فصل چهارم - تقارن‌ها

تقارن‌ها در فیزیک کلاسیک، مدل‌های اساسی هستند مانند QED، QCD و Weak که از تقارن‌ها حاصل می‌شوند و حتی در فیزیک ماده چگال تقارن‌های شکسته در بلورها و ... مهم‌اند. در این فصل نیز به اهمیت تقارن در QM می‌پردازیم.

- تقارن از دید کلاسیک:

- یک سیستم کلاسیکی را با n مختصات تعمیم یافته یا n درجه آزادی با وابستگی زمانی صریح را می‌توان با لاگرانژین توصیف کرد $\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)$

یادآوری می‌کنیم که معادله حرکت از معادلات اویلر - لاگرانژ به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

که در آن $P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ می‌باشد.

- همین‌طور با داشتن $\mathcal{L}$ می‌توان H را حساب کرد با یک تبدیل لژاندر به این صورت:

$$d\mathcal{L} = \sum_i \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}dq_i + \overbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}^{=P_i}d\dot{q}_i\Big) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt \qquad (1)$$

$$" = \sum_i \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}dq_i + d(p_i\dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i\Big) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

با جابجا کردن عبارات می‌توان نوشت:

$$d(p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}) = \sum_i \Big[\Big(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\Big)dq_i + \dot{q}_i dp_i\Big] + \Big(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\Big)dt$$

حال می‌توان تعریف کرد:

$$H \equiv p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}$$

یا به صورت کلی‌تر مرسوم است بنویسیم که به تبدیل لژاندر معروف است:

$$H = -\left(\mathcal{L} - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

حال چون که H نیز تابعی از q_i، p_i و t می‌باشد می‌توان نوشت:

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad \text{(II)}$$

حال با مقایسه (I)، (II) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

- اگر $\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ باشد، می‌توان گفت: p_i ثابت است. از این "تقارن" تعبیر می‌کنیم از چنین حالتی. چرا که:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \overset{E-L}{=} -\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{= p_i} = -\frac{d}{dt} p_i = 0 \longrightarrow p_i = cte.$$

- اگر $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$ باشد می‌توان گفت H ثابت است لذا "تقارن" خواهیم داشت. چرا که:

از عبارت (II) در $\frac{1}{dt}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \sum_i \left(-\cancel{\dot{p}_i \dot{q}_i} + \cancel{\dot{q}_i \dot{p}_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

لذا معادل است که $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$ و اگر $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ باشد، H ثابت می‌شود.

- تقارن در مکانیک کوانتومی.

○ همانطور که دیدیم، می‌توان یک اپراتور تبدیل را به صورت کلی نوشت:

$$S = e^{-\frac{i}{\hbar} a G} \xrightarrow[\text{بینهایت}]{\text{تبدیل کوچک}} 1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon G$$

(که باید $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$ یکانی باشد)

که باید هرمیتی باشد

که در آن G مولد تبدیل و a (ϵ در حالت بی‌نهایت کوچک) مقدار تبدیل است.

○ حال می‌توان «تقارن» را به این صورت تعریف کرد که $[S,H]=0$ یا $SH=HS$ یا به عبارتی $S^\dagger H S = H$ شود.

در این صورت می‌توان گفت H تحت تبدیل ناوردا باقی می‌ماند. و به چنین تبدیلی «اپراتور تقارن» گفته می‌شود.

○ واضح است که چون $S \propto G$، در صورتی که تقارن داشته باشیم، $[S,H]=0$ پس حتما $[G,H]=0$ خواهد بود.

به صورت ریاضی می‌توان این را نمایش داد:

$$S^\dagger H S = H \longrightarrow \lim_{N'\to\infty}\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{i}{\hbar}\frac{a}{N}G\right)^{N'} H \left(1-\frac{i}{\hbar}\frac{a}{N}G\right)^{N} = H.$$

اگر جملات داخل پرانتز را باز کنیم و فقط واضح‌ترین عبارت‌ها را در نظر بگیریم باید عبارت زیر را داشته باشیم:

$$\left(1+\frac{i}{\hbar}\epsilon G\right) H \left(1-\frac{i}{\hbar}\epsilon G\right) = H.$$

$$1+\frac{i}{\hbar}\epsilon [G,H] + O(\epsilon^2) = H.$$

پس باید $[G,H]=0$ باشد.

• در صورت برقرار بودن تقارن تحت اپراتور تبدیل G دیدیم که $[G,H]=0$ برقرار شود. حال در صورتی که $\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)=0$ باشد،

می‌توان گفت G ثابت می‌ماند. و اینها همان نتیجه‌ی «تقارن» در مکانیک کلاسیک می‌باشد. چرا که:

$$\frac{dG^H}{dt} \xrightarrow[\text{هایزنبرگ}]{\text{تصویر}} \frac{1}{i\hbar}\cancel{[G^H, H]}^{\,0} + \cancel{\left(\frac{\partial G^S}{\partial t}\right)^H}^{\,0} = 0 \longrightarrow G^H = cte.$$

* مثلا تحت تبدیل جابجایی، H ناوردا می‌ماند بنابراین P که مولد جابجایی است بقا دارد.

* مثلا تحت تبدیل تحول زمانی، H ناوردا می‌ماند بنابراین H که مولد تحول زمانی است بقا دارد.

* مثلا تحت تبدیل دوران، H ناوردا می‌ماند، بنابراین L که مولد تحول دوران است بقا دارد.

• قضیه: با توجه به اینکه مولد تبدیل هرمیتی است می‌تواند معادله ویژه مقدار را تشکیل دهد که ویژه مقادیر حقیقی و ویژه توابع کامل اند.

این ویژه مقادیر بعد از تحول زمانی نیز، ویژه مقادیر سیستم تحول یافته باقی می‌مانند اگر و تنها اگر مولد مربوط به اپراتور تقارن باشد.

«ویژه مقادیر G در طول زمان ثابت می‌ماند اگر G اپراتور تقارن باشد»

* اثبات: اگر فرض کنیم قبل تحول زمانی داریم:

$$G|g',t_0\rangle = g'|g',t_0\rangle \quad ①$$

بعد از تحول زمانی می‌توان نوشت:

$$G|g',t_0;t\rangle = G\,U(t,t_0)|g',t_0\rangle$$

با توجه به اینکه مولد G مربوط به اپراتور تقارن است $[G,H]=0$ و چون $U \propto H$، $[G,U]=0$ خواهد بود بنابراین:

$$G|g',t_0;t\rangle = U(t,t_0)\underbrace{G|g',t_0\rangle}_{=g'|g',t_0\rangle \text{ با توجه به ①}} = g'\overset{\text{عددهاست}}{\underbrace{U|g',t_0\rangle}_{=|g',t_0;t\rangle}} = g'|g',t_0;t\rangle.$$

$$G|g',t_0;t\rangle = g'|g',t_0;t\rangle.$$

بنابراین ویژه مقادیر ثابت ماند.

