فصل اول – مفاهیم اساسی

- آزمایش Stern-Gerlach.

قبل از وارد شدن به خود آزمایش چند نکته از الکترومغناطیس را یادآوری می‌کنیم:

- اگر ذره باردار دارای تکانه زاویه‌ای باشد، دارای ممان مغناطیسی خواهد بود.

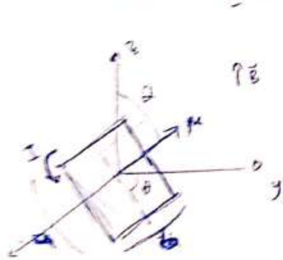
در واقع اگر ذره باردار حول مداری در حرکت باشد ایجاد جریان خواهد کرد:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{-e}{T} = \frac{-e}{\frac{2\pi R}{v}} = \frac{-ev}{2\pi R} \longrightarrow I\pi R = -\frac{ev}{2} \xrightarrow{\times R} I\underbrace{\pi R^2}_{=A} = -\frac{evR}{2}$$

$$\longrightarrow \underbrace{IA}_{=\mu} = -\frac{evR}{2} \xrightarrow{\mu = I\int da} \mu = \frac{-evR}{2} = \frac{-evmR}{2m}$$

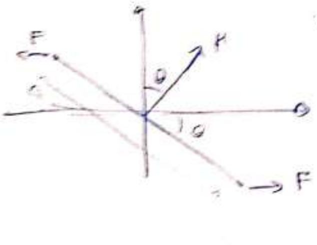
$$\longrightarrow \mu = \frac{-e}{2m}\underbrace{R\times mv}_{=L} = \frac{-e}{2m}L \longrightarrow \underline{\mu = \gamma L \ ; \ \gamma = \frac{-e}{2m}}$$

- اگر ذره‌ای دارای ممان دوقطبی مغناطیسی داشته باشد در میدان مغناطیسی به آن نیرو وارد می‌شود.



فرض کنید حلقه حامل جریان در میدان مغناطیسی مطابق شکل زیر باشد. برای اطلاعات بیشتر به کتاب الکترومغناطیس گریفیث رجوع شود.

نیروهایی که به ضلع‌های a وارد می‌شود هم دیگر را خنثی می‌کنند اما نیروهایی که به اضلاع b وارد می‌شود با اینکه مجموعشان صفر است اما یک گشتاور ایجاد می‌شود.



$$\vec{N} = \vec{a}\times\vec{F} = aF\sin\theta\,\hat{n} = a(IbB)\sin\theta\,\hat{n}$$

$$\xrightarrow{ab=A} \underbrace{IA}_{=\mu}B\sin\theta\,\hat{n} = \mu B\sin\theta\,\hat{n} = \vec{\mu}\times\vec{B}$$

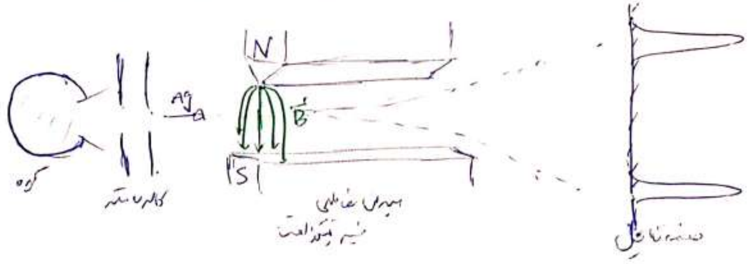
در واقع گشتاور باعث می‌شود حلقه به سمت B قرار گیرد.

بنابراین این گشتاور باعث کار می‌شود: $dw = -N \cdot d\theta = -\mu B \sin\theta \, d\theta$

$$du = -dw = \mu B \sin\theta \, d\theta \Rightarrow u = \int du = -\mu B \cos\theta = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

بنابراین نیروی وارده برابر است با: $F = -\nabla u = -\nabla(-\vec{\mu}\cdot\vec{B}) \Rightarrow F = \nabla(\vec{\mu}\cdot\vec{B})$

در اوایل قرن 20 متوجه شدند که قوانین کلاسیک در ابعاد کوچک درست کار نمی‌کنند. یکی از آزمایش‌هایی که سال‌ها است و نشان داده پیش‌بینی‌های کلاسیکی درست نیست آزمایش Stern-Gerlach است.



- در این آزمایش در کوره نقره Ag را تبخیر می‌کنند تا اتم‌ها از آن خارج شوند سپس توسط کالیماتور در یک جهت حرکت می‌کنند و به یک آهن‌ربای مغناطیسی وارد می‌شوند.

- توجه شود در اینجا یک میدان مغناطیسی غیریکنواخت داریم، به این صورت که در نزدیکی N به دلیل تراکم خطوط میدان، میدان قوی‌تر است نسبت به نزدیکی S.

- در این آزمایش سعی می‌کنیم همه اتم‌های Ag از وسط میدان مغناطیسی رد شوند. که در آن ناحیه میدان $\vec{B}_z$ متغیر خواهد بود.

- از سوی دیگر می‌دانیم آرایش الکترونی Ag به صورت مقابل است: $^{108}_{47}Ag: (1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^6\, 4s^2\, 3d^{10}\, 4p^6\, 4d^{10}\, 5s^1)$

بنابراین اگر الکترون‌ها دارای اسپین (تکانه زاویه‌ای ذاتی) باشند، چون لایه‌های قبل Ag هم را خنثی می‌کنند فقط اثر یک الکترون که در $5s^1$ است باقی می‌ماند.

- باید توجه کرد که اثر گشتاور زاویه‌ای مداری الکترون‌ها به دلیل تقارن کروی از بین می‌رود، و همین طور اثر گشتاور زاویه‌ای هسته به دلیل جرم زیاد نسبت به الکترون‌ها ناچیز است (با توجه به اینکه $\vec{\mu} = \frac{-e}{2m}\vec{L}$)

- بنابراین پیش‌بینی کلاسیک این است که اتم Ag از میدان $\vec{B}_z$ رد شود هیچ نیرویی نمی‌بیند چون هیچ گشتاور زاویه‌ای ندارد (انحرافی) و به یک نقطه برخورد می‌کند. اما نتیجه آزمایش:

۱- الکترون دارای گشتاور زاویه‌ای ذاتی (اسپین) می‌باشد.

چون یک انحرافی برای آن رخ داده شد و نشان آن معلوم شود و شبیه ممان مغناطیسی بود!

- توجه شود که در اینجا مقدار ممان مغناطیسی دو برابر حالت کلاسیک است! $\vec{\mu} = g\frac{-e}{2m_ec}\vec{S}$; $g \simeq 2.00232$ (چرا؟)
مقدار اندازه‌گیری شده

در نظریه کوانتومی نسبیتی می‌توان به دست آورد که $g=2$ است. و در آزمایش‌ها نیز با تصحیحات QED می‌توان مقادیر بهتری به دست آورد.

- حال این ممان مغناطیسی، باید توجه شود که امکان ندارد حاصل چرخش مداری یا حول خود الکترون باشد چون اگر یک ذره‌ی بی‌بعد (بنیادی یعنی کمتر از $10^{-20}\,cm$) بخواهد ممان مغناطیسی $\frac{\hbar}{2}$ را تولید کند باید با ۷ برابر سرعت نور دوران کند! بنابراین این گشتاور زاویه‌ای را ذاتی می‌نامیم که اسپین نام گذاشتیم

- برای n و p نیز هم μ هم g متفاوت است و با اینکه خنثی هستند n دارای μ است.

- بنابراین ما نیرویی که ما داریم به این صورت است:

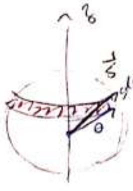
$$F_z = -\frac{\partial}{\partial z}U = +\mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} < 0$$

با توجه به خطوط میدان و آزمایش ما.

یعنی آنکه $\mu_z < 0$ باشد نیرو به سمت پایین و به عکس خواهد بود.

- حال اگر فرض کنیم ممان مغناطیسی ذاتی داریم انتظار داریم که هم مقادیر پیوسته‌ای را بپذیرد. و نیرو هم مقادیر پیوسته‌ای را وارد می‌کند و دیدگاه کلاسیکی می‌گوید باید یک لکه‌ی یکنواخت ببینیم. اما مشاهده خبر از دیدن تنها ۲، نه آنکه را می‌دهد!

۲- تکانه زاویه‌ای ذاتی (اسپین) گسسته است و تنها دو مقدار دارد!



- در تحلیل کلاسیکی اگر فرض کنیم Ag وقتی از کوره بیرون آمد آنها یکنواخت باشد، می‌توان نوشت:

$$P(\theta)\,d\theta = \frac{2\pi \sin\theta\, d\theta}{4\pi} = \frac{1}{2}\sin\theta\, d\theta$$

حال اگر S_z را نیز در نظر بگیریم و توزیع احتمال را برحسب S_z بیان کنیم: $S_z = S\cos\theta,\ dS_z = -S\sin\theta\, d\theta$

$$W(S_z)\,dS_z = \frac{1}{2}\cancel{\sin\theta}\left(-dS_z/\cancel{\sin\theta}\,S\right) = \frac{1}{2}\frac{dS_z}{S}$$

می‌بینیم که برحسب S_z یکنواخت است!

همچنین می‌توان توزیع احتمال را برحسب μ_z نوشت (چون dS_z با $d\mu_z$ رابطه خطی دارد.)

$$W'(\mu_z)\,d\mu_z = \frac{1}{2}\frac{d\mu_z}{S}$$

که این نیز برحسب μ_z یکنواخت است.

- در دیدگاه کلاسیکی اگر فرض کنیم اسپین داریم، باید در شیشه پیوسته Ag پخش شود. همانطور که گفتیم حال اگر $\frac{\partial B_z}{\partial z} = cte$ باشد یعنی میدان یکنواخت باشد، این Ag روی شیشه باید پیوسته و البته یکنواخت باشد؟ زیرا معادله روبرو نسبت به z ثابت است.

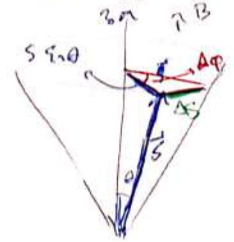
$$z = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{F_z}{m_{Ag}}\left(\frac{L}{v}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_z}{m_{Ag}}\underbrace{\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)}_{=cte}\left(\frac{L}{v}\right)^2$$

انحراف از مرکز

- به حرکت تقدیمی دمان مغناطیسی معمولی حول میدان مغناطیسی، حرکت تقدیمی لارمور (Larmor) گفته می‌شود که در مورد اسپین نیز همانند دمان مغناطیسی مدارها می‌توان عنوان کرد:

جهت یادآوری با توجه به تعریف تکانه زاویه‌ای $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ مشتق $\frac{d\vec{L}}{dt}$ برابر است با:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \underbrace{\cancel{\vec{v} \times \vec{P}}}_{\text{موازی‌اند}} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\text{گشتاور}} = \vec{N}$$



بنابراین برای اسپین نیز می‌توان گفت:

$$\vec{N} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S\sin\theta\,\Delta\varphi}{\Delta t} \xrightarrow{\omega = \Delta\varphi/\Delta t} S\sin\theta\,\omega \qquad (1)$$

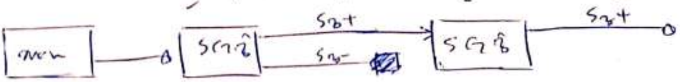
از طرف دیگر در فصل نشان دادیم که:

$$\vec{N} = \mu B \sin\theta \xrightarrow{\mu = \gamma S} \gamma S B \sin\theta \qquad (2)$$

بنابراین با مقایسه دو رابطه (1) و (2) می‌توان نوشت: فرکانس لارمور (Larmor): $\omega = \gamma B$

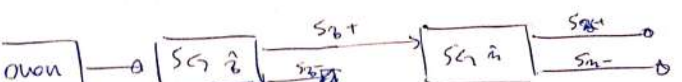
- سری آزمایش‌های SG پی‌درپی در جهات مختلف نتایج جالبی را به ما می‌دهد که در این بخش به آنها می‌پردازیم: در اولین حالت دو آزمایش SG در جهت $\hat{z}$ را اجرا می‌کنیم:

(a)



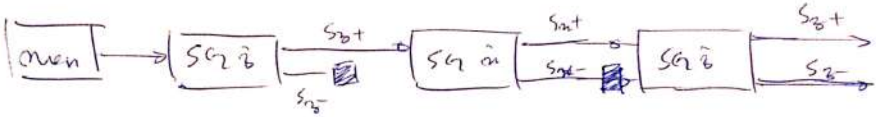
در این حالت با تعیین شدن اسپین در مرحله نخست، بار دوم نیز همان نتیجه را می‌دهد.

