پاسخ سری هفتم تمرینات کوانتوم پیشرفته ۲

3.36 — در پایه‌های m_1 و m_2 معادل به حالت‌های مختلف $|j_1=1, j_2=1; m_1, m_2\rangle$ را به صورت زیر ساختیم:

$$|+,+\rangle,\ |+,0\rangle,\ |+,-\rangle;\ |0,+\rangle, |0,0\rangle, |0,-\rangle;\ |-,+\rangle, |-,0\rangle, |-,-\rangle$$

حال در پایه‌های $|j, m\rangle$ از $j_1=j_2=1$ نیز می‌توان گفت باید داشته باشیم:

هر دو هم جهت باشند

$$|2,-2\rangle,\ |2,-1\rangle,\ |2,0\rangle,\ |2,1\rangle;\ |2,2\rangle$$

$$|1,-1\rangle,\ |1,0\rangle,\ |1,1\rangle$$

$$|0,0\rangle$$

حال ضرایب C.G را مشخص (یا به عبارتی ضرایب بین این دو فضای فوق) بیابیم.

+ از بالاترین حالت $|2,2\rangle$ شروع کرده با اعمال J_-، m مربوط را کاهش می‌دهیم.

$$\boxed{|2,2\rangle = |+\ +\rangle} \xrightarrow{J_-} J_-|2,2\rangle = (J_{1-}+J_{2-})|+\ +\rangle$$

$$\Rightarrow 2|2,1\rangle = \sqrt{2}\{|+\,0\rangle + |0\,+\rangle\} \Rightarrow \boxed{|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,0\rangle + |0,+\rangle)}$$

$$|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,0\rangle + |0,+\rangle) \xrightarrow{J_-} J_-|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_{1-}+J_{2-})(|+\,0\rangle + |0\,+\rangle)$$

$$\Rightarrow \sqrt{6}|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(J_{1-}+J_{2-})|+\,0\rangle + (J_{1-}+J_{2-})|0\,+\rangle\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6}|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{2}(|0\,0\rangle + |+\,-\rangle + |0,0\rangle + |-\,+\rangle)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|+\,-\rangle + 2|0\,0\rangle + |-\,+\rangle)}$$

$$|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|+-\rangle + 2|00\rangle + |-+\rangle\right) \xrightarrow{J_-} J_-|2,0\rangle = \frac{(J_{1-}+J_{2-})}{\sqrt{6}}\left(|+-\rangle + 2|00\rangle + |-+\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{6}\,|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\sqrt{2}|-0\rangle + 2\sqrt{2}|-0\rangle + 2\sqrt{2}|0-\rangle + \sqrt{2}|0-\rangle\right\}$$

$$\Rightarrow |2,-1\rangle = \frac{3}{6}\sqrt{2}\left(|-0\rangle + |0-\rangle\right) \Rightarrow \boxed{|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|-0\rangle + |0-\rangle\right\}}$$

والبته واضح است که داریم:

$$\boxed{|2,-2\rangle = |--\rangle}$$

+ حالت $|1,1\rangle$ همانند $|2,1\rangle$ است ولی باید بر هم عمود باشند تا پایه کامل بشوند بنابراین بدست می‌آید:

$$\boxed{|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+0\rangle - |0+\rangle\right).}$$

یعنی $m=1$ باید به عبارتی فقط‌هایی از m_1 یا m_2 باید عبور داشته باشد.

حال با اعمال J_- مجددا داریم:

$$J_-|1,1\rangle = \frac{J_{1-}+J_{2-}}{\sqrt{2}}\left(|+0\rangle - |0+\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\,|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{2}|+-\rangle + \cancel{\sqrt{2}|00\rangle} - \cancel{\sqrt{2}|00\rangle} - \sqrt{2}|-+\rangle\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)}$$

مجددا می‌توان نوشت:

$$J_-|1,0\rangle = \frac{(J_{1-}+J_{2-})}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right).$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\,|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{2}|0-\rangle + \sqrt{2}|-0\rangle\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0-\rangle + |-0\rangle\right)}$$

یا هم را حذف کرده‌اند یا هر دو صفر اند.

