فصل ششم - نظریه‌ی پراکندگی

- پتانسیل وابسته به زمان ثابت پله‌ای بعد از فرصت کافی

سامانه‌ای با هامیلتونی $H(t)=H_0+V(t)$ مفروض است که $V(t)=\begin{cases}0 & ;t_0<0\\ V & ;t_0\geq 0\end{cases}$ را دارا باشد.

جهت سهولت محاسبات می‌توان به عنوان یک منظم‌کننده (regulator) یک عامل نمایی ضرب کرده و پتانسیل را به صورت $V(t)=\lim_{\eta\to 0}\begin{cases}0 & ;t_0<0\\ Ve^{\eta t} & ;t_0\geq 0\end{cases}$ نوشت که در آن $\eta>0$ می‌باشد.

هدف در صورتی که زمان کافی به چنین سامانه‌ای بدهیم ($t\to\infty$) معادل این است که ($t_0\to-\infty$) همانند حالت ص 105 قرار دهیم.

• برای چنین سامانه‌ای با شرط $\eta t\ll 1$، در دامنه‌ی گذار، به بسته‌ی آن بین حالت‌های ویژه‌ی H_0، $|n\rangle,|i\rangle$:

$$\langle n|U_{int}(t,t_0)|i\rangle=\lim_{\eta\to 0}\left\{\delta_{ni}-\frac{i}{\hbar}T_{ni}\int_{-\infty}^{t}e^{(i\omega_{ni}+\eta)t'}dt'\right\} \quad \text{(1) الف}$$

$$=\lim_{\eta\to 0}\left\{\delta_{ni}-\frac{i}{\hbar}T_{ni}\frac{e^{(i\omega_{ni}+\eta)t}}{i\omega_{ni}+\eta}\right\} \quad \text{(1) ب}$$

که در آن T_{ni} به عنوان ماتریس گذار به صورت زیر می‌باشد:

$$T_{ni}=\lim_{\eta\to 0}\left\{V_{ni}+\sum_{m}\frac{V_{nm}T_{mi}}{E_i-E_m+i\hbar\eta}\right\} \quad (2)$$

که فرم عنصر ماتریسی معادله‌ی لیپمن-شوینگر می‌باشد:

* با شروع کار با توجه به ③ ص 73 به تصویر برهمکنش می‌توان نوشت:

$$U_{int}(t,t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V^I(t')\, U_{int}(t',t_0)\, dt'$$

حال می‌توان عنصر ماتریسی را حساب کرد:

$$\langle n|U_{int}(t,t_0)|i\rangle = \langle n|\mathbb{1}|i\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t'} dt' \langle n|V^I\, U_{int}(t',t_0)|i\rangle$$

$$= \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t'} dt' \sum_m \langle n|V^I|m\rangle\langle m|U_{int}(t',t_0)|i\rangle$$

$$= \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t'} dt' \sum_m V_{nm}(t')\, e^{+\frac{i}{\hbar}(E_n-E_m)t'} \langle m|U_{int}(t',t)|i\rangle$$

حال همانطور که گفته شد جهت سهولت محاسبات از عامل های regular استفاده می‌کنیم و همچنین به سمت حالت مرجع می‌رویم $(t_0 \to -\infty)$.

$$\langle n|U_{int}(t,-\infty)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}\lim_{t_0\to-\infty}\lim_{\eta\to 0}\int_{t_0}^{t} dt' \sum_n V_{nm}(t')\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_n-E_m)t'+\eta t'} \langle m|U_{int}(t',t)|i\rangle$$

همانطور گفته شد باید $\eta t \ll 1$ باشد تا در زمان های بزرگ واگرا نشود (همچنین در پایان کار بعد از مدتی V خاموش می‌شود).

عبارت فوق یک معادله انتگرالی است که جواب آن عموما ساده نمی‌باشد لذا به عنوان جواب حدس (ansatz)

① الف را در معادله فوق جایگذاری می‌کنیم که در آن T_{ni} به عنوان تنظیم کننده است.

$$\langle n|U_{int}(t,-\infty)|i\rangle = \delta_{ni} - \lim_{t_0\to-\infty}\lim_{\eta\to 0}\int_{t_0}^{t} dt' \sum_m V_{nm}(t')\, e^{i\omega_{nm}t'+\eta t'}$$

$$\times\left[\delta_{mi} + \frac{1}{\hbar}T_{mi}\frac{e^{(i\omega_{mi}+\eta)t}}{-\omega_{mi}+\eta i}\right]$$

حال با توجه به اینکه V تحلیلی به ازای ثابت است، می‌توان نوشت با فرض اینکه T نیز وابستگی زمانی نداشته باشد:

$$\langle n|U_{int}(t,t_0)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar} V_{ni} \lim_{\eta\to 0}\lim_{t_0\to-\infty} \frac{e^{(i\omega_{ni}+\eta)t}}{i\omega_{ni}+\eta} - \frac{i}{\hbar^2}\sum_m \frac{V_{nm}T_{mi}}{-\omega_{mi}+i\eta}\,\frac{e^{(i\omega_{ni}+2\eta)t}}{i\omega_{ni}+2\eta}$$

حال با مقایسه‌ی معادله‌ی فوق با فرم معادله‌ی عمومی می‌توان به ② رسید.

• با تعریف «اپراتور پراکندگی» به صورت زیر:

$$S = \lim_{t\to\infty}\lim_{t_0\to-\infty} U_{int}(t,t_0) \qquad (3)$$

«عنصر ماتریس» یا به عبارتی عنصر ماتریس پراکندگی از روی ① به دست می‌آید که با ماتریس T مرتبط است مانند مذکور:

$$S_{ni} \equiv \langle n|S|i\rangle = \delta_{ni} - iT_{ni}\,2\pi\,\delta(\omega_{ni}) \qquad (4)\ \text{الف}$$

$$\stackrel{?}{=} \delta_{ni} - iT_{ni}\,2\pi\,(E_n - E_i) \qquad (4)\ \text{ب}$$

• نرخ گذار بین دو حالت H_0، در حالات مذکور به صورت زیر بدست می‌آید:

⑤ الف
$$W_{i\to n}(t\to\infty) = \frac{2\pi}{\hbar^2}|T_{ni}|^2\,\delta(\omega_{ni})$$

⑤ ب
$$= \frac{2\pi}{\hbar}|T_{ni}|^2\,\delta(E_n-E_i)$$

* برای بدست آوردن این موضوع کافی است حساب کنیم:

$$W_{i\to n}(t\to\infty) = \frac{d}{dt}\left|\langle n|U_{int}(t,-\infty)|i\rangle\right|^2$$

$$= \frac{d}{dt}\left|\lim_{\eta\to 0}\left\{\frac{i}{\hbar}T_{ni}\,\frac{e^{(i\omega_{ni}+\eta)t}}{i\omega_{ni}+\eta}\right\}\right|^2$$

$$= \frac{d}{dt}\lim_{\eta\to 0}\left\{\frac{1}{\hbar^2}\,\frac{e^{2\eta t}\,|T_{ni}|^2}{\omega_{ni}^2+\eta^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\hbar^2}\lim_{\eta\to 0}\frac{2\eta\, e^{2\eta t}\,|T_{ni}|^2}{\omega_{ni}^2+\eta^2}$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar^2}|T_{ni}|^2\,\delta(\omega_{ni})$$

$W_{i\to n}(\infty) = \frac{d}{dt}$ ⑫

* توجه شود که ⑤ بسیار شبیه است با ⑫ صفحه 95 یا ⑪ صفحه 103، این بی ربط نیست چون در اینجا حل دقیق همان مسأله بود که با روش اختلالی حل کرده بودیم.

