امواج گرانشی

- خطی‌سازی معادلات میدان

• با در نظر گرفتن اختلال خطی در پس‌زمینه flat و فرض تبدیل مختصات $x^a \to x'^a = x^a + \epsilon\xi^a$ و پیمانه $\Box \xi^a = 0$ که به پیمانه لورنتز معروف است و بدون رد (بدون رد اختلال متریک (که هم به پیمانه TT یعنی به ترتیب transverse و traceless معروف است) معادلات میدان انیشتین به معادلات موج زیر تقلیل می‌یابد که نشان از وجود امواج با سرعت نور دارد:

$$\Box \bar{h}_{ab} = -2kT_{ab} \qquad (1)$$

که در آن $\bar{h}_{ab} \equiv h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab} h$ است و h_{ab} مقدار و h ردِ مقدار اختلال متریک flat می‌باشند.

* برای شروع متریک اختلال را به صورت زیر فرض کردیم:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \epsilon h_{ab}$$

که باید در شرط $\lim_{r\to\infty} h_{ab} = 0$ صدق کند و با تعریف $h^{ab} = \eta^{ac}\eta^{bd}h_{cd}$ می‌توان گفت $(\eta_{ab} + \epsilon h_{ab})(\eta^{bc} - \epsilon h^{bc}) = \delta_a^c$ و بنابراین باید $g^{ab} = \eta^{ab} - \epsilon h^{ab}$ نیز صادق باشد.

حال می‌توان نماد کریستوفل و پس تانسور ریمان و ریچی و اسکالر ریچی و تانسور انیشتین را به ترتیب محاسبه کرد:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}\left(g_{dc,b} + g_{db,c} - g_{bc,d}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon\, \eta^{ad}\left(h_{dc,b} + h_{db,c} - h_{bc,d}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon\left(h^a{}_{c,b} + h^a{}_{b,c} - h_{bc,}{}^a\right),$$

$$R_{abcd} = \frac{1}{2}\epsilon\left(h_{ad,bc} + h_{bc,ad} - h_{ac,bd} - h_{bd,ac}\right),$$

$$R_{ab} = \eta^{cd}R_{abcd} = \frac{1}{2}\epsilon\left(h^{c}{}_{a,bc} + h^{c}{}_{b,ac} - \square h_{ab} - h_{,ab}\right),$$

$$R = \epsilon\left(h^{cd}{}_{,cd} - \square h\right),$$

$$G_{ab} = \frac{1}{2}\epsilon\left(h^{c}{}_{a,bc} + h^{c}{}_{b,ac} - \square h_{ab} - h_{,ab} - \eta_{ab}h^{cd}{}_{,cd} + \eta_{ab}\square h\right).$$

که در اینجا h، رد تانسور h_{ab}:

$$h \equiv \eta^{cd}h_{cd} = h^{c}{}_{c}$$

و $\square$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\square \equiv \eta^{ab}\partial_a\partial_b = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

حال با تعریف $\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h$ مجدداً تانسور ریچی و اسکالر ریچی و تانسور اینشتین را به ترتیب بازنویسی می‌کنیم:

$$R_{ab} = \frac{1}{2}\epsilon\left(\bar{h}^{c}{}_{a,bc} + \bar{h}^{c}{}_{b,ac} - \square h_{ab}\right),$$

$$R = \frac{1}{2}\epsilon\left(\bar{h}^{cd}{}_{,cd} - \square h\right),$$

$$G_{ab} = \frac{1}{2}\epsilon\left(\bar{h}^{c}{}_{a,bc} + \bar{h}^{c}{}_{b,ac} - \square\bar{h}_{ab} - \eta_{ab}\bar{h}^{cd}{}_{,cd}\right).$$

حالا با تبدیل مختصات $x^a \to x'^a = x^a + \xi^a$ و پیمانه $\square\xi^a = 0$ معادلات شد، $h_{ab} \to h'_{ab} = h_{ab} - 2\xi_{(a,b)}$ و قطعاً $\bar{h}^{a}{}_{b,a} = \frac{h_{,b}}{2}$ که این همان موضوع به پیمانه لورنتس است و به این دلیل، معمولاً آن را transverse و همراه شده با فرض $h = 0$، traceless پیمانه TT بدست می‌آید و با جایگذاری تانسور اینشتین در معادلات میدان، نتیجه‌ی خلاء که معادله موج باشد به ___ می‌آید.