(b)



در این حالت که دومین SG x با سه نتایج جالبی را داشته دارد؟

(c)



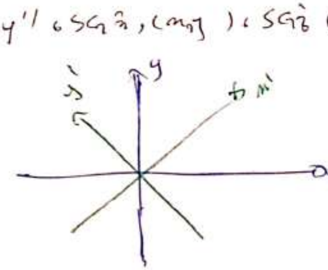
در اینجا حالت، در SG z اول که S_z- را حذف کردیم ولی در SG z آخری دوباره سه کلاسی پیدا شد!

این به این معنی است که؟

ج- نمی‌توان مؤلفه‌های ذاتی (اسپین) را در جهت‌های مختلف آن واحد همزمان تعیین کرد.

درحالی که در دیدگاه کلاسیک با شناخت توزیع جرم بر سرعت چرخش در جهت‌های مختلف می‌توان تکانه زاویه‌ای را طبق رابطه $\vec{L}=I\vec{\omega}$ تعیین نمود در آن واحد همه مؤلفه‌ها را.

- با توجه به آنالوژی مغناطیسی ماکسول (موجی) و نورهای قطبیده، و شباهت آن به SG می‌توان گفت که آزمایش (b) در قسمت قطبی باید به این صورت باشد که محورهای SG z، (x, y) SG x، (x', y') باشد.



$$|S_x;+\rangle = \frac{1}{\sqrt2}|S_z;+\rangle + \frac{1}{\sqrt2}|S_z;-\rangle.$$

$$|S_x;-\rangle = -\frac{1}{\sqrt2}|S_z;+\rangle + \frac{1}{\sqrt2}|S_z;-\rangle$$

اما در مورد جهت SG y چه کار کنیم؟ چون از این امکان برای توجیه SG z استفاده کردیم در واقع به

این موضوع باید برویم به فضای مختلط بنابراین

ما - فضای برداری شایستگی (کوانتومی) باید حتماً مختلط باشد:

$$|S_y;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt2}|S_z;+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt2}|S_z;-\rangle.$$

$$|S_y;-\rangle = \frac{1}{\sqrt2}|S_z;+\rangle - \frac{i}{\sqrt2}|S_z;-\rangle$$

- ket ها، bra ها، عملگرها.

- فضای ket ها: در واقع یک حالت فیزیکی را می‌توان با بردار حالت نشان داد که معمولاً فرض می‌کنیم این فضای بردارها با ابعاد مختلف باشد.

- همچنین لازم به ذکر است علاوه بر مختلط بودن فضای بردار، فضای بردارهای این اتم‌ها باید مجهز باشند تا طبق نامساوی شوارتز (Cauchy) ضرب داخلی داشته باشند، این شرط لازم است تا بتوانیم همگرایی آنها را بررسی کنیم که در ادامه گفته می‌شود و همچنین فضای برداری فضای هیلبرت گفته می‌شود.

- توجه شود که جمع دو ket یک ket جدید در آن فضا است. $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle$

- ضرب اسکالر در ket حالت فیزیکی را تغییر نمی‌دهد ولی یک ket جدید است $c|\alpha\rangle = |\gamma\rangle ;\ c \in \mathbb{C}$ که اگر $c=0$ باشد، $|\gamma\rangle$ را ket null می‌گویند.

- اپراتور در واقع یک تبدیل است که مشاهده‌پذیرها را با آنها توصیف می‌کنند.

- حال اگر اپراتور در ket عمل کند و جهت را تغییر ندهد، می‌توان آن را به حالا کلی مقادیر ویژه اسکالر را بدست آورد که به آنها مسأله ویژه مقدار می‌گویند: $A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$.

- حال این ویژه توابع می‌توانند کامل باشند و فضا را بسط دهند. به عنوان ویژه توابع اسپین که دو بردار است، می‌توانند فضای دو بعدی را بسط دهند.

— bra ها نیز متناظر دوگان ket ها هستند که به این صورت تبدیل می‌شوند:

$$c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle \xrightarrow{DC} c_\alpha^* \langle\alpha| + c_\beta^* \langle\beta|$$

— بنابراین با داشتن bra ها می‌توان ضرب داخلی را تعریف کرد: $\langle\beta|\alpha\rangle \in \mathbb{C}$

با داشتن دو اصل موضوعه:

1. $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$
2. $\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\alpha|\alpha\rangle^* \in \mathbb{R} \geq 0$

— تعریف دو ket به هم عمود نیز می‌شود ضرب داخلی برابر صفر: $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$

— ket نرمالیزه شده را نیز می‌توان ساخت: $|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}}_{\||\alpha\rangle\|}} |\alpha\rangle \; ; \; \langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle = 1$

— دو اپراتور برابرند اگر و تنها اگر: $X|\alpha\rangle = Y|\alpha\rangle \iff X = Y$

— اگر $X|\alpha\rangle = 0$ شود بنابراین عملگر پوچ null بوده.

— اپراتورها خاصیت شرکت‌پذیری دارند: $X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$

— اپراتورها خاصیت جابجایی دارند: $X+Y = Y+X$

— به اپراتورهایی که از scaler ها عبور می‌کنند خطی می‌گویند:

$$X(c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle) = c_\alpha X|\alpha\rangle + c_\beta X|\beta\rangle$$

— به اپراتورهایی که scaler را مزدوج مختلط می‌کنند ضد خطی می‌گویند:

$$Y(c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle) = c_\alpha^* X|\alpha\rangle + c_\beta^* Y|\beta\rangle$$

- به تناظر دوگان عملگر الحاقی هرمیتی گوییم: $\quad X|\alpha\rangle \xleftrightarrow{DC} \langle\alpha|X^\dagger$

- زمانی یک عملگر هرمیتی است که: $\quad X = X^\dagger$

- توجه شود که ضرب اپراتورها لزوما جابجاپذیر نمی باشد: $\quad XY - YX = [X,Y] \neq 0$

- اما خاصیت شرکت پذیری دارند: $\quad (XY)Z = X(YZ)$

- همچنین می توان نشان داد که: $\quad (XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$

$$XY|\alpha\rangle = X(Y|\alpha\rangle) \xleftrightarrow{DC} (\langle\alpha|Y^\dagger)X^\dagger = \langle\alpha|(XY)^\dagger$$

- ضرب خارجی نیز می توان تعریف کرد که در واقع نمایشگر یک اپراتور خواهد بود: $\quad X = |\beta\rangle\langle\alpha|$

$$X|\gamma\rangle = (|\beta\rangle\underbrace{\langle\alpha|)|\gamma\rangle}_{=a} = a|\beta\rangle$$

چراکه جمله وسط تبدیل (اسکالر) است؟

- همینطور تناظر دوگان ضرب خارجی برابر است با: $\quad X^\dagger = |\alpha\rangle\langle\beta|$

- اگر X هرمیتی باشد ساندویچ آن بین $|\alpha\rangle$ و $\langle\beta|$ با مزدوج مختلطش به صورت زیر رابطه دارد:

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|X^\dagger|\beta\rangle = \langle\alpha|X|\beta\rangle$$

- حال اگر در عبارت فوق $|\alpha\rangle = |\beta\rangle$ باشد، حاصل مقدار چشمداشتی خواهد بود که در واقع حقیقی است.

$$\langle X\rangle = \langle\alpha|X|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|X|\alpha\rangle \in \mathbb{R}.$$

بنابراین می تواند مهم باشد از این جهت که مشاهده پذیرهایمان حقیقی اند!

- تصویر کردن بردار را دانستیم که هر کدام با ضرب خارجی که یک اپراتور است اتفاق بیوفتد، حال اگر بخواهیم اپراتور تصویر بسازیم باید توجه کنیم که تصویرِ تصویرِ یک ket همچنان خودش باشد بنابراین اینها دو شرط با داشتن ضرب خارجی دو ket بردار نرمال به دست آید. که به آن اپراتور تصویر گویند.

$$P_\alpha = |\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}|$$

$$1.\ P_\alpha |\beta\rangle = |\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}|\beta\rangle = a\ |\tilde{\alpha}\rangle$$

$$2.\ P_\alpha^2 = (|\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}|)(|\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}|) = |\tilde{\alpha}\rangle\underbrace{\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle}_{=1}\langle\tilde{\alpha}| = |\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}| = P_\alpha$$

- ket ها، پایه و نمایش ماتریسی.

- قضیه ۱.۱: ویژه مقادیر اپراتور هرمیتی حقیقی اند و ویژه توابع آن متعامدند. چون:

$$H|c_i\rangle = \lambda_i |c_i\rangle \quad , \quad H|c_j\rangle = \lambda_j |c_j\rangle$$

$$\underline{\langle c_j|H|c_i\rangle = \langle c_j|\lambda_i|c_i\rangle} \ , \ \langle c_i|H|c_j\rangle = \langle c_i|\lambda_j|c_j\rangle$$

$$\downarrow DC$$

$$\underline{\langle c_j|H|c_i\rangle = \lambda_j^* \langle c_j|c_i\rangle}$$

با مقایسه دو عبارت فوق، سمت چپ معادله‌ها برابرند $\Longrightarrow \lambda_i \langle c_j|c_i\rangle = \lambda_j^* \langle c_j|c_i\rangle.$

اگر $i=j$ $\Longrightarrow \lambda_i \langle c_i|c_i\rangle = \lambda_i^* \langle c_i|c_i\rangle \xRightarrow{\langle c_i|c_i\rangle \neq 0} \lambda_i = \lambda_i^* \in \mathbb{R}.$

بنابراین ویژه مقادیر اپراتور هرمیتی H، به شرطی که $\langle c_i|c_i\rangle$ محدود باشد حقیقی خواهد بود.

سپس با توجه به اینکه $\lambda_i \langle c_j | c_i \rangle = \lambda_j^* \langle c_j | c_i \rangle$ ،

و همچنین با استفاده از هرمیتی بودن عملگر یعنی $\lambda_j^* = \lambda_j$:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle c_j | c_i \rangle = 0$$

که در صورتی که تبهگنی نداشته باشیم ($\lambda_i \neq \lambda_j$) بنابراین ویژه‌بردارها عمود بر هم خواهند بود: $\langle c_j | c_i \rangle = 0$

همینطور در صورتی که تبهگنی داشته باشیم ($\lambda_i = \lambda_j$) با استفاده از گرام اشمیت می‌توان نشان داد که متعامد اند.

— بنابراین با توجه به قضیه بالا ویژه‌توابع‌های عملگرهای هرمیتی متعامد هستند. حال با فرض اینکه این ویژه‌توابع کامل باشند:

توجه شود که در اینجا اثبات نداریم ولی تا جایی که ما می‌دانیم خلاف آن دیده نشده و به عنوان اصل می‌پذیریم.

بنابراین می‌توان هر حالتی را بر پایه‌های متعامد ویژه‌توابع هرمیتی بسط داد!

$$|\alpha\rangle = \sum c_i^\alpha |\alpha_i\rangle ; \quad c_j^\alpha = \langle \alpha_j | \alpha \rangle = \sum c_i^\alpha \overbrace{\langle \alpha_j | \alpha_i \rangle}^{\delta_{ij}}$$

— با جایگذاری c_i^α در عبارت بسط فوق:

$$|\alpha\rangle = \sum (\langle \alpha_i | \alpha \rangle) |\alpha_i\rangle$$
$$= \sum (|\alpha_i\rangle\langle \alpha_i|) |\alpha\rangle$$

بنابراین باید $\sum |\alpha_i\rangle\langle \alpha_i|$ برابر یک باشد که این معادل فرض کامل بودن پایه‌هاست.

- با توجه به اینکه $|\tilde{\alpha}\rangle$ بهنجار است می‌توان گفت:

$$\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle=1 \longrightarrow \langle\tilde{\alpha}|\mathbb{1}\,\mathbb{1}|\tilde{\alpha}\rangle=1 \rightarrow \langle\tilde{\alpha}|a_i\rangle\underbrace{\langle a_i|a_j\rangle}_{\delta_{ij}}\langle a_j|\tilde{\alpha}\rangle=1$$

$$\rightarrow \overbrace{\langle\tilde{\alpha}|a_i\rangle}^{c_i^{\alpha *}}\overbrace{\langle a_i|\tilde{\alpha}\rangle}^{c_i^{\alpha}}=1 \rightarrow c_i^{\alpha *}c_i=1 \rightarrow |c_i^{\alpha}|^2=1$$

بنابراین به نظر می‌آید می‌توان تعبیر احتمالاتی را داشت از این ضرایب.

- ضمناً برای ویژه‌توابع نرمالیزه شده هرمیتی اپراتور تصویر را ساخت: $\Lambda_i=|a_i\rangle\langle a_i|$

- اگر ابعاد این ket ها محدود باشد می‌توان برایشان نمایش ماتریسی انتخاب کرد. به عنوان مثال برای حالت‌های اسپین که دو بعد دارند.