همچنین در صورتیکه ② را تقریبی حل کنیم، بزرگترین بخش جمله اول اش را قرار دهیم، همان عامل می‌شود که به کمک اختلالی بدست آورده‌ایم.

• می‌توان برای پیدا کردن «ماتریس گذار» به جای معادله ② از رابطه زیر استفاده کرد که

به صورت اپراتوری بیان می‌شود:

$$T|i\rangle = V|\psi^{(+)}\rangle \qquad (6)$$

که در آن $|\psi^{(+)}\rangle$ از معادله ذیل که موسوم به «لیپمن شوینگر» است بدست می‌آید:

$$|\psi^{(+)}\rangle = |i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\eta'} V|\psi^{(+)}\rangle \qquad (7)$$

* چرا اگر آنرا از معادله ② شروع کنیم می‌توان نوشت:

$$\langle n|T|i\rangle = \langle n|V|i\rangle + \sum_m \frac{\langle n|V|m\rangle\langle m|T|i\rangle}{E_i - E_m + i\eta'}$$

با توجه به تعریف ⑤ می‌توان عبارت فوق را نوشت و همچنین E_n را با فرم اپراتوری نوشت:

$$\langle n|V|\psi^{(+)}\rangle = \langle n|V|i\rangle + \sum_m \langle n|V \frac{1}{E_i - H_0 + i\eta'} |m\rangle\langle m|V|\psi^{(+)}\rangle$$

با توجه به اینکه $\langle n|$ و V دلخواه است می‌توانند از طرفین ساده شوند و $\sum_m |m\rangle\langle m| = 1$ می‌باشد لذا:

$$|\psi^{(+)}\rangle = |i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\eta'} V|\psi^{(+)}\rangle$$

• می‌توان معادله «لیپمن - شوینگر» را به صورت زیر نیز بازنویسی کرد:

$$T = V + V\frac{1}{E_i - H_0 + i\eta'} T \qquad (8)$$

* که با ضرب ⑦ در V و با استفاده از ⑥ بدست می‌آید.

• می‌توان به صورت بازگشتی معادله ⑧ را بر حسب توان‌های V بسط داد که در اختلال بهره می‌گیریم:

$$T = V + V\frac{1}{E_i - H_0 + i\eta'} V + V\frac{1}{E_i - H_0 + i\eta'} V \frac{1}{E_i - H_0 + i\eta'} V + \cdots \qquad (9)$$

• $|\psi^{(+)}\rangle$ تعریف شده در ⑥ که در معادلهٔ ⑦ به صورت زیر صدق می‌کند، در واقع پاسخ

معادلهٔ تحول سامانهٔ مذکور در ص 113 به صورت $H(t)=H_0+V(t)$ می‌باشد.

$$|\psi^{(+)}\rangle = |i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\eta'} V|\psi^{(+)}\rangle \qquad ⑦$$

* چرا که آنگاه $|\psi^{(+)}\rangle$ پاسخ معادلهٔ تحول حالت سامانهٔ $H(t)=H_0+V(t)$ باشد؟

$$H|\psi^{(+)}\rangle = E|\psi^{(+)}\rangle$$

$$(H_0+V)|\psi^{(+)}\rangle = E|\psi^{(+)}\rangle$$

یا به عبارتی:

$$(E-H_0)|\psi^{(+)}\rangle = V|\psi^{(+)}\rangle$$

بنابراین انتظار داریم معادلهٔ فوق دارای دو جواب همگن (که سمت راست صفر شده و همان ویژه حالت H_0، که $|i\rangle$ باشد را می‌دهد) و جواب غیر همگن، (که همان $V(E-H_0)^{-1}|\psi^{(+)}\rangle$ می‌باشد.) لذا:

$$|\psi^{(+)}\rangle = |i\rangle + V(E-H_0)^{-1}|\psi^{(+)}\rangle$$

توجه شود که امکان دارد $(E-H_0)$ دارای ابهام باشد که عملاً با افزودن $i\eta'$، که $\eta'\to 0$، رفع ابهام شود و به نتیجهٔ مطلوب برسیم.

• پاسخ معادلهٔ تحول سامانهٔ مذکور در ص 113 به صورت $H(t)=H_0+V(t)$ را که ⑦ شد را در فضای مکان می‌توان نوشت:

$$\psi^{(+)}(\vec{x}) = \psi_0(\vec{x}) + \frac{2m}{\hbar^2}\int d^3x'\, G^{(+)}(\vec{x},\vec{x}')\langle x'|V|\psi^{(+)}\rangle \qquad ⑩$$

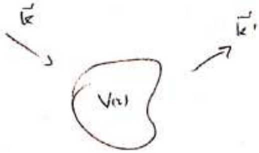
که در آن $\psi^{(+)}(\vec{x})=\langle x|\psi^{(+)}\rangle$ ، $\psi_0(\vec{x})=\langle x|i\rangle$ و $G^{(+)}(\vec{x},\vec{x}')$ تابع گرین H_0 می‌باشد به عبارتی $G^{(+)}$ پاسخ ویژه حالت H_0 است:

$$G^{(+)}(\vec{x},\vec{x}') = \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k'}\sum_{k''}\langle\vec{x}|k''\rangle\langle k'|\frac{1}{E-H_0+i\eta'}|k''\rangle\langle k''|x'\rangle \qquad ⑪$$

- پراکندگی از پتانسیل وابسته به زمان ثابت پله‌ای

در سامانه‌ای که در بخش قبل ص 113 مطرح شد: اگر $H_0=\frac{p^2}{2m}$ باشد که ذره آزاد (پراکنده) را توصیف می‌کند.

دارای یک پتانسیل وابسته به زمان باشد، $H=\frac{p^2}{2m}+V(r)$، می‌توان محاسبات را یک پله جلوتر آورد.



- نرخ گذارش در حالت پراکنده در سامانه مذکور باشد ⑤ ص 116 در تعداد حالات (حالتی) در جهت $d\Omega_{\vec{k}'}$، که به صورت ⊗ ص 106 است بدست آید:

$$W_{i\to n}(t\to\infty) = \frac{mkL^3}{(2\pi)^2\hbar^3}|T_{ni}|^2 d\Omega_{\vec{k}'} \qquad (1)$$

- سطح مقطع پراکندگی را می‌توان با تعریف نسبت گذار بین حالت‌ها با پراکندگی و شار ورودی تعریف کرد:

② الف

$$d\sigma = \frac{W_{i\to n}}{\text{شار ورودی}}$$

② ب

$$= \left(\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \frac{k'}{k}|T_{ni}|^2 d\Omega_{k'}$$

② 2. یا به عبارتی:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \frac{k'}{k}|T_{ni}|^2$$

توجه شود که $\frac{k'}{k}$ در صورتی که پراکندگی کشسان باشد برابر یک می‌شود.

* با بدست آوردن معادله‌ی اصلی برای سطح مقطع دیفرانسیل از ① شار گذار را داریم و شار ورودی را

از صفحه 31 AQM1-4002-CHAP2 برای تابع موج تخت به صورت زیر داریم:

$$\vec{J} = \mathrm{Im}\left(\psi^{*} \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \psi\right)$$

$$= \frac{\hbar \vec{k}}{mL^3}$$

$$\equiv \frac{v}{L^3}$$

بنابراین می‌توان به نتیجه‌ی مطلوب رسید.