- در محیط تهی از ماده شکل خطی شده‌ی معادله‌ی میدان معادله‌ی ① به شکل زیر تقلیل می‌یابد (در پیمانه‌ی TT):

$$\Box h_{ab} = 0 \qquad (2)$$

* چراکه اگر تهی از ماده باشد $T^{ab}=0$ فلذا معادله‌ی ① می‌شود:

$$\Box \bar{h}_{ab} = 0 \qquad (\star)$$

و می‌توان از معادله‌ی فوق رد گرفت که با توجه به پیمانه‌ی TT ردش صفر است:

$$\eta^{ab}\Box\bar{h}_{ab} = \Box(\eta^{ab}\bar{h}_{ab}) = \Box(h-2h) = -\Box h = 0$$

فلذا با توجه به تعریف $\bar{h}_{ab}$ در $(\star)$ و روابط فوق، به ② رسید.

- در واقع موج گرانشی به بیان ریاضیاتی تانسوری اختلالی است که بر روی متریک پس‌زمینه تعریف می‌شود و مثل هر موج دیگری تابعی از زمان و فضای سه‌بعدی است و البته با سرعت نور حرکت می‌کند.

- لازم به ذکر است که علاوه بر اینکه در محاسبات ما متریک پس‌زمینه flat انتخاب شده، می‌توان پس‌زمینه‌های دیگری مانند FRW را نیز کار کرد.

- همچنین اشاره می‌شود که برای بررسی موج گرانشی حاصل از منابع قوی گرانشی نمی‌توان از معادلات خطی شده‌ی اخیر استفاده کرد.

- امواج گرانشی تخت و قطبش آن‌ها

• برای جواب خاص معادله‌ی تهی‌ساز فضای خالی میدان که می‌تواند موج تخت در راستای x را نشان دهد می‌توان نشان داد به صورت زیر می‌باشد در پیمانه‌ی TT:

$$h_{ab} = h_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + h_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

که جمله‌ی اول به قطبش $+$ و جمله‌ی دوم به قطبش $\times$ موسوم می‌باشند.

* برای نشان دادن این مطلب ابتدا با اتخاذ یک موج تخت در راستای x باید نوشت:

$$h_{ab,2} = h_{ab,3} = 0$$

بنابراین با توجه به تانسور ریمان در حالت می‌توان درجات آزادی تانسور ریمان را که n بعدی، $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ است کاهش داد. چرا که موج تخت کلاً سه دسته مؤلفه دارد که به صورت زیر است:

$$R_{0123} = R_{0223} = R_{0323} = R_{1223} = R_{1223} = R_{1323} = R_{2323} = 0,$$

$$R_{0101} = \frac{1}{2}\epsilon\left(2h_{01,01} - h_{00,11} - h_{11,00}\right)$$

$$R_{0102} = \frac{1}{2}\epsilon\left(h_{02,01} - h_{12,00}\right)$$

$$R_{0103} = \frac{1}{2}\epsilon\left(h_{03,01} - h_{13,00}\right).$$

$$R_{0112} = \frac{1}{2}\epsilon\left(h_{02,11} - h_{12,01}\right).$$

$$R_{0113} = \frac{1}{2}\epsilon\left(h_{03,11} - h_{13,01}\right).$$

$$R_{0202} = -\frac{1}{2}\epsilon h_{22,00} \qquad R_{0213} = -\frac{1}{2}\epsilon h_{23,01} \qquad R_{1212} = -\frac{1}{2}\epsilon h_{22,11}$$

$$R_{0203} = -\frac{1}{2}\epsilon h_{23,00} \qquad R_{0303} = -\frac{1}{2}\epsilon h_{33,00} \qquad R_{1213} = -\frac{1}{2}\epsilon h_{23,11}$$

$$R_{0212} = -\frac{1}{2} h_{22,01} \qquad R_{0313} = -\frac{1}{2}\epsilon h_{33,01}. \qquad R_{1313} = -\frac{1}{2}\epsilon h_{33,11}$$

