پاسخنامه‌ی ۵ تمرینات کوانتوم پیشرفته ۲

(سوال 3.37) رابطه‌ی مقابل را می‌خواهیم نشان دهیم:

$$\sum_{m=-j}^{j} |d^{(j)}_{mm'}(\beta)|^2 m = m'\cos\beta$$

+ با توجه به زوایای اویلر در کتاب ساکورایی، رابطه‌ی مقابل را می‌توان نوشت:

$$D[R] = D[R(\alpha,\beta,\gamma)] = e^{-\frac{i}{\hbar}J_z\alpha}\, e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta}\, e^{-\frac{i}{\hbar}J_z\gamma}$$

بنابراین می‌توان با ماتریس d نوشت:

$$D^{(j)}_{m'm} = \langle jm'|D(R)|jm\rangle$$

$$= e^{-i(m'\alpha+m\gamma)} \underbrace{\langle jm'|e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta}|jm\rangle}_{=d^{(j)}_{m'm}(\beta)} = e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}\, d^{(j)}_{m'm}(\beta)$$

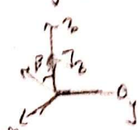
+ حالا مقدار لازم است:

$$\sum_{m=-j}^{j} |d^{(j)}_{mm'}(\beta)|^2 m = \sum_{m=-j}^{j} \langle jm'|e^{\frac{i}{\hbar}J_y\beta}|jm\rangle m \langle jm|e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta}|jm'\rangle$$

با توجه به اینکه ویژه مقدار J_z، $m\hbar$ است می‌توان نوشت:

$$\sum_{m=-j}^{j} |d^{(j)}_{mm'}(\beta)|^2 m = \frac{1}{\hbar}\sum \langle jm'|e^{\frac{i}{\hbar}J_y\beta} \underbrace{J_z|jm\rangle\langle jm|}_{} e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta}|jm'\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar}\langle jm'| \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}J_y\beta}\, J_z\, e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta}}_{} |jm'\rangle$$



چرخش J_z حول y به اندازه‌ی β.

$$= \frac{1}{\hbar}\langle jm'|(J_z\cos\beta + J_x\sin\beta)|jm'\rangle = m'\cos\beta$$

ویژه مقدار $m'\hbar$ را دارد.

ویژه مقدار ندارد.

+ حال این رابطه را به ازای $j=\frac{1}{2}$ بررسی می‌کنیم، معادله‌ای که داریم: $d^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\beta}{2}) & -\sin(\frac{\beta}{2}) \\ \sin(\frac{\beta}{2}) & \cos(\frac{\beta}{2}) \end{pmatrix}$، بنابراین می‌توان سمت چپ معادله را به دست آورد:

$$\sum_{m=-j}^{j} |d^{(\frac{1}{2})}_{\frac{1}{2}m}(\beta)|^2 m = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos(\beta)$$

$$\sum_{m=-j}^{j} |d^{(\frac{1}{2})}_{-\frac{1}{2}m}(\beta)|^2 m = \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cos(\beta)$$

(b) 3.37 می‌خواهیم نشان دهیم:

$$\sum_{m=-j}^{j} |d^{(j)}_{m'm}(\beta)|^2 m^2 = \frac{1}{2} j(j+1)\sin^2\beta + m'^2 \frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1)$$

+ به طور مشابه می‌توان نوشت:

$$\sum_{m=-j}^{j} |d^{(j)}_{m'm}(\beta)|^2 m^2 = \frac{1}{\hbar^2} \langle j m' | e^{-\frac{i}{\hbar} J_y \beta} J_z^2 \, e^{\frac{i}{\hbar} J_y \beta} | j, m' \rangle$$

+ از طرف دیگر می‌توان J_z^2 را به صورت یک تانسور دکارتی تفکیک کرد به یک کمیت نرده‌ای و تانسور بدون رد (مطابق رابطهٔ ...):

$$J_z^2 = \underbrace{\frac{1}{3} J^2}_{\text{نرده‌ای}} + \underbrace{\left(J_z^2 - \frac{1}{3} J^2\right)}_{\text{تانسور مرتبه دو}}$$ (شبیه به معادله 3.4.56)