• سطح مقطع دیفرانسیل برای تقریب ② را می‌توان با استفاده از ⑤ ، ⑦ به صورت ص117 زیر نوشت:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\right)^2 |\langle n|V|\psi^{(+)}\rangle|^2 \qquad (3)$$

• پاسخ معادله انتگرال $H(t)=\frac{p^2}{2m}+V(t)$ به صورت ذیل بدست می‌آید، در فضای مکان که $V(t)$ موضعی باشد:

$$\langle x|\psi^{(\pm)}\rangle = \langle \vec{x}|i\rangle - \frac{2m}{\hbar^2}\int d^3x' \, \frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \, V(\vec{x}')\langle \vec{x}'|\psi^{(\pm)}\rangle \qquad (4)$$

* برای بدست آوردن معادله فوق از معادله (9) صفحه 118 شروع می‌کنیم:

+ ابتدا از (10) صفحه 118 تابع گرین مربوط به $H_0=\frac{p^2}{2m}$ را پیدا می‌کنیم که برای این کار چون حالت ابتدایی و نهایی تابع موج آزاد یا تابع موج تخت موضعی باشد، قرار می‌دهیم:

$$\langle x|k'\rangle = \frac{e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}}}{L^{3/2}} \quad ; \quad \langle k''|x'\rangle = \frac{e^{-i\vec{k}''\cdot\vec{x}'}}{L^{3/2}}$$

که تابع موج تخت نرمالیزه شده در جعبه است که نهایتاً باید حد $L\to\infty$ را بگیریم.

$$\langle k'|\frac{1}{E-E_{k'}\pm i\eta'}|k''\rangle = \frac{\delta_{k',k''}}{E-E_{k'}\pm i\eta'}$$

بنابراین:

$$G^{(\pm)}(\vec{x},\vec{x}') = \sum_{k'} \frac{e^{i\vec{k}'\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{L^3}\,\frac{1}{k^2-k'^2\pm i\eta'}$$

حال که $\sum_{k'}$ در این رابطه همان تقریبی است که می‌توان از $d^3x=\frac{L^3 d^3k'}{(2\pi)^3}$ استفاده کرد:

$$G^{\pm} = \int \frac{L^3 d^3k'}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{L^3}\,\frac{1}{k^2-k'^2\pm i\eta'}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{k'^2\,dk'}{k'^2-k^2\mp i\eta'}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\; e^{ik'|\vec{x}-\vec{x}'|\cos\theta}\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int \frac{k'^2\,dk'}{k'^2-k^2\mp i\eta'}\int_{+1}^{-1} -d(\cos\theta)\; e^{ik'|\vec{x}-\vec{x}'|\cos\theta}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int \frac{k'^2\,dk'}{k'^2-k^2\mp i\eta'}\int_{-1}^{1} \exp\left(ik'|\vec{x}-\vec{x}'|\cos\theta\right).\,d(\cos\theta)$$

$$G^{\pm}(\vec r,\vec r')=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{k'^2\,dk'}{k'^2-k^2\mp i\eta'}\left\{\frac{e^{ik'|\vec r-\vec r'|}-e^{-ik'|\vec r-\vec r'|}}{ik'|\vec r-\vec r'|}\right\}$$

با توجه به زوج بودن عبارت زیر انتگرال فوق می‌توان نوشت:

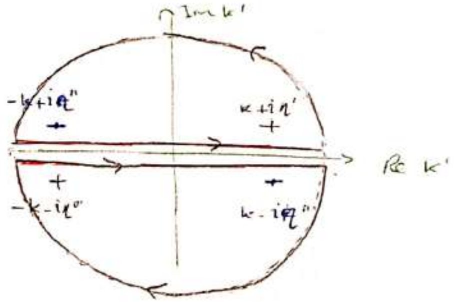
$$G^{\pm}(\vec r,\vec r')=-\frac{2\pi}{(2\pi)^3 i}\int_0^{\infty}\frac{k'\,dk'}{k'^2-k^2\mp i\eta'}\left\{\frac{e^{ik'|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|}-\frac{e^{-ik'|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2(2\pi)^2 i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k'\,dk'}{k'^2-k^2\mp i\eta'}\left\{\frac{e^{ik'|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|}-\frac{e^{-ik'|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|}\right\}$$

با توجه به اینکه مخرج عبارت فوق به صورت $(k'-k\mp i\eta'')(k'+k\pm i\eta'')$ است انتگرال گیری دارای چهار قطب

به صورت ذیل می‌باشد:

$$k'=\pm\sqrt{k^2\pm i\eta''}$$



لذا به ازای جمله اول انتگرال کانتور بالایی را انتخاب می‌کنیم و روی محور Re k' جواب است و در صفحه ... می‌شود
با استفاده از این ترفند از حساب مانده‌ها به سادگی انتگرال را محاسبه می‌کنیم و به همین ترتیب کانتور پایینی به

جمله دوم انتگرال منفی خواهد بود:

$$G^{\pm}(\vec r,\vec r')=-\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{e^{\pm ik|\vec r-\vec r'|}}{2|\vec r-\vec r'|}-(-1)\frac{e^{\pm ik|\vec r-\vec r'|}}{2|\vec r-\vec r'|}\right\}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ik|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|}$$

+ حال به قسمت $\langle x'|V|\psi^{(+)}\rangle$ معادله (19) صفحه 118 می‌پردازیم:

$$\langle x'|V|\psi^{(+)}\rangle = \int d^3x'' \langle x'|V|x''\rangle\langle x''|\psi^{+}\rangle$$

با توجه به اینکه $V(x)$ موضعی باشد، در این صورت $\langle x'|V|x''\rangle = V(x')\delta(x'-x'')$

$$= V(x')\langle x'|\psi^{+}\rangle \qquad (11)$$

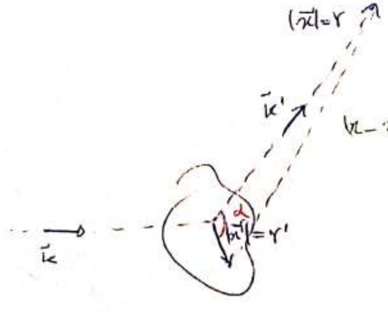
لذا با جایگذاری (12)، (14) در (19) صفحه 118 به سرانجام نتیجه‌ی مطلوب:

• پاسخ معادله تحول $H(t)=\frac{p^2}{2m}+V(t)$ که در آن $V(t)$ موضعی باشد و محل اندازه‌گیری نسبت به گستره پتانسیل خیلی بزرگتر باشد، معادله (4) به فرم ذیل تقلیل می‌یابد:

$$\langle x|\psi^{(+)}\rangle = \frac{1}{L^{3/2}}\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\vec{k}',\vec{k})\right] \qquad (5)$$

که در آن $f(\vec{k}',\vec{k})$ به صورت ذیل می‌باشد که موسوم به دامنه‌ی پراکندگی است:

$$f(\vec{k}',\vec{k}) = -\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\langle \vec{k}'|V|\psi^{(+)}\rangle \qquad (6)$$



$$|\vec{x}-\vec{x}'| = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha}$$
$$= r\left(1+\frac{r'^2}{r^2}-\frac{2r'}{r}\cos\alpha\right)^{1/2}$$
$$\simeq r\left(1-\frac{r'}{r}\cos\alpha\right)$$
$$\simeq r - r'\cos\alpha$$

* برای به دست آوردن (5) با توجه به شکل اخیر می‌توان عبارت زیر را نوشت:

$$k|\vec{r}-\vec{r}'| \simeq k(r - r'\cos\alpha) = kr - kr'\cos\alpha = kr - k\hat{r}\cdot\vec{r}' = kr - \vec{k}'\cdot\vec{r}'$$

حال با جایگذاری در رابطه (4) می‌توان نوشت:

$$\psi^{\pm}(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{L^{3/2}} - \frac{2m}{\hbar^2}\int d^3r' \, \frac{e^{\pm i(kr - \vec{k}'\cdot\vec{r}')}}{4\pi r} V(\vec{r}')\,\psi^{\pm}(\vec{r}')$$

$$= \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{L^{3/2}} - \frac{e^{\pm ikr}}{r}\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int d^3r' \, e^{\mp i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}')\,\psi^{\pm}(\vec{r}')$$

$$= \frac{1}{L^{3/2}}\left\{ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{e^{\pm ikr}}{r}\left[-\frac{2mL^3}{4\pi\hbar^2}\int d^3r' \, \frac{e^{\mp i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}}{L^{3/2}} V(\vec{r}')\,\psi^{\pm}(\vec{r}')\right]\right\}.$$

که به ترتیب $f(\vec{k},\vec{k}')$ به صورت (5) به پاسخ مطلوب می‌توان رسید.

