پاسخنامه‌ی اول تمرینات نظریه میدان‌های کوانتومی ۱

۱. میتوان نشان داد که معادله‌ی حرکت ذیل مربوط به یک میدان برداری بدون جرم می‌باشد:

$$\Box x_i = 0$$

* هرگاه $x_i(x)$ را با تبدیل فوریه بنویسیم:

$$x_i(x) = \int \frac{d^4p}{(4\pi)^4} e^{ip.x} \tilde{x}_i(p)$$

حال با عمل دالامبرین روی عبارت فوق بدست می‌آید:

$$\Box x_i(x) = \partial_\mu \partial^\mu \int \frac{d^4p}{(4\pi)^4} e^{ip.x} \tilde{x}_i(p)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(4\pi)^4} (\partial_\mu \partial^\mu e^{ip.x}) \tilde{x}_i(p)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(4\pi)^4} (ip_\mu)(ip^\mu) e^{ip.x} \tilde{x}_i(p)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(4\pi)^4} (-p^2) e^{ip.x} \tilde{x}_i(p)$$

حال اگر بخواهیم $\Box x_i(x) = 0$ باشد، سمت راست معادله‌ی فوق نیز صفر می‌شود، لذا:

$$p^2 \tilde{x}_i(p) = 0$$

و چون x_i میدان دلخواه بود:

$$p^2 = 0$$

و در مقایسه با رابطه‌ی $p^2 = m^2$، واضح است که قید مذکور منجر به بدون جرم شدن میدان می‌شود.

۲- نشان داد مقدار ذیل ناوردای لورنتس است؟

$$\omega_p\, \delta^3(\vec p - \vec k)$$

+ به همین نیز ضریب $\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}$ را در $a_p^{+}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}|\vec p\rangle$ قرار دادیم تا مقدار $\langle \vec k|\vec p\rangle$ ناوردای لورنتس باشد.

* برای نشان دادن این، فرض می‌کنیم در راستای z را در نظر بگیریم. که تنها در انرژی در می‌رود:

$$\vec P_z' = \gamma(\vec P_z + \beta E)$$

$$E' = \gamma(E + \beta \vec P_z)$$

حال می‌توان نوشت:

$$d\vec P_z' = \gamma(d\vec P_z + \beta\, dE)$$

$$\frac{d\vec P_z'}{d\vec P_z} = \gamma\left(1 + \beta \frac{dE}{d\vec P_z}\right)$$

با توجه به اینکه $E^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + m^2$ ، داریم: $\frac{dE}{d\vec P_z} = \frac{\vec P_z}{E}$

$$\frac{d\vec P_z'}{d\vec P_z} = \frac{\gamma}{E}(E + \beta \vec P_z)$$

حال با توجه به $E' = \gamma(E + \beta \vec P_z)$:

$$\frac{d\vec P_z'}{d\vec P_z} = \frac{E'}{E}$$

از طرفی با توجه به اتحاد تابع دلتا $\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|}$ که در آن x_0 ها پاسخ $f(x)=0$ هستند:

$$\delta^3(\vec p' - \vec k') = \frac{E}{E'}\,\delta^3(p - q)$$

$$E'\,\delta^3(p' - q') = E\,\delta^3(p - q)$$

3- چگونه می‌توان نشان داد که سنجه‌ی انتگرال‌گیری (integration measure) ذیل ناوردای لورنتس است؟

$$\int \frac{d^3k}{2\omega_k}$$

* با توجه به اینکه در نظریه میدان کوانتومی در فضای فاک (Fock) کار می‌کنیم یا به عبارتی نیاز داریم با چندین نوسانگر هارمونیک سروکار داشته باشیم، سروکله‌ی انتگرال‌گیری یا جمع زدن روی همه‌ی نوسانگرها ظاهر می‌شود.

(b)

* حال باید توجه کرد که سنجه‌ی انتگرال‌گیری $\int d^3k$ ناوردای لورنتس نمی‌باشد و باید از چاربردارها استفاده کنیم تا ناوردای لورنتسی باشد. چرا که:

$$k'^a k'_a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} k^b \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} k_c = \frac{\partial x^c}{\partial x^b} k^b k_c = k^a k_a$$

که مقدار ذیل را دارد:

$$k^a k_a = E^2 - \vec{k}^2$$

* از طرف دیگر به اینکه می‌خواهیم سازگار با تقارن لورنتسی باشد، می‌خواهیم جرم همواره حقیقی باشد $k^2=m^2$، (یا به عبارتی mass shell cond. داشته باشیم) بنابراین، سنجه‌ی انتگرال‌گیری می‌شود:

$$\int d^4k \, \delta(k^2-m^2)$$

* از طرف دیگر چون همواره می‌خواهیم جرم، مقدار مثبت داشته باشد، از یک تابع پله برای حذف مقادیر منفی جرم استفاده می‌کنیم:

$$\int d^4k \, \delta(k^2-m^2)\Theta(k^0) \qquad (I)$$

(۵)