که دسته دوم نیز با توجه به اینکه تانسور ریچی باید صفر باشد صفر می‌شود، چرا که به عنوان مثال می‌توان گفت:

$$R_{13} = R^{a}{}_{1a3} = R_{0103} = 0$$

بنابراین فقط دو دسته جواب داریم که یا صفر است یا متناسب با h_{22}، h_{23} و یا h_{33} می‌باشند و مابقی صفر می‌شوند. بنابراین اختلال را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} h_{22} & h_{23} \\ +h_{23} & h_{33} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

که با توجه به پیمانه TT که باید اختلال بدون رد باشد، باید $h_{22}=h_{33}$ باشد و بدین ترتیب به نتیجه رسیدیم:

- برای قطبش + می‌توان نشان داد که ذرات را به صورت شکل زیر جابجا می‌کند در پیمانه TT!

$h_{23}=0,\ h_{22}>0$ $\qquad$ $h_{23}=h_{22}=0$ $\qquad$ $h_{23}=0,\ h_{22}<0$

* چرا که اگر فقط قطبش + را داشته باشیم، $h_{23}=0$ می‌شود و می‌توان المان طول را به صورت زیر تشکیل داد:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - [1 - \epsilon h_{22}(t-x)]dy^2 - [1 + \epsilon h_{22}(t-x)]dz^2$$

حال اگر دو ذره در (y_0, z_0) و $(y_0, z_0 + dz)$ در نظر بگیریم، می‌توان گفت المان طول می‌شود:

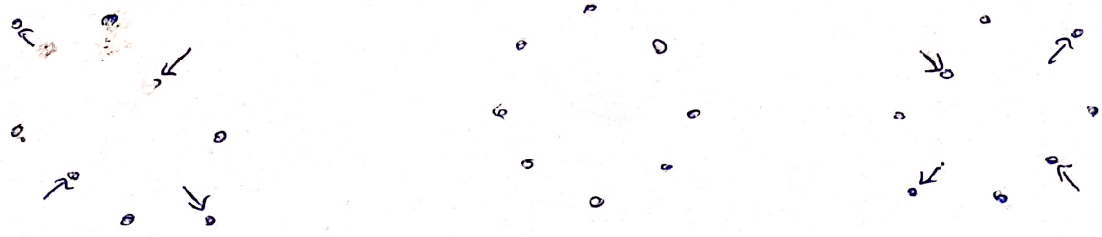
$$d\sigma^2 = -ds^2 = (1 - \epsilon h_{22})dy^2$$

که اگر $h_{22}>0$ باشد، ذرات نزدیک می‌شوند و $h_{22}<0$ باشد، ذرات دورتر می‌شوند و $h_{22}=0$ باشد، ثابت می‌مانند.

برای محور افقی نیز می‌توان به همین منوال گفت:

$$d\sigma^2 = -ds^2 = (1 + \epsilon h_{22})dz^2$$

• برای قطبش × میدان نشان داد که ذرات به صورت زیر جابجا می‌شوند در پیمانه TT:



$h_{22}=0, h_{23}>0$ $\qquad$ $h_{22}=0, h_{23}=0$ $\qquad$ $h_{22}=0, h_{23}<0$

* می‌توان نشان داد این مقطع با در نظر گرفتن $h_{22}=0$ در پیمانه TT المان طول را:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 + 2\epsilon h_{23}(t-x)\, dy\, dz - dz^2$$

که با تبدیل 45° مختصات با تبدیل مختصات زیر به همان المان طول مورد قبل یعنی قطبش + برمی‌گردد:

$$y \to \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z), \qquad z \to \bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y+z).$$

بنابراین همان استدلال‌های اخیر بعدها را توجیه می‌کند.

