# پیامدهای تقارن نسبیت عام

## - کمیت های پایسته مرتبط با تقارن های فضا-زمان

• اگر $k_a$ بردار killing باشد برای فضا زمان، آنگاه کمیت k، که به صورت زیر تعریف می‌شود، پایسته می‌باشد.

$$k = p^a k_a$$

* برای نشان دادن این موضوع، از کمیت k باید مشتق بگیریم و نشان بدهیم که برابر صفر می‌باشد، لذا:

$$\frac{dk}{d\tau} = \frac{dp^a}{d\tau} k_a + p^a \frac{dk_a}{d\tau}$$

یا با توجه به تعریف $p^a = mU^a$ می‌توان نوشت:

$$\frac{dk}{d\tau} = m \frac{dU^a}{d\tau} k_a + p^a \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dk_a}{dx^b}$$

حال با توجه به معادله ژئودزیک $\frac{dU^a}{d\tau} = -\Gamma^a_{bc} U^b U^c$ و $U^b = \frac{dx^b}{d\tau}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{dk}{d\tau} = m(-\Gamma^a_{bc} U^b U^c).k_a + m U^a U^b \frac{\partial k_a}{\partial x_b}$$

با توجه اندیس‌های را جابجا می‌کنیم:

$$= m\left\{ U^a U^b \frac{\partial k_a}{\partial x^b} - \Gamma^{a'}_{ab} U^a U^b k_{a'} \right\}$$

$$= m U^a U^b \left\{ \frac{\partial k_a}{\partial x^b} - \Gamma^{a'}_{ab} k_{a'} \right\}$$

با توجه به تعریف مشتق هموردا:

$$= m U^a U^b \nabla_b k_a$$

با توجه به اینکه $U^a U^b$، متقارن است و $\nabla_b k_a$ دارای دو بخش متقارن و پادمتقارن می‌باشد، با توجه به اینکه ضرب متقارن در پادمتقارن صفر می‌شود، فقط قسمت متقارن $\nabla_b k_a$ سهم می‌دهد:

$$\frac{dk}{d\tau} = m U^a U^b \, \mathrm{sym}(\nabla_b k_a)$$

و می‌دانیم که ترکیب تانسور متقارن به چه صورت است:

$$= \frac{m}{2} U^a U^b (\nabla_b k_a + \nabla_a k_b)$$

GR_1 5

و از آنجایی که $k_a$ بردار killing می‌باشد باید در $k_{b;a} + k_{a;b} = 0$ صدق کند، بنابراین عبارت فوق صفر می‌شود.

– جابجایی حضیض عطارد

• می‌توان نشان داد که مدار حرکت سیاره (فاصله از مرکز خورشید تابعی از زاویه سمتی) به صورت زیر است:

$$u \simeq \frac{M}{l^2}\{1 + e\cos[\varphi(1-\varepsilon)]\} \qquad (1)$$

که در آن، $u=\frac{1}{r}$ وارون فاصله از مرکز، $\varphi$ زاویه سمتی، $M$ جرم خورشید، $l$ کمیتی ثابت، $\varepsilon = \frac{3M^2}{l^2}$ و $e$ خروج از مرکز بیضی که به صورت $e^2 = 1-\frac{b^2}{a^2}$ تعریف می‌شود، می‌باشند.

* ابتدا با توجه به اختلاف بارز جرم سیارات با خورشید، می‌توان گفت خورشید متریک شوارتزشیلد را در فضازمان پیرامون خود تحمیل می‌کند و با توجه به قضیه بیرخوف ص GR_3 چون متریک تقارن کروی است، تقارن انتقال زمانی (ایستایی) را داریم به عبارتی یک بردار killing به صورت $K^{(1)}=\frac{\partial}{\partial t}$ به آن می‌توان اختصاص داد. از سوی دیگر تقارن سمتی پیرامون این متریک را می‌توان در نظر گرفت چرا که می‌خواهیم سیاره را روی صفحه استوا در نظر بگیریم و بردار killing این تقارن نیز به صورت $K^{(2)}=\frac{\partial}{\partial\varphi}$ می‌توان در نظر گرفت (اثبات می‌توان کرد).
حال با توجه به قضیه ص ① می‌توان گفت این دو بردار killing، کمیت‌های پایسته‌ای را به صورت زیر می‌توانند بسازند:

$$E \equiv K^{(1)}_a P^a = K^{(1)a} P_a \qquad (2\text{ الف})$$

$$l \equiv K^{(2)}_a P^a = K^{(2)a} P_a \qquad (2\text{ ب})$$

با توجه $K^{(1)}=(1,0,0,0)$ و $K^{(2)}=(0,0,0,1)$:

$$E = P_t = g_{tt}P^t \qquad (3\text{ الف})$$

$$l = P_\varphi = g_{\varphi\varphi}P^\varphi \qquad (3\text{ ب})$$

* همانطور که گفتیم در نظر گرفتیم که حرکت سیاره روی صفحه‌ی استوایی باقی می‌ماند (با پایستگی تکانه زاویه‌ای