* از طرف دیگر می‌توان نشان داد که داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk^0\, \delta(k^2-m^2)\,\theta(k^0) = \frac{1}{2\omega_k} \qquad (II)$$

که در آن $\omega_k=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$ است. چرا که:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk^0\, \delta(k^2-m^2)\,\theta(k^0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk^0\, \delta(k^{0^2}-\vec{k}^2-m^2)\,\theta(k^0)$$

$$= \int dk^0\, \delta\{k^{0^2}-\underbrace{(\vec{k}^2+m^2)}_{=\omega_k}\}\,\theta(k^0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk^0\, \delta(k^{0^2}-\omega_k^2)\,\theta(k^0) \qquad (III)$$

با توجه به اتحاد تابع دلتا $\delta(f(x))=\frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}$ که در آن، x_0 پاسخ $f(x)=0$ می‌باشد. عبارت زیر را داریم:

$$\delta(k^{0^2}-\omega_k^2) = \frac{1}{2\omega_k}\left[\delta(k^0-\omega_k)+\delta(k^0+\omega_k)\right] \qquad (IV)$$

با جایگذاری (IV) در (III) می‌توان نوشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk^0\, \delta(k^2-m^2)\,\theta(k^0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk^0\, \frac{1}{2\omega_k}\left[\delta(k^0-\omega_k)+\delta(k^0+\omega_k)\right]\theta(k^0)$$

از آنجا که مقدار ω_k، همواره مثبت است با توجه به تعریف θ، جمله‌ی دوم عبارت راست صفر می‌شود و

چون $\frac{1}{2\omega_k}$ ثابت است، از انتگرال سمت راست خارج شده و حاصل می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk^0\, \delta(k^2-m^2)\,\theta(k^0) = \frac{1}{2\omega_k}\int_{-\infty}^{\infty} dk^0\, \delta(k^0-\omega_k)\,\theta(k^0)$$

$$= \frac{1}{2\omega_k}\int_{0}^{\infty} dk^0\, \delta(k^0-\omega_k)$$

چون حاصل انتگرال تابع دلتای دیراک برابر یک می‌شود، به نتیجه‌ی مطلوب می‌رسیم.

(c)

* حال با قرار دادن (II) در (I)، سنجه‌ی انتگرال گیری که ناوردای لورنتس بود، می‌شود:

$$\int d^4k\, \delta(k^2-m^2)\,\Theta(k^0) = \int dk^3 \underbrace{\int dk^0\, \delta(k^2-m^2)\,\Theta(k^0)}_{\text{از رابطه‌ی (II) داریم}}$$

$$= \int \frac{dk^3}{2\omega_k}$$

بنابراین همانطور که سنجه‌ی انتگرال (I) را ناوردای لورنتس ساخته بودیم، همان $\int \frac{dk^3}{2\omega_k}$ نیز باید باشد و به عبارتی به دست آوردیم که $\int \frac{dk^3}{2\omega_k}$ ناوردای لورنتس می‌باشد.

ط- می‌توان نشان داد که مکانیک کوانتومی (کوانتیزه یا اولیه) حد غیرنسبیتی میدان کوانتومی (کوانتیزه ثانویه) است.

به عنوان مثال این موضوع را می‌توان با میدان نرده‌ای (کلاین-گوردون) نشان داد.

* از معادله کلاین گوردون می‌توان شروع کرد:

$$(\Box + m^2)\varphi_0 = 0$$

$$\partial_t^2 \varphi_0 = (\nabla^2 - m^2)\varphi_0$$

$$i^2 \partial_t^2 \varphi_0 = (m^2 - \nabla^2)\varphi_0$$

$$i\partial_t \varphi_0 = \sqrt{m^2 - \nabla^2}\,\varphi_0 \qquad (*)$$

از سوی دیگر می‌توان خلق ذره در مکان x را نوشت:

$$\langle x| = \langle 0|\varphi_0(x)$$

با توجه به اینکه تابع موج $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ است:

$$\psi(x) = \langle 0|\varphi_0|\psi\rangle$$

$$i\partial_t \psi(x) = \langle 0| i\partial_t \varphi_0 |\psi\rangle$$

از معادله $(*)$:

$$i\partial_t \psi(x) = \sqrt{m^2 - \nabla^2}\,\underbrace{\langle 0|\varphi_0}_{=\langle x|}|\psi\rangle$$

$$i\partial_t \psi(x) = \sqrt{m^2 - \nabla^2}\,\psi(x)$$

$$i\partial_t \psi(x) = \left\{m - \frac{\nabla^2}{2m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\}\psi(x) \qquad (\square)$$