• لازم به ذکر است که دو قطبش داشتن [illegible] می‌تواند ارتباط داشته باشد با اسپین دو بودن گراویتون

- انرژی امواج گرانشی:

• میتوان نشان داد انرژی حمل شده ای که به موج گرانشی متعلق است را به صورت زیر است که به تانسور

انرژی تکانه‌ی ایساکسون معروف می‌باشد:

$$\tilde{T}_{ab} \equiv \langle t_{ab} \rangle = \frac{1}{32\pi} \langle h_{cd,a} h^{cd}{}_{,b} - \frac{1}{2} h_{,a} h_{,b} - h^{cd}{}_{,c} h_{ad,b} - h^{cd}{}_{,c} h_{bd,a} \rangle \quad (4)$$

که با پیمانه‌ی TT میتوان به فرم زیر تقلیلش داد:

$$\tilde{T}_{ab} = \frac{1}{32\pi} \langle h_{cd,a} h^{cd}{}_{,b} \rangle \quad (5)$$

* چرا نشان دادن این موضوع میتوان در پیمانه‌ی TT برای یک موج تخت برقرار است و با شکل h_{ab} و ... گرانش را مستقلا اگر انرژی را به دست آورد به سختی این موضوع روشن می‌شود.

* راه سیستماتیک به دست آوردن این موضوع بسط دادن تا تقریب مرتبه‌ی دوم معادله‌ی میدان است که تانسور ریچی مرتبه‌ی دوم به سمت راست معادله با میدان منجر به ساخته شدن انرژی تکانه می‌شود.

* اطلاعات بیشتر در بخش 21.8 کتاب اینورنو

• میتوان برای یک موج تخت مونوکروماتیک که شامل قطبش + و × باشد انرژی را به دست آورد:

$$\tilde{T}_{00} = \frac{(h_\times^2 + h_+^2)\,\omega^2}{32\pi} \quad (6)$$

$$\tilde{T}_{03} = \frac{(h_\times^2 + h_+^2)\,\omega^2}{32\pi} \quad (7)$$

و همینطور

که در آن ها نشان موج مسطح گرانشی به صورت زیر باشد:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times \\ 0 & h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \sin(\omega(t-z))$$

* اثبات در بخش 21.8 کتاب اینورنو.

پاسخ معادلهٔ موج گرانشی

• می‌توان نشان داد برای یک سامانه که منبع در $\vec{x}$ باشد و مشاهده‌گر در $\vec{y}$ باشد، با تعریف $\frac{1}{r} = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$،

پاسخ معادلهٔ موج گرانشی معادلهٔ (1) به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{h}_{ab}(t,\vec{x}) = -\frac{2k}{4\pi r}\int_{\vec{y}\in\mathbb{R}^3} T_{ab}(t-r,\vec{y})\, d^3y \qquad (8)$$

توجه بشود که اگر $G=c=1$ باشد $k=8\pi$ است.

★ اثبات در بخش 4.5 کتاب اینورنو.

• در فواصل دور، پاسخ معادلهٔ موج گرانشی را با چندقطبی‌ها می‌توان تقریب زد و جملهٔ غالب که چارقطبی‌ها باشند به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{h}_{ab} = -\frac{2}{r}\ddot{I}_{ab}(t-r) \qquad (9)$$

که در آن I_{ab}، ممان دوم جرم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$I_{ab} = \int_{y\in\mathbb{R}^3} y^a y^b T^{00}(t,\vec{y})\, d^3\vec{y} \qquad (10)$$

★ چرا که با توجه به پایستگی انرژی معادلات $\nabla_a T^{ab}=0$ ولی چون پس‌زمینه flat است در تقریب خطی:

$$\partial_a T^{ab}=0$$
$$\partial_t T^{00} = \partial_j T^{j0}$$

که با $b=0$ معادل است،

که با مشتق‌گیری معادل است:

$$\frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 T^{j0}}{\partial t\,\partial x^j} = -\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial T^{j0}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial T^{jk}}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial^2 T^{jk}}{\partial x^j\,\partial x^k}$$