$m=0$

همچنین مراحل برای $|0,0\rangle$ باید به فرم مقابل باشد:

$$|0,0\rangle = a|+-\rangle + b|00\rangle + c|-+\rangle$$

از شرط تعامد و بهنجارش می‌توان گفت:

$$\Rightarrow \boxed{|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|+-\rangle - |00\rangle + |-+\rangle\right)}$$

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 \quad (I)$$

3.33 - با توجه به تعریف $S^2=(S_1+S_2)^2$ می‌توان نوشت:

$$\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 = S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z}$$

جملات cross را به این صورت باز می‌کنیم:

حال با توجه به تعریف $S_\pm = S_x \pm i S_y$ می‌توان نوشت:

$$\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 = \left(\frac{S_{1+}+S_{1-}}{2}\right)\left(\frac{S_{2+}+S_{2-}}{2}\right) + \left(\frac{S_{1+}-S_{1-}}{2i}\right)\left(\frac{S_{2+}-S_{2-}}{2}\right) + S_{1z}S_{2z} \quad (II)$$

با جایگذاری (II) در (I) می‌توان نوشت:

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_{1z}S_{2z} + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+}$$

حال می‌خواهیم عناصر ماتریسی 4×4، S^2 را در پایه حالت‌های $\{m_1,m_2\}$ بسازیم. به این منظور S^2 را اثر می‌دهیم بر $\{m_1,m_2\}$ها:

$$S^2|++\rangle = \hbar^2\left\{\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{2}) + 2(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) + 0 + 0\right\}|++\rangle$$
$$= 2\hbar^2|++\rangle$$

$$S^2|+-\rangle = \hbar^2\left\{\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{2}) + 2(\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2})\right\}|+-\rangle$$
$$+\hbar^2\left\{\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1)}\sqrt{(\tfrac{1}{2}-(-\tfrac{1}{2}))(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1)}\right\}|-+\rangle$$
$$= \hbar^2|+-\rangle + \hbar^2|-+\rangle$$

$$S^2|-+\rangle = \hbar^2|-+\rangle + \hbar^2\left\{\sqrt{(\tfrac{1}{2}-(-\tfrac{1}{2}))(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1)}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1)}\right\}|+-\rangle$$
$$= \hbar^2|-+\rangle + \hbar^2|+-\rangle$$

$$S^2|--\rangle = \hbar^2\left\{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) + 2(-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2})\right\}|--\rangle$$
$$= 2\hbar^2|--\rangle$$

با یادآوری اینکه در روابط فوق از $S_\pm|s,m\rangle = \hbar\sqrt{(s\mp m)(s\pm m+1)}\,|s,m\pm1\rangle$، $S^2|m_1m_2\rangle = \hbar^2 s(s+1)|m_1m_2\rangle$

استفاده کرده‌ایم.

بنابراین میتوان گفت ماتریس S^2 در پایه های $|m_1, m_2\rangle$، به فرم زیر می باشد:

$$S^2 = \hbar^2 \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} (++) & (+-) & (-+) & (--) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} (++) \\ (+-) \\ (-+) \\ (--) \\ \\ \end{array}$$

حال با قطری کردن S^2 ای، که به فرم فوق باشد، ویژه مقادیر را یافته فضای C.G خواهیم بود:

$$\det(S^2 - \lambda I) = 0 \longrightarrow \lambda = \hbar^2 2 , 0$$

می دانیم که ویژه مقادیر S^2، $\hbar^2 s(s+1)$ است لذا:

$$S = 1 , 0$$

مربوط به triplet (سه‌گانگی برای سه ویژه بردار)

مربوط به singlet

همراه با بهنجارش

ویژه توابع نیز بصورت زیر می‌باشند:

$$S=1;\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (++) \\ (+-) \\ (-+) \\ (--) \end{array}, \quad S=1;\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad S=1;\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right), \quad S=0;\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

می‌توان بردارهای فوق را به صورت سابق با اسپینورها نشان داد:

$$|S=1, m=1\rangle = |++\rangle$$

$$|S=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)$$

$$|S=1, m=-1\rangle = |--\rangle$$

$$|S=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$

که فضای C.G واضح است.