- تبهگنی

در صورتیکه S اپراتور [تبدیل] تقارن باشد. $S|n\rangle$ و $|n\rangle$ اگر قابل تمایز باشد، تبهگنی خواهند بود. چرا که:

معادله ویژه مقداری H را داریم:

$$H|n\rangle = E_n |n\rangle$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$H(S|n\rangle) \overset{[H,S]=0}{=\!=\!=} S(H|n\rangle) = E_n (S|n\rangle)$$

بنابراین تبهگنی داریم.

می‌توان گفت در کل:

« تبهگنی می‌تواند نشانه‌ای از وجود تقارن باشد »

○ مثال: تبدیل دوران $D(R)$ که مولدش L است. تقارن داریم چرا که $[D(R), H]=0$ است.

بنابراین انتظار داریم شاهد تبهگنی $D|n\rangle$ و $|n\rangle$ باشیم.

* مثلا برای m های مختلف در P $(l=1)$ که $m=-1,0,1$ باشد، انرژی‌ها تبهگن می‌باشند.

تقارن مذکور یادآوری می‌کنیم که تقارن $SO(3)$ می‌باشد.

○ مثال: وجود تقارن SO(4) برای پتانسیل کولنی (گرانشی) باعث ثابت بودن مدار بیضی سیارات می‌شود.

اثبات: برای پتانسیل مرکزی با توجه به اینکه $V(r)\propto\frac{1}{r}$ ، هامیلتونی می‌شود:
$$H=\frac{p^2}{2m}+V(r)$$

حال سؤال می‌کنیم: $\frac{d}{dt}\{\vec{P}\times\vec{L}\}$ را. اما ابتدا مقادیر زیر را حساب می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}=\vec{\tau}=\dot{\vec{r}}\times\vec{p}=\vec{r}\times(-\vec{\nabla}V(r))=\vec{r}\times(-\hat{r}\frac{dV}{dr})=0$$

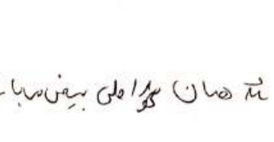
$$\dot{\vec{P}}\times\vec{L}=-\frac{dV}{dr}\hat{r}\times\{r\times(m\dot{\vec{r}})\}=-\frac{m}{r}\frac{dV}{dr}\{r\underbrace{(r\cdot\dot{r})}_{r\dot{r}}-r^2\dot{r}\}$$

با استفاده از دو عبارت فوق:
$$\frac{d}{dt}\{\vec{P}\times\vec{L}\}=\frac{m}{r}\frac{dV}{dr}r^3\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r}-\frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2}\right)=m\frac{dV}{dr}r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

با توجه به اینکه $V(r)=-\frac{Ze^2}{r}$ ، می‌توان گفت $\frac{dV}{dr}=+\frac{Ze^2}{r^2}$ بنابراین:

$$\frac{d}{dt}\{\underbrace{\frac{1}{m}\vec{P}\times\vec{L}-\frac{Ze^2}{r}\vec{r}}_{\equiv\vec{M}}\}=0\longrightarrow\vec{M}=cte.$$

$\equiv\vec{M}$; The Laplace-Runge-Lenz vector.



و این $\vec{M}$ همان بردار اصلی بیضی می‌باشد که اندازه و جهتش ثابت می‌ماند و هیچ حرکت تقدیمی را انجام نمی‌دهد.

* توجه شود که اگر $V\propto\frac{1}{r}$ لازم نشد، این اتفاق نمی‌افتد و به این علت، در نسبیت عام مدار سیاره‌ها به خاطر تصحیحاتی $V\propto\frac{1}{r}$ و این بیضی حضیضش جابجا می‌شود.

◦ مثال: به علت تقارن SO(4) است که در هر تراز انرژی l های مختلف یکسان می‌باشد.

اثبات: حال ابتدا $\vec{M}$ را در مکانیک کوانتومی می‌سازیم، توجه شود که فرم متقارن را بسازیم:

به علت × بودن منفی شد.

$$M = \frac{1}{2m}\left(P\times L - L\times P\right) - \frac{Ze^2}{r}\vec{r}$$

هم هرمیتی است.

لذا با توجه به اینکه $[L,H]=0$، می‌توان دید که $[M,H]=0$ است پس اپراتور متقارن است.

- از طرف دیگر می‌توان روابط زیر را نشان داد:

$$[L_i,L_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \quad ; \quad [M_i,L_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}M_k \quad ; \quad [M_i,M_j]=-i\hbar\epsilon_{ijk}2HL_k$$

* توجه شود که $[L_i,M_j]$ را بدون محاسبه نیز می‌دانستیم با توجه به اینکه M_j، اپراتور برداری است جواب می‌دهیم.

+ توجه شود که آنچه در $[M_i,M_j]$، H ظاهر می‌شود، سه رابطه جابجایی جبر بسته‌ای را تشکیل می‌دهند (یعنی فقط شامل خودشان می‌شوند ولی H کار را کمی خراب می‌کند. ولی ما توجه به اینکه $[L,H]=0$ و $[M,H]=0$ است.

چندان نگران نیستیم و جای H، ویژه‌مقدارش یعنی E را قرار می‌دهیم.

- برای حالت‌های مقید که $E<0$ است تعریف می‌کنیم:

$$N = \left(-\frac{m}{2E}\right)^{\frac{1}{2}}\vec{M}$$

+ توجه شود چون حالات مقید هستند ($E<0$)، عبارت زیر رادیکال مثبت می‌باشد.

- آیا روابط جابجایی را می‌توان بازنویسی کرد (برای حالات مقید)؟

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k \; ; \; [N_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} N_k \; ; \; [N_i, N_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} L_k$$

و این جبر ۶ مولد دوران در چهار بعد یا به عبارتی گروه $SO(4)$ می‌باشد.

- همینطور با تعریف $\vec{I} = \frac{1}{2}(\vec{L}+\vec{N})$ و $\vec{K} = \frac{1}{2}(\vec{L}-\vec{N})$ روابط جابجایی را می‌توان بازنویسی کرد (برای حالات مقید):

$$[I_i, I_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} I_k \; ; \; [K_i, K_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} K_k \; ; \; [I_i, K_j] = 0$$

و این جبر دو مولد $SU(2)$ می‌باشد. و به عبارتی می‌توان گفت $SO(4) = SU(2)\times SU(2)$.

