پاسخ تمرینات سری ۹ مکانیک کوانتومی پیشرفته ۲

[Sakurai 3rd ed. 5.6] برای یک ذره در جعبه‌ی دوبعدی مربعی به اضلاع L، ویژه‌توابع و ویژه‌مقادیر به صورت زیر است:

$$\psi_{n_x n_y}(x,y) = \frac{2}{a} \sin\frac{n_x \pi x}{L} \sin\frac{n_y \pi y}{L} \quad ; \quad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \underbrace{(n_x^2 + n_y^2)}_{=n}$$

+ حال به دو تراز انرژی پایین‌تر دقت کنید. ویژه‌حالت‌ها و مقادیر مربوط به پتانسیل اختلالی λxy در کل جعبه می‌شود:

$$\psi^{(0)}_{11}(x,y) = \frac{2}{a} \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{\pi y}{L} \quad ; \quad E^{(0)}_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL^2}$$

$$\psi^{(0)}_{12}(x,y) = \frac{2}{a} \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{2\pi y}{L}$$
$$\psi^{(0)}_{21}(x,y) = \frac{2}{a} \sin\frac{2\pi x}{L} \sin\frac{\pi y}{L} \quad ; \quad E^{(0)}_2 = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

بنا بر این واضح است که تراز پایین، تبهگنی ندارد ولی تراز برانگیخته اول، تبهگنی دوگانه دارد.

+ حال می‌توان تصحیحات انرژی اولیه مرتبه‌ی اول اختلال را در دو تراز انرژی پایین به صورت ذیل حساب کرد:

- برای حالت پایه چون تبهگنی نداریم، شیفت را می‌توان به صورت زیر حساب کرد:

$$\Delta^{(1)}_1 = \langle \psi^{(0)}_{11} | V | \psi^{(0)}_{11} \rangle = \int_0^L \int_0^L \frac{4}{a^2} \lambda xy \sin^2\frac{\pi x}{L} \sin^2\frac{\pi y}{L}\, dx\, dy$$

$$= \frac{4\lambda}{L^2} \int_0^L x \sin^2\frac{\pi x}{L}\, dx \int_0^L y \sin^2\frac{\pi y}{L}\, dy = \frac{1}{4}\lambda L^2$$

$$E^{(1)}_1 = E^{(0)}_1 + \Delta^{(1)}_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL^2} + \frac{1}{4}\lambda L^2$$

بنابراین انرژی می‌شود:

– به تراز اول برانگیخته ۲ چون تبهگن است باید ابتدا ماتریس اختلال را در پایه ویژه حالات تشکیل دهیم سپس

با قطری کردن، ویژه مقادیر و تصحیحات مرتبه اول را بدهند. با توجه به اینکه تبهگنی دوتایی داریم ماتریس 2×2 می‌شود:

که درایه‌هایش به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\langle \psi_{12}^{(0)} | V | \psi_{12}^{(0)} \rangle = \int_0^L \int_0^L \frac{4}{L^2} \lambda xy \sin^2\frac{\pi x}{L} \sin^2\frac{2\pi y}{L} \, dx\,dy = \frac{1}{4}\lambda L^2$$

$$\langle \psi_{12}^{(0)} | V | \psi_{21}^{(0)} \rangle = \int_0^L \int_0^L \frac{4}{L^2} \lambda xy \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{2\pi y}{L} \sin\frac{2\pi x}{L} \sin\frac{\pi y}{L} \, dx\,dy = \frac{256}{81\pi^4}\lambda L^2$$

$$\langle \psi_{21}^{(0)} | V | \psi_{12}^{(0)} \rangle = \int_0^L \int_0^L \frac{4}{L^2} \lambda xy \sin\frac{2\pi x}{L} \sin\frac{\pi y}{L} \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{2\pi y}{L} \, dx\,dy = \frac{256}{81\pi^2}\lambda L^2$$

$$\langle \psi_{21}^{(0)} | V | \psi_{21}^{(0)} \rangle = \int_0^L \int_0^L \frac{4}{L^2} \lambda xy \sin^2\frac{2\pi x}{L} \sin^2\frac{\pi y}{L} \, dx\,dy = \frac{1}{4}\lambda L^2$$

بنابراین اگر بخواهیم چنین ماتریسی قطری کنیم باید:

$$\det\left(W - \Delta_2^{(1)} \mathbb{1}\right) = 0$$

که در آن:

$$W = \lambda L^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 256/81\pi^4 \\ \frac{256}{81\pi^4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