- به طور کلی یک ket را برحسب پایه‌ها این‌طور می‌نویسیم:

$$|\alpha\rangle=\sum|a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle=\sum c_i^{\alpha}|a_i\rangle \doteq c_1^{\alpha}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\end{pmatrix}+c_2^{\alpha}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix}+\cdots=\begin{pmatrix}c_1^{\alpha}\\c_2^{\alpha}\\\vdots\end{pmatrix}$$

- برای bra نیز به همین صورت:

$$\langle\alpha|=\sum\langle\alpha|a_i\rangle\langle a_i|=\sum c_i^{\alpha *}\langle a_i| \doteq c_1^{\alpha *}(1\,0\cdots)+c_2^{\alpha *}(0\,1\,0\cdots)+\cdots=(c_1^{\alpha *}\;\;c_2^{\alpha *}\;\cdots)$$

- ضرب داخلی نیز با شکل ماتریسی‌ها می‌شود:

$$\langle\alpha|\beta\rangle=\sum\left(\langle\alpha|a_i\rangle\underbrace{\langle a_i|\right)\left(|a_j\rangle}_{\delta_{ij}}\langle a_j|\beta\rangle\right)=\sum c_i^{\alpha *}c_i^{\beta}$$

$$=c_1^{\alpha *}c_1^{\beta}+c_2^{\alpha *}c_2^{\beta}+\cdots \doteq (c_1^{*\alpha}\;\;c_2^{\alpha *}\;\cdots)\begin{pmatrix}c_1^{\beta}\\c_2^{\beta}\\\vdots\end{pmatrix}$$

- ضرب خارجی نیز می‌شود به صورت ماتریسی بیان کرد که در واقع معادل اپراتور است:

$$|\beta\rangle\langle\alpha|=\sum|a_i\rangle\langle a_i|\beta\rangle\langle\alpha|a_j\rangle\langle a_j|=\sum c_i^{\beta}c_j^{\alpha *}|a_i\rangle\langle a_j| \quad \circledast$$

[حال با توجه به اینکه ضرب خارجی با به‌صورت این صورت است: $|a_i\rangle\langle a_j| \doteq \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} \cdots & 1 & \cdots \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}_i$]

$$|\beta\rangle\langle\alpha| \doteq \begin{pmatrix} a^{\beta} c_i^{**} & \cdots \\ \vdots & \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

- به همین صورت برای اپراتور ماتریس اینطور نوشت:

$$X = \sum |a_i\rangle\langle a_i| X |a_j\rangle\langle a_j|$$

که با شناسایی با معادله‌ی عنصر $\langle a_i| X |a_j\rangle$ دارای i و j ماتریسی فراهم بود.

$$X \doteq \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & \cdots \\ & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

- برای عملگر نیز نمایش ماتریسی در نظر داشت:

$$X\,|\alpha\rangle = |\xi\rangle \doteq \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ c \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\langle\alpha| X^{\dagger} = \langle\xi| \doteq \begin{pmatrix} c^{*} & c^{*} & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11}^{*} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{*} & c^{*} & \cdots \end{pmatrix}$$

- نمایش ماتریسی یک عملگر هرمیتی در پایه‌های ویژه تابعی به صورت زیر قطری است:

$$A = \sum |a_i\rangle \underbrace{\langle a_i| A |a_j\rangle}_{a_i \delta_{ij}} \langle a_j| = \sum a_i\, |a_i\rangle\langle a_i| \doteq \begin{pmatrix} a_1 & & \\ 0 & a_2 & 0 \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

- کت ویژه مقداری نیز به این صورت است:

$$A\,|a_i\rangle \doteq \begin{pmatrix} a_1 & & \\ 0 & a_2 & 0 \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} = a_i \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \doteq a_i\,|a_i\rangle$$

- کامل بودن نیز هم نمایش ماتریسی دارد:

$$\sum |a_i\rangle\langle a_i| = \begin{pmatrix} 1 & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

- همانطور که در دو نقطه پایه گفتیم یک اپراتور را با پایه‌های ویژه توابع به این صورت می‌نویسیم به عنوان مثال:

$$S_z = \sum a_i\, |a_i\rangle\langle a_i| = \frac{\hbar}{2}\,|+\rangle\langle+| - \frac{\hbar}{2}\,|-\rangle\langle-|$$

لذا خواهیم داشت:

$$S_z|\pm\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right)|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$$

که حال برای حالت‌های $|\pm\rangle$ نیز انتخاب مرکب‌نمایش ماتریسی را:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

بنابراین:

$$S_z|+\rangle \doteq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$S_z|-\rangle \doteq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

- اندازه‌گیری، مشاهده‌پذیرها و روابط عدم قطعیت.

- فرض می‌کنیم قبل از اندازه‌گیری سیستم ما در حالت $|\alpha\rangle$ است که اگر آن را بر پایه‌های ایرات هرمیتی (مشاهده پذیر) مثل انرژی بنویسیم به صورت مقابل در می‌آید: $|\alpha\rangle = \sum |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = \sum c_{a'}^{\alpha}|a'\rangle$

- در اندازه‌گیری (روی مشاهده پذیر V مثل انرژی) عبارت بسط داده شده‌ی حالت در پایه‌های همان مشاهده‌پذیر، کاهش پیدا می‌کند به یک حالت! مثلاً $|a'\rangle$ و با احتمال $|c_i^{\alpha}|^2$.

در واقع این یکی از اصول مکانیک کوانتومی است.

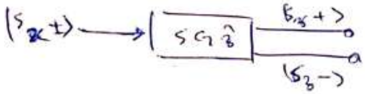
البته توجه شود که باید ویژه توابع نرمالایز شده باشند که مفهوم احتمال را بتوانیم از آن بگیریم.

- و در اینجا احتمال رخ دادن‌ها، $\sum |c_i|^2 = 1$، $P \geq 0$ را دارد. و همینطور مقدار چشم‌داشتی را نیز می‌توان به دست آورد:

$$\langle A\rangle = \langle\alpha|A|\alpha\rangle = \sum a'\langle\alpha|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = \sum a'|\langle a'|\alpha\rangle|^2 = \sum \underbrace{a'}_{\text{عدد } a'}\,\underbrace{|c_{a'}^{\alpha}|^2}_{\text{احتمال آمدن عدد } a'}$$

که واقع است که همانند میانگین گرفتن است.

– مجددا به آزمایش SG برمی‌گردیم. اگر $|S_x\pm\rangle$ داشته باشیم که وارد SG $\hat{z}$ بشود. برای توصیف $|S_x\pm\rangle$ بهتر است که با ویژه توابع S_z استفاده کنیم.



که با وارد کردن یک فاز دلخواه که فیزیک را تغییر نمی‌دهد و می‌توان ملاحظه کرد در یک جمله می‌توان نوشت:

$$|S_x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{e^{i\delta_1}}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad , \quad |S_x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{e^{+i\delta_1}}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

– توجه شود که عمود بودن $|S_x+\rangle$ و $|S_x-\rangle$ را از اینکه ویژه توابع اپراتور هرمیتی هستند با هم متعامد بشوند که قبل‌تر اثبات کردیم. برای چک کردن شرط متعامد:

$$\langle S_x\pm|S_x\pm\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle+| \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\delta_1}\langle-|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{e^{i\delta_1}}{\sqrt{2}}|-\rangle\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

$$\langle S_x+|S_x-\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle+| + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\delta_1}\langle-|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{e^{i\delta_1}}{\sqrt{2}}|-\rangle\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0$$

– همینطور مانند قبل چون S_x نیز اپراتور هرمیتی است می‌توان در پایه‌های ویژه توابع خودش به این صورت نوشت:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\Big(|S_x+\rangle\langle S_x+| - |S_x-\rangle\langle S_x-|\Big)$$

حال با جایگذاری کردن $|S_x\pm\rangle$ از دو نکته بالا هم، می‌توان S_x را در پایه‌های S_z نوشت:

$$S_x = \frac{\hbar}{4}\Big[\left(|+\rangle+e^{i\delta_1}|-\rangle\right)\left(\langle+|+e^{-i\delta_1}\langle-|\right) - \left(|+\rangle-e^{i\delta_1}|-\rangle\right)\left(\langle+|-e^{-i\delta_1}\langle-|\right)\Big]$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(e^{i\delta_1}|-\rangle\langle+| + e^{-i\delta_1}|+\rangle\langle-|\right)$$

همانطور که واضح است S_x هرمیتی است $(S_x = S_x^T)$

- به همین منوال با داشتن $|S_y \pm\rangle$ بر حسب پایه‌های S_z می‌توان S_y را بر حسب پایه‌های S_z نوشت:

$$|S_y \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{e^{i\delta_2}}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\left(|S_y+\rangle\langle S_y+| - |S_y-\rangle\langle S_y-|\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(e^{i\delta_2}|-\rangle\langle+| + e^{-i\delta_2}|+\rangle\langle-|\right)$$

- حال آنه فرض کنید که در آزمایش صفحه‌ی ۱۵، به جای $SG\hat{z}$، $SG\hat{y}$ قرار دهیم. بعد را انتظار داریم که با احتمال

$$|S_x \pm\rangle \longrightarrow \boxed{SG\hat{y}} \begin{cases} |S_y+\rangle \\ |S_y-\rangle \end{cases}$$

$\frac{1}{2}$، $|S_y+\rangle$ و با احتمال $\frac{1}{2}$، $|S_y-\rangle$ برسد.

به عبارت دیگر، می‌توان نوشت که:

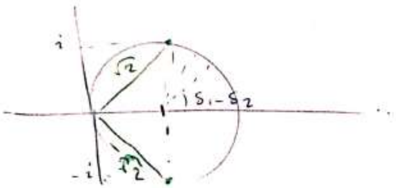
$$|\langle S_y \pm | S_x \pm\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بنابراین با داشتن $|S_x\pm\rangle$ و $|S_y\pm\rangle$ بر پایه‌های S_z می‌توان نوشت که:

$$\left|\frac{1}{2}\left(\langle+| \pm e^{-i\delta_2}\langle-|\right)\left(|+\rangle \pm e^{i\delta_1}|-\rangle\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{2}\left|1 \pm e^{i(\delta_1-\delta_2)}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حال مقادیر ممکن δ_1, δ_2 را تعیین کرد.



مطابق شکل می‌توان $\delta_1-\delta_2$ را $\pm\frac{\pi}{2}$ انتخاب کرد و چون آزادی که داریم مانند نحوه‌ی انتخاب δ_1, δ_2 می‌باشد.

که معمولاً با انتخاب $\delta_1-\delta_2 = -\frac{\pi}{2}$ که در آن $\delta_1 = 0$ و $\delta_2 = \frac{\pi}{2}$ با پایه کار می‌کنیم.

- به عنوان جمع بندی می‌توان نوشت با $\delta=0,\ \delta=\frac{\pi}{2}$!

$$|S_x \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$|S_y \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left\{ (|+\rangle\langle -|) + (|-\rangle\langle +|) \right\} \equiv \frac{1}{2}(S_- + S_+)$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\left\{ -i(|+\rangle\langle -| + i(|-\rangle\langle +|) \right\} \equiv \frac{i}{2}(S_- - S_+)$$

توجه شود که می‌توان با تعریف‌های مقابل نوشت:

$$S_+ = \hbar\ |+\rangle\langle -|$$

$$S_- = \hbar\ |-\rangle\langle +|$$

- نمایش‌های ماتریسی اینها عبارتست:

$$S_+ \doteq \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(0\ 1) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_- \doteq \hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 0) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z \doteq \frac{\hbar}{2}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1\ 0) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0\ 1) \right\} = \frac{\hbar}{2}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_3$$

$$S_y \doteq \frac{i}{2}\left\{ \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_2$$

$$S_x \doteq \frac{1}{2}\left\{ \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_1$$

که در اینجا $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$ به ماتریس‌های پاؤلی Pauli معروفند.

- با توجه به خاصیت $S_\pm$ به آنها بالا برنده و پایین برنده می‌گویند:

$$S_+|-\rangle = (\hbar|+\rangle\langle -|)|-\rangle = \hbar|+\rangle \qquad S_-|-\rangle = (\hbar|-\rangle\langle +|)|-\rangle = 0$$

$$S_+|+\rangle = (\hbar|+\rangle\langle -|)|+\rangle = 0 \qquad S_-|+\rangle = (\hbar|-\rangle\langle +|)|+\rangle = |-\rangle$$

- به طور کلی می‌توان نشان داد که جابجاگرهای تکانه‌ی زاویه‌ای ذاتی به فرم مقابل است: $[S_i, S_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk} S_k$

به عنوان مثال: $[S_x, S_y] = S_x S_y - S_y S_x$

$$S_x S_y = \frac{\hbar^2}{4}\sigma_1\sigma_2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{i\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{i\hbar^2}{4}\sigma_3 = \frac{i\hbar}{2}S_z$$

$$S_y S_x = \frac{\hbar^2}{4}\sigma_2\sigma_1 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -\frac{i\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{i\hbar}{4}\sigma_3 = -\frac{i\hbar}{2}S_z$$

$$[S_x, S_y] = \frac{i\hbar}{2}\{S_z - (-S_z)\} = i\hbar S_z$$

توجه شود که این ناجابجایی تعریف جبر دوران است. و بسیار کلی است.