- با توجه به ترتیب $f(\vec{k},\vec{k}')$ در (6) می‌توان سطح مقطع دیفرانسیلی به آسانی 2.(7) یا (3) را در حالتی که نقطه‌ی مشاهده نسبت به پتانسیل موضعی بسیار دور باشد، به صورت ذیل نوشت:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\vec{k}'}} = |f(\vec{k},\vec{k}')|^2 \qquad (7)$$

قضیه‌ی اپتیکی به راحتی بیان این است که دامنه‌ی پراکندگی رو به جلو با سطح مقطع کل به صورت زیر مربوط می‌شود:
برای زمانی که گستره‌ی پتانسیل نسبت به طول ابعاد کلی کم باشد:

$$\operatorname{Im} f(\theta=0)=\frac{k\,\sigma_{tot}}{4\pi} \qquad (8)$$

* برای اثبات این مورد از معادله‌ی لیپمن-شوینگر شروع می‌کنیم ⑦ صفحه 117 که در آن $|i\rangle=|k\rangle$ باشد:

$$\langle\psi^{(+)}|=\langle k|+\langle\psi^{(+)}|V\frac{1}{E_i-H_0+i\eta}$$

یا به عبارتی:

$$\langle k|=\langle\psi^{(+)}|-\langle\psi^{(+)}|V\frac{1}{E_i-H_0+i\epsilon}$$

حال طرفین را در $V|\psi^{(+)}\rangle$ ضرب می‌کنیم:

$$\langle k|V|\psi^{(+)}\rangle=\left\{\langle\psi^{(+)}|-\langle\psi^{(+)}|V\frac{1}{E_i-H_0-i\epsilon}\right\}V|\psi^{(+)}\rangle$$

$$=\langle\psi^{(+)}|V|\psi^{(+)}\rangle-\int_{-\infty}^{\infty}dE'\,\langle\psi^{(+)}|V\frac{\delta(E'-E)}{E-H_0-i\epsilon}V|\psi^{(+)}\rangle$$

حال با توجه به رابطه‌ی $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0-i\epsilon}dx=P_r\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{x-x_0-i\epsilon}+\pi i\,f(x_0)$ می‌توان نوشت:

$$\langle k|V|\psi^{(+)}\rangle=\langle\psi^{(+)}|V|\psi^{(+)}\rangle-P_r\int_{-\infty}^{\infty}dE'\langle\psi^{(+)}|V\frac{\delta(E'-E)}{E-H_0}V|\psi^{(+)}\rangle-\langle\psi^{(+)}|V\,i\pi\,\delta(E-H_0)V|\psi^{(+)}\rangle$$

جملات اول و دوم حقیقی‌اند ولی جمله‌ی سوم کاملا موهومی است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\operatorname{Im}\langle k'|V|\psi^{(+)}\rangle=-\langle\psi^{(+)}|V\pi\,\delta(E-H_0)V|\psi^{(+)}\rangle$$

سمت چپ را با توجه به تعریف دامنه‌ی پراکندگی ⑥ صفحه 123 جایگزین می‌کنیم و سمت راست را با تعریف ⑥ صفحه 117:

$$\operatorname{Im}f(k,k)=\frac{mL^3}{2\hbar^2}\langle k|T^{+}\delta(E-H_0)T|k\rangle$$

$$=\frac{mL^3}{2\hbar^2}\sum_{k'}\langle k|T^{+}\delta(E-H_0)|k'\rangle\langle k'|T|k\rangle$$

$$=\frac{mL^3}{2\hbar^2}\int\frac{L^3d^3k'}{(2\pi)^3}\langle k|T^{+}\delta(E-H_0)|k'\rangle\langle k'|T|k\rangle$$

با توجه به اینکه $\delta(E-H)$ با بسط تیلور می‌توان را نوشت:

$$\mathrm{Im}\, f(k,k) = \frac{mL^3}{2\hbar^2}\int \frac{L^3 d\vec{k}'}{(2\pi)^3} \langle k|T^{\dagger}\pi\delta(E-E')|k'\rangle\langle k'|T|k\rangle$$

همچنین می‌توان نوشت ،

$$= \frac{mL^6}{2\hbar^2(2\pi)^3}\int k'^2 dk\, d\Omega_{k'}\, |\langle \vec{k}'|T|\vec{k}\rangle|^2\, \delta\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\frac{\hbar^2k'^2}{2m}\right)$$

$$= \frac{mL^6}{2\hbar^2(2\pi)^2}\,\frac{2m}{\hbar}\,\frac{k}{2}\int d\Omega_{k'}\, |\langle \vec{k}'|T|\vec{k}\rangle|^2$$

با توجه به (126) صفحه و (1) صفحه (125) می‌توان نوشت:

$$= \frac{k}{4\pi}\int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega$$

و در نتیجه به قضیه اپتیکی رسیدیم.

+ تقریب بورن

• پاسخ معادله‌ی حرکت $H(x)=\frac{p^2}{2m}+V(x)$ را با قرار دادن $|i\rangle=|k\rangle$ در معادله‌ی لیپمن-شوینگر ⑦ ص ۱۱۷

به صورت ذیل نوشت:

$$\psi^{(+)}(\vec{x}) = \psi_i(\vec{x}) + \int d^3x' \, \tilde{G}^+(\vec{x},\vec{x}')\, V(\vec{x}')\, \psi_i(\vec{x}')$$

$$+ \int d^3x' \, d^3x'' \, \tilde{G}(\vec{x},\vec{x}')\, V(\vec{x}')\, \tilde{G}(\vec{x}',\vec{x}'')\, V(\vec{x}'')\, \psi_i(\vec{x}'')$$

$$+ \dots \qquad (1)$$

یا به صورت شماتیک می‌توان نشان داد:

* برای به دست آوردن این رابطه ابتدا معادله‌ی لیپمن شوینگر را می‌نویسیم و با استفاده از ترتیب ⑥ ص ۱۱۷ می‌نویسیم:

$$|\psi^{(+)}\rangle = |i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} T |i\rangle$$

حال با جایگذاری رابطه‌ی ⑨ ص ۱۱۷ در معادله‌ی فوق به دست می‌آید:

$$|\psi^{(+)}\rangle = |i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon}\left[V + V \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} V + \dots \right] |i\rangle$$

و در نمایش مکان می‌توان نوشت:

$$\langle \vec{x}|\psi^{(+)}\rangle = \langle \vec{x}|i\rangle + \int d^3x' \, d^3x'' \, \langle \vec{x}| \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} |\vec{x}'\rangle\langle \vec{x}'|V|\vec{x}''\rangle\langle \vec{x}''|i\rangle$$

$$+ \int d^3x' \, d^3x'' \, d^3x''' \, d^3x'''' \, \langle \vec{x}| \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} |\vec{x}'\rangle\langle \vec{x}'|V|\vec{x}''\rangle\langle \vec{x}''| \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} |\vec{x}'''\rangle\langle \vec{x}'''|V|\vec{x}''''\rangle\langle \vec{x}''''|i\rangle$$

$$+ \dots$$

با توجه به تعریف تابع گرین از (1) ص 113 رزنان بازنویسی کرد و به ترتیب به مطلوب رسید.