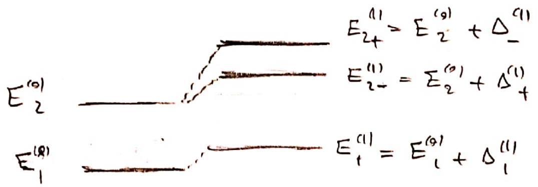
که با حل معادله فوق به دست می‌آید:

$$\Delta_{2\pm}^{(1)} = \lambda L^2 \left(\frac{1}{4} \pm \frac{256}{81\pi^4} \right)$$

بنابراین انرژی می‌شود:

$$E_{2\pm}^{(1)} = E_2^{(0)} + \Delta_{2\pm}^{(1)}$$

به صورت شماتیک می‌توان گفت:



3. با 5.1 در Σ بجز یک هامیلتونی سیستم دوحالته به صورت کلی باید به صورت ذیل باشد:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix}.$$

که با فرمول‌های ویژه‌مقادیر را به صورت کلی در سوال 1.13 ما محاسبه شده که به صورت ذیل می‌باشند:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left\{(H_{11}+H_{22}) \pm \left[(H_{11}-H_{22})^2 + 4H_{12}^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

ویژه توابع $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ نیز هستند که x_1 و x_2 به صورت ذیل داده شده‌اند:

$$x_1 = \frac{H_{12}}{\sqrt{H_{12} + (-H_{11}+\lambda_\pm)^2}}, \quad x_2 = \left[1 - \frac{H_{12}^2}{H_{12}^2 + (-H_{11}+\lambda_\pm)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(a) حال با معرفی $H_{11}=E_1^\circ$ ، $H_{22}=E_2^\circ$ ، $H_{12}=\lambda\Delta$ داریم. ویژه حالات و ویژه مقادیر به دست می‌آید:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left\{E_1^\circ + E_2^\circ \pm \sqrt{(E_1^\circ+E_2^\circ)^2 + 4\lambda^2\Delta^2}\right\}$$

$$x_1 = \frac{\lambda\Delta}{\sqrt{\lambda\Delta + (-E_1^\circ+\lambda_\pm)^2}}, \quad x_2 = \left\{1 - \frac{\lambda^2\Delta^2}{\lambda^2\Delta^2 + (-E_1^\circ+\lambda_\pm)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

که اگر $\lambda\Delta \ll |E_1^\circ - E_2^\circ|$ داریم:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}(E_1^\circ + E_2^\circ) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_1^\circ+E_2^\circ)^2 + 4\lambda^2\Delta^2} = \frac{1}{2}E_1^\circ + \frac{1}{2}E_2^\circ \pm \frac{E_1^\circ - E_2^\circ}{2}\left(1 + \frac{4\lambda^2\Delta^2}{(E_1^\circ-E_2^\circ)^2}\right)$$

اگر $\lambda\Delta \gg E_1^\circ - E_2^\circ$ داریم:

$$\lambda_\pm = \frac{E_1^\circ}{2} + \frac{E_2^\circ}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_1^\circ + E_2^\circ) + 4\lambda^2\Delta^2} \simeq \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2} \pm \lambda\Delta$$

الف) می‌توان به‌سادگی چنین هامیلتونی‌ای آورد که $\lambda|\Delta| \ll |E_1^0 - E_2^0|$ باشد از اختلال حل کرد:

درواقع هامیلتونی باید به صورت ذیل است:

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1^0 & 0 \\ 0 & E_2^0 \end{pmatrix}$$

که ویژه حالات آنها برابر می‌شود با:

$$\varphi_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

و اختلال می‌شود:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

+ بنابراین تصحیح انرژی به‌دست می‌آید:

- مرتبه‌ی اول تصحیح انرژی

$$\Delta_1^{(1)} = \langle \varphi_1^{(0)} | V | \varphi_1^{(0)} \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Delta_2^{(1)} = \langle \varphi_2^{(0)} | V | \varphi_2^{(0)} \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

- مرتبه‌ی دوم تصحیح انرژی:

$$\Delta_1^{(2)} = \frac{1}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \langle \varphi_1^{(0)} | V | \varphi_2^{(0)} \rangle = \frac{1}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\lambda^2 \Delta^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}$$

$$\Delta_2^{(2)} = \frac{1}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} \langle \varphi_2^{(0)} | V | \varphi_1^{(0)} \rangle = \frac{1}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\lambda^2 \Delta^2}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}}$$