- حال چون I و K مولدهای $SU(2)$ هستند و $[I_i, K_j]=0$ (ویژه‌توابع مشترک دارند) پس می‌توان نوشت:

$$I^2|i,k\rangle = i(i+1)\hbar|i,k\rangle \; ; \; K^2|i,k\rangle = k(k+1)\hbar^2|i,k\rangle$$

- و می‌توان مقدار ذیل را حساب کرد:

$$I^2 - K^2 = \frac{1}{4}(L^2+N^2+\cancel{L\cdot N}+\cancel{N\cdot L}) - \frac{1}{4}(L^2+N^2-\cancel{L\cdot N}-\cancel{N\cdot L}) = 0$$

پس حتما $i=k$ است چرا که عبارت فوق را به شکل ویژه مقدار بنویسیم داریم:

$$i(i+1)\hbar^2 = k(k+1)\hbar^2$$

- حال مقدار زیر را حساب می‌کنیم.

$$I^2+K^2=\frac{1}{2}\left(L^2+N^2\right)=\frac{1}{2}\left(L^2-\frac{m}{2E}M^2\right)$$

حال اگر ویژه مقدارها را بنویسیم و توجه کنیم که $i=k$ است:

$$2k(k+1)\hbar^2=\frac{1}{2}\left(-\hbar^2-\frac{m}{2E}Z^2e^4\right)$$

بنابراین مقادیر انرژی‌ها را بدست آورد (بدون حل معادله دیفرانسیل!):

$$E=-\frac{mZ^2e^4}{2\hbar}\frac{1}{\underbrace{(2k+1)^2}_{\equiv n}}=-\frac{mZ^2e^4}{2\hbar}\frac{1}{n^2}$$

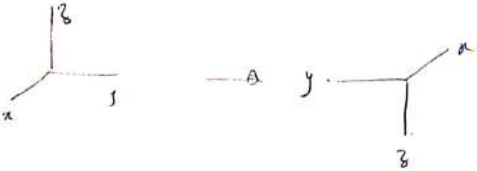
همچنین با توجه به اینکه $SU(2)$ دارای $(2l+1)$ تبهگنی است (مثال ص۶) بنابراین برای دو گروه $SU(2)$ داریم $(2l+1)^2$ تبهگنی خواهد بود که با توجه به تعریف $2l+1\equiv n$، می‌توان گفت n^2 تبهگنی داریم!

* این همان تبهگنی l‌های مختلف در یک تراز می‌باشد مثلاً 2s و 2p.

- اپراتور گسسته: پاریته یا وارون فضایی.

• در حالت passive چنین تبدیلی را که وارون فضای پاریته را با تبدیل (x,y,z) به $(-x,y,-z)$ تعریف می‌کنیم.

* چنین تبدیلی واضح است که دستگاه راست دست تبدیل به دستگاه چپ دست می‌شود:



• در حالت active کت معرف فیزیکی تبدیل شود را با Π نشان داده و به صورت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$|\alpha\rangle_p = \Pi\,|\alpha\rangle$$

که در آن Π خصوصیات زیر را باید داشته باشد:

۱- یکانی باشد $(\Pi^\dagger = \Pi^{-1})$: چراکه می‌خواهیم نرم $|\alpha\rangle$ بعد از تبدیل تغییر نکند.

2. $\{\Pi, \vec{X}\} = 0$ یا $\Pi^\dagger \vec{X}\,\Pi = -\vec{X}$: چراکه می‌خواهیم عبارت ذیل برقرار باشد:

$${}_p\langle\alpha|\,\vec{X}\,|\alpha\rangle_p = \langle\alpha|\Pi^\dagger \vec{X}\,\Pi|\alpha\rangle = -\langle\alpha|\vec{X}|\alpha\rangle$$

3. با توجه به خاصیت (2)، می‌توان نشان داد $\Pi|\vec{x}'\rangle = e^{i\delta}|-\vec{x}'\rangle$، چراکه:

$$\left.\begin{aligned} \vec{X}(\Pi\,|\vec{x}'\rangle) &= \Pi\,\vec{X}\,|\vec{x}'\rangle = -\vec{x}'\,(\Pi\,|\vec{x}'\rangle) \\ \vec{X}\;|-\vec{x}'\rangle &= -\vec{x}'\;|-\vec{x}'\rangle \end{aligned}\right\}\ \Pi|\vec{x}'\rangle \propto |-\vec{x}'\rangle$$

که ما به سادگی تعریف می‌کنیم $\delta = 0$.

• ب ـ ۳ سوال ۲ با توجه به خصوصیات های تعریف شده برای Π می‌توان نشان داد ویژگی بعدی، هرمیتی بودن است $\Pi^{\dagger} = \Pi$.

چرا که انتظار داریم بعد از دو بار وارون فضایی کردن، به خودش برگردد:

$$\Pi^2 |\vec x'\rangle = \Pi\, |-\vec x'\rangle = |\vec x'\rangle$$

به عبارتی $\Pi^2 = \mathbb{1}$ یا $\Pi = \Pi^{-1}$؛ از طرفی می‌دانیم یکانی است پس $\Pi^{\dagger} = \Pi^{-1}$ پس $\Pi^{\dagger} = \Pi$

• با توجه به خصوصیات Π، می‌توان نشان داد که $\{\Pi, \vec P\} = 0$ یا $\underbrace{\Pi}_{=\Pi^{\dagger}} \vec P \Pi = -\vec P$ است همانند $\vec x$. چرا که برای هر $|\alpha\rangle$ دلخواه می‌توان نوشت:

$$\langle \vec x' | \{P, \Pi\} | \alpha\rangle = \langle \vec x' | \vec P \Pi + \Pi \vec P | \alpha\rangle = -i\hbar \vec\nabla \langle \vec x' | \Pi \alpha\rangle + \langle -\vec x' | \vec P | \alpha\rangle$$

$$= \left(-i\hbar \vec\nabla' + i\hbar \vec\nabla'\right) \langle -\vec x' | \vec P\rangle = 0$$

• با توجه به خصوصیات Π، می‌توان نمایش داد که $[\Pi, L] = 0$ یا $\Pi \vec L \Pi = \vec L$ است چرا که $\vec L$ یک شبه بردار می‌باشد.

$$\Pi \vec L \Pi = \Pi (\vec x \times \vec P) \Pi = \underbrace{\Pi \vec x \Pi}_{=-\vec x} \times \underbrace{\Pi \vec P \Pi}_{=-\vec P} = \vec x \times \vec P = \vec L$$

★ به عنوان مثال در فضای اقلیدسی سه بعدی با توجه به این که $\Pi = R^{\circ} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$ ، $L = R(\hat n, \theta)$ ، واقع است، چون $\Pi \propto \mathbb{1}$،

می‌توانند با همه اپراتورها جابجا شود از جمله دوران

• با توجه به اینکه Π هم هرمیتی و هم یکانی می‌باشد، لذا ویژه مقادیرش ± 1 خواهد بود.