• پاسخ معادله لیپمن شوینگر برای $H(x)=\frac{p^2}{2m}+V(x)$ که در آن $V(x)$ موضعی باشد، محل اندازه‌گیری با نسبت به گستره پتانسیل بیشتر است،

معادله (1) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\langle x|\psi^{+}\rangle = \frac{1}{L^{3/2}}\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r}\left(f^{(1)}(\vec{k}',\vec{k}) + f^{(2)}(\vec{k}',\vec{k})+\dots\right)\right] \quad (2)$$

که در آن $f^{(n)}(\vec{k}',\vec{k})$ به ترتیب جملات تقریب بورن مرتبه n است که به صورت زیر اند.

$$f^{(1)}(\vec{k}',\vec{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x' \, e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}'}\, V(x')$$

(3) الف

$$\cong -\frac{m}{2\pi\hbar}\tilde{V}(\vec{q})\,(2\pi)^{3/2}$$

$$f^{(2)}(\vec{k}',\vec{k}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar}\int d^3x'\, d^3x''\, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'}\,V(x')\left[\frac{2m}{\hbar^2}G_{+}(\vec{x}',\vec{x}'')\right]V(x'')\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}''}$$

(3) ب

که در آن $\vec{q}=\vec{k}-\vec{k}'$ تکانه منتقل شده بین ذره ورودی و پتانسیل $V(x)$ می‌باشد.

* با به دست آوردن این مورد می‌توان از (6) ص 123 شروع کرد و از تقریب (6) ص 117 استفاده کرد و بطور (4) جایگذاری در آن کرد و به دست آورد:

$$f(\vec{k}',\vec{k}) = -\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\langle \vec{k}'|\left(V + V\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}V+\dots\right)|\vec{k}\rangle$$

حال می‌توان مرتبه اول را نوشت:

$$f^{(1)}(\vec{k}',\vec{k}) = -\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\int d^3x''\, d^3x'\, \langle \vec{k}'|\vec{x}''\rangle\langle \vec{x}''|V|\vec{x}'\rangle\langle \vec{x}'|\vec{k}\rangle$$

چون $V(x)$ موضعی است: $\langle x''|V|x'\rangle = V(x')\,\delta(x''-x')$ ؛

$$= -\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\int d^3x'\, e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}'}\, V(x')/L^3$$

حال با تبدیل فوریه نیز می‌توان نوشت:

$$f^{(1)}(k',k) = -\frac{m}{2\pi\hbar}\,\tilde{V}_{\vec{q}}\,(2\pi)^{3/2}$$

جمله مرتبه دوم نیز را می‌توان نوشت:

$$f^{(2)}(k',k) = -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}(2\pi)^3\int d^3x'\,d^3x''\,\langle k'|x'\rangle V(x')\langle x'|\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}|x''\rangle V(x'')\langle x''|k\rangle$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int d^3x'\,d^3x''\,e^{-ik'\cdot x'}\,V(x')\left\{\frac{2m}{\hbar^2}G^{+}(x',x'')\right\}V(x'')\,e^{i\vec{k}\cdot x''}$$

*در حقیقت آنچه بدست آوردیم این مورد شروع از ① می‌باشد. که با ترتیب ص 12.3 می‌توان ابتدا تابع گرین را نوشت:

$$\tilde{G}^{+}(x,x') = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\,e^{-ik'\cdot x'}$$

و جایگذاری در ① می‌شود:

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{1}{L^{3/2}}\Big\{e^{ikx} + \frac{e^{ikr}}{r}\Big[-\frac{L^3}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int d^3x'\,\frac{e^{-ik'x'}}{L^{3/2}}\,V(x')\Big(\frac{e^{ikx'}}{L^{3/2}}$$

$$+\int d^3x''\,\tilde{G}^{+}(x'-x'')\,V(x'')\,\frac{e^{ikx''}}{L^{3/2}}$$

$$+\cdots\Big)\Big]\Big\}.$$

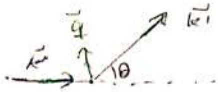
• تقریب مرتبه اول بورن در صورت وجود تقارن کروی پتانسیل $V(\vec{r})=V(r)$ به صورت ذیل درمی‌آید:

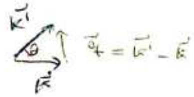
$$f^{(1)}(k',k)=-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{q}\int_0^\infty r\,V(r)\sin(qr)\,dr \qquad (3)$$

* برای اینمورد از ② الف شروع میکنیم:

$$f^{(1)}(k',k)=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x'\, e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}'}\,V(x')$$

با توجه به اینکه $\vec{k}'-\vec{k}=\vec{q}$ برابر است میتوان نوشت: $q=2k\sin\frac{\theta}{2}$





بنابراین در مختصات کروی میتوان نوشت:

$$f^{(1)}(k',k)=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty r'^2dr'\,V(r')\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\,e^{-iqr'\cos\theta'}\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$=-\frac{m}{\hbar^2}\int_0^\infty r'dr'\,V(r')\left(\frac{e^{-iqr'}-e^{iqr'}}{-iqr'}\right)$$

$$=-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{q}\int_0^\infty r'\,V(r')\sin(qr')\,dr'$$

* پراکندگی از پتانسیل فرضی چاه کروی سه بعدی

سامانه‌ای با پتانسیل ذیل مفروض است که ذره‌ای وارد و خارج می‌شود و مطلوب است دامنه پراکندگی.

$$V(r)=\begin{cases} V_0 & , r\le a \\ 0 & , r>a \end{cases}$$

با توجه به داشتن تقارن کروی برای حل این مسئله کافیست پتانسیل فوق را در (3) جایگذاری کنیم و نهایتاً داریم:

$$f^{(1)}(\theta)=-\frac{V_0}{\frac{\hbar^2 q^2}{2m}}\, a\left[\frac{\sin qa}{qa}-\cos qa\right]$$

* پراکندگی از پتانسیل معروف یوکاوا

سامانه‌ای با پتانسیل ذیل مفروض است که ذره‌ای وارد در آن می‌شود مطلوب است دامنه پراکندگی.

$$V(r)=\frac{V_0 e^{-\mu r}}{\mu r}$$

با توجه به داشتن تقارن کروی برای حل این مسئله کافیست پتانسیل فوق را در (3) جایگذاری کنیم توجه شود که $q=2k\sin\frac{\theta}{2}$؛

$$f^{(1)}(k,\theta)=-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{q}\int r\left(\frac{V_0 e^{-\mu r}}{\mu r}\right)\sin(qr)\,dr$$

$$=-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{V_0}{q\mu}\,\mathrm{Im}\int_0^{r} e^{(-\mu+iq)r}\,dr$$

$$=-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{V_0}{q\mu}\,\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-\mu+iq}\right)=-\frac{2mV_0}{\hbar^2\mu}\frac{1}{q^2+\mu^2}$$

$$=-\frac{2mV_0}{\hbar^2\mu}\frac{1}{q^2+\mu^2}=-\frac{V_0}{\frac{\hbar^2(\mu^2+q^2)}{2m}}\frac{1}{\mu}$$