- همچنین می‌توان ضد جابجایی را حساب کرد که به صورت مقابل است: $\{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij}\mathbb{1}$

به عنوان مثال: $\{S_x, S_y\} = S_x S_y + S_y S_x$

$$= \frac{i\hbar}{2}\{S_z + (-S_z)\} = 0$$

- با تعریف $\vec{S}^2 \equiv S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ می‌توان نشان داد که: $[S^2, S_i] = 0$

که در آن با توجه به اینکه $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ است، $S_i^2 = \frac{\hbar^2}{4}\mathbb{1}$ می‌شود.

+ درباره کمیت‌های سازگار:

- تعریف: می‌گوییم که دو مشاهده‌پذیر سازگارند، اگر و تنها اگر، دو مشاهده‌پذیر مذکور جابجا شوند؛ $[A,B]=0$

- قضیه: اگر دو مشاهده‌پذیر سازگار باشند، می‌توان ویژه توابع مشترک برایشان در نظر گرفت، اگر تبهگن نباشد.

اثبات: با فرض اینکه $|a'\rangle, |a''\rangle$ ویژه‌توابع A متناظر با ویژه‌مقادیر a', a'' باشند. و مشاهده‌پذیر سازگار B با A، B را در نظر بگیریم، چون $[A,B]=0$ است بنابراین: $\langle a''|[A,B]|a''\rangle = 0$

$$\langle a''|(AB-BA)|a''\rangle = 0 \to (a''-a')\langle a''|B|a'\rangle = 0$$

بنابراین اگر $a''\neq a'$ باشد یعنی غیر تبهگن باشد: $\langle a''|B|a'\rangle = 0$

که عبارت بالا، نمایانگر عناصر غیرقطری نمایش ماتریسی B هستند. لذا ما توانستیم B را در پایه‌های A به صورت قطری نمایش بدهیم و به عبارتی می‌توانند همان پایه‌های خود مصرف شوند. بنابراین معرفی می‌کنیم ویژه توابع مشترک را $|a',b'\rangle$.
البته اگر تبهگن باشد می‌توان B را در زیرفضای تبهگن قطری کرد.

اثبات با ریاضیات دیگر: درصورتی که داشته باشیم که A هرمیتی باشد و پایه‌ها را متعامد بگیریم:

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle \quad ①$$

در صورتی‌که یک اپراتور دیگر داشته باشیم که با A سازگار باشد و هرمیتی باشد؛ می‌توان نوشت:

$$B(A|a'\rangle) = Ba'|a'\rangle \xrightarrow[{[A,B]=0}]{BA=AB} A(B|a'\rangle) = a'(B|a'\rangle) \quad ②$$

با مقایسه ① و ② می‌توان گفت که $B|a'\rangle \propto |a'\rangle$ که اگر $|a'\rangle$ تبهگن نباشد می‌توان نوشت:

$$B|a'\rangle = b'|a'\rangle$$

لذا معرفی می‌کنیم ویژه توابع مشترک را $|a',b'\rangle$.

اما در صورتی که کت‌ها تبهگن باشند، می‌توانیم بنویسیم: $|a'\rangle_D = \{|a', b_i\rangle ; a' \text{ fixed}\}$

حال اثر روی $|a'\rangle_D$، B را می‌نویسیم:

$$B|a'\rangle = B\sum_i c_i^{a'} |a', b_i\rangle =$$

$$B|a'\rangle = \sum_i c_i^{a'} b_i |a', b_i\rangle \in |a'\rangle_D$$

به این معنی که B، زیرفضای ویژه a' را فراگیر می‌کند (یعنی از آن زیرفضا بیرون نمی‌برد) به عبارتی عملگر B زیرفضا را حفظ می‌کند.

- مثال: برای یک سیستم با پتانسیل کولنی (مرکزی) است داریم:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$

$$H\,\psi_{n,l,s}^{m_l,m_s} = E_n\,\psi_{n,l,s}^{m_l,m_s}$$

$$L^2\,\psi_{n,l,s}^{m_l,m_s} = l(l+1)\hbar^2\,\psi_{n,l,s}^{m_l,m_s}$$

$$L_z\,\psi_{n,l,s}^{m_l,m_s} = m_l\hbar\,\psi_{n,l,s}^{m_l,m_s}$$

$$S^2\,\psi_{n,l,s}^{m_l,m_s} = s(s+1)\hbar^2\,\psi_{n,l,s}^{m_l,m_s}$$

$$S_z\,\psi_{n,l,s}^{m_l,m_s} = m_s\hbar\,\psi_{n,l,s}^{m_l,m_s}.$$

این مجموعه عملگرها یک مجموعه مشاهده‌پذیر سازگار هستند که به صورت همزمان با یک ویژه‌حالت مشترک می‌توانند توصیف شوند

که می‌توانند مثل H، تبهگنی را شکسته یا برداشته باشند.

$n=1$; $E_1 = -13.6$ eV $\qquad \boxed{\uparrow}\ \ m_s = \frac{1}{2}$

1s: $l=0$

$m_l = 0$

$n=2$; $E_2 = -\frac{13.6}{4}$ eV $\qquad \boxed{} \qquad \boxed{}\boxed{}\boxed{\uparrow}\ \ m_s = -\frac{1}{2}$

1s: $l=0$ $\qquad$ 2p: $l=1$

$m_l = -1, 0, 1$

- به صورت کلی که برای یک مجموعه عملگر (مشاهده‌گر) سازگار $\{A, B, \dots\}$ ویژه تولید مشترک را به صورت زیر نمایش می‌دهیم که می‌توانند هم‌زمان اندازه‌گیری شوند: $|a', b', c', \dots\rangle = |k'\rangle$

که شرط بهنجار - متعامد را صدق دارند:

$$\langle k''|k'\rangle = \delta_{k'k''} = \delta_{a'a''}\delta_{b'b''}\cdots$$

و بهنجار کامل هستند:

$$\sum_{k'} |k'\rangle\langle k'| = \mathbb{1}$$

در صورتی که مشاهده انجام دهیم روی همین حالت که ویژه حالت مشترک همه این مشاهده‌گرها باشد، هیچ تغییری نمی‌کند!

$$|a' b' \dots\rangle \xrightarrow[A]{\text{اندازه‌گیری}} |a' b' \dots\rangle \xrightarrow[B]{\text{اندازه‌گیری}} |a' b' \dots\rangle \quad \dots$$

اما اگر یک حالت کلی‌تر را در نظر بگیریم:

$$|\alpha\rangle = \sum c_{ijk} |a_i\, b_j\, c_k\rangle$$

با اندازه‌گیری روی هر عملگر، سیستم کاهش پیدا می‌کند. اگر مشاهده‌گرها سازگار باشند نهایتاً کاملاً به یک ویژه حالت مشترک می‌رسند:

$$|\alpha\rangle \xrightarrow[A]{\text{اندازه‌گیری}} \sum D_{jk} |a'_i\, b_j\, c_k\rangle \xrightarrow[B]{\text{اندازه‌گیری}} \sum E_k |a'_i b'_j c_k\rangle \xrightarrow[C]{} |a'_i b'_j c'_k\rangle$$

+ مشاهده‌گرهای ناسازگار

- مشاهده‌گرهایی را ناسازگار تعریف می‌کنیم که با هم جابجا نشوند! $[A, B] \neq 0$

- قضیه: اگر دو مشاهده‌گر ناسازگار داشته باشیم، ممکن است که یک یا چند ویژه حالت یکسان داشته باشند ولی نمی‌توانند کامل باشند.

اثبات: برای اثبات، فرض خلف را در نظر می‌گیریم که ویژه توابع مشترک کامل باشند: $\sum |a'b'\rangle\langle a'b'| = \mathbb{1}$

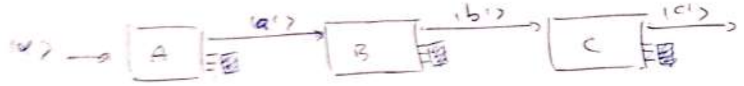
با فرض اینکه $|\alpha\rangle$ پوچ نباشد و از آنجایی که $[A, B]$ یک اپراتور است می‌توان نوشت:

$$[A,B]|\alpha\rangle = \sum_{a'b'} [A,B]\big(\underbrace{|a'b'\rangle\langle a'b'|}_{=\mathbb{1}}\big)|\alpha\rangle = \sum \big[(AB - BA)|a'b'\rangle\big]\langle a'b'|\alpha\rangle$$

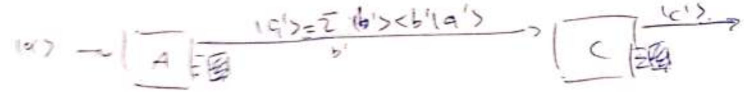
$$= \sum \underbrace{(a'b' - b'a')}_{=\text{صفر}} |a'b'\rangle \langle a'b'|\alpha\rangle = 0 \quad \times$$

بنابراین فرض خلف باطل و حکم صادق است.

- سری اندازه‌گیری‌های حالات انتخابی؛ دو حالت ذیل را برای آزمایش در نظر بگیرید.



(a)



(b)

حال اگر بخواهیم احتمال رخ دادن $|c'\rangle$ را از دو آزمایش فوق محاسبه کنیم داریم:

$$P_a(c') = \sum_{b'} |\langle b'|a'\rangle|^2 \, |\langle c'|b'\rangle|^2 = \sum_{b'} \langle c'|b'\rangle\langle b'|c'\rangle\langle b'|a'\rangle\langle a'|b'\rangle$$

$$P_b(c') = |\langle c'|a'\rangle|^2 = \Big|\sum_{b'} \langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle\Big|^2 = \sum_{b'}\sum_{b''} \langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle\langle a'|b''\rangle\langle b''|c'\rangle$$

واضح است که $P_a \neq P_b$ ، اما از لحاظ دیدگاه کلاسیک انتظار داشتیم $P_a = P_b$! به این ترتیب می‌توانیم نتیجه بگیریم که اندازه‌گیری‌های مکانیک کوانتومی سیستم را مختل کند و نتیجه را تغییر دهد.

البته می‌توان نشان داد که زمانی که B, C یا A, B سازگار باشند، در این صورت B مختل نمی‌کند.

+ رابطه عدم قطعیت

- یادآوری: مقدار چشمداشتی در حالت α (عملگر A) با توجه به تعبیر آماری کلاسیک به صورت زیر تعریف می‌گردد که به معنای میانگین پیامد آزمایش‌هایی است که روی حالت $|\alpha\rangle$، A را اندازه‌گیری می‌کنیم.

$$\bar{A}_\alpha = {}_\alpha\langle A\rangle_\alpha = \langle\alpha|A|\alpha\rangle = \sum_{ij}\langle\alpha|a_i\rangle\langle a_i|A|a_j\rangle\langle a_j|\alpha\rangle = \sum |c_i^\alpha|^2 a_i$$

به همین طور می‌توان تعمیم داد و به این شکل نوشت:

$$f(A)_\alpha = {}_\alpha\langle f(A)\rangle_\alpha = \langle\alpha|f(A)|\alpha\rangle = \sum_{ij}\langle\alpha|a_i\rangle\langle a_i|f(A)|a_j\rangle\langle a_j|\alpha\rangle = \sum |c_i^\alpha|^2 f(A)$$

- کمیت جدیدی را که تعریف می‌کنیم پراکندگی یا واریانس می‌گوییم (یا میانگین مربع انحراف‌ها) که مقدار انحراف میانگین‌ها از مقدار میانگین (چشمداشتی) را می‌گوید و در واقع میانگین $(\Delta A)^2=(A-\langle A\rangle)^2$ است.

$$\sigma_A^2 = \langle(\Delta A)^2\rangle = \langle\alpha|(A-\langle A\rangle)^2|\alpha\rangle = \sum_i |c_i^\alpha|^2(a_i-\bar{A}_\alpha)^2 = \sum_i |c_i^\alpha|^2(a_i^2-2a_i\bar{A}_\alpha+\bar{A}_\alpha^2)$$

$$= \sum_i |c_i^\alpha|^2 a_i^2 - \left(\sum |c_i^\alpha|^2 a_i\right)^2$$

$$= \bar{A^2}_\alpha - \bar{A}_\alpha^2$$

- به همین منوال تعریف می‌کنیم انحراف میانگین که جذر واریانس است:

$$\sigma_A = \left(\bar{A^2}_\alpha - \bar{A}_\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

- توجه شود که پراکندگی (واریانس) یک عملگر (مشاهده‌پذیر) در حالت ویژه‌اش برابر صفر می‌گردد.