• پس تابع موج حالت دلخواه $|\alpha\rangle$ تحت پاریته به صورت ذیل تبدیل می‌شود:

$$\psi_{\alpha_p}(\vec{x}') = \langle \vec{x}'|\alpha\rangle_p = \langle \vec{x}'|\Pi|\alpha\rangle = \langle -\vec{x}'|\alpha\rangle = \psi_\alpha(-\vec{x}') \quad (1)$$

• تابع موج یک حالت پاریته، یا زوج است یا فرد:

$$\psi_\alpha(-\vec{x}) = \pm\,\psi_\alpha(\vec{x})$$

چراکه اگر حالتی باشد که ویژه حالت پاریته باشد، داریم:

$$\Pi|\alpha\rangle = \pm|\alpha\rangle$$

به عبارتی:

$$|\alpha\rangle_p = \pm|\alpha\rangle$$

حال اگر طرفین را در $\langle\vec{x}'|$ ضرب کنیم:

$$\psi_{\alpha_p}(\vec{x}') = \pm\,\psi_\alpha(\vec{x}')$$

از معادله (1) نیز داریم $\psi_\alpha(-\vec{x}') = \psi_{\alpha_p}(\vec{x}')$ بنابراین:

$$\psi_\alpha(-\vec{x}') = \pm\,\psi_\alpha(\vec{x}')$$

* به عنوان مثال می‌دانیم تابع موج ذره آزاد که همان تابع موج تکانه است به صورت ذیل است:

$$\langle\vec{x}'|\pm\vec{p}'\rangle = \exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}\vec{p}'\cdot\vec{x}'\right).$$

واضح است که تابع فوق زوج یا فرد نیست بنابراین طبق گفته‌های قبل چنین حالتی ویژه حالت پاریته نیست.

(لازم به ذکر است که از آنجایی که دیدیم $\{\Pi,\vec{P}\}=0$ است مشخص بود که پاریته و تکانه ویژه حالت مشترک ندارند)

- با توجه به $[\Pi,\vec{L}]=0$ ، Π, L_z, L^2 ویژه حالات مشترک خواهند داشت که تحت پاریته به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\Pi\,|\alpha, lm\rangle = (-1)^l\,|\alpha, lm\rangle$$

چرا که می‌توان نوشت تابع موج مبنی ویژه حالات مشترک تحت پاریته به صورت زیر می‌شود:

$$\psi^m_{\alpha_p, l}(\vec{x}') = \langle \vec{x}' | \alpha, lm\rangle_p = \langle \vec{x}' | \Pi | \alpha, lm\rangle = \langle -\vec{x}' | \alpha, lm\rangle = \psi^m_{\alpha, l}(-\vec{x})$$

$$= R_\alpha(r')\,Y_l^m(\pi-\theta', \varphi'+\pi) = (-1)^l R_\alpha(r')\,Y_l^m(\theta', \varphi') = (-1)^l \langle \vec{x}' | \alpha, lm\rangle = (-1)^l \psi^m_{\alpha, l}(\vec{x}')$$

- قضیه: در صورتی که $[\Pi, H]=0$ باشد، ویژه حالت مشترک H, Π همان $|n\rangle$ ، ویژه حالت H با انرژی E_n خواهد بود اگر ... غیر تبهگن باشد

چرا که $\frac{1}{2}(1\pm\Pi)|n\rangle$ ویژه حالت Π هر با ویژه مقادیر ± 1 :

$$\Pi\left\{\frac{1}{2}(1+\Pi)|n\rangle\right\} = \pm\left\{\frac{1}{2}(1+\Pi)|n\rangle\right\}$$

همچنین این حالت ویژه H با ویژه مقدار E_n هم باشد چون $[\Pi, H]=0$ فرض شده:

$$H\left\{\frac{1}{2}(1+\Pi)|n\rangle\right\} = E_n\left\{\frac{1}{2}(1+\Pi)|n\rangle\right\}.$$

از طرف دیگر اگر همچنین $|n\rangle$ غیر تبهگن باشد باید $\frac{1}{2}(1+\Pi)|n\rangle$ و $|n\rangle$ جدا از یک ثابت برابر باشند و مربوط به یک حالت باشند چون

$$H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle$$

پس صرف نظر از یک ثابت چون $\frac{1}{2}(1\pm\Pi)|n\rangle$ ، ویژه حالت Π بود ، پس $|n\rangle$ نیز ویژه حالت Π باشد.

* به عنوان مثال برای نوسانگر هماهنگ ساده که $[\Pi, H]=0$ است، ویژه‌حالات حالت پایه چون شکل گاوسی دارد، زوج است.

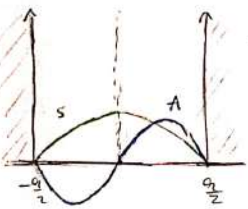
و حالت اولیه‌ی برانگیخته $|1\rangle$ چون $a^{\dagger}$، به صورت تابع خطی $\hat{x}, \hat{p}$ است که خود هستند

فرد می‌باشد لذا $|1\rangle$ فرد می‌شود و برای مراتب بالاتر نیز به همین صورت با $(-1)^n$ مشخص می‌شود.

(توجه شود که تابع موج فرد در مرکز صفر می‌باشد ولی اینجا به معنای این نیست که احتمال پیدا شدن ذره در یک طرف چاه مکان

بیشتر است چرا که احتمال با $|\psi|^2$ داده می‌شود.)

* برای چاه پتانسیل نیز چون پتانسیل متقارن است $[\Pi, H]=0$ و البته غیرتبهگن است بنابراین ویژه حالت‌ها

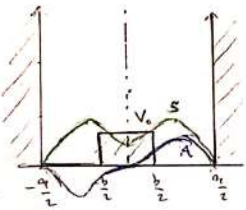


همانطور که قبلاً حل کردیم به ترتیب زوج و فرد بوده و ویژه حالت Π می‌باشند.

در اینجا پایین‌ترین‌ها را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$E_S = E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2} \quad , \quad E_A = E_2 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{4\pi^2}{a^2}$$

* برای چاه پتانسیل دوقله نیز پتانسیل متقارن است لذا $[\Pi, H]=0$. ویژه توابع در سد، کاهشی می‌باشند تا به صفر میل کنند



لذا به صورت مقابل داریم. بعداً مشخص است نقاط انتهای تابع موج غیرتبهگن است.