حال می‌توان سطح مقطع پراکندگی را بدست آورد:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq |f^{(1)}(\theta)|^2$$

$$= \left\{ \frac{V_0}{\frac{\hbar^2 (\mu^2 + q^2)}{2m}} \frac{1}{\mu} \right\}^2 = \left\{ \frac{V_0}{\frac{\hbar^2}{2m} \left[\mu^2 + \left(2k \sin\frac{\theta}{2}\right)^2 \right] \mu} \right\}^2$$

* پراکندگی از پتانسیل کولنی

در مثال اخیر اگر قرار دهیم $\mu \to 0$ و $V_0 \to 0$ (این را هم رفع ابهام تقاضا داریم) و $\frac{V_0}{\mu} = q_1 q_2$ باشد، پتانسیل کولنی بدست آید و نهایتاً می‌توان سطح مقطع پراکندگی را بدست آورد:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \left(\frac{q_1 q_2}{\frac{\hbar^2}{2m} 4k^2 \sin^2\frac{\theta}{2}} \right)^2 = \left(\frac{q_1 q_2}{4E \sin^2\frac{\theta}{2}} \right)^2$$

- امواج تخت، تحلیل امواج کروی

• می‌توان با دو مجموعه پایه کامل $\{H, P\}$ یا $\{H, L^2, L_z\}$ کار کرد که حالت‌هایی را به صورت ذیل نمایش می‌دهیم:

$$|P\rangle$$

$$|E, l, m\rangle$$

* توجه شود که بجای $\{H, P\}$، $|E, P\rangle$ می‌نویسیم که چون داریم $|\frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \hbar k\rangle$، یعنی E در اصل فقط تابع k یا P است.

• با توجه به تعامد بردارها در دو مجموعه پایه مذکور در فوق به ترتیب به صورت زیر است:

$$\langle \vec{P}' | \vec{P} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{P} - \vec{P}')$$

$$\langle E'l'm' | Elm \rangle = \delta(E - E')\, \delta_{ll'}\, \delta_{mm'}$$

• می‌توان نشان داد ضریب تبدیل بین این دو پایه مذکور یا به عبارتی تابع موج $|Elm\rangle$ در فضای k به شکل زیر است:

$$\langle \vec{k} | Elm \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\, \delta\left(E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) Y_l^m(\hat{k}) \qquad (1)$$

* بجای نشان دادن این مورد ابتدا نشان می‌دهیم:

$$\langle k | Elm \rangle = g_{lE}(k)\, Y_l^m(\hat{k}) \qquad (\square)$$

بجای این کار، یک موج تخت به عنوان مثال $|k\hat{z}\rangle$ را در نظر می‌گیریم. که می‌توان بر پایه‌های کروی بسط داد:

$$|k\hat{z}\rangle = \sum_{l'm'} \int dE' \, |E'l'm'\rangle\langle E'l'm'|k\hat{z}\rangle$$

که چون فقط برای $m = 0$، $\langle Elm | k\hat{z}\rangle \neq 0$ است:

$$|k\hat{z}\rangle = \sum_{l'} \int dE' \, |E'l'0\rangle\langle E'l'0|k\hat{z}\rangle \qquad (*)$$

حال به جای اینکه یک $|\vec{k}\rangle$ دلخواه داشته باشیم کافیست $|k\hat{z}\rangle$ را با زوایای اویلر دوران دهیم:

$$|\vec{k}\rangle = D(\alpha=\varphi, \beta=\theta, \gamma=0)\, |k\hat{z}\rangle$$

حال $|k\hat{z}\rangle$ را از (16) صفحهٔ قبل جایگذاری کرده و سپس در $\langle E\ell m|$ از چپ ضرب کنیم:

$$\langle E\ell m|\vec{k}\rangle = \sum_{\ell'} \int dE' \langle E\ell m| D(\alpha=\varphi, \beta=\theta, \gamma=0)|E'\ell' 0\rangle\langle E'\ell' 0|k\hat{z}\rangle$$

با توجه به اینکه $D(\alpha=\varphi,\beta=\theta,\gamma=0)|E'\ell' 0\rangle = \sum_{m''} |E'\ell' m''\rangle D^{(\ell')}_{m'',m'=0}$ زیرا که با دوران m های جدید را می‌سازد ولی ℓ و E را نمی‌تواند بچرخاند، می‌توان نوشت:

$$\langle E\ell m|\vec{k}\rangle = \sum_{\ell'} \int dE' \, \delta(E-E')\, \delta_{\ell\ell'} \sum_{m''} \delta_{mm''}\, D^{(\ell')}_{m'',m'=0} \langle E'\ell' 0|k\hat{z}\rangle$$

$$= D^{(\ell)}_{m0}(\alpha=\varphi, \beta=\theta, \gamma=0)\, \langle E,\ell, m=0|k\hat{z}\rangle$$

که در آن $D(\alpha=\varphi,\beta=\theta,\gamma=0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^{m*}(\hat{k})$ است و تعریف کرده‌ایم $\langle E,\ell,m=0|k\hat{z}\rangle \equiv \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, g^*_{\ell E}(k)$ لذا خواهیم داشت:
(11) صفحهٔ قبل وسط.

* حال می‌توان نشان داد که در (11) صفحهٔ قبل برقرار است:

$$g_{\ell E} = N\, \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right) \qquad (5)$$

زیرا که $(H_0 - E)|E\ell m\rangle = 0$ است که با ضرب $\langle k|$ از چپ می‌شود:

$$\langle k|(H_0 - E)|E\ell m\rangle = 0$$

از سوی دیگر داریم $\langle k|(H_0-E) = \left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} - E\right)\langle k|$ است که با اعمال به رابطهٔ فوق می‌شود:

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right)\langle k|E\ell m\rangle = 0$$

یعنی عبارت فوق گوید، یا اینکه $\langle k|E\ell m\rangle$ تنها زمانی که $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ باشد مخالف صفر باشد. لذا به (5) می‌رسیم.

* حال سه تا نشان دار در ⓪ ص ۱۳۰ برقرار است:

$$N = \sqrt{\frac{\hbar^2}{mk}} \qquad (*)$$

برای به دست آوردن این مورد کافیست از نرمال کردن استفاده کنیم:

$$\langle E'\ell'm'|E\ell m\rangle = \int d^3k'' \langle E'\ell'm'|k''\rangle\langle k''|E\ell m\rangle$$

$$= \int k''^2 dk'' \int d\Omega_{k''} |N|^2 \,\delta\left(\frac{\hbar^2 k''^2}{2m} - E'\right)\delta\left(\frac{\hbar^2 k''^2}{2m} - E\right) Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{k}'') Y_\ell^m(\hat{k}'')$$

$$= \int \frac{mk''}{\hbar^2}\frac{dk''^2}{2}\frac{\hbar^2}{m} |N|^2 \,\delta(\ldots)\delta(\ldots)\int d\Omega\, Y\, Y$$

$$= \frac{mk}{\hbar^2} |N|^2 \,\delta(E'-E)\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}$$

که اگر بخواهیم نرمال باشد به (*) خواهیم رسید.

* حال با پایه‌دار ⓪ ص ۱۳۴ و (*) ص ۱۳۵ در (E) ص ۱۳۳ به شخصی مطالب ① می‌رسیم.