شبیه اینجا وقتی J_z^2 حول y به اندازه β دوران پیدا می‌کند، نرده‌ای که ثابت می‌ماند و تانسور مرتبه دو مانند مقابل عمل می‌کند:

$$D^{\dagger}(R)\, T_q^{(2)}\, D(R) = \sum_{q=-2}^{2} D^{(2)}_{q'q} T^{(2)}_{q'}$$

با توجه به اینکه تنها ویژه مقدار عبارت فوق را می‌خواهیم حساب کنیم، به ازای J_z فقط مقدار داریم لذا در جمع q، فقط جمله $T_0^{(2)}$ است که شامل J_z خواهد بود با توجه به 3.469 لذا:

$$\sum_{-j}^{j} |d^{(j)}_{m'm}(\beta)|^2 m^2 = \frac{1}{\hbar^2}\Big\{ \underbrace{\langle j m' | D^{\dagger}\left(\frac{1}{3} J^2\right) D | j m' \rangle}_{\text{خودش می‌شود} \; = \frac{1}{3} J^2} + \underbrace{\langle j m' | D^{\dagger} T_q^{(2)} D | j m' \rangle}_{\text{فقط شامل جمله } T_0^{(2)} \text{ است می‌شود}} \Big\}$$

ویژه مقدارش است: $\hbar^2 j(j+1)$

$$= \underbrace{D^{(2)}_{00}(\beta)}_{\sqrt{4\pi/5}\, Y_2^0 \,=\, \sqrt{5/16\pi}\,(3\cos^2\beta - 1)} \Big\{ \underbrace{J_z^2}_{m'^2\hbar^2} - \frac{1}{3} \underbrace{J^2}_{\text{ویژه مقدار } \hbar^2 j(j+1)} \Big\}$$

$$= \frac{1}{3} j(j+1)\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos^2\beta\right] + \frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1) m'^2$$

$$= \frac{1}{2} j(j+1)\sin^2\beta + m'^2 \frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1)$$

(a) - 3.38 ـ می‌خواهیم نشان دهیم که:

$$J_y^{(j=1)} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}\,i & 0 \\ \sqrt{2}\,i & 0 & -\sqrt{2}\,i \\ 0 & \sqrt{2}\,i & 0 \end{pmatrix}$$

+ با توجه به تعریف $J_\pm = J_x \pm i J_y$ می‌توان گفت که $J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$ بنابراین می‌توان گفت عناصر ماتریسی J_y برابر با ... می‌شود با:

$$\langle j, m' | J_y | j, m\rangle = \frac{1}{2i}\left(\langle j, m' | J_+ | j\, m\rangle - \langle j\, m' | J_- | j\, m\rangle\right) \quad (\mathrm{I})$$

با توجه به روابط مقابل: (II)

$$\langle j\, m' | J_\pm | j\, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,\hbar\, \delta_{j j}\, \delta_{m', m\pm 1}$$

می‌توان با جایگذاری (II) در (I) نوشت:

$$\langle j, m' | J_y | j, m\rangle = \frac{\hbar}{2i}\Big\{\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,\langle j, m' | j, m+1\rangle$$

$$- \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,\langle j, m' | j, m-1\rangle\Big\}$$

$$= \frac{\hbar}{2i}\Big\{\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,\delta_{m', m+1} - \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,\delta_{m', m-1}\Big\}$$

+ حالا با استفاده از رابطه فوق به ازای $j=1$ ، ماتریس را می‌توان ساخت.