بنابراین ویژه حالت‌های $|S\rangle$ و $|A\rangle$، ویژه حالت‌های زوج و فرد و ویژه حالت Π هستند.

در این حالت می‌توان حالت‌هایی را تعریف کرد که $|R\rangle$ در راست بیشتر جایگزیده باشد و $|L\rangle$ در چپ:

$$|R\rangle = \frac{1}{2}(|S\rangle + |A\rangle) \quad ; \quad |L\rangle = \frac{1}{2}(|S\rangle - |A\rangle)$$

توجه شود که $|L\rangle$ و $|R\rangle$ چون زوج یا فرد نیستند، ویژه حالت پاریته نیستند و همچنین ویژه حالت H نمی‌باشند.

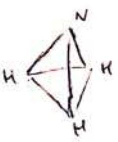
حال به عنوان مثال اگر ذره را در $|R\rangle$ آماده کنیم یعنی اگر سیستم در $t_0=0$ در $|R\rangle$ قرار گرفته باشد:

$$|R, t_0=0; t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_S t/\hbar}|S\rangle + e^{-iE_A t/\hbar}|A\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_S t/\hbar}\left(|S\rangle + e^{-i(E_A-E_S)t/\hbar}|A\rangle\right)$$

بنابراین واضح است که با گذشت زمان با نوسان ذیل بین $|R\rangle$ و $|L\rangle$ نوسان می‌کند:

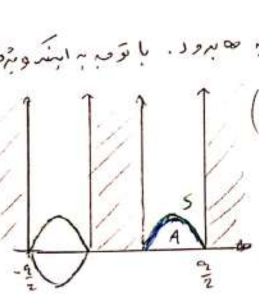
$$\omega = \frac{(E_A - E_S)}{\hbar}$$

اینجا یعنی پتانسیل به عنوان مثال در NH_3، مولکول آمونیاک، که ساختار هرم‌گونه دارد وجود دارد، یعنی سد پتانسیلی، همان اثر الکترونها، اتم‌های H می‌باشد و به صورت مثلث اتم N بین صفحه H ها نوسان می‌کند.



و نوسان که حاصل اختلاف انرژی ... است برابر 24000 MHz رابطه که طول موجی برابر با 1cm افقی ... micro ایجاد می‌کند که در ساخت میزرها کاربرد دارد.

* به عنوان مثال اگر ارتفاع پتانسیل دوچاهه‌ای را با $V_0 \to \infty$ مشخص کنیم که به آرامی به ∞ برود. با توجه به اینکه ویژه‌تابع هر سه صفر می‌شوند، انرژی‌های یکسانی خواهند داشت $\left(E_A = E_S = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{(\frac{a-b}{2})^2}\right)$ لذا تبهگن می‌شوند.

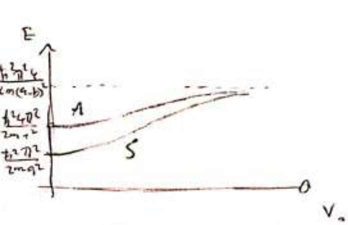


بنابراین دیگر $|A\rangle$ و $|S\rangle$ ریشه حالت های π نخواهند بود.

پس بدیهی است که اگر ذره‌ای در $|R\rangle$ باشد، تغییر نوسان $\omega=0$ خواهد بود و همواره همانجا خواهد ماند چرا که $E_S=E_A$ می‌باشد.

در اینجا نمونه‌ای از شکست خود به خودی تقارن را شاهد بودیم که به علت اینکه V_0 ... اتفاق افتاد.

همچنین مقدار انرژی برحسب V_0 نیز مشخص است که نمایش داده شود:



[Sakurai 3rd ed 4.6 سوال]

• تک اپراتور فرد بین دو حالت که پاریته‌شان یکسان باشد، صفر می‌شود.

چرا که اگر فرض کنیم $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ ویژه‌حالت‌های Π باشند به صورت زیر (که $\varepsilon_{\alpha,\beta}=\pm1$):

$$\Pi\,|\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha\,|\alpha\rangle \quad ; \quad \Pi|\beta\rangle = \varepsilon_\beta|\beta\rangle$$

حال سؤال این است که مثلاً تک اپراتور فرد مانند $\vec{x}$، بین این دو حالت چه می‌شود:

$$\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle = \underbrace{\langle\beta|\Pi}_{=\varepsilon_\beta^*\langle\beta|}\overbrace{\underbrace{\Pi^{\dagger}}_{=\Pi^{-1}}\ \vec{x}\ \Pi}^{=-\vec{x}}\underbrace{\Pi^{\dagger}\Pi\,|\alpha\rangle}_{=\varepsilon_\alpha|\alpha\rangle} = -\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle$$

اگر $\varepsilon_\alpha=\varepsilon_\beta$:

$$\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle = -\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle$$

بنابراین حتماً باید $\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle=0$ باشد.

• توجه شود که پاریته در طبیعت بقا ندارد چرا که در برهم‌کنش ضعیف فقط ذرات چپ‌دست شرکت دارند. (یا پادذرات راست‌دست)

[منظور از راست‌دست بودن (چپ‌دست بودن) یعنی، جهت تکانه خطی و اسپین هم‌راستا (خلاف هم) باشد.]

این موضوع در 1956 توسط سودارشن در زمان دانشجوی دکتری‌اش پیش‌بینی شد و در 1957 در واپاشی بتازای $^{60}_{27}Co$

به $^{60}_{28}Ni$ و e^- و $\bar{\nu}_e$ دیده شد که در حضور میدان مغناطیسی، چون $J_{Co}=5$ ، $J_{Ni}=4$ و $S_e=\frac{1}{2}$ و $S_{\bar{\nu}_e}=\frac{1}{2}$ است.

همواره جهت حرکت $\bar{\nu}$ ها در خلاف جهت $\vec{B}$ می‌باشد و به عبارتی همه $\bar{\nu}$ ها راست‌دست می‌باشند.