• با داشتن ضرب نرمال بردار با بردارها، کردن برحسب تخت مربوط و برعکس:

$$|E\ell m\rangle = \int d^3k\, |k\rangle\langle k|E\ell m\rangle$$

$$= \int d^3k \frac{\hbar}{2m}\,\delta\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} - E\right) Y_\ell^m(\hat{k})\, |k\rangle$$

$$= \frac{mk}{\hbar^2}\frac{dk^2}{2m}\hbar^2\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\,\delta\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} - E\right)\int d\Omega_k\, Y_\ell^m(k')\,|k'\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{mk}{\hbar}}\int d\Omega_k\, Y_\ell^m(\hat{k})\, |\vec{k}\rangle \qquad ②$$

$$|\vec{k}\rangle = \sum_{\ell m}\int dE\, |E\ell m\rangle\langle E\ell m|k\rangle$$

$$= \int dE \sum_{\ell m}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\,\delta\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} - E\right) Y_\ell^{m*}(k)\, |E\ell m\rangle$$

$$= \sum_{\ell m}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\, Y_\ell^{m*}(\theta,\varphi)\, |E\ell m\rangle \qquad ③$$

• بنابراین شکل دار تابع موج $\langle x|E\ell m\rangle$ در فضای مکان به صورت ذیل است:

$$\langle x|E\ell m\rangle = \frac{i^\ell}{\hbar}\sqrt{\frac{2mk}{\pi}}\; j_\ell(kr)\, Y_\ell^m(\hat r) \tag{4}$$

* برای نشان دادن این مورد ابتدا $|k\rangle$ را برحسب $|E\ell m\rangle$ ها نوشته و در $\langle x|$ ضرب می‌کنیم ازینرو:

$$\langle x|k\rangle = \sum_{\ell m}\int dE\, \langle x|E\ell m\rangle\langle E\ell m|k\rangle$$

از سوی دیگر می‌دانیم $\langle x|E\ell m\rangle = c_\ell j_\ell(kr)\, Y_\ell^m(\hat r)$ است لذا:

$$= \sum_{\ell m}\int dE\; c_\ell j_\ell(kr)\, Y_\ell^m(\hat r)\,\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\,\delta\!\left(E-\frac{\hbar^2k^2}{2m}\right) Y_\ell^{m*}(\hat k)$$

$$= \sum_\ell \frac{2\ell+1}{4\pi}\, P_\ell(\hat k\cdot\hat r)\,\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\, c_\ell j_\ell(kr)$$

با توجه به $\sum_m Y_\ell^m Y_\ell^{m*} = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\hat k\cdot\hat r)$ ؛

* از سوی دیگر می‌دانیم $\langle x|k\rangle = \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^{3/2}}$ مشابه آنچه که با توجه به اتحاد $j_\ell(kr) = \frac{1}{2i^\ell}\int_{-1}^{1} e^{ikr\cos\theta}\, P_\ell(\cos\theta)\, d(\cos\theta)$ می‌توان نوشت:

$$\langle x|k\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_\ell (2\ell+1)\, i^\ell\, j_\ell(kr)\, P_\ell(\hat k\cdot\hat r)$$

حال با مقایسه دو عبارت اخیر می‌توان نوشت:

$$c_\ell = \frac{i^\ell}{\hbar}\sqrt{\frac{2mk}{\pi}}$$

و در نهایت به (4) می‌رسیم.

- پراکندگی از پتانسیل وابسته به زمان ثابت پایدار با تقارن کروی

پاسخ معادله‌ی تحول $H(t)=\frac{P^2}{2m}+V(t)$ که در آن $V(t)$ موضعی باشد و تقارن کروی داشته باشد و محل اندازه‌گیری نسبت به گستره‌ی تبادل خیلی بزرگتر باشد ⑤ و ⑥ ص 123 به شکل ذیل تحلیل می‌یابند:

$$\langle x|\psi^{(+)}\rangle=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[e^{ikz}+\frac{e^{ikr}}{r}f(\theta)\right] \qquad (1)$$

که در آن $f(\theta)$ به صورت ذیل می‌باشد که: «دامنه‌ی پراکندگی موج» می‌باشد:

$$f(\vec{k}',\vec{k})=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)f_l(k)P_l(\cos\theta) \qquad (2)$$

که در آن $f_l(k)$ به صورت ذیل است که به «دامنه‌ی سطح پاره‌ای موج» است:

$$f_l(k)=-\frac{\pi T_l(E)}{k} \qquad (3)$$

که در آن $T_l(E)=\langle E'l'|T|El\rangle$ می‌باشد.

* برای این مورد ⑤ ص 123 بدون تفسیر به صورت ① نوشته می‌شود.

* معادله‌ی ② ص 123 را می‌توانیم با بازنویسی می‌کنیم و با توجه به تعریف ⑥ ص 117 می‌شود نوشت:

$$f(\vec{k}',\vec{k})=-\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}(2\pi)^3\langle\vec{k}'|T|\vec{k}\rangle$$

حال دو واحد در پایه‌های کروی وارد می‌کنیم:

$$f(\vec{k}',\vec{k})=-\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}(2\pi)^3\sum_{lm}\sum_{l'm'}\int dE\int dE'\,\langle\vec{k}'|E'l'm'\rangle\langle E'l'm'|T|Elm\rangle\langle Elm|\vec{k}\rangle$$

در عبارت فوق با توجه به ① ص 133 ضرایب تبدیل بین سطح تخت و کروی را جایگذاری می‌کنیم.

همچنین در عبارت اخیر با توجه به قضیه‌ی ویگنر-اکارت $\langle \alpha' j' m' | T^{(0)}_0 | \alpha j m\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \frac{\langle \alpha' j' \| T^{(0)} \| \alpha j\rangle}{\sqrt{2j+1}}$ را داریم

که در مورد ما می‌توان گفت $\langle E' l' m' | T | E l m\rangle = T_l(E)\,\delta_{ll'}\delta_{mm'}$ لذا با جایگذاری در (۱) بدست می‌آید:

$$f(\vec k', \vec k) = -\frac{4\pi^2}{k}\sum_{lm} T_l(E)\, Y_l^m(\hat k')\, Y_l^{m*}(\hat k)$$

که با تعریف $f_l(k) = -\frac{\pi T_l(E)}{k}$ و استفاده از $\sum_m Y_l^m(\hat k')Y_l^{m*}(\hat k) = \frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\theta)$ می‌توان به معادله‌ی ② دست یافت.

• با فرض اینکه پتانسیل مرکزی است $H(r)=\frac{p^2}{2m}+V(r)$ را، که $V(r)$ متناهی و نقصان کرده داشته باشد که به صورت ①-③ شد را

به صورت زیر می‌نویسیم اگر محل اندازه‌گیری در دوردست باشد:

$$\langle x|\psi^{(+)}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_l \frac{(2l+1)}{2ik}P_l(\hat k\cdot\hat k')\left\{\frac{e^{ikr}}{r}S_l - \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r}\right\} \qquad (4)$$

که در آن S_l به صورت زیر است:

$$S_l = 1+2ik f_l(k) \qquad (5)$$

که در آن f_l دامنه‌ی موج پاره‌ای را داریم

$$f_l(k) = -\frac{\pi T_l(E)}{k} \qquad (3)$$

• می‌توان نشان داد S_l، خاصیت یکانی دارد، به عبارتی چیزی نابود (گم) نمی‌شود، اگر پایسته باشد (ماده چشمه نباشد):

$$|S_l| = 1 \qquad (6)$$

چه اگر پایسته باشد $\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2=0$ است که با توجه به رابطه‌ی پیوستگی $\nabla\cdot j + \frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2=0$ به $\nabla\cdot\vec j=0$ منجر می‌شود. لذا:

$$\int \vec\nabla\cdot\vec j\, dV = 0$$

با توجه به قضیه‌ی گاوس:

$$\oint_S \vec J\cdot d\vec A = 0$$

یعنی شار ورودی برابر شار خروجی محاسبه شده و با توجه به ④ اگر بخواهیم شار ورودی و خروجی برابر باشد باید $|S_l|=1$ باشد.