که با ضرب طرفین در $x^l x^m$ می‌توان نوشت با انتگرال‌گیری روی فضا:

$$\int_{\vec{x}\in\mathbb{R}^3} x^l x^m \frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2}\, d^3\vec{x} = \int_{x\in\mathbb{R}^3} x^l x^m \frac{\partial^2 T^{jk}}{\partial x^j \partial x^k}\cdot d^3\vec{x}$$

$$= -\int_{x\in\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(x^l x^m\right) \frac{\partial T^{jk}}{\partial x^k}\, d^3\vec{x}$$

$$= -\int_{\vec{x}\in\mathbb{R}^3} \left(\delta^l_j x^m + \delta^m_j x^l\right) \frac{\partial T^{jk}}{\partial x^k}\, d^3\vec{x}$$

$$= \int_{\vec{x}\in\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\delta^l_j x^m + \delta^m_j x^l\right) T^{jk}\, d^3\vec{x}$$

$$= \int_{\vec{x}\in\mathbb{R}^3} \left(\delta^l_j \delta^m_k + \delta^m_j \delta^l_k\right) T^{jk}\, d^3\vec{x}$$

$$= \int_{x\in\mathbb{R}} 2T^{lm}\, d^3\vec{x}$$

با تغییر متغیر به $\vec{y}$ می‌توان نوشت:

$$\int_{y\in\mathbb{R}^3} T^{ab}\, d^3\vec{y} = \frac{1}{2}\int_{y\in\mathbb{R}^3} y^a y^b \frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2}\, d^3\vec{y}$$

که با جایگذاری در معادله (8) جواب معادله میدان گرانش به تقریب خطی را رسید.

- حال می‌توان به شکل ساده‌ای امواج گرانشی تولید شده را محاسبه کرد که در فواصل دور جمله‌ی غالب همان جمله‌ی چهارقطبی می‌باشد. لازم به ذکر است که به دلیل عدم وجود جملات قطبی‌های پایین‌تر سامانه‌های ستاره‌ای نمی‌توانند بیانگر منبع امواج باشند. والبته جمله‌ی تک‌قطبی به دلیل نداشتن جرم منفی قابل حذف شده است.
- می‌توان نشان داد شار انرژی چهارقطبی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{5}\left\langle \dddot{\mathcal{I}}_{ab}\, \dddot{\mathcal{I}}^{ab} \right\rangle \tag{11}$$

که در آن تانسور چهارقطبی کاهش یافته تعریف شده است:

$$\mathcal{I}_{ab} = I_{ab} - \frac{1}{3}\delta_{ab} I \tag{12}$$

ـ سامانه‌ی دوتایی و امواج گرانشی:

• برای یک سامانه‌ی دوتایی با جرم‌های یکسان میتوان دید که فرض کنیم مدارشان دایره‌ای است. بعداً زیر حاصل میشود:

$$\bar{h}_{ab} = \frac{8m}{r}\Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} \cos(2\Omega(t-r)) & \sin(2\Omega(t-r)) & 0 \\ \sin(2\Omega(t-r)) & -\cos(2\Omega(t-r)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

که در آن $\Omega = \left(\frac{mG}{4R^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ و $R=2a$ قطر دایره میباشد.

* چرا که اگر یک سامانه‌ی دوتایی گرانشی را بنویسیم میشود:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1|\dot{\vec r}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec r}_2|^2 + \frac{G m_1 m_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|}$$

حال با تعریف فاصله‌ی نسبی $\vec r \equiv \vec r_1 - \vec r_2$ و مرکز جرم $\vec{\bar r} = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2}{m_1+m_2}$ میتوان نوشت:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)|\dot{\vec{\bar r}}|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)|\dot{\vec r}|^2 + \frac{G m_1 m_2}{|\vec r|}$$

که با نشستن در مرکز جرم جمله‌ی اول حذف می‌شود. و در مختصات کروی میتوان نوشت:

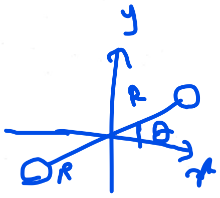
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + \frac{G m_1 m_2}{r}$$

که با حل معادله‌ی اویلر-لاگرانژ و با توجه به بقای تکانه‌ی زاویه‌ای میتوان نوشت با تعریف $R \equiv 2a$. دقیقاً از رابطه است.

$$\Omega \equiv \dot\varphi = \left(\frac{m G}{4R^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