- تقارن گسسته : انتقال شبکه

• در ابتدا مجدداً می‌نگریم به عملگر انتقال که به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\tau(l) = e^{-\frac{i}{\hbar} l P_x}$$

که خاصیت این به علت اینکه مولدش تکانه است عملگرها را جابجا می‌کند و $\vec{P}$ را ثابت نگه می‌دارد:

$$\tau^\dagger \vec{x} \tau = \vec{x} + \vec{l} \qquad ; \; \tau |\vec{x}'\rangle = |\vec{x}' + \vec{l}\rangle$$

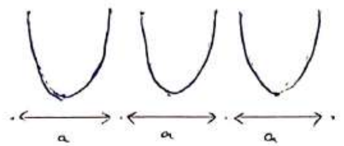
$$\tau^\dagger \vec{P}_x \tau = \vec{P}_x \qquad ; \; \tau |P_x'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} l P_x} |P_x'\rangle$$

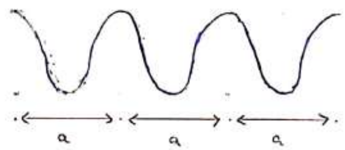
• برای پتانسیل‌های دوره‌ای (مثلاً برای یک بعد $V(x+na)=V(x)$) می‌توان نشان داد که $\tau^\dagger H \tau = H$ یا $[H, \tau] = 0$ اگر و تنها اگر مقدار انتقال برابر دوره پتانسیل (برای مثال $l = na$) باشد. چراکه:

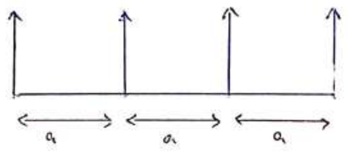
$$\tau^\dagger H \tau = \tau^\dagger(l) \left\{ \frac{1}{2m} P_x^2 + V(x) \right\} \tau(l) = \frac{1}{2m} P_x^2 + V(x+l)$$

از آنجایی که داریم $V(x+na)=V(x)$، اگر $l = na$ باشد حامل H می‌شود و به عبارتی تقارن گسسته داریم.

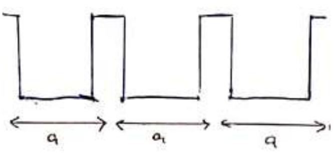
• مثال‌هایی برای چنین پتانسیل‌های یک بعدی را در ذیل نمایش داده‌ام.







Dirac Comb Pot.



Kronig-Penney Pot.

• قضیه‌ی بلاخ (یا بلوخ) برای پتانسیل‌های دوره‌ای با دوره a، تابع موج را اگر در داخل یک سلول تعیین کنیم بتوان با بقیه سلول‌ها

از رابطه‌ی بازگشتی ذیل می‌توان به دست آورد:

$$\psi(x'-a) = e^{-i\theta}\psi(x')$$

که در آن $\psi(x)$ تابع موج حالت ویژه‌ی H مربوط به انرژی E_0.

* برای اثبات ابتدا $|n\rangle$ را یک حالت جایگزیده در داخل سلول n ام تعریف می‌کنیم که اگر انتقال عمل کند می‌شود:

$$H|n\rangle = E_0|n\rangle \quad ; \quad \tau(a)|n\rangle = |n+1\rangle$$

همان‌طور که گفتیم $[H,\tau]=0$ بود لذا ویژه‌حالت مشترک خواهند داشت و داریم $|\theta\rangle$ که به صورت زیر تعریف شده است:

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}|n\rangle$$

چرا که می‌توان دید $|\theta\rangle$ ویژه‌حالت H و τ با ویژه‌مقادیر ذیل است:

$$H|\theta\rangle = H\sum_{-\infty}^{\infty} e^{in\theta}|n\rangle = E_0\sum e^{in\theta}|n\rangle = E_0|\theta\rangle$$

$$\tau(a)|\theta\rangle = \tau(a)\sum e^{in\theta}|n\rangle = \sum e^{in\theta}|n+1\rangle = \sum e^{i(n'-1)\theta}|n'\rangle = e^{-i\theta}|\theta\rangle$$

لذا از معادله ویژه‌مقدار دوم می‌توان با ضرب $\langle x'|$، تابع موج را به دست آورد:

$$\langle x'|\tau(a)|\theta\rangle = e^{-i\theta}\langle x'|\theta\rangle \longrightarrow \langle x'-a|\theta\rangle = e^{-i\theta}\langle x'|\theta\rangle$$

و به دست آمد:

$$\psi(x'-a) = e^{-i\theta}\psi(x')$$

حال توجه شود که اگرچه خود ψها تناوبی نمی‌باشد ولی احتمال $|\psi(x)|^2$ تناوبی می‌باشد به عبارتی:

$$|\psi(x'-a)|^2 = |\psi(x')|^2$$

۴- به عنوان مثالی از کاربرد قضیه‌ی بلاخ (بلوخ) پتانسیل شانه‌ی دیراک (در ص ۱۷) را حل می‌کنیم.

برای ناحیه‌ی اول (مثلاً $0<x<a$) معادله شرودینگر به صورت زیر است، با تعریف $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi$$

که پاسخ عمومی این معادله برابر است با:

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx).$$

با استفاده از قضیه‌ی بلاخ جواب در ناحیه‌ی $-a<x<0$ را می‌توان نوشت، با تعریف $\theta = Ka$:

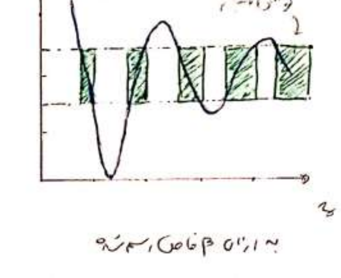
$$\psi(x) = e^{-iKa}\{A\sin(k(x+a)) + B\cos(k(x+a))\}$$

با اعمال شرط پیوستگی ψ در مرز می‌توان به رابطه‌ی زیر رسید:

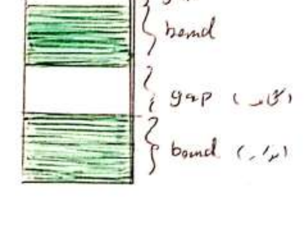
$$\cos(Ka) = \cos(ka) + \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}\sin(ka).$$

این رابطه مقادیر مجاز انرژی (k و E) را مشخص می‌کند چرا که سمت چپ می‌تواند بین ± 1 باشد.

با تعریف متغیر $z=ka$ ، $\beta=\frac{m\alpha a}{\hbar^2}$ ، سمت راست را $f(z)$ رسم می‌کنیم و توجه می‌کنیم که $-1<f(z)<1$ مجاز است.



به ازای β خاص رسم شده



حال به جای بررسی یک الکترون، می‌توان چندین الکترون را داخل شبکه‌ای نظیر پتانسیل چاه دیراک فرض کرد. در این صورت الکترون‌ها فقط در نوارهای انرژی می‌توانند قرار بگیرند (توجه شود که در همه انرژی‌ها تنها یک الکترون قرار می‌گیرد)

در اینصورت اگر تعداد الکترون‌ها به گونه‌ای باشد که:

- یک نوار کاملا پر شده باشد، انرژی بسیار زیادی لازم است که یک الکترون را برانگیخته کرد زیرا آن الکترون باید از روی گاف انرژی بپرد، به چنین اجسامی "نارسانا" گویند.

