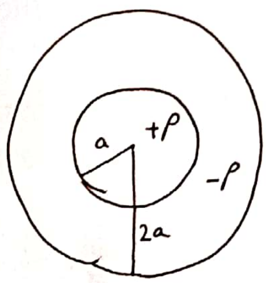
جواب نهایی ۴ برابر اندازه E_1 در جهت $-\hat{x}$ است که برابر است با:

$$|\vec{E}_{tot}| = \frac{4k\lambda}{a}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{4k\lambda}{a}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4k\lambda}{a}$$

بنابراین نیروی وارد بر بار Q، $\vec{F} = \frac{4k\lambda}{a}Q(-\hat{x})$ است.

از آن جایی که میدان در صفحه xy قرار دارد، پتانسیل در راستای z صفر است، پتانسیل در صفحه z هم صفر است، پس کار لازم برای جابه‌جایی بار در جهت $\hat{z}$ صفر است.

②



قانون گاوس $\quad \phi_E = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0} \;;\; \phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A}$

I) $r<a$: $Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

$$\rightarrow E_{in}\, 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_{in} = \frac{r\rho}{3\epsilon_0}}$$

II) $a<r<2a$: $Q = \frac{4}{3}\pi a^3(+\rho) + \frac{4}{3}\pi(r^3-a^3)(-\rho) = \frac{4}{3}\pi(2a^3-r^3)\rho$

$$\rightarrow E_{a<r<2a}\, 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi(2a^3-r^3)\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{2a^3-r^3}{3r^2}\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

III) $r>2a$: $Q = \frac{4}{3}\pi a^3(+\rho) + \frac{4}{3}\pi(8a^3-a^3)(-\rho) = \frac{-4}{3}\pi\, 6a^3\rho$

$$\longrightarrow E_{r>2a}\, 4\pi r^2 = \frac{-4}{3}\pi\, 6a^3\, \frac{\rho}{\epsilon_0} \longrightarrow \boxed{E_{r>2a} = \frac{-2a^3\rho}{r^2\epsilon_0}}$$