پاسخ سری سوم تمرینات کوانتوم پیشرفته ۲

3.17 – اگر ذره‌ای در حالت $|j, m=j\rangle$ داشته باشیم، و دوران کوچک ε حول y را می‌توان نوشت:

$$D(y,\varepsilon)|j, m=j\rangle = \exp\left(\frac{-iJ_y\varepsilon}{\hbar}\right)|j, m=j\rangle.$$

چون ε کوچک است و محاسبات را تا حد $O(\varepsilon^2)$ می‌خواهیم می‌توان $\exp\left(\frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar}\right)$ را بسط تیلور داد (تا مرتبه دوم)!

$$D|j,j\rangle = \left(1 - \frac{-iJ_y\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\varepsilon^2}{2\hbar^2} + \cdots\right)|j,j\rangle$$

با توجه به اینکه $J_\pm \equiv J_x \pm iJ_y$ می‌توان نوشت: $J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}$، بنابراین می‌توان در عبارت فوق استفاده کرد.

حال اگر بخواهیم احتمال یافتن ذره بعد از چرخش در حالت اولیه را حساب کنیم:

$$P = |\underbrace{\langle j,j|}_{\text{اولیه}}\underbrace{D|j,j\rangle}_{\text{چرخیده}}|^2 = \left|\langle j,j|\left(1 - \frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)|j,j\rangle\right|^2$$

$$= \left|\langle jj|jj\rangle - \frac{i\varepsilon}{\hbar}\langle j,j|\underset{J_+-J_-/2i}{\underset{\parallel}{J_y}}|j,j\rangle - \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^2}\langle j,j|\underset{-\frac{1}{4}(J_+^2+J_-^2-J_+J_--J_-J_+)}{\underset{\parallel}{J_y^2}}|j,j\rangle\right|^2$$

$$= \Big|1 - \frac{i\varepsilon}{2\hbar i}\{\underbrace{\cancel{\langle j,j|J_+|j,j\rangle}}_{0} - \underbrace{\cancel{\langle j,j|J_-|j,j\rangle}}_{0}\}$$

چون بالا آمده‌اند.

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2\hbar}\frac{1}{4}\{\underbrace{\cancel{\langle jj|J_+^2|jj\rangle}}_{0} + \underbrace{\cancel{\langle jj|J_-^2|jj\rangle}}_{0} - \langle jj|J_+J_-|jj\rangle - \underbrace{\cancel{\langle jj|J_-J_+|jj\rangle}}_{=0}\}\Big|^2$$

با توجه به رابطه مقابل:

$$\langle j;m'|J_\pm|j,m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\hbar\,\delta_{jj'}\,\delta_{m,m\pm1}$$

می‌توان نوشت:

$$P = \left|1 - \frac{\varepsilon^2}{8\hbar}\langle j,j|J_+J_-|j,j\rangle\right|^2$$

$$J_\pm |j,m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\hbar\,|j,m\pm 1\rangle$$

حال با توجه به روابط مقابل:

$$P = \left|1 - \frac{\epsilon^2}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2 j}{2}\right)\right|^2 = 1 - \frac{\epsilon^2 j}{2}$$

می‌توان گفت:

3.18 — می‌خواهیم نشان دهیم که ماتریس‌های G_i که $i=1,2,3$ می‌توانند باشند، در روابط جابجایی تکانه زاویه‌ای صدق کنند

می‌دانیم که:

$$[G_i, G_j]_{l,n} = (G_i G_j - G_j G_i)_{ln}$$

سطر و ستون

از ضرب ماتریس‌ها می‌دانیم $(G_i G_j)_{ln} = (G_i)_{lm}(G_j)_{mn}$ بنابراین:

$$[G_i, G_j]_{ln} = (G_i)_{lm}(G_j)_{mn} - (G_j)_{lm}(G_i)_{mn}$$

با توجه به تعریف $(G_i)_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ می‌توان نوشت:

$$= -\hbar^2(\epsilon_{ilm}\epsilon_{jmn} - \epsilon_{jlm}\epsilon_{imn}).$$

$$= -\hbar^2(\epsilon_{mil}\epsilon_{mnj} - \epsilon_{mjl}\epsilon_{mni}) = -\hbar^2\{(\delta_{in}\delta_{lj} - \cancel{\delta_{ij}\delta_{ln}}) - (\delta_{jn}\delta_{li} - \cancel{\delta_{ji}\delta_{ln}})\}$$

$$= -\hbar^2(\delta_{in}\delta_{lj} - \delta_{jn}\delta_{li}) = \hbar^2(\delta_{jn}\delta_{li} - \delta_{in}\delta_{lj}) = \hbar\,\epsilon_{kij}\epsilon_{kln}$$

$$= i\hbar\epsilon_{kij}(-i\hbar\epsilon_{kln}) = i\hbar\epsilon_{ijk}(G_k)_{ln}.$$

$$[G_i, G_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}G_k$$

پس می‌توان گفت که جبر حاصل، جبر تکانه زاویه‌ای است!

$$J_i = U^+ G_i U$$

بنابراین می‌توان تبدیل یکانی بین J و G پیدا کرد به طوری که:

$$G_3 = -i\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

با توجه به اینکه J_3 در آن قطری باشد، G_3 نیز با توجه به تعریف به صورت زیر است:

حال σ_3 را قطری می‌کنیم:

$$\det(\sigma_3 - \lambda I) = 0 \rightarrow \lambda = 0, \pm\hbar$$

بنابراین ویژه توابع می‌شوند:

$$\lambda = 0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda = \hbar, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda = -\hbar, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بنابراین ماتریسی که به قطری تبدیل می‌کند برابر خواهد بود با:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

این تبدیل یکانی فضایی که ماتریس نمایش داده یعنی σ_3 را به جایی که قطری است در نمایش کلی است می‌برد.