(b) 3.38 به ازای $j=1$ می‌خواهیم نشان دهیم که:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta} = 1 - i\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)\sin\beta - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2(1-\cos\beta)$$

با بسط دادن e را بسط می‌دهیم:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-i J_y\frac{\beta}{\hbar}\right)^n$$

$$= 1 - i J_y\frac{\beta}{\hbar} + \frac{1}{2!}\left(-iJ_y\frac{\beta}{\hbar}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-iJ_y\frac{\beta}{\hbar}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(-iJ_y\frac{\beta}{\hbar}\right)^4 + \dots$$

$$= 1 - iJ_y\frac{\beta}{\hbar} - \frac{1}{2!}\left(J_y\frac{\beta}{\hbar}\right)^2 + \frac{i}{3!}\left(J_y\frac{\beta}{\hbar}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(J_y\frac{\beta}{\hbar}\right)^4 + \dots$$

$$= 1 - i\left(J_y\frac{\beta}{\hbar} - J_y^3\left(\frac{\beta}{\hbar}\right)^3 + \dots\right) + \left\{-\frac{1}{2}\left(J_y\frac{\beta}{\hbar}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(J_y\frac{\beta}{\hbar}\right)^4 + \dots\right\} \quad (\mathrm{III})$$

$$\left(\frac{J_y^{j=1}}{\hbar}\right)^{2N} = \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 \quad ; \quad \left(\frac{J_y^{(j=1)}}{\hbar}\right)^{2N+1} = \frac{J_y}{\hbar}$$

با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (a) می‌توان نوشت:

لذا می‌توان عبارت II را بسط داد:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta} = 1 - i\frac{J_y}{\hbar}\left(\beta - \frac{\beta^3}{3!} + \cdots\right) + \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2\left(-\frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + \cdots\right)$$

از طرفی می‌دانیم $\sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} + \cdots$ و $\cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + \cdots$ بنابراین:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta} = 1 - i\frac{J_y}{\hbar}\sin\beta - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2(1-\cos\beta)$$

3.38 - (c) با توجه به نتیجه قسمت (a) سوال می‌توان گفت:

$$d^{(j=1)}(\beta) = e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta} = 1 - i\frac{J_y}{\hbar}\sin\beta - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2(1-\cos\beta)$$

با جایگذاری ماتریس J_y از قسمت (a) می‌توان نوشت:

$$d^{(j=1)}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}i & 0 \\ \sqrt{2}i & 0 & -\sqrt{2}i \\ 0 & \sqrt{2}i & 0 \end{pmatrix}\sin\beta - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}(1-\cos\beta)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \cos\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\beta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \frac{1}{2}(1+\cos\beta) \end{pmatrix}$$

3.62 با توجه به معادله 3.38 میتوان نوشت:

$$\sum_{q'} d^{(1)}_{qq'}(\beta)\, V^{(1)}_{q'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\beta) & -\frac{1}{\sqrt2}\sin\beta & \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \\ \frac{1}{\sqrt2}\sin\beta & \cos\beta & -\frac{1}{\sqrt2}\sin\beta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\beta) & \frac{1}{\sqrt2}\sin\beta & \frac{1}{2}(1+\cos\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^{(1)}_{+} \\ V^{(1)}_{0} \\ V^{(1)}_{-} \end{pmatrix}$$

با جایگذاری $V^{(1)}_{\pm} = \mp \frac{V_x \pm i V_y}{\sqrt2}$ و $V^{(1)}_0 = V_z$ در عبارت فوق میتوان به دست آورد:

$$\sum_{q'} d^{(1)}_{qq'}(\beta) V^{(1)}_{q'} = \begin{pmatrix} -\cos\beta \frac{V_x}{\sqrt2} - i\frac{V_y}{\sqrt2} - \sin\beta \frac{V_z}{\sqrt2} \\ -V_x \sin\beta + V_z \cos\beta \\ \cos\beta \frac{V_x}{\sqrt2} - i\frac{V_y}{\sqrt2} + \sin\beta\frac{V_z}{\sqrt2} \end{pmatrix}$$

حل مسئله 3-(9) با توجه به قضیه ویگنر-اکارت داریم:

$$\langle \alpha' j' m' | T^{(k)}_q | \alpha, jm\rangle = \langle j k; m q | j k; j' m'\rangle \frac{\langle \alpha' j' \| T^{(k)} \| \alpha j\rangle}{\sqrt{2j+1}}$$

به $T^{(1)}_{\pm1} = \mp\frac{(x \pm iy)}{\sqrt2}$ و $T^{(1)}_0 = z$ میتوان گفت:

$$\langle n, l' m' | T^{(1)}_q | n, l m\rangle = \langle l 1; m q | l 1; l' m'\rangle \frac{\langle n' l' \| T^{(1)} \| n l\rangle}{\sqrt{(2l+1)}}$$

که در واقع به شرط $m' = m+q$ ، $|l-1| \le l' \le l+1$ غیرصفر خواهند بود.