بنابراین انرژی‌ها به صورت ذیل ظاهر می‌گردند:

$$E_1 \simeq E_1^{(0)} + \Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(2)} = E_1^{(0)} + \frac{\lambda^2 \Delta^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}$$

$$E_2 \simeq E_2^{(0)} + \Delta_2^{(1)} + \Delta_2^{(2)} = E_2^{(0)} + \frac{\lambda^2 \Delta^2}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}}$$

+ تصحیح دیگر توابع موج نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

- مرتبه اول تصحیح:

$$|n_1^{(1)}\rangle = \frac{\langle \varphi_2^{(0)} | V | \varphi_1^{(0)} \rangle}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \varphi_2^{(0)}$$

$$= \frac{\lambda \Delta}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$|n_2^{(1)}\rangle = \frac{\langle \varphi_1^{(0)} | V | \varphi_2^{(0)} \rangle}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} \varphi_1^{(0)}$$

$$= \frac{\lambda \Delta}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین حالت‌ها به صورت زیر می‌شوند:

$$|n_1\rangle \simeq \underbrace{|n_1^{(0)}\rangle}_{\varphi_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + |n_1^{(1)}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda \Delta}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \end{pmatrix}$$

$$|n_2\rangle \simeq \underbrace{|n_2^{(0)}\rangle}_{\varphi_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + |n_2^{(1)}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\lambda \Delta}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) در حد میدان‌های ضعیف $E_1^{(0)} - E_2^{(0)} \gg \lambda\Delta$ ، ریشه مقادیر تابع انتقالی انرژی ⑭ صفحه را به صورت زیر نوشت:

$$E_1 \simeq E_1^{(0)} + \lambda^2\Delta \qquad , \qquad E_2 = E_2^{(0)} + \lambda^2\Delta$$

که با پاسخ بدست آمده معادله ⑫ صفحه در توافق است.

[5.19] در اتم هیدروژن واقعی حالت‌های 2s و 2p به دلیل لمب شیفت تبهگنی شان شکسته شده و به مقدار

از نظر انرژی اختلاف مستقل از زمان تبهگنی بهره برد. در واقع آن قسمت اصلی H_0 , H است،

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

حال اثر استارک و اثر لمب را به عنوان اختلال می‌پذیریم:

$$V = \begin{pmatrix} \langle 2s|eEz|2s\rangle + \delta & \langle 2s|eEz|2p\rangle \\ \langle 2p|eEz|2s\rangle & \langle 2p|eEz|2p\rangle \end{pmatrix}$$

که مطابق به قوانین گزینش پاریته در المان‌های قطر صفر می‌شوند.

همچنین می‌توان نوشت:

$$\langle 2s|eEz|2p\rangle = \langle 2p|eEz|2s\rangle = eE\,\langle 2s|r|2p\rangle \int Y_0^{\frac{1}{2},m} Y_1^{\frac{1}{2},m} \cos\theta\, d\Omega = \mp\sqrt{3}\,eEa_0$$

بنابراین

$$V = \begin{pmatrix} \delta & \mp\sqrt{3}\,eEa_0 \\ \pm\sqrt{3}\,eEa_0 & 0 \end{pmatrix}$$

حال ویژه مقادیر ماتریس فوق تصحیحات مرتبه اول انرژی را به دست می‌دهند:

$$\Delta_{\pm}^{(1)} = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + 3e^2E^2a_0^2}$$

+ حال در صورتی که $\delta >> eEa_0$ باشد، تصحیحات انرژی مربعی اند و می‌آید:

$$\Delta^{(1)}_{\pm} = \frac{\delta}{2} \pm \frac{\delta}{2}\sqrt{1+\frac{12e^2E^2a_0^2}{\delta^2}} \simeq \frac{\delta}{2} \pm \frac{\delta}{2}\left[1+\frac{1}{2}\,\frac{12e^2E^2a_0^2}{\delta^2}\right]$$

$$= \frac{\delta}{2} \pm \left[\frac{\delta}{2}+\frac{3e^2E^2a_0^2}{\delta}\right]$$

به عبارتی:

$$\Delta^{(1)}_{+} = \delta + \frac{3e^2E^2a_0^2}{\delta} \quad ; \quad \Delta^{(1)}_{-} = -\frac{3e^2E^2a_0^2}{\delta} \; ;$$

+ اگر $\delta << eEa_0$ باشد، تصحیحات انرژی خطی اند و می‌آید:

$$\Delta^{(1)}_{\pm} = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4}+3e^2E^2a_0^2} \simeq \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{3e^2E^2a_0^2}$$