$$|\alpha\rangle = |a_j\rangle = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|a_j\rangle = \sum \underbrace{c_i^j}_{\delta_{ij}} |a_i\rangle$$

$$\sigma_A^2 = \langle a_j|A^2|a_j\rangle - \langle a_j|A|a_j\rangle^2 = a_j^2 - a_j^2 = 0$$

مثال: پراکندگی S_z در پایه‌های خود صفر می‌شود:

$$\sigma_{S_z}^2 = \langle S_z\pm|(\Delta S_z)^2|S_z\pm\rangle = 0$$

اما به ازای ویژه‌کت S_z با مقدار ویژه مثبت خواهیم داشت:

$$\Delta S_x^2 = \langle S_z+|(\Delta S_x)^2|S_z+\rangle$$

$$= \langle S_z+|S_x^2|S_z+\rangle - |\langle S_z+|S_x|S_z+\rangle|^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}(1,0)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \left|(1,0)\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

- لم: نامساوی شوارتز:

$$|\langle u|v\rangle|^2 \leq \langle u|u\rangle\langle v|v\rangle$$

اثبات: در نظر بگیرید $w = u+\lambda v$ که $\lambda = \alpha+i\beta$ باشد. اندازه‌ی نرم w برابر است با:

$$\langle w|w\rangle = \langle u+\lambda v|u+\lambda v\rangle = \langle u|u\rangle + \langle u|\lambda v\rangle + \langle \lambda v|u\rangle + \langle \lambda v|\lambda v\rangle$$

$$= \langle u|u\rangle + (\alpha+i\beta)\langle u|v\rangle + (\alpha-i\beta)\langle u|v\rangle^* + (\alpha^2+\beta^2)\langle v|v\rangle$$

حال اگر بخواهیم نرم w کمینه باشد، باید $\frac{\partial\|w\|}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\|w\|}{\partial\beta}$ را صفر کنیم:

$$\frac{\partial\|w\|}{\partial\alpha} = 0 \to \langle u|v\rangle + \langle u|v\rangle^* + 2\alpha\langle v|v\rangle = 0 \to \alpha_{min} = -\frac{[\langle u|v\rangle + \langle u|v\rangle^*]}{2\langle v|v\rangle}$$

$$\frac{\partial\|w\|}{\partial\beta} = 0 \to i\langle u|v\rangle - i\langle u|v\rangle^* + 2\beta\langle v|v\rangle = 0 \to \beta_{min} = -i\,\frac{[\langle u|v\rangle - \langle u|v\rangle^*]}{2\langle v|v\rangle}$$

بنابراین مقدار لاندا می‌شود:

$$\lambda_{min} = -\frac{\langle u|v\rangle - \langle u|v\rangle^*}{2\langle v|v\rangle} + \frac{\langle u|v\rangle - \langle u|v\rangle^*}{2\langle v|v\rangle} = -\frac{\langle u|v\rangle^*}{\langle v|v\rangle}$$

حال با جایگذاری λ_{min} در عبارت به دست آمده برای نرم w، مقدار کمینه نرم w را پیدا می‌کنیم:

$$\langle w|w\rangle_{min} = \langle u|u\rangle - \frac{\langle u|v\rangle^2}{\langle v|v\rangle}$$

با توجه به اینکه نرم هر چیزی نامنفی است داریم:

$$\langle w|w\rangle_{min} \geq 0 \to |\langle u|v\rangle|^2 \leq \langle u|u\rangle\langle v|v\rangle$$

— لم ۲: مقدار چشمداشتی اپراتور هرمیتی، حقیقی است:

در اینجا می‌توان نوشت:

$$\langle \alpha | B | \beta \rangle^{*} = \langle \beta | B^{\dagger} | \alpha \rangle = \langle \beta | B | \alpha \rangle$$

حال اگر $|\alpha\rangle = |\beta\rangle$ باشد:

$$\langle \alpha | B | \alpha \rangle^{*} = \langle \alpha | B | \alpha \rangle$$

لذا مقدار چشمداشتی یک عدد حقیقی است.

— لم: مقدار چشمداشتی اپراتور ضد هرمیتی، موهومی خالص است.

در این صورت می‌توان نوشت:

$$\langle \alpha | C | \beta \rangle^{*} = \langle \beta | C^{\dagger} | \alpha \rangle = - \langle \beta | C | \alpha \rangle$$

حال اگر $|\alpha\rangle = |\beta\rangle$ باشد:

$$\langle \alpha | C | \alpha \rangle^{*} = - \langle \alpha | C | \alpha \rangle$$

لذا مقدار چشمداشتی یک عدد موهومی خالص است.

— عدم قطعیت: با در نظر گرفتن نامساوی شوارتز و $|v\rangle = \Delta A |\psi\rangle$, $|u\rangle = \Delta B |\psi\rangle$ می‌توان نوشت:

$$|\langle \psi | \Delta A^{\dagger} \Delta B | \psi \rangle|^2 \leq \langle \psi | \Delta A^{\dagger} \Delta A | \psi \rangle \langle \psi | \Delta B^{\dagger} \Delta B | \psi \rangle$$

با توجه به هرمیتی بودن ΔA و ΔB:

$$|\langle \psi | \Delta A \Delta B | \psi \rangle|^2 \leq \langle \psi | (\Delta A)^2 | \psi \rangle \langle \psi | (\Delta B)^2 | \psi \rangle \qquad \text{I}$$

اما به راحتی می‌توان نوشت:

$$\Delta A \Delta B = \frac{1}{2} [\Delta A, \Delta B] + \frac{1}{2} \{\Delta A, \Delta B\} . \qquad \text{II}$$

که چون $[\Delta A, \Delta B]$ ضدهرمیتی و $\{\Delta A, \Delta B\}$ هرمیتی است:

$$[\Delta A, \Delta B]^{\dagger} = [A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle]^{\dagger} = [A, B]^{\dagger} = (AB - BA)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} - A^{\dagger}B^{\dagger} = [B, A] = -[\Delta A, \Delta B]$$

$$\{\Delta A, \Delta B\}^{\dagger} = (\Delta A \Delta B + \Delta B \Delta A)^{\dagger} = \Delta B^{\dagger} \Delta A^{\dagger} + \Delta A^{\dagger} \Delta B^{\dagger} = \{\Delta A, \Delta B\}$$

لذا با فرض دو نکته ی فوق، با جایگذاری (II) در سمت چپ معادله ی (I) خواهیم داشت:

$$|\langle\psi|\Delta A\,\Delta B|\psi\rangle|^2=\Big|\underbrace{\tfrac{1}{2}\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle}_{\text{چون ضدهرمیتی است لذا مقدار موهومی دارد}}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\langle\psi|\{\Delta A,\Delta B\}|\psi\rangle}_{\text{چون عملگر هرمیتی دارد لذا مقدار حقیقی دارد.}}\Big|^2$$

بنابراین توان دو رسانده ی یک عدد موهومی $\alpha+i\beta$، شامل جملات تداخلی نخواهد بود:

$$|\langle\psi|\Delta A\,\Delta B|\psi\rangle|^2=\frac{1}{4}|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|^2+\frac{1}{4}|\langle\psi|\{\Delta A,\Delta B\}|\psi\rangle|^2 \qquad \text{(III)}$$

با توجه به (I) و (III) می توان نوشت:

$$\frac{1}{4}|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|^2\le\frac{1}{4}|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|^2+\frac{1}{4}|\langle\psi|\{\Delta A,\Delta B\}|\psi\rangle|^2\le\langle\psi|(\Delta A)^2|\psi\rangle\langle\psi|(\Delta B)^2|\psi\rangle$$

که با در نظر گرفتن سمت راست و چپ معادله ی فوق می توان نوشت:

$$\frac{1}{4}|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|^2\le\langle\psi|(\Delta A)^2|\psi\rangle\langle\psi|(\Delta B)^2|\psi\rangle.$$

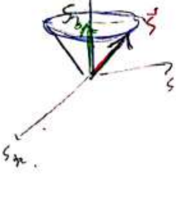
که رابطه ی فوق به رابطه ی عدم قطعیت موسوم است.

واضح است که عدم قطعیت برای مشاهده گرهای سازگار وجود ندارد.

به عنوان مثال عدم قطعیت S_x و S_y را می خواهیم حساب کنیم؛ از نکته ی فوق صفحه ی 24 می دانیم میانگین S_x، صفر مقدار است، به همان صورت S_y نیز صفر حساب می شود. ولی مقدار کمینه ی عدم قطعیت از رابطه ی فوق حساب می شود:

$$\frac{1}{4}|\langle S_z+|[S_x,S_y]|S_z+\rangle|^2=\frac{1}{4}|\langle S_z+|i\hbar S_z|S_z+\rangle|^2$$

$$=\frac{1}{4}\Big|i\hbar\frac{\hbar}{2}\Big|^2=\frac{\hbar^4}{16}.$$



- نمی توانیم $\vec{S}$ یا $\vec{S}$ را به طور کامل اندازه گیری کنیم. با توجه به شکل زمانی که S_z را داریم، S_x, S_y هر مقداری را می توانند بپذیرند.

- تغییر پایه‌ها.

- اگر دو اپراتور هرمیتی داشته باشیم که دو به دو جابجاگر ناصفر دارند و مشاهده‌پذیرهای ما هستند، می‌توانیم ویژه‌کت‌های آن دو را به عنوان دو مجموعه‌ی پایه فضا در نظر بگیریم $\{|a_i\rangle\}$ و $\{|b_i\rangle\}$.

انتظار داریم بتوان این دو مجموعه پایه را با یک ماتریس یکانی به یکدیگر تبدیل کرد. به طوری که آن اپراتور یکانی به صورت زیر تعریف شود:

$$\boxed{|b_i\rangle = U|a_i\rangle \quad ; \quad U = \sum_k |b_k\rangle\langle a_k|} \quad (*)$$

پس:

+ حال می‌توان به آسانی دید که این اپراتور یکانی باشد:

$$UU^\dagger = \sum_{ij} |b_i\rangle\langle a_i|a_j\rangle\langle b_j| = \sum |b_i\rangle \delta_{ij} \langle b_j| = \sum |b_i\rangle\langle b_i| = \mathbb{I}$$

$$U^\dagger U = \sum_{ij} |a_i\rangle\langle b_i|b_j\rangle\langle a_j| = \sum |a_i\rangle \delta_{ij} \langle a_j| = \sum |a_i\rangle\langle a_i| = \mathbb{I}$$

+ نمایش ماتریسی اپراتور به صورت فعال از رابطه (*):

$$\langle a_i|b_j\rangle = \langle a_i|U|a_j\rangle \iff U \doteq \begin{pmatrix} \langle a_1|b_1\rangle & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- بنابراین اگر یک حالت داشته باشیم که بتوانیم هم بر پایه‌های $|a_i\rangle$ هم $|b_i\rangle$ بنویسیم شکل تبدیل به یکدیگر خواهند بود به صورت زیر:

$$|\alpha\rangle = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle = \sum_i c^\alpha_{a_i} |a_i\rangle$$

$$|\alpha\rangle = \sum_i |b_i\rangle\langle b_i|\alpha\rangle = \sum c^\alpha_{b_i} |b_i\rangle$$

$$\boxed{|\alpha\rangle_{new} = U^\dagger |\alpha\rangle_{old} \quad ; \quad U = \sum_k |b_k\rangle\langle a_k|}$$

$$|\alpha\rangle_{new} = \sum_i |b_i\rangle\langle b_i|\alpha\rangle \overset{|b_i\rangle = U|a_i\rangle}{=\!=\!=} \sum_i |b_i\rangle\langle a_i| U^\dagger |\alpha\rangle = \sum_{ij} |b_i\rangle \underbrace{\langle a_i|U^\dagger|a_j\rangle}_{U^\dagger \text{ عناصر ماتریس}} \overbrace{\langle a_j|\alpha\rangle}$$

چرا که $\sum |a_j\rangle\langle a_j| = \mathbb{I}$

$$= \sum_{ij} |b\rangle \underbrace{(U^\dagger)_{ij} \, c^\alpha_{a_j}}_{= c^\alpha_{b_i}} = \sum c^\alpha_{b_i} |b\rangle.$$

- عناصر یک اپراتور نیز در پایه‌های جدید بر حسب پایه‌های قدیم به صورت زیر به‌دست می‌آید که به تبدیل یا گذار تشابهی موسوم است:

$$\boxed{X' = U^\dagger X U \; ; \; U = \sum_k |b_k\rangle\langle a_k|}$$

چراکه:

$$\underbrace{X'_{ij}}_{X' \text{ عناصر}} = \langle b_i|X|b_j\rangle = \sum_{k,l} \langle b_i\overbrace{|a_k\rangle\langle a_k|}^{\mathbb{1}} X \overbrace{|a_l\rangle\langle a_l|}^{\mathbb{1}} b_j\rangle$$

$$= \sum_{k,l} \underbrace{\langle a_i|U^\dagger|a_k\rangle}_{U^\dagger \text{ عناصر}} \underbrace{\langle a_k|X|a_l\rangle}_{X \text{ عناصر}} \underbrace{\langle a_l|U|a_j\rangle}_{U \text{ عناصر ماتریس}}$$

+ توجه شود که رد یک اپراتور نسبت به پایه‌های توصیف کننده‌اش ناوردا است:

$$\underset{\{|a_i\rangle\} \text{ در پایه‌های}}{\mathrm{Tr}(X)} = \sum_i \langle a_i|X|a_i\rangle = \sum_{i,j,k} \langle a_i|\overset{①}{b_j}\rangle\langle b_j|\overset{②}{X}|b_k\rangle\langle b_k|\overset{③}{a_i}\rangle$$

$$= \sum_i \sum_{jk} \langle b_j|X|b_k\rangle \underbrace{\langle b_k|a_i\rangle\langle a_i|b_j\rangle}_{=\mathbb{1}}$$

$$= \sum_{jk} \langle b_j|X|b_k\rangle \delta_{jk} = \sum_j \langle b_j|X|b_j\rangle = \underset{\{|b_j\rangle\} \text{ در پایه‌های}}{\mathrm{Tr}(X)}$$

+ به تبدیلی که یک اپراتور از پایه‌هایش به یک مجموعه پایه جدید ببرد تا قطری شود را قطری‌سازی گویند.