ابتدا با توجه به اینکه $T^{(1)}$ میتوان گفت:

$$\pi^{-1} T^{(1)} \pi = -T^{(1)} \qquad \text{I}$$

از طرف دیگر چون پتانسیل مربوطه متقارن کروی است حالات کروی دارای پاریته هستند $|nlm\rangle$ ویژه کت همزمان پاریته نیز میباشد:

و به عبارتی داریم:

$$\pi |nlm\rangle = (-1)^l |nlm\rangle. \qquad \text{II}$$

با اثر دادن $|nlm\rangle$ در رابطه (I):

$$\langle n'l'm'|\pi^{\dagger}T^{(1)}\pi|nlm\rangle = -\langle n'l'm'|T^{(1)}|nlm\rangle$$

با توجه به رابطه (II):

$$(-1)^{l+l'}\langle n'l'm'|T^{(1)}|nlm\rangle = -\langle n'l'm'|T^{(1)}|nlm\rangle$$

لذا شرط تعیین کردیم که $l+l'$ باید فرد باشد تا $\langle n'l'm'|T^{(1)}|nlm\rangle$ غیر صفر باشد.

بنابراین با دو شرط اضافه می‌توان دو عنصر را به هم مرتبط ساخت:

$$\langle n'l'm'|T_0^{(1)}|nlm\rangle = \langle l1;m0|l1;l'm'\rangle \frac{\langle n'l'\|T^{(1)}\|nl\rangle}{\sqrt{2l+1}}$$

$$\langle n'l'm'|T_{\pm}^{(1)}|nlm\rangle = \langle l1;m(\pm1)|l1;l'm'\rangle \frac{\langle n'l'\|T^{(1)}\|nl\rangle}{\sqrt{2l+1}}$$

با تقسیم دو عبارت می‌توان نوشت:

$$\frac{\langle n'l'm'|T_0^{(1)}|nlm\rangle}{\langle n'l'm'|T_{\pm}^{(1)}|nlm\rangle} = \frac{\langle l1;m0|l1;l'm'\rangle}{\langle l1;m(\pm1)|l1;l'm'\rangle}$$

ابتدا هامیلتونی را برحسب S^2, S_z و S_+, S_- می‌نویسیم: (3.46)

$$H_{int} = \frac{eQ}{2S(S-1)\hbar^2}\left\{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 S_x^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 S_y^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 S_z^2\right\}$$

با توجه به اینکه $S_x^2 = \frac{1}{4}[S_+^2 + S_-^2 + 2(S^2 - S_z^2)]$ ، $S_y^2 = -\frac{1}{4}\{S_+^2 + S_-^2 - 2(S^2 - S_z^2)\}$:

$$H_{int} = \frac{eQ}{2S(S-1)}\left\{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 \frac{1}{4}\{S_+^2 + S_-^2 + 2(S^2 - S_z^2)\}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 \frac{1}{4}\{S_+^2 + S_-^2 - 2(S^2 - S_z^2)\} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 S_z^2\right\}$$

$$= \frac{eQ}{2S(S-1)}\left\{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0\right](S_+^2 + S_-^2)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0\right](S^2 - S_z^2) + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 S_z^2\right\}$$

با توجه به معادله پواسون $\nabla^2\phi = 0$:

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 = -\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0$$

بنابراین:

$$H_{int} = A(3S_z - S^2) + B(S_+^2 + S_-^2)$$

که در آن:

$$A = \frac{eQ}{4S(S-1)\hbar^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0$$

$$B = \frac{eQ}{8S(S-1)\hbar^2}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0\right].$$

حال با توجه به اینکه مسئله با اسپین $\frac{3}{2}$ داشته باشیم، $|s,m\rangle$ را تشکیل داده، H_{int} را به آن اثر می‌دهیم.