با توجه به اینکه می‌توان انرژی را نوشت:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

یا به عبارتی:

$$E = mc^2\sqrt{1 + \frac{P^2c^2}{m^2c^4}}$$

$$= mc^2\left[1 + \frac{p^2}{2m^2c^2} - \frac{p^4}{8m^4c^2} + \cdots\right]$$

$$= mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^4c^4} + \cdots$$

که عبارت فوق جمله‌ی اول انرژی سکون نسبیتی و جملات سوم به بعد تصحیحات نسبیتی هستند لذا در معادله‌ی (۵)

آنچه که اثر کلاسیک دارد تنها جملات دوم می‌باشد لذا با نگه‌داشتن آن جمله می‌توان نوشت:

$$i\partial_t \psi(x) = -\frac{\nabla^2}{2m}\psi(x)$$

که همان معادله‌ی شرودینگر می‌باشد.

5- می‌توان نشان داد:

$$\Pi(\vec{x}) \equiv \partial_t \phi(x)\Big|_{t=0} = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\left(a_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_p^{\dagger} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right).$$

* برای نشان دادن این موضوع با توجه به اینکه $\phi_0(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(a_p e^{-ipx} + a_p^{\dagger} e^{ipx}\right)$ طبق صفحه 16 از

رابطه‌ی (ii) به‌خاطر داریم:

$$\partial_t \phi_0(x) = i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\omega_p}{\sqrt{2\omega_p}}\left(a_p e^{-ipx} + a_p^{\dagger} e^{ipx}\right).$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\partial_t \phi_0(x) = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\omega_p}{\sqrt{2\omega_p}}\left(a_p e^{-ipx} - a_p^{\dagger} e^{ipx}\right)$$

$$= -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\left(a_p e^{-i\omega t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_p^{\dagger} e^{i\omega t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right)$$

فلذا به دست می‌آید:

$$\Pi(x) = \partial_t \phi_0(x)\Big|_{t=0} = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\left(a_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_p^{\dagger} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right)$$

15- رابطه‌ی جابجایی ذیل را می‌توان به دست آورد:

$$[\phi(\vec{x}), \Pi(\vec{y})] = i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

* با توجه به تعریف $\phi(\vec{x})$ ، $\Pi(\vec{y})$:

$$[\phi(\vec{x}), \Pi(\vec{y})] = \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(a_q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} + a_q^{\dagger} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\right), -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\left(a_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{y}} - a_p^{\dagger} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{y}}\right)\right]$$

$$= -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_q}}\left(-e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{y}}\underbrace{[a_q, a_p^{\dagger}]}_{=(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})} + e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{y}}\underbrace{[a_q^{\dagger}, a_p]}_{-(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})}\right)$$

$$[\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{w_p}{2}} \frac{1}{\sqrt{2w_p}} \left(e^{ip(\vec{x}-\vec{y})} + e^{-ip(\vec{x}-\vec{y})}\right)$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} + e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\right)$$

$$= i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$$

$$= i\, \delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

6 ـ اگر برای سامانه‌ها بوزونی (فرمیونی) بخواهیم کوانتش ثانویه اعمال کنیم باید با جابجاگر (پادجابجاگر) کار کنیم و

این ارتباط دارد به اینکه اگر بخواهیم جای دو ذره را با هم جابجا کنیم، در سامانه بوزونی (فرمیونی) برابر خود (عکس)

سامانه می‌شود، یعنی مثلاً $|11\rangle = |11\rangle$ ($|11\rangle = -|11\rangle$) و این نشان‌دهنده این است که دو ذره ($|11\rangle = 0$ فرمیون‌ها)

در این حالت قرار دارند. که این همان بیان اصل طرد پائولی می‌باشد.

الف) اولاً بحث اثبات = این اصل در واقع کاملاً شرط اول را اثبات کنیم؛ در صورتی که به صورت برهان خلف به

سامانه‌ها بوزونی از پادجابجاگر استفاده کنیم، دچار مشکلاتی می‌شویم. نقطه اینکه انرژی‌ها کف نخواهد داشت و مجبور می‌شویم از

جابجاگر استفاده نماییم.

اما ولی بحث اثبات دقیق‌تر این موضوع به قضیه اسپین-آمار باید مراجعه کنیم که در فصل 12 آمده است.

بحث اسپین‌های صحیح، بوزون، آمار بوز-اینشتین و بحث اسپین نیم‌صحیح فرمیون، آمار فرمی-دیراک را داریم.

الف) با توجه به اینکه اصل طرد پائولی در الف بیان و اثبات شد، مرتبط این موضوع را نشان داد