یا به عبارتی:

$$R = \left(\frac{m}{4\Omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$



* در مختصات دکارتی میتوان مختصات دو جرم را به صورت زیر نوشت: $\Omega = \dot\theta = \frac{\theta}{t}$ چرا که $\theta = \Omega t$:

$$x_1 = R\cos(\Omega t),\ y_1 = R\sin(\Omega t) \quad , \quad x_2 = -R\cos(\Omega t),\ y_2 = -R\sin(\Omega t)$$

بنابراین میتوان نوشت: چرا که $E=\sqrt{p^2+m^2}$ ، $p=0$ لذا: $E=m$:

$$T^{00} = m\,\delta(z)\,[\delta(x - R\cos(\Omega t))\,\delta(y - R\sin(\Omega t)) + \delta(x + R\cos(\Omega t))\,\delta(y + R\sin(\Omega t))].$$

بنابراین طبق رابطه (10) ممان‌های درجه دوم به صورت زیر حساب می‌شود:

$$I_{xx} = 2mR^2\cos^2(\Omega t) = mR^2(1+\cos(2\Omega t))$$

$$I_{yy} = 2mR^2\sin^2(\Omega t) = mR^2(1-\cos(2\Omega t))$$

$$I_{xy} = 2mR^2\cos(\Omega t)\sin(\Omega t) = mR^2\sin(2\Omega t)$$

باقی درایه‌ها: $I_{ij} = 0$

حال با فرض اینکه حرکت روی صفحه $z=0$ باشد، میتوان با توجه به رابطه (9) به دست آورد که امواج گرانشی به فرم (13) می‌باشد.

• میتوان نشان داد که شار انرژی امواج گرانشی چهارقطبی به سامانه دوتایی با جرم‌های یکسان و مدار دایره‌ای به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{128}{5} m^2 R^4 \Omega^6 \qquad (14)$$

* حال با توجه به ممان دوم جرم که در ابتدا اضافه حساب کردیم میتوان تانسور چهارقطبی کاهش یافته را که در (12) تعریف شده به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{I}_{ab} = mR^2\begin{pmatrix} \cos(2\Omega t)+\frac{1}{3} & \sin(2\Omega t) & 0 \\ \sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t)+\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

و یا به عبارتی:

$$\dddot{\mathcal{I}}_{ab} = 8mR^2\Omega^3\begin{pmatrix} \sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) & 0 \\ -\cos(2\Omega t) & -\sin(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

که میتوان نوشت:

$$\dddot{\mathcal{I}}_{ab}\dddot{\mathcal{I}}^{ab} = 64m^2R^4\Omega^6(2\sin^2(2\Omega t)+2\cos^2(2\Omega t)) = 128m^2R^4\Omega^6$$

بنابراین با جایگذاری در رابطه (9) میتوان شار انرژی را به صورت (14) پیدا کرد.

• حال باید نشان دهیم با توجه به اینکه در (14) نشان داده شد انرژی دارد انتقال می‌یابد با کاهش انرژی سامانه، شعاع یا R کاهش یابد یا به عبارتی معادل دوره تناوب، T، افزایش یابد که می‌توان نشان داد برای سامانه دوتایی هم‌جرم در مدار دایره‌ای به صورت زیر است: با توجه به قانون (۳) کپلر:

$$\frac{dT}{dt} = 2^{2/3}\left(\frac{96\pi}{5}\right)\left(\frac{2m\pi}{T}\right)^{5/3} \qquad (15)$$

توجه شود که $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ = بسامد زاویه‌ای.

ب.

* برای نشان دادن این موضوع ابتدا انرژی کل را به صورت نیوتنی می‌توان نوشت:

$$E = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) - \frac{m^2}{2R}$$

$$= mR^2\Omega^2 - \frac{m^2}{2R}$$

$$= -\frac{m}{4}\left(\frac{4m\pi}{T}\right)^{2/3}$$

با توجه به قانون سوم کپلر:

حال با مشتق‌گیری می‌توان نوشت:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2m^2\pi}{3T^2}\left(\frac{4\pi m}{T}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{dT}{dt}.$$

حال با توجه به تعریف $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ و $\frac{dE}{dt}$ که در (14) به دست آوردیم می‌توان از معادله‌ی فوق (15) را به دست آورد.