$$H_{int}|s,m\rangle = A(3S_z - S^2)|s,m\rangle + B(S_+^2 + S_-^2)|s,m\rangle$$

$$= 3Am^2\hbar|s,m\rangle - \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\right)A\hbar^2|s,m\rangle$$

$$+ B\hbar^2\sqrt{(s-m)(s+m+1)}\sqrt{(s-m-1)(s+m+2)}\,|s,m+2\rangle$$

$$+ B\hbar^2\sqrt{(s+m)(s-m+1)}\sqrt{(s+m-1)(s-m+2)}\,|s,m-2\rangle$$

حال عناصر ماتریس H_{int} را محاسبه می‌کنیم:

$$\langle s,m'|H_{int}|s,m\rangle = 3Am^2\hbar^2\delta_{m,m'} - \frac{15}{3}A\hbar^2\delta_{m,m'}$$

$$+ B\hbar^2\sqrt{\left(\frac{3}{2}-m\right)\left(\frac{3}{2}+m+1\right)}\sqrt{\left(\frac{3}{2}-m-1\right)\left(\frac{3}{2}+m+2\right)}\,\delta_{m',m+2}$$

$$+ B\hbar^2\sqrt{\left(\frac{2}{3}+m\right)\left(\frac{3}{2}-m+1\right)}\sqrt{\left(\frac{3}{2}+m-1\right)\left(\frac{3}{2}-m+2\right)}\,\delta_{m',m-2}$$

با توجه به اینکه $m, m' = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$ ماتریس H_{int} به صورت زیر است:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} m = -3/2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \\ H_{int} = \hbar & \begin{pmatrix} 3A & 0 & 2\sqrt{3}B & 0 \\ 0 & -3A & 0 & 2\sqrt{3}B \\ -2\sqrt{3}B & 0 & -3A & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3}B & 0 & 3A \end{pmatrix} \begin{array}{c} -3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ \shortparallel \\ m' \end{array} \end{array}$$

با جابجا کردن دو سطر و ستون می‌توان ماتریس را به شکل بلوک قطری نوشت:

$$H_{int} = \begin{pmatrix} 3A & 2\sqrt{3}B & & \\ 2\sqrt{3}B & -3A & & 0 \\ & & -3A & 2\sqrt{3}B \\ & 0 & 2\sqrt{3}B & 3A \end{pmatrix}$$

حال برای بدست آوردن ویژه مقادیر انرژی H_{int}، دترمینان را صفر می‌گذاریم:

$$\det(H_{int} - \lambda I) = 0$$

$$\lambda = \pm\hbar^2\sqrt{9A^2+12B^2}.$$

جواب‌ها عبارت‌اند از:

بنابراین به چهار ویژه مقدار (دو m_s های مختلف) دو تبهگنی داریم.

برای بدست آوردن ویژه توابع نیز باید حل کنیم:

$$(H_{int} - \lambda I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

$$(3A - \lambda'_{\pm})a + 2\sqrt{3}Bb = 0 \qquad (-3A - \lambda'_{\pm})c + 2\sqrt{3}Bd = 0$$

$$2\sqrt{3}Ba + (-3A - \lambda'_{\pm})b = 0 \qquad 2\sqrt{3}Bc + (3A - \lambda'_{\pm})d = 0$$

که در آن $\lambda'_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm}}{\hbar^2}$ است.

$$\frac{a}{b} = \frac{-2\sqrt{3}\,B}{3A - \lambda'_\pm} \quad , \quad \frac{c}{d} = \frac{-2\sqrt{3}\,B}{-3A - \lambda'_\pm}$$ بنابراین باید داشته باشیم :

هر یک از معادلات فوق معرف یک ویژه‌حالت است که در آن دو درایه ترکیب شده و حالات ~~اختلال~~ هستند. بنابراین:

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\,B \\ \lambda'_\pm - 3A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\sqrt{3}\,B \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right\rangle + (\lambda_\pm - 3A)\left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$|\beta\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_\pm + 3A \\ 2\sqrt{3}\,B \end{pmatrix} = (\lambda_\pm + 3A)\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle + 2\sqrt{3}\,B \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\right\rangle$$