به عبارتی

$$\Delta^{(1)}_{+} = \frac{\delta}{2}+\sqrt{3}\,eEa_0 \quad ; \quad \Delta^{(1)}_{-} = \frac{\delta}{2}-\sqrt{3}\,eEa_0 \,.$$

[Sakurai 3rd ed. 5.23 (a)] برای سیستم با هامیلتونی ذیل:

$$H = AL^2 + BL_z + CL_y$$

در صورتی که $B \gg C$ باشد، می‌توان نشان داد که انرژی‌ها به صورت ذیل می‌باشد:

$$E_n = E_n^{(0)} + \frac{C^2 \hbar m}{2B}$$

$$= A\hbar\, l(l+1) + Bm\hbar$$

* ① می‌توان جمله CL_y را به عنوان جمله اختلالی در نظر گرفت، در این صورت با توجه به اینکه $H_0 = AL^2 + BL_z$

باشد، چون L^2 و L_z سازگار اند در پایه‌های $|n\,l\,m\rangle$ می‌توان انرژی غیر اختلالی را نوشت:

$$E_n^{(0)} = A\hbar\, l(l+1) + Bm\hbar$$

② حال باید $V = CL_y$ را در پایه‌های $H_0 = AL^2 + BL_z$ که $\{|n\,l\,m\rangle\}$ باشد بازنویسی کنیم.

$$V = \langle l'm'|\, CL_y\, |lm\rangle$$

$$= \langle l'm'|\, \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)\, |lm\rangle$$

با توجه به رابطه $\langle l'm'|L_\pm|lm\rangle = \sqrt{(l\pm m)(l\mp m+1)}\,\hbar\,\delta_{m',m\pm1}\,\delta_{ll'}$ باید $l = l'$ و $m\pm1 = m'$ باشد

تا حاصل غیر صفر بدهد.

صفحه اول

بنابراین می‌توان گفت:

$$V = \frac{1}{2i}\begin{cases} -\langle l\ m-1|L_-|l\ m\rangle & \text{if } m=m-1,\ l=l' \\ \langle l\ m+1|L_+|l\ m\rangle & \text{if } m=m+1,\ l=l' \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2i}\begin{cases} \sqrt{(l+m)(l-m+1)} & \text{if } m=m+1,\ l=l' \\ -\sqrt{(l-m)(l+m+1)} & \text{if } m=m-1,\ l=l' \end{cases} \qquad ⊛$$

با توجه به اینکه $E_n^{(0)}$، غیر تبهگن است (چرا که m و l در $E_n^{(0)}$ تبهگنی را از بین می‌برند) نیازی به قطری‌سازی V نمی‌باشد و انرژی به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$E_n = E_n^{(0)} + \langle n^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle + \sum_{k\neq n}\frac{|\langle k^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_k^{(0)}} + \dots$$

واضح است که اگر عناصر قطری V، مطابق ⊛، را بخواهیم، $l=l'$ و $m=m'$ این‌ها طبق ⊛

صفر است، لذا $E_n^{(1)}=0$ و تصحیح مرتبه دوم را می‌توان گفت:

$$E_n = E_n^{(0)} + 0 + \left(\frac{\left|-\frac{1}{2i}\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\right|^2}{E_{lm}^{(0)} - E_{l,m-1}^{(0)}} + \frac{\left|\frac{1}{2i}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\right|^2}{E_{lm}^{(0)} - E_{l,m+1}}\right) + \dots$$

$$= E_n^{(0)} + \frac{1}{4}\left(\frac{(l-m)(l+m+1)}{Bm\hbar - B\hbar(m-1)} + \frac{(l+m)(l-m+1)}{Bm\hbar - B\hbar(m+1)}\right) + \dots$$

$$= E_n^{(0)} + \frac{(l-m)(l+m+1)}{4B\hbar} + \frac{(l+m)(l-m+1)}{-Bm\hbar} + \dots$$

$$= \left(A\hbar^2 l(l+1) + Bm\hbar\right) + \left(\frac{C^2\hbar m}{2B}\right) + \dots$$

صفحه بعد.