- چنانچه از یک نوار، انرژی مقدار کمی پر شده باشد انرژی بسیار کمی برای برانگیختن الکترون نیاز است. و به چنین موادی "رسانا" گویند.

- اگر به نارساناهای چند اتم ترکیب که بار کم دارند یا زیاد دارند، بیفزاییم، تعداد الکترون اضافی در نوار بالا قرار می‌دهند و یا حفره‌ها باعث خالی‌تر شدن نوار پایین می‌شوند لذا تبدیل به رسانا می‌شود چنین موادی "نیم‌رسانا" هستند.

• قضیه‌ی بلاخ (اسم شوره‌تی) برای پتانسیل دوره‌ای با c محدود که تقریب تنگ بست بزنیم (یعنی هر سلول با سلول کناری خیلی بتواند نشت کند) رابطه‌ی بازگشتی ذیل را می‌توان بدست آورد. (با تقریب تنگ بست)

$$\psi(m'-m) = e^{-i\theta}\psi(m)$$

که در آن ψ_θ تابع موج ویژه حالت‌ها با انرژی $E_0 - 2\Delta\cos\theta$ می‌باشد.

* در ابتدا تقریب تنگابست را به صورت ذیل بیان می‌کنیم:

$$\langle n'|H|n\rangle \neq 0 \qquad \text{جز} \quad \underbrace{n'=n}_{\text{قطری}} \qquad \text{یا} \quad \underbrace{n'=n\pm 1}_{\text{سلول همسایه}}$$

که در واقع عناصر قطری همان E_0 و عناصر غیرقطری (سلول همسایه) Δ می‌باشد:

$$\langle n|H|n\rangle = E_0 \quad , \quad \langle n\pm 1|H|n\rangle = -\Delta$$

بنابراین اثر H بر سلول n ام اثرات نشت را به صورت ذیل نوشت:

$$H|n\rangle = E_0|n\rangle - \Delta|n+1\rangle - \Delta|n-1\rangle$$

همانطور که گفتیم $[H,\tau(a)]=0$، بنابراین ادعا می‌کنیم که ویژه حالت مشترک $|\theta\rangle$ باشد که به ترتیب زیر بود:

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}|n\rangle$$

چرا که می‌توان دید $|\theta\rangle$ ویژه حالت H، τ با ویژه مقادیر ذیل است:

$$H|\theta\rangle = H\sum_n e^{in\theta}|n\rangle = E_0\sum e^{in\theta}|n\rangle - \Delta\sum e^{in\theta}|n+1\rangle - \Delta\sum e^{in\theta}|n-1\rangle$$

$$= E_0\sum_n e^{in\theta}|n\rangle - \Delta e^{-i\theta}\sum_{n'} e^{in'\theta}|n'\rangle - \Delta e^{i\theta}\sum_{n''} e^{in''\theta}|n''\rangle$$

$$= (E_0 - 2\Delta\cos\theta)\sum_n e^{in\theta}|n\rangle = (E_0 - 2\Delta\cos\theta)|\theta\rangle$$

$$\tau(a)|\theta\rangle = \tau(a)\sum_n e^{in\theta}|n\rangle = \sum_n e^{in\theta}|n+1\rangle = \sum_{n'} e^{i(n'-1)\theta}|n'\rangle = e^{-i\theta}|\theta\rangle$$

لذا اگر معادله ویژه مقدار را در $\langle x'|$ ضرب کنیم تابع موج به دست می‌آید:

$$\psi(x'-a) = e^{-i\theta}\psi(x')$$

- گذری بر عملگرهای تقارنی

• اپراتور تبدیل S فرض می‌کنیم که $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ را به صورت ذیل تبدیل می‌کند:

$$|\tilde{\alpha}\rangle = S|\alpha\rangle \quad , \quad |\tilde{\beta}\rangle = S|\beta\rangle$$

• در صورتی که S، اپراتور تقارن باشد، احتمالات فیزیکی (احتمال) را تغییر نمی‌دهد:

$$|\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle|^2 = |\langle\beta|\alpha\rangle|^2$$

به عبارتی:

$$\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\beta}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle$$

برای برقرار بودن عبارت فوق دو حالت داریم:

(1) عملگر تقارنی یکانی: در این صورت $\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\beta}\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle$ (و مزدوج آن $\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle$) برقرار خواهد بود و رفتار خطی از

این اپراتور انتظار داریم. لذا می‌توان چنین ماتریس تبدیلی را با اپراتور یکانی U نمایش داد. و مجددا چک می‌کنیم:

$$\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\beta|\underbrace{U^{\dagger}U}_{=1}|\alpha\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle$$

* لازم به ذکر است که عملگرهای تقارن چرخشی، انتقال و پاریته، از این نوع بودند.

(2) عملگر تقارنی پادیکانی: در این حالت که $\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\beta}\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^{*}$ (و مزدوج مختلط $\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^{*}$) برقرار باشند و رفتار پادخطی از این

اپراتور تبدیل انتظار داریم، لذا می‌توان چنین ماتریس تبدیلی را با اپراتور پادیکانی $\Theta = UK$، که U یکانی و K اپراتور مزدوج با نمایش ... بسازیم

حال ثابت کردن، $|\tilde{\alpha}\rangle$ ، $\langle\tilde{\beta}|$ را ابتدا مانند رابطه به حسب پایه‌های یک اپراتور هرمیتی بسط می‌دهیم :

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \underset{\text{بنویسیم}}{\Theta|\alpha\rangle} = \Theta \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle |a'\rangle = \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^{*} \underset{=\Theta}{UK} |a'\rangle = \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^{+} UK |a'\rangle$$

از خاصیت ضد خطی Θ آمده
با اثر K است

$$|\tilde{\beta}\rangle \overset{\text{مانند بالا}}{=} \sum_{a'} \langle a'|\beta\rangle^{+} UK |a'\rangle \xrightarrow{DC} \langle\tilde{\beta}| = \sum_{a'} \langle a'|\beta\rangle \langle a'|K^{+}U^{+}$$

$$\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \sum_{a'', a'} \langle a''|\beta\rangle \underbrace{\langle a''| K^{+} \underbrace{U^{+}U}_{=1} K |a'\rangle}_{=\delta_{a'' a'}} \langle\alpha|a'\rangle = \sum_{a'} \underbrace{\langle\alpha|a'\rangle\langle a'|\beta\rangle}_{=1} = \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^{*}$$

خاصیت یکانی.