توجه شود که یک ماتریس (اپراتور) زمانی قطری می‌شود که آن‌ها و تنها آن‌ها، ویژه‌حالت‌هایش فضا را بپوشانند. به این عملگرها عادی (نرمال) گفته می‌شود که به صورت مقابل هستند: $[N^\dagger, N] = 0$

همچنین توجه شود که هرمیتی بودن و یکانی بودن زیر مجموعه‌ای از نرمال بودن است.

به صورت کلی یک ماتریس هرمیتی H با وجود ماتریس یکانی U به صورت مقابل قطری می‌شود: $UHU^\dagger$

اثبات. فرض کنیم $|c_i\rangle$ ها پایه‌های $UHU^\dagger$ باشند که با یک ماتریس یکانی می‌توانند به پایه‌های H تبدیل شوند ($H|c_i\rangle=|e_i\rangle$). و H هرمیتی و U یکانی باشد.

می‌توان نوشت:

$$\underbrace{\langle e_i|UHU^\dagger|e_j\rangle}_{\text{عناصر } UHU^\dagger} = \langle Uc_i|UHU^\dagger|Uc_j\rangle$$

$$= \langle c_i|\underbrace{U^\dagger U}_{=1} H \underbrace{U^\dagger U}_{=1}|c_j\rangle = \overbrace{\underbrace{\langle c_i|H|c_j\rangle}_{\text{عناصر H در پایه‌ها}}}^{=c_{ij}\delta_{ij}} = c_{ij}$$

U یکانی است

ویژه‌مقادیر H هستند در واقع. دیدیم عملگرها در پایه ویژه‌اش قطری است.

چرا که: $H|c_i\rangle = c_i|c_i\rangle \to \langle c_j|H|c_i\rangle = c_i\delta_{ji}$

بنابراین برای پیدا کردن یک عملگر در پایه‌هایی که آن را قطری می‌کند، باید ویژه‌مقادیر آن را پیدا کرده و در عناصر قطری بگذاریم. منظور ماتریس یکانی متناظر را با قرار دادن ویژه‌بردارها به صورت ستونی می‌توان ساخت.

+ مشاهده‌پذیرها با یکانی همانی: می‌توان نشان داد که ویژه‌مقادیر A و $UAU^\dagger$ یکسان است:

$$A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \to UA\underbrace{I}_{=UU^{-1}}|a_i\rangle = a_i U|a_i\rangle \xrightarrow{U^{-1}=U^\dagger} (UAU^\dagger)(U|a_i\rangle) = a_i(U|a_i\rangle) \quad \text{(I)}$$

بنابراین $U|a_i\rangle$، ویژه‌توابع $UHU^\dagger$ است ولی طیف A و $UAU^\dagger$ یکسان است که برابر a_i است.

بدین معنی که نتیجه اندازه‌گیری‌ها هر دو یعنی A و $UAU^\dagger$ یکسان است.

می‌دانیم که $U|a_i\rangle$ همان $|b_i\rangle$ است. که پایه‌های یک فضا هستند. لذا می‌توانند به صورت: $B|b_i\rangle = b_i|b_i\rangle$ (II)،

مطرح شوند به شرطی که B هرمیتی باشد. در این صورت B و $UAU^\dagger$ با مقایسه (I) و (II) می‌بینیم که

هم‌زمان قطری ساخته‌اند. اما توجه کنید که لزوما B برابر $UAU^\dagger$ نمی‌باشد.

– مکان، تکانه و انتقال

+ طیف پیوسته.

– تاکنون ما از مورد ویژه مقادیر (طیف) هایی صحبت کردیم که گسسته بودند ولی در کل ویژه مقادیر یک اپراتور خاص می‌تواند گسسته، پیوسته و ترکیبی از هر دو باشد.

– به عنوان مثال طیف اپراتور H، انرژی‌ها هم می‌توانند گسسته باشند هم می‌توانند پیوسته باشند. یک اتم هیدروژن مثلاً، زمانی که الکترون در حالت مقید است، طیف انرژی گسسته است $\{E_n\}$، ولی زمانی که به صورت یونیزه درمی‌آید، هر انرژی ای می‌تواند پذیرفته شود. لذا:

$$\langle E_i | E_j \rangle = \delta_{ij} \quad , \quad \langle E' | E'' \rangle = \delta(E' - E'')$$

$$\langle E_i | E' \rangle = 0$$

$$\sum_i |E_i\rangle\langle E_i| + \int dE' \, |E'\rangle\langle E'| = \mathbb{1}$$

– ویژگی‌های طیف گسسته را به صورت شکلی تعمیم می‌دهیم به پیوسته: به طور خلاصه:

	Discrete.	continuous.
Eigen value problem.	$A\|a_i\rangle = a_i\|a_i\rangle$	$\xi\|\xi'\rangle = \xi'\|\xi'\rangle$
orthonormality	$\langle a_i\|a_j\rangle = \delta_{ij}$	$\langle \xi'\|\xi''\rangle = \delta(\xi' - \xi'')$
complitness	$\sum \|a_i\rangle\langle a_i\| = \mathbb{1}$	$\int \|\xi'\rangle\langle\xi'\| d\xi' = \mathbb{1}$
State expansion	$\|\alpha\rangle = \sum_i \|a_i\rangle\langle a_i\|\alpha\rangle = \sum \|a_i\rangle \, c^{\alpha}_{a_i}$	$\|\alpha\rangle = \int \|\xi'\rangle\langle\xi'\|\alpha\rangle d\xi' = \int \|\xi'\rangle \, \psi_\alpha(\xi') \, d\xi'$
Normalization.	$\langle\alpha\|\alpha\rangle = 1$ $\sum \langle\alpha\|a_i\rangle\langle a_i\|\alpha\rangle = 1$ $\sum \underbrace{c^{\alpha *}_i c^{\alpha}_i}_{\text{probability.}} = 1$	$\langle\alpha\|\alpha\rangle = 1$ $\int d\xi' \langle\alpha\|\xi'\rangle\langle\xi'\|\alpha\rangle = 1$ $\int \underbrace{d\xi' \, \psi^*_\alpha(\xi') \, \psi_\alpha(\xi')}_{\text{probability density.}} = 1$

Inner product
$$\langle\beta|\alpha\rangle=\sum_i\langle\beta|a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle=\sum_i c_i^{\beta*}c_i^{\alpha}$$
$$\langle\beta|\alpha\rangle=\int d\xi'\,\langle\beta|\xi'\rangle\langle\xi'|\alpha\rangle=\int d\xi'\,\psi_\beta^*(\xi')\,\psi_\alpha(\xi')$$

Matrix element
$$\langle\beta|B|\alpha\rangle=\sum_{i,j}\langle\beta|a_i\rangle\langle a_i|B|a_j\rangle\langle a_j|\alpha\rangle=\sum_{i,j}c_i^{\beta*}\,B_{ij}\,c_j^{\alpha}$$
$$\langle\beta|B|\alpha\rangle=\iint d\xi'd\xi''\,\langle\beta|\xi'\rangle\langle\xi'|B|\xi''\rangle\langle\xi''|\alpha\rangle=\iint d\xi'd\xi''\,\psi^{*}_{\beta}(\xi')\,B(\xi',\xi'')\,\psi_\alpha(\xi'')$$

+ مکان

— اولین و ساده‌ترین نمونه‌ی اپراتورهایی که طیف پیوسته دارند، مکان است که به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\bar{x}\,|\bar{x}'\rangle=\bar{x}'\,|\bar{x}'\rangle \quad ; \quad |x'\rangle=|x',y',z'\rangle$$

که برای اینکه بتوان یک نقطه را در همه جهت مشخص کرد باید:
$$[x_i,x_j]=0$$

— اینها را نیز به عنوان اصل موضوعه در نظر گرفتیم که پایه‌های اپراتور مکان کامل اند و لذا می‌توان هر حالت دلخواهی را در نمایش (اپراتور) مکان نوشت.

+ انتقال

— فرض کنید حالتی که به خوبی در حوالی x' جایگزیده شده است را با عملگری به اسم انتقال به $x'+l$ منتقل می‌کنیم:

$$\tau(\vec{l})\,|\vec{x}'\rangle=|\vec{x}'+\vec{l}\rangle$$

اگر بخواهیم همه خصوصیات ما در حالت حفظ شوند باید:

اولاً: عملگر انتقال یکانی باشد.

دوماً: عملگر انتقال توسط یک عملگر هرمیتی K به صورت $\tau(\vec{l})=e^{-i\vec{K}\cdot\vec{l}}$ نوشته شود که در آن $[x_i,K_j]=i\delta_{ij}$ است.
$$=1-i\delta\vec{x}\cdot\vec{K} \quad (\text{در تغییرات کوچک})$$

الف) ... در واقع شرایطی که ما انتظار داریم اپراتور انتقال داشته باشد:

$a)\quad \langle \alpha' | \alpha' \rangle = \langle \alpha | \alpha \rangle$ (بهنجارش حفظ شود)

$b)\quad \lim_{\vec{l} \to 0} \tau(\vec{l}) = \mathbb{1}$

$c)\quad \tau(l_1 + l_2) = \tau(l_1) + \tau(l_2)$ (شرط آنکه بتوان آن را ارضا کند)

در واقع می‌توان نشان داد که شرط انتظاری $|\alpha\rangle$ منجر به یکانی شدن τ می‌شود:

$$\langle \alpha' | \alpha' \rangle = \langle \alpha | \alpha \rangle \rightarrow \langle \alpha | \tau^{\dagger}(l) \tau(l) | \alpha \rangle = \langle \alpha | \alpha \rangle \rightarrow \tau^{\dagger} \tau = \mathbb{1}$$

جهت اثبات قسمت (b)، می‌توان نشان داد با فرض $\tau = \mathbb{1} - i\delta x K$ که K یک اپراتور هرمیتی است هر سه شرط فوق ارضا می‌شود:

$$a)\quad \tau^{\dagger}\tau = 1 \rightarrow (\mathbb{1} + i\delta x K^{\dagger})(\mathbb{1} - i\delta x K) = 1 \rightarrow \mathbb{1} + i\,\delta x (K^{\dagger} - K) + O(\delta x^2) = 1$$

اگر بخواهیم عبارت فوق برقرار باشد باید ترم‌های مرتبه اول نباشند؛ یعنی K باید هرمیتی باشد: $K^{\dagger} = K$

$$c)\quad \tau(l + \delta x') = \tau(l)\tau(\delta x) \rightarrow \tau(l + \delta x') = \tau(l)(\mathbb{1} - i\delta x \cdot K)$$

$$\rightarrow \tau(l + \delta x') = \tau(l) + \underbrace{(-i\tau(l) K)}\,\delta x$$

اگر از این اپراتور بسط بگیریم: $\nabla_l \tau(l)$

بنابراین با شرط اولیه که تنها معادله برقرار می‌شود:

$$\nabla_l \tau(l) = -i\tau(l) \vec{K} \xrightarrow[\tau(0)=\mathbb{1}]{\text{با شرط اولیه}} \tau(l) = e^{-i\vec{K}\cdot\vec{l}}$$

حال نشان دادن رابطه جابجایی x و p، ابتدا جابجاگر x و τ را محاسبه می‌کنیم؛ با اثر دادن بر حالت دلخواه $|\vec{x}'\rangle$:

$$[\vec{x}, \tau(\delta \vec{x}')] |\vec{x}'\rangle = [x\tau(\delta x') - \tau(\delta x')x] |x'\rangle = x|x' + \delta x'\rangle - \tau(\delta x') x' |x'\rangle$$

$$= (x' + \delta x')|x' + \delta x'\rangle - x'|x' + \delta x'\rangle = \delta x|x' + \delta x\rangle = \delta x' |x'\rangle \quad \textcircled{+}$$

از طرف دیگر با جابجاگر $\tau = 1 - i\delta x K$ می‌توان نشان داد:

$$[x, \tau(\delta x)] = [x, \mathbb{1} - i\delta x K] = -i\delta x_j [x_j, K_j] \quad \textcircled{*}$$

با مقایسه‌ی ① و ② می‌توان نشان داد:

$$[x_i, k_j] = i\delta_{ij}$$

– برای اینکه اثر τ را بهتر متوجه شویم آن را روی یک حالت دلخواه $|\alpha\rangle$ اثر می‌دهیم.