می‌توان اثبات کرد) بنابراین متریک شوارتزشیلد به صورت زیر در می‌آید:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + A(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\varphi^2 \qquad (4)$$

از سوی دیگر علی‌الاصول می‌توان متریک را به صورت $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ نوشت. (با فرض $c=1$) و با توجه به (4) می‌توان

گفت که:

$$ds^2 = \left(\frac{-A(r)dt^2 + A(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\varphi^2}{d\tau^2}\right) d\tau^2$$

به عبارتی: (5)

$$-A(r)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{A(r)}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = -1$$

* حال با توجه به (4) می‌توان روابط (3) را به صورت ذیل نوشت با تعریف $p^a = mU^a$ :

$$E = -A(r)\, mU^0 = -A(r)\, m\left(\frac{dt}{d\tau}\right) \qquad \text{الف}$$

$$(6)$$

$$\ell = r^2\, mU^3 = r^2\, m\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right) \qquad \text{ب}$$

با جایگذاری روابط (6) به صورت $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{m^2 A(r)^2}$ ، $\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{\ell^2}{r^4 m^2}$ در (5) می‌توان نوشت:

$$-A(r)\frac{E^2}{m^2A^2} + \frac{1}{A(r)}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\frac{\ell^2}{m^2\ell^4} = -1$$

یا به عبارتی با تعریف $u = \frac{1}{r}$ : (7)

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{m^2} - (1-2GMu)\left(1+\frac{\ell^2u^2}{m^2}\right)$$

* حال از (6) ب، $\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{\ell^2u^4}{m^2}$ را که داریم، با توجه به (7) می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\ell^2u^4}\left[E^2 - (1-2GMu)(m^2+\ell^2u^2)\right]$$

و با توجه به تعریف $dr = d\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{du}{u^2}$ :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E^2}{\ell^2} - (1-2GMu)\left(\frac{m^2}{\ell^2} + u^2\right) \qquad (8)$$

حال تا مرتبه‌ی اول تقریب از معادله‌ی 8 می‌توان به عبارت زیر رسید: (چون $m=1$ در نظر گرفته شده)

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{GM}{l^2}+3GMu^2$$

حال با تعریف $\tilde{u}=\frac{l^2u}{M}$ و $\varepsilon=\frac{3M^2}{l^2}$ و در نظر گرفتن $G=1$ می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\varphi^2}+\tilde{u}=1+\varepsilon\tilde{u}^2$$

حال با فرض جواب اختلالی به صورت: $\tilde{u}=\tilde{u}_0+\varepsilon\tilde{u}_1+O(\varepsilon^2)$

می‌توان پاسخ اختلالی معادله‌ی دیفرانسیل را به دست آورد، با جایگذاری جواب اختلالی در معادله دیفرانسیل:

$$\tilde{u}_0''+\tilde{u}_0-1+\varepsilon(\tilde{u}_1''+\tilde{u}_1-\tilde{u}_0^2)+O(\varepsilon^2)=0$$

پاسخ مرتبه‌ی صفر معادله به صورت زیر می‌شود که بیانگر یک بیضی است که همان مدار کپلری را می‌دهد:

$$\tilde{u}_0=(1+e\cos\varphi)$$

با در نظر گرفتن مرتبه‌ی اول و صفرم پاسخ به صورت زیر می‌شود:

$$\tilde{u}=(1+e\cos\varphi)+\varepsilon[1+e\varphi\sin\varphi+e^2(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{6}\cos2\varphi)]$$

که اگر تصحیحات دیگر را صرف نظر کنیم پاسخ به صورت 1 به دست می‌آید.

* جزئیات بیشتر حل در کتاب Inverno ویرایش 2 بخش 16.6

• می‌توان نشان داد که حضیض سیاره عطارد به مقدار ذیل جابجا می‌شود:

$$\Delta\varphi_{\text{Mercury}} = 43.0''/\text{century}.$$

* اگر مدار سیاره را که در (1) آمده را در نظر گرفته و قسمت $\cos[\varphi(1-\varepsilon)]$ را حول $\varepsilon=0$ بسط می‌دهیم:

$$\cos[\varphi(1-\varepsilon)] = \cos\varphi + \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon}\cos[\varphi(1-\varepsilon)]\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \cos\varphi + \varepsilon\varphi\sin\varphi.$$

بنابراین می‌توان گفت که حضیض سیاره به مقدار ذیل جابجا می‌شود:

$$\Delta\varphi = 2\pi\varepsilon$$

یا به عبارتی:

$$= \frac{6\pi G^2 M^2}{l^2}$$

با توجه به اطلاعاتی که از مکانیک کلاسیک برای مدار کپلری (با خروج از مرکز $e$) داریم می‌توان گفت: $l^2 \approx GM(1-e^2)a$

بنابراین می‌توان با داشتن اطلاعات خورشید و عطارد $\frac{GM_\odot}{c^2} = 1.48\times10^5\,cm$, $a = 5.79\times10^{12}\,cm$, $e = 0.2056$

بدست آورد که مقدار جابجایی حضیض عطارد به همان مقدار برابر است.