[" 5.23(b)]

(i) می‌توان با توجه به عنصر ماتریسی زیر گفت باید $\Delta l = 0, \pm 2$ و $\Delta m_l = 0$ و $\Delta m_s = 0$ باشد تا پاسخ غیر صفر داشته باشیم.

$$\langle n' l' m_l' m_s' | (3z^2 - r^2) | n l m_l m_s \rangle.$$

* ابتدا عنصر فوق را با توجه به $3z^2 - r^2 = 3r^2\cos^2\theta - r^2 = r^2(3\cos^2\theta - 1) = r^2\left(\frac{16\pi}{5}\right)^{\frac{1}{2}} Y_2^0$ بازنویسی می‌کنیم:

$$\langle n'l'm_l'm_s' | r^2 \left(\frac{16\pi}{5}\right)^{\frac{1}{2}} Y_2^0 | n l m_l m_s\rangle$$

با توجه به اینکه Y_2^0 را می‌توان $T_{q=0}^{k=2}$ نامید، با توجه به قاعده‌ی گزینش m، تنها زمانی عنصر فوق جواب غیر صفر دارد که $m = m'$ باشد؛ از این رو $\Delta m_l = 0$ و به همین صورت طبق قضیه‌ی ویگنر اکارت

باید $|l-2| \le l' \le l+2$ باشد. اما چون Y_2^0 تحت پاریته زوج است و به هر حالت پاریته $(-1)^l$ است باید $\Delta l \neq \pm 1$ باشد تا پاریته‌ی حالت‌ها با Y_2^0 یکسان باشد. لذا $\Delta l = 0, \pm 2$.

همچنین چون Y_2^0 هیچ شرطی اسپینی ندارد، $\Delta m_s = 0$ صادق است.

(ii) می‌توان با توجه به عنصر ماتریسی زیر گفت باید $\Delta l = 0, \pm 2$، $\Delta m_l = \pm 2$، $\Delta m_s = 0$ باشد تا پاسخ داشته باشد:

$$\langle n'l'm_l'm_s' | xy | n l m_l m_s\rangle$$

* ابتدا با توجه به $xy = r\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi \propto \sin^2\theta\sin 2\phi$ یا به عبارتی $xy \propto (Y_2^2 - Y_2^{-2})$، عنصر ماتریسی را بازنویسی می‌کنیم:

$$\langle n'l'm_l'm_s' | (Y_2^2 - Y_2^{-2}) | n l m_l m_s\rangle$$

$$H=\frac{\vec{P}^2}{2m}+V(\vec{x})$$

2.7 – برای ذره‌ای سه‌بعدی با هامیلتونی مقابل:

مطلوب است محاسبه‌ی $[\vec{x}\cdot\vec{p},H]$:

$$[\vec{x}\cdot\vec{p},H]=[\vec{x}\cdot\vec{p},\frac{\vec{p}^2}{2m}+V(\vec{x})]=\sum_{i,j}[x_ip_i,\frac{1}{2m}p_jp_j+V(x)]$$

$$=\frac{1}{2m}\sum_{i,j}[x_ip_i,p_jp_j]+\sum_i[x_ip_i,V(x)]$$

$$=\frac{1}{2m}\sum_{i,j}(x_i\overbrace{[p_i,p_jp_j]}^{\text{صفر}}+[x_i,p_jp_j]p_i)+\sum_i(x_i[p_i,V(x)]+\overbrace{[x_i,V(x)]}^{\text{صفر}}p_i)$$

$$=\frac{1}{2m}\sum_{i,j}(p_j[x_i,p_j]p_i+[x_i,p_j]p_jp_i)+\sum x_i[p_i,V(x)]$$

$$=\frac{1}{2m}\sum_{i,j}(i\hbar\,\delta_{ij}p_jp_i+i\hbar\,\delta_{ij}p_jp_i)+\sum x_i(-i\hbar\frac{\partial V}{\partial x_i})$$

$$=\frac{i\hbar}{2m}\sum_{i,j}2p_jp_i\delta_{ij}-i\hbar\sum_i x_i\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}=i\hbar\frac{p^2}{m}-i\hbar\,\vec{x}\cdot\vec{\nabla}V$$

حال با توجه به تحول سیستم در تصویر هایزنبرگ، برای عملگر $\vec{x}\cdot\vec{p}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt}(\vec{x}\cdot\vec{p})=\frac{1}{i\hbar}[\vec{x}\cdot\vec{p},H]\overset{\text{از فوق}}{=\!=}\frac{p^2}{m}-\vec{x}\cdot\vec{\nabla}V$$

با نوشتن معادله‌ی فوق به صورت مقدار چشمداشتی خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\langle x\cdot p\rangle=\langle\frac{p^2}{m}\rangle-\langle\vec{x}\cdot\vec{\nabla}V\rangle$$