بسط کت حالت در پایه‌های مکان داریم:

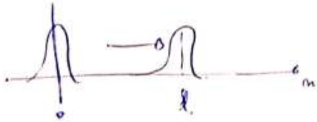
$$|\alpha\rangle = \int d^3x' |x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle = \int d^3x' |x'\rangle \psi_{\alpha}(x') \quad ①$$

در صورتی که این حالت را انتقال دهیم:

$$|\alpha'\rangle = \tau(\vec{l})|\alpha\rangle$$

$$= \tau(\vec{l}) \int d^3x' |x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle = \int d^3x' \left(\tau(\vec{l})|x'\rangle\right) \psi_{\alpha}(x') = \int d^3x' |x'+l\rangle \psi_{\alpha}(x')$$

$$\overset{\text{تغییر متغیر}}{=} \int d^3x' |x'\rangle \psi(x'-\vec{l}) \quad ⑪$$



لذا با توجه به ① و ⑪ می‌توان فهمید که تابع موج فقط جابجا شده است:

+ تکانه

– به k که خصوصیات امید را دارد (به دلیل انتقال موج) است که در واقع از تشابه با مکانیک کلاسیک می‌توان گفت k باید متناسب باشد با تکانه و از طول موج دوبروی می‌توان ضریب تناسب را نیز به صورت زیر تعیین کرد:

$$k = \frac{p}{\hbar}$$

– با این تعاریف می‌توان عملگر انتقال را نوشت: (برای تغییرات کوچک)

$$\tau(\vec{dl}) = 1 - i\vec{p}\cdot\vec{dl}/\hbar$$

(برای تغییرات محدود)

$$\doteq \exp(-i\vec{p}\cdot\vec{l}/\hbar)$$

– ولذا رابطه‌ی جابجایی برابر می‌شود با:

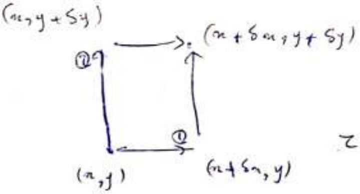
$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

- بنابراین با جابجاگر $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ در رابطه عدم قطعیت میتوان عدم قطعیت را پیدا کرد، را بصورت ذیل ثابت کرد:

$$\langle\psi|(\Delta x_i)^2|\psi\rangle\langle\psi|(\Delta p_i)^2|\psi\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle\psi|[x_i, p_i]|\psi\rangle|^2$$

$$\sigma_x^2\,\sigma_p^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

- از خاصیت جابجایی (c) آن را استفاده که مجددا از انتقال (x,y) به $(x+\delta x, y+\delta y)$ دو مسیر را مانند شکل در نظر بگیریم:



بنابراین از مسیر اول میتوان نوشت:

$$\tau(\delta x'\hat{x} + \delta y'\hat{y}) \overset{①}{=} \tau(\delta y'\hat{y})\,\tau(\delta x'\hat{x})$$

با استفاده از بسط تیلور:

$$\tau(\delta x'\hat{x} + \delta y'\hat{y}) \overset{②}{=} \left(1 - \frac{i}{\hbar}\delta y' P_y + \frac{i^2}{2\hbar^2}\delta y'^2 P_y^2\right)\left(1 - \frac{i}{\hbar}\delta x' P_x + \frac{i^2}{2\hbar^2}\delta x'^2 P_x^2\right)$$

$$\simeq 1 - \frac{i}{\hbar}(\delta x' P_x + \delta y' P_y) - \frac{1}{2\hbar^2}(\delta x'^2 P_x^2 + \delta y'^2 P_y^2) - \frac{1}{\hbar^2}\delta x'\delta y' P_y P_x.$$

اما اگر از مسیر دو برویم:

$$\tau(\delta x'\hat{x} + \delta y'\hat{y}) \overset{②}{=} 1 - \frac{i}{\hbar}(\delta x' P_x + \delta y' P_y) - \frac{1}{2\hbar^2}(\delta x'^2 P_x^2 + \delta y'^2 P_y^2) - \frac{1}{\hbar^2}\delta x'\delta y' P_x P_y$$

بنابراین برای اینکه از هر دو مسیر به یک نتیجه منحصر شود، باید داشته باشیم:

$$[P_i, P_j] = 0$$

ابتدا این موضوع را میتوان از اینجا فهمید که هر زمان میتوان تمام مولفه‌های $\vec{P}$ را تعیین کرد.

- از آنجا که $[P_i, P_j] = 0$ و چون $\tau(l)$ تابعی از P است؛

$$[P, \tau(l)] = 0$$

+ روابط جابجایی بنیادی یا کانونیک.

- میدانیم جمع بندی مقدار مؤلفه جابجایی که پایه‌ها را نشان می‌دهند را مجددا بیان کنیم:

$$[x_i, x_j] = 0 \qquad [p_i, p_j] = 0 \qquad [x_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$

- تابع موج در فضای مکان/تکانه.

+ فضای مکان

- با تعریف مکان و ویژه توابع و حالت ها به صورت زیر که در توابع عملگر را نشان می‌دهند:

$$X|x'\rangle = x'|x'\rangle$$

و البته شرایط تعامد نیز به صورت مقابل برقرار خواهد بود:

$$\langle x''|x'\rangle = \delta(x''-x')$$

- لذا هر حالتی را می‌توان برحسب پایه‌های مکان بسط داد:

$$|\alpha\rangle = \int dx'\,|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

$$= \int dx'\,|x'\rangle\,\psi_\alpha(x') \qquad \text{(I)}$$

که در آن $\psi_\alpha(x')$، تابع موج حالت $|\alpha\rangle$ است:

- اگر از طرف دیگر همان حالت را به صورت مقابل بنویسیم، خواهیم داشت:

$$|\alpha\rangle = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle = \sum_i \int d\xi'\,|\xi'\rangle\langle\xi'|a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle$$

$$= \int d\xi'\,|\xi'\rangle \sum_i \langle\xi'|a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle$$

$$= \int d\xi\,|\xi'\rangle \sum_i \psi_{a_i}(\xi')\, c_{a_i}^{\alpha} \qquad \text{(II)}$$

با مقایسه عبارت های (I) و (II) می‌توان نوشت:

$$\psi_\alpha(x') = \sum_i c_{a_i}^{\alpha}\,\psi_{a_i}(\xi')$$

به عنوان مثال در اتم هیدروژن داریم:

$$\psi_\alpha(\vec{x}') = \sum_{n,l,s} c^{m_l, m_s}_{n,l,s}\, \psi^{m_l, m_s}_{n,l,s}(\vec{x}')$$

که آنها ویژه توابع مشترک H, L^2, L_z, S^2, S_z ؛ $|n,l,s,m_l,m_s\rangle$ نمایش داده شده‌اند، باشند:

$$\psi^{m_l, m_s}_{n,l,s}(\vec{x}') = \langle \vec{x}' | n l, s, m_l, m_s \rangle .$$

— اپراتور مکان در فضای مکان X را می‌توان نوشت:

$$|\alpha\rangle = \int dx'\, |x'\rangle \overbrace{\langle x'|\alpha\rangle}^{\psi_\alpha(x')}$$

$$X|\alpha\rangle = \int dx'\, |x'\rangle\, x' \overbrace{\langle x'|\alpha\rangle}^{\psi_\alpha(x')}$$

$$\langle x'|X|\alpha\rangle = \underline{x'} \overbrace{\langle x'|\alpha\rangle}^{\psi_\alpha(x')} \longrightarrow \langle x'|f(X)|\alpha\rangle = f(x') \overbrace{\langle x'|\alpha\rangle}^{\psi_\alpha(x')}$$

$$\langle \beta|X|\alpha\rangle = \int dx' \overbrace{\langle \beta|x'\rangle}^{\psi^*_\beta(x')} x' \overbrace{\langle x'|\alpha\rangle}^{\psi_\alpha(x')} \longrightarrow \langle \beta|f(X)|\alpha\rangle = \int dx' \overbrace{\langle \beta|x'\rangle}^{\psi^*_\beta(x')} f(x') \overbrace{\langle x'|\alpha\rangle}^{\psi_\alpha(x')}$$

— اپراتور انتقال در فضای مکان به صورت ذیل به دست آمد؛ اگر حالت دلخواه $|\alpha\rangle$ را به مقدار کوچکی منتقل کنیم:

$$\tau(\delta\vec{x}')|\alpha\rangle = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\delta\vec{x}''\right)|\alpha\rangle = \int d^3x'' \left(|x''\rangle\langle x''| - \frac{i\vec{P}\cdot\delta x''}{\hbar}\right)|\alpha\rangle \quad \text{I}$$

حال مقدار فوق را با روش دیگری نیز محاسبه می‌کنیم:

$$\tau(\delta\vec{x}')|\alpha\rangle = \int d^3x''\, \overbrace{\tau(\delta\vec{x}')|\vec{x}''\rangle}\langle\vec{x}''|\alpha\rangle = \int d^3x''\, |\vec{x}''+d\vec{x}''\rangle\langle\vec{x}''|\alpha\rangle$$

$$\overset{\text{تغییر متغیر}}{=\!=} \int d^3x''\, |\vec{x}''\rangle \overbrace{\langle\vec{x}''-\delta\vec{x}''|\alpha\rangle} = \int d^3x''\, |\vec{x}''\rangle\, \psi_\alpha(\vec{x}''-\delta\vec{x}'')$$

$$\underset{\text{حول انتقال کوچک}}{\overset{\text{بسط تیلور تا مرتبه اول}}{=\!=}} \int d^3x''\, |\vec{x}''\rangle \left(\langle\vec{x}''|\alpha\rangle - \delta\vec{x}''\, \vec{\nabla}_{x''}\langle\vec{x}''|\alpha\rangle\right)$$

$$= \int d^3x'' \left(|\vec{x}''\rangle\langle\vec{x}''| - \delta x''\, \nabla_{x''}\right)|\alpha\rangle \quad \text{II}$$

با مقایسه I, II می‌توان نوشت:

$$\boxed{\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla}_{\vec{x}''}}$$

چون داریم:

$$|\alpha\rangle = \int dx' \, |x'\rangle \overbrace{\langle x'|\alpha\rangle}^{\psi_\alpha(x')}$$

$$P|\alpha\rangle = \int d^3x'' \, |\vec{x}''\rangle \left(-i\hbar \vec{\nabla}_{x''}\right) \overbrace{\langle x''|\alpha\rangle}^{\psi_\alpha(x'')}$$

$$\langle x'|\vec{P}|\alpha\rangle = \left(-i\hbar \vec{\nabla}_{x'}\right) \overbrace{\langle x'|\alpha\rangle}^{\psi_\alpha(x')} \quad (*) \longrightarrow \langle x'|f(\vec{P})|\alpha\rangle = f\left(-i\hbar \vec{\nabla}_{x'}\right) \overbrace{\langle x'|\alpha\rangle}^{\psi_\alpha(x')}$$

$$\langle\beta|\vec{P}|\alpha\rangle = \int d^3x'' \, \overbrace{\langle\beta|x''\rangle}^{\psi^*_\beta(x'')} \left(-i\hbar \vec{\nabla}_{x''}\right) \overbrace{\langle x''|\alpha\rangle}^{\psi_\alpha(x'')} \longrightarrow \langle\beta|f(\vec{P})|\alpha\rangle = \int d^3x'' \, \overbrace{\langle\beta|x''\rangle}^{\psi^*_\beta(x'')} f\left(-i\hbar \nabla_{x''}\right) \overbrace{\langle x''|\alpha\rangle}^{\psi_\alpha(x'')}$$

+ فضای تکانه.