• می‌توان S_ℓ را به دلیل خاصیت یکانی بودنش ⑥ به صورت زیر نوشت:

$$S_\ell = e^{2i\delta_\ell} \qquad ⑦$$

که البته در تعریفش ⑤ باید صدق کند:

$$f_\ell = \frac{e^{2i\delta_\ell} - 1}{2ik} \quad \text{or} = \frac{e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell}{k} \quad \text{or} = \frac{1}{k\cot\delta_\ell - ik} \qquad ⑧$$

• پاسخ معادلهٔ تحول $H_{(t)} = \frac{P^2}{2m} + V_{(r)}$ را که در آن V موضعی و تقارن کروی دارد، را می‌توان مجدداً به صورت زیر بازنویسی کرد:
اگر محل اندازه‌گیری در دور دست باشد:

$$\langle x | \psi^{(+)} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \right] \qquad ①$$

که در آن $f(\theta)$ برابر است با:

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0} (2\ell+1) \left(\frac{e^{2i\delta_\ell} - 1}{2ik} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

$$\text{or} \quad \frac{1}{k} \sum_{\ell=0} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell \, P_\ell(\cos\theta) \qquad ⑨$$

که در آن داریم:

$$f_\ell = \frac{e^{2i\delta_\ell} - 1}{2ik} \quad \text{or} = \frac{e^{i\delta_\ell} \cdot \sin\delta_\ell}{k} \quad \text{or} = \frac{1}{k\cot\delta_\ell - ik} \qquad ⑤$$

که در آن داریم:

$$f_\ell(k) = \frac{-\pi T_\ell(E)}{k} \qquad ③$$

• در اینجا ادبیات «سطح مقطع کل» را که به صورت ⑦ ص 124 یا ⑧ ص 125 بدست آمد میشود:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell+1) \sin^2\delta_\ell \qquad ⑩$$

• به یافتن δ_ℓ به جای محاسبات سنگین و وقت گیر (3) و (8) می‌توان با توجه به اینکه پتانسیل موضعی

در نظر گرفته شده است از شرط پیوستگی تابع موج و مشتق آن در $r=R$ بهره برد و در کنار (9)

زودتر به جواب رسید در صورت داشتن تقارن کروی.

توجه شود که توابع موج کلی داخل ناحیه پتانسیل و خارجش به صورت زیل داده می‌شود در صورت داشتن تقارن کروی:

$$\psi_{out} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum i^\ell (2\ell+1) \, e^{i\delta_\ell} \{ \cos\delta_\ell \, j_\ell(kr) - \sin\delta_\ell \, n_\ell(kr) \} \, P_\ell(\cos\theta) \quad (11)$$

$$\psi_{in} = R \, Y \quad (12)$$

* موج خارج از ناحیه را به طور کلی می‌توان نوشت:

$$\psi_{out} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum i^\ell (2\ell+1) [c_\ell^{(1)} h^{(1)}(kr) + c_\ell^{(2)} h^{(2)}] \, P_\ell(\cos\theta) \quad (13)$$

که با توجه به رفتار مجانبی توابع هنکل در دوردست‌ها می‌توان نوشت:

$$\psi_{out}^{r \gg R} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\ell (2\ell+1) [c_\ell^{(1)} \frac{e^{ikr}}{ikr} - c_\ell^{(2)} \frac{e^{-i(kr-\ell\pi)}}{ikr}] P_\ell(\cos\theta)$$

حال با مقایسه‌ی جواب این مسأله به صورت (7) , (9) می‌توان نوشت:

$$c_\ell^{(1)} = \frac{1}{2} e^{2i\delta_\ell} \quad , \quad c_\ell^{(2)} = \frac{1}{2}$$

که با جایگذاری در (13) به (11) می‌رسیم.

توجه شود که شرط پیوستگی تابع موج و مشتق آن در R:

$$\psi_{out}\big|_R = \psi_{in}\big|_R$$

$$\frac{d\psi_{out}}{dr}\bigg|_R = \frac{d\psi_{in}}{dr}\bigg|_R$$

که می‌توان با توجه به (11) و (12) به صورت ذیل نوشت. با تقسیم دو عبارت فوق:

$$\frac{1}{A_l}\frac{dA_l}{dr}\bigg|_R = \frac{r}{R}\frac{dR}{dr}\bigg|_R$$

که در آن $A_l = \cos\delta_l\, j_l(kr) - \sin\delta_l\, n_l(kr)$ می‌باشد. بنابراین با مشتق گرفتن طرفین فوق در r ضرب می‌کنیم:

$$\frac{k\cos\delta_l\, j_l'(kr) - \sin\delta_l\, n_l'(kr)}{\cos\delta_l\, j_l(kr) - \sin\delta_l\, n_l(kr)}\bigg|_R = \frac{r}{R}\frac{dR}{dr}\bigg|_R$$

- توجه شود که تابع موج در شرایطی که پتانسیل ما نامتناهی باشد خود و مشتقش پیوسته است. در صورتی که دیواره نامتناهی باشد فقط خودش پیوسته خواهد بود.

* پراکندگی از کره‌ی سخت

پتانسیلی به صورت ذیل مفروض می‌باشد:

$$V(r)=\begin{cases}\infty & ; \ r\le a\\ 0 & ; \ r>a\end{cases}$$

حال ذره‌ای به این محدوده برخورد و پراکنده می‌گردد.

برای این مثال به دلیل داشتن تقارن کروی پاسخ تحول ذره به صورت (1) و (9) بوده و سطح مقطع پراکندگی (12) می‌باشد.

اما برای پیدا کردن δ_ℓ برای این حالت می‌توان از شرط پیوستگی تابع موج بهره برد.

از آنجایی که پتانسیل داخل ناحیه‌ی پتانسیل بی‌نهایت است، تابع موج داخل صفر می‌شود. لذا به دلیل پیوستگی انتظار داریم (11) که تابع موج کلی در خارج می‌باشد نیز صفر باشد. لذا:

$$\delta_\ell = \tan^{-1}\left(\frac{j_\ell(ka)}{n_\ell(ka)}\right)$$

برای انرژی‌های پایین $ka \ll 1$، با توجه به طرفهای j_ℓ و n_ℓ می‌توان دید که برای $\ell \gg 0$ ها $\delta_\ell = 0$ می‌شود، لذا جمله‌ی غالب s-wave ($\ell=0$) می‌باشد. که می‌توان حساب کرد:

$$\delta_{\ell=0} = \frac{j_0(ka)}{n_0(ka)}$$

$$= \tan(ka)$$

$$\delta_0 = -ka$$

به عبارتی

یا به عبارتی برای انرژی‌های کم:

$$\sigma_{tot} \gtrsim \frac{4\pi}{k^2}\sin^2(ka) \simeq 4\pi a^2$$

که در قیاس با سطح مقطع کلاسیک که $\pi(r+a)^2$ با شرط آنکه $r\to 0$، که ذره بوده، πa^2 می‌شود! و این اثر موجی است!