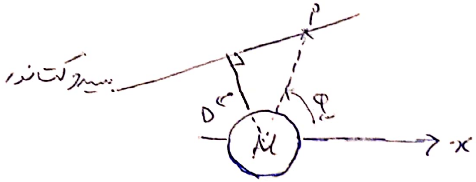
* اطلاعات بیشتر پیرامون حل از کتاب Carroll، بخش 5.5.

- انحراف نور ستارگان پس زمینه در میدان گرانشی خورشید

• میتوان نشان داد که مسیر حرکت نور پیرامون ستاره یا سیاه چاله به صورت زیر میباشد:

$$u=\frac{\sin\varphi}{D}+\frac{M(1+C\cos\varphi+\cos^2\varphi)}{D^2}+O(\varepsilon^2) \qquad (1)$$

که در آن $C$ ثابت و $M$، $\varphi$ و $D$ با توجه به شکل مشخص میشود.




همانطور که نشان داده ایم این موضوع مانند جابجایی حضیض مدار باید عمل کنیم ولی با توجه به اینکه با نور سروکار داریم باید

به جای $ds^2=-c^2dt^2\ldots$ از $ds^2=0$ استفاده کنیم و سپس رابطه (5) ص 3 را برابر صفر قرار دهیم که در

نهایت به معادله ذیل می رسیم:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3GM}{c^2}u^2$$

که با تعریف $\varepsilon=\frac{3M}{D}$ و $\tilde{u}=Du$ به معادله ذیل می رسیم:

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\varphi^2}+\tilde{u}=\varepsilon\tilde{u}^2$$

که با حل اختلالی با فرض جواب به صورت: $\tilde{u}=\tilde{u}_0+\varepsilon\tilde{u}_1+O(\varepsilon^2)$

میتوان به سرعتی جواب را بدست آورد: $\tilde{u}_0=\frac{1}{D}\sin(\varphi-\varphi_0)$

و با توجه به اینها معادله دیفرانسیل به صورت مقابل درمیاید: $\tilde{u}_1''+\tilde{u}_1=\tilde{u}_0^2=\sin^2\varphi$

و با ساده سازی به صورت (1) بدست میاید.

x. اطلاعات بیشتر از 16.7 کتاب Inverno ویرایش 2

- میزان مقدار انحراف نور در میدان گرانشی سیاره یا خورشید یا سیاه چاله را به صورت زیر یافتیم:

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 D}$$

* جزئیات بیشتر در بخش 16.7 کتاب Inverno ویرایش 2

- توجه شود که در مکانیک کلاسیک با در نظر گرفتن جرم معادل $m = \frac{h\nu}{c^2}$ به فوتون مقدار انحراف نور در میدان گرانشی را به دست آوریم که به صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta\varphi = \frac{2GM}{c^2 D}$$

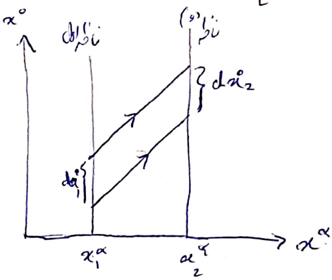
- توجه شود که محاسبات این بخش و بخش قبلی که به صورت انتگرالی حل شد در صورت بزرگ بودن جرم توده‌ها نیازمند مراتب بالاتر یا حل عددی می‌باشند:

## - اتساع زمانی یا انتقال به سرخ گرانشی

• در یک فضا زمان ایستا که دو ناظر در $x_1^\alpha$ و $x_2^\alpha$ نشسته باشند فاصله‌ی زمانی که اولی می‌بیند $\Delta\tau$ و فاصله‌ی زمانی که ناظر دوم می‌بیند $k\Delta\tau$ می‌باشد که در آن $k$ به صورت زیر است.

$$k=\sqrt{\frac{g_{00}(x_2^\alpha)}{g_{00}(x_1^\alpha)}} \qquad (1)$$

* در واقع دو ناظر داریم که اولی در فاصله‌ی زمانی $dx_1^0$ دو پالس نوری به سوی ناظر دوم ارسال کرده و ناظر دوم دو پالس را در فاصله‌ی زمانی $dx_2^0$ دریافت کرده




حال زمان ویژه را که خود ناظر اندازه می‌گیرد که به صورت زیر تعریف شده برابر می‌شود با:

$$d\tau^2=g_{\mu\nu}(x_1^\alpha)\,dx_1^\mu dx_1^\nu$$
$$=g_{00}(x_1^\alpha)(dx_1^0)^2$$

به طور مشابه برای ناظر دوم داریم:

$$(k\,d\tau)^2=g_{00}(x_2^\alpha)(dx_2^0)^2$$

با توجه به اینکه فضا زمان ایستا است می‌توان گفت $dx_1^0=dx_2^0$، بنابراین از عبارات فوق (1) را می‌توان گرفت

* لازم به ذکر است که این موضوع باعث می‌شود انرژی و طول موج فوتون در میدان‌های گرانشی متفاوت باشند.