- در اینجا فقط با تکانه سروکار داریم که ویژه مقادیر آن پیوسته باشد:

$$\vec{P}|\vec{p}'\rangle = \vec{p}'|\vec{p}'\rangle \quad (**)$$

دلیل خواص داشت:

$$\langle p'|p''\rangle = \delta(p'-p'')$$

- با توجه به اینکه نشان دادیم $[\vec{P}, \tau(l)]=0$ ، بنابراین دارای ویژه توابع همزمان (مشترک) خواهند بود [illegible]

به صورت ساده‌تر می‌توان نوشت:

$$\vec{P}|\vec{p}'\rangle = \vec{p}'|\vec{p}'\rangle$$

$$\tau(l)|p'\rangle = e^{\frac{i\vec{l}\cdot\vec{p}'}{\hbar}}|p'\rangle$$

- همانطور چون کامل است در حالت دلخواه می‌توان نوشت:

$$|\alpha\rangle = \int dp' \, |p'\rangle\langle p'|\alpha\rangle = \int dp' \, |p'\rangle \, \phi_\alpha(p')$$

- اکنون با قرار دادن $|p'\rangle$ به جای $|\alpha\rangle$ در $(*)$ و اعمال $\langle x'|$ از چپ به دو طرف:

$$\langle x'|P'|p'\rangle = \left(-i\hbar \nabla_{x}\right)\langle x'|p'\rangle$$

$$\langle x'|P'|p'\rangle = p' \, \langle x'|p'\rangle$$

بنابراین می‌توان جدا یک معادله دیفرانسیل برای $\langle x'|p'\rangle$ را نوشت:

$$\langle x'|p'\rangle = N \exp\left(\frac{i p' x'}{\hbar}\right)$$

با تعیین ثابت، بهنجارش می‌کنیم:

$$\langle x'|x''\rangle = \delta(x'-x'') \longrightarrow \int d^3p\, \langle x'|p'\rangle\langle p'|x''\rangle = \delta(x'-x'')$$

$$\longrightarrow |N|^2 \int d^3p\, e^{\frac{i}{\hbar}(x'-x'')} = \delta(x'-x'') \longrightarrow |N|^2\, 2\pi\hbar\, \delta(x'-x'') \Rightarrow |N| = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}$$

بنابراین بهنجار شده:

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \vec{x}'|\vec{p}'\rangle &= \psi_{p'}(\vec{x}') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}'/\hbar} \\ \langle \vec{p}'|\vec{x}'\rangle &= \varphi_{x'}(\vec{p}') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}'/\hbar} \end{aligned}}$$

— بنابراین هر تابع موجی را می‌توان بین دو فضا به صورت زیر جابجا کرد که به تبدیل فوریه موسوم است:

$$\varphi_\alpha(\vec{p}') = \langle \vec{p}'|\alpha\rangle = \int d^3x\, \underbrace{\langle \vec{p}'|\vec{x}'\rangle}_{\varphi_{x'}(\vec{p}')}\underbrace{\langle x'|\alpha\rangle}_{\psi_\alpha(\vec{x}')} = \int d^3x\, \frac{e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, \psi_\alpha(\vec{x}')$$

$$\psi_\alpha(\vec{x}') = \langle x'|\alpha\rangle = \int d^3p\, \underbrace{\langle x'|p'\rangle}_{\psi_{p'}(\vec{x}')}\underbrace{\langle p'|\alpha\rangle}_{\varphi_\alpha(p')} = \int d^3p\, \frac{e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, \varphi_\alpha(\vec{p}')$$

که حالت $|\alpha\rangle$ در دو پایه به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$|\alpha\rangle = \int d^3x\, |\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'|\alpha\rangle = \int d^3x\, |\vec{x}'\rangle\, \psi_\alpha(\vec{x}')$$

$$|\alpha\rangle = \int d^3p\, |\vec{p}'\rangle\langle\vec{p}'|\alpha\rangle = \int d^3p\, |\vec{p}'\rangle\, \varphi_\alpha(\vec{p}')$$

— نمایش اپراتور تکانه در تکانه چون p است می‌توان نوشت، چون:

$$|\alpha\rangle = \int dp'\, |p'\rangle\underbrace{\langle p'|\alpha\rangle}_{\varphi_\alpha(p')}$$

$$P|\alpha\rangle = \int dp'\, |p'\rangle\, p'\underbrace{\langle p'|\alpha\rangle}_{\varphi_\alpha(p')}$$

$$\langle p'|P|\alpha\rangle = p'\underbrace{\langle p'|\alpha\rangle}_{\varphi_\alpha(p')} \longrightarrow \langle p'|f(P)|\alpha\rangle = f(p')\underbrace{\langle p'|\alpha\rangle}_{\varphi_\alpha(p')}$$

$$\langle\beta|P|\alpha\rangle = \int dp\, \underbrace{\langle\beta|p'\rangle}_{\varphi^*_\beta(p')} p' \underbrace{\langle p'|\alpha\rangle}_{\varphi_\alpha(p')} \longrightarrow \langle\beta|f(P)|\alpha\rangle = \int dp'\, \underbrace{\langle\beta|p'\rangle}_{\varphi^*_\beta(p')} f(p')\underbrace{\langle p'|\alpha\rangle}_{\varphi_\alpha(p')}$$

- به بیان دیگر نمایش (اپراتور) آن در فضای تکانه به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\langle p' | X | \alpha \rangle = \int dx' \, \langle p' | x' \rangle \langle x' | X | \alpha \rangle$$

از صفحه 36 داریم:

$$\langle x' | X | \alpha \rangle = x' \overbrace{\langle x' | \alpha \rangle}^{\psi_\alpha(x')}$$

و همچنین از ص 38 داریم:

$$\langle p' | x' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ip'x'/\hbar}$$

بنابراین جایگذاری که کنیم بدست می‌آید:

$$\langle p' | X | \alpha \rangle = \int dx' \, \frac{e^{-ip'x'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \, x' \langle x' | \alpha \rangle$$

$$= i\hbar \frac{d}{dp'} \int dx' \, \frac{e^{-ip'x'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \, \psi_\alpha(x') = i\hbar \frac{d}{dp'} \int dx' \overbrace{\langle p' | x' \rangle \langle x' |}^{=1} \alpha \rangle$$

$$= \left(i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{p}'} \right) \langle p' | \alpha \rangle$$

پس بدست می‌آید:

$$\boxed{X = i\hbar \vec{\nabla}_{p'}}$$

چون داریم:

$$| \alpha \rangle = \int dp' \, | p' \rangle \overbrace{\langle p' | \alpha \rangle}^{\varphi_\alpha(p')}$$

$$X | \alpha \rangle = \int d^3p \, | p \rangle \, (i\hbar \nabla_p) \overbrace{\langle p | \alpha \rangle}^{\varphi_\alpha(p)}$$

$$\langle p' | X | \alpha \rangle = (i\hbar \nabla_p) \overbrace{\langle p' | \alpha \rangle}^{\varphi_\alpha(p')} \longrightarrow \langle p' | f(X) | \alpha \rangle = f(i\hbar \nabla_p) \overbrace{\langle p' | \alpha \rangle}^{\varphi_\alpha(p')}$$

$$\langle \beta | X | \alpha \rangle = \int d^3p \, \overbrace{\langle \beta | p \rangle}^{\varphi^*_\beta(p)} (i\hbar \nabla_p) \overbrace{\langle p | \alpha \rangle}^{\varphi_\alpha(p)} \rightarrow \langle \beta | f(X) | \alpha \rangle = \int d^3p \, \overbrace{\langle \beta | p \rangle}^{\varphi^*_\beta(p)} f(i\hbar \nabla_p) \overbrace{\langle p | \alpha \rangle}^{\varphi_\alpha(p)}$$

- قضیه: می‌توان نشان داد که:

$$[P_i, F(\vec{x})] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

اثبات: می‌دانیم که اپراتور مکان و تکانه در نمایش مختصاتی مکان به صورت x و $-i\hbar\frac{d}{dx}$ به ترتیب است.

از ... صفحه 3 داریم:

$$\langle\beta|P|\alpha\rangle = \int dx'\langle\beta|x'\rangle\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\right)\langle x'|\alpha\rangle$$

و همچنین از صفحه 36 داریم:

$$\langle\beta|F(x)|\alpha\rangle = \int dx'\langle\beta|x'\rangle F(x')\langle x'|\alpha\rangle$$

همچنین می‌دانیم:

$$\langle x'|P|\alpha\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx'}\langle x'|\alpha\rangle$$

حال می‌توان با فرض فضای فوق، عبارت ذیل را حساب کرد:

$$\langle x'|[P, F(\vec{x})]|\alpha\rangle = \langle x'|PF(x) - F(x)P|\alpha\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x'|F(x)|\alpha\rangle - F(x')\langle x'|P|\alpha\rangle$$

$$= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\left[F(x')\psi_\alpha(x')\right] - F(x')\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_\alpha(x') = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}F(x')\right]\langle x'|\alpha\rangle$$

$$= \langle x'|-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}F(x)|\alpha\rangle \Longrightarrow [P, F(\vec{x})] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x}$$

- قضیه: می‌توان نشان داد که:

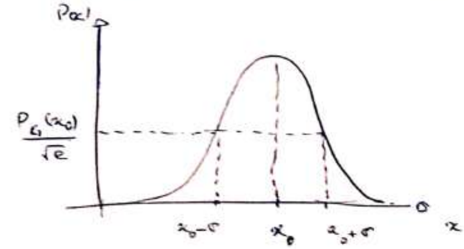
$$[x, G(P)] = +i\hbar\frac{dG}{dP}$$

اثبات: با فرض اینکه در فضای تکانه باشیم و روابط مشابه با بالا را داشته باشیم قابل اثبات است.

+ بسته موج گاوسی.

- توزیع گاوسی را به صورت تابع زیر نمایش می‌دهیم که در آن x_0 میانگین و σ انحراف معیار باشد:

$$P_G(x) = \frac{e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$$



ـ با حساب انتگرال صفحه مقابل میانگین و پراش‌های این تابع توزیع را نتیجه دهید :

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} dx.$$

برای حساب این، ابتدا مقدار A^2 را حساب می‌کنیم:

$$A^2 = \int dx\,dy\; e^{-a(x^2+y^2)}$$

$$= \int_0^{\infty} 2\pi r\,dr\, e^{-a r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{u}\,du}{2a} = \frac{\pi}{a}$$

لذا خواهیم داشت:

$$A = \int_{\infty}^{\infty} e^{-a x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ـ بررسی بهنجار بودن تابع توزیع گاوسی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_G(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{1/2\sigma^2}} = 1$$

ـ برای مقدار میانگین بودن x_0 در توزیع گاوسی:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{P_G(x)}_{\text{تابع زوج است}} \underbrace{[(x-x_0)+x_0]}_{\text{تابع فرد است.}} dx = x_0$$

ـ بررسی انحراف معیار بودن σ (یا واریانس بودن σ^2) در توزیع گاوسی:

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-x_0)^2} (x-x_0)^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \left(\frac{-d}{da}\right) \int e^{-a(x-x_0)^2} dx.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \left(-\frac{d}{da}\right) \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\sigma^2)^{3/2} = \sigma^2.$$

- حال فرض کنیم تابع موج (اولیه) مورد نظر یک تابع توزیع گاوسی باشد در فضای مکان یعنی داریم:

$$\psi_\alpha(x') = \langle x'|\alpha\rangle = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{ik_0 x' - (x'-x_0')^2/4\sigma_x^2\right\} ; \quad |\psi_\alpha(x')|^2 = P_{G}(x')$$

توجه شود فاز e^{ikx} را برای اینکه موج سیر ایان بتواند حرکت کند به عبارت فوق اضافه کردیم. برای اینکه ادعای خود را چک کنیم. مقدار چشمداشتی تکانه را محاسبه می‌کنیم:

$$\langle\alpha|P|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, \psi^*_\alpha(x')\left(-i\hbar\frac{d}{dx'}\right)\psi_\alpha(x') = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\hbar k_0' + i\hbar\frac{x'-x_0'}{2\sigma_x^2}\right) P_G(x')\,dx' = \hbar k_0' = P_0'$$

لذا تکانه دارد در موج مورد نظر، اما برای اینکه پراکندگی تکانه را بدانیم:

$$\langle\alpha|(\Delta P)^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|(P-\bar{P})^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|P^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|\bar{P}'|\alpha\rangle^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, \psi^*_\alpha(x')\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 \psi_\alpha(x') - P'^2$$

اما عبارت فوق محاسبه‌اش دشوارتر است. لذا برای دیدن پراکندگی تکانه، تابع موج را به فضای تکانه می‌بریم:

$$\phi_\alpha(p') = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{e^{-ip'x'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi_\alpha(x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, \frac{e^{-ip'x'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{ik_0'x - \frac{(x'-x_0')^2}{4\sigma_x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-i(k'-k_0')x_0'} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, e^{-i(k'-k_0')(x'-x_0')} e^{-\frac{(x'-x_0')^2}{4\sigma_x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-i(k'-k_0')x_0'} e^{-\sigma_x^2(k'-k_0')^2} \sqrt{\frac{\pi}{1/4\sigma_x^2}}$$

$$= \left(\frac{2\sigma_x^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-i(p'-p_0)x_0'/\hbar} e^{-\frac{4\sigma_x^2(p'-p_0')^2}{4\hbar^2}}$$

می‌بینیم که این نیز یک تابع گاوسی است! اما توجه شود که پراکندگی اینجا با $\frac{1}{\sigma_x}$ رابطه دارد خلاف ψ_α