★ اکنون به عنوان مثال تقارن (اپراتور) وارون زمانی را مطرح می‌کنیم که از این نوع می‌باشد.

— تقارن گسسته: وارون زمانی

• در مکانیک کلاسیک (غیرنسبیتی)، تبدیل $t \to -t$ را که یک تبدیل گسسته است و در ترازنه تقارن سیستم باشد یا نباشد را تبدیل وارون زمان گوییم.

★ به عنوان مثال ذره‌ای را فرض می‌کنیم که نیروی الکترومغناطیسی حس می‌کند به اضافه این مورد معادله حرکت عبارتست:

$$m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{d\vec{x}}{dt} \times (\vec{\nabla}\times\vec{A})\right] - \vec{\nabla} V_s(\vec{x}, t)$$

حال معادله‌ی فوق $\vec{x}(t)$ به دست می‌آید. در صورتی که طی تبدیل $t \to -t$ ، φ, A, V_s به صورت زیر تبدیل شوند.

$$\varphi(\vec{x}, -t) = \varphi(x, t) \quad , \quad A(\vec{x}, -t) = -A(\vec{x}, t) \quad , \quad V_s(\vec{x}, -t) = V_s(\vec{x}, t)$$

در این صورت $\vec{x}(-t)$ نیز پاسخ معادله خواهد بود و به عبارتی تقارن وارون زمانی خواهیم داشت.

لازم به ذکر است که همچنین تبدیل φ و A مطابق و سازگار با معادلات ماکسول است، طوری که تحت این تبدیلات:

$$E(\vec{x}',-t) = E(\vec{x}',t) \quad , \quad B(\vec{x}',-t) = -B(\vec{x}',t)$$

$$\rho(\vec{x}',-t) = \rho(\vec{x}',t) \quad , \quad \vec{j}(\vec{x}',-t) = -\vec{j}(\vec{x}',t)$$

بنابراین معادلات ماکسول که در ذیل آمده بدون تغییر خواهند ماند.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \;;\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \;;\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \;;\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$

- در مکانیک کوانتومی (غیرنسبیتی) با الهام از مکانیک کلاسیک می‌خواهیم اپراتور وارون زمان را بسازیم. بنابراین معادله حرکت را در حضور نیروی الکترومغناطیسی می‌نویسیم تا کمک کند:

$$i\hbar\,\partial_t \psi(\vec{x}',t) = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\vec{\nabla}' - \frac{ie}{\hbar c}\vec{A}(\vec{x}',t)\right]^2 + e\,\varphi(\vec{x}',t) + V_s(\vec{x}',t)\right\}\psi(\vec{x}',t)$$

لذا واضح است که علاوه بر تبدیل A و φ حین $t \to -t$ به صورت قبل، لازم است که کل معادله مزدوج شود تا در کنار $\psi(\vec{x}',t)$ که پاسخ معادله فوق است $\tilde{\psi}(\vec{x}',t) \equiv \psi^*(\vec{x}',-t)$ پاسخ معادله ذیل باشد.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\vec{x}',-t) = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\vec{\nabla}' - \frac{ie}{\hbar c}A(\vec{x}',t)\right]^2 + e\,\varphi(\vec{x}',t) + V_s(\vec{x}',t)\right\}\psi^*(\vec{x}',-t)$$

- بنابراین چنین اپراتور تبدیلی باید در کنار تبدیل $t \to -t$، مزدوج کند و به عبارتی چنانچه در بخش قبل دیدیم، می‌توان گفت اپراتور تبدیل باید، اپراتور تبدیل پادیکانی باشد که به صورت Θ نمایش می‌دهیم.

• اگر دینامیک سیستم (حرکت) تحت وارون زمانی متقارن باشد، داریم $[H,\Theta]=0$.

برای اثبات این موضوع، حالتی را اختیار کرده و ابتدا تبدیل وارون زمانی انجام داده و سپس تحول کوچک می‌دهیم:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}H\delta t}\,\Theta|\alpha, t_0=0\rangle \simeq \left(\mathbb{1}-\frac{i}{\hbar}\delta t H\right)\Theta|\alpha,0\rangle = \left(\mathbb{1}-\frac{i}{\hbar}\delta t H\right)|\tilde{\alpha},0\rangle$$

حال در صورتی که حرکت تحت وارون زمانی متقارن باشد انتظار داریم تساوی زیر برقرار باشد:

$$= \Theta|\alpha,0;t=-\delta t\rangle = \Theta\left(\mathbb{1}-\frac{i}{\hbar}(-\delta t)H\right)|\alpha,0\rangle$$

با مقایسه دو سطر بالا می‌توان گفت:

$$-iH\Theta = \Theta iH$$

$$-iH\Theta = -i\Theta H$$

با توجه به اینکه Θ، مختلط مزدوج می‌کند:

$$\Theta H = H\Theta \quad \text{یا} \quad [H,\Theta]=0.$$

و بنابراین داریم:

• حال می‌خواهیم اثر تبدیل وارون زمانی را روی یک عملگر مشاهده کنیم که به صورت ذیل می‌باشد:

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta X^{+}\Theta^{-1}|\tilde{\beta}\rangle$$

اثبات:

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\gamma|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\tilde{\gamma}\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta|\gamma\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta X^{+}|\beta\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta X^{+}\Theta^{-1}\Theta|\beta\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta X^{+}\Theta^{-1}|\tilde{\beta}\rangle$$

• اگر اپراتور هرمیتی باشد، اثر وارون زمانی روی آن، واضحاً به صورت زیر است:

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta A\Theta^{-1}|\tilde{\beta}\rangle$$

• مشاهده‌گر زوج و فرد را تحت وارون زمانی به صورت ذیل تعریف می‌کنیم :

$$\Theta A \Theta^{-1} = \pm A$$

* تکانه را مشاهده‌گر فرد معرفی می‌کنیم با توجه به خواصش تحت وارون زمانی ، چراکه :

$$\langle\alpha|\vec{P}|\alpha\rangle = -\langle\tilde{\alpha}|\vec{P}|\tilde{\alpha}\rangle \longrightarrow \Theta\vec{P}\,\Theta^{-1} = -\vec{P}$$

یا به عبارت دیگر :

$$\vec{P}\Theta|\vec{p}'\rangle = -\Theta\vec{P}|\vec{p}'\rangle = -\vec{p}'\,\Theta|\vec{p}'\rangle \longrightarrow \Theta|\vec{p}'\rangle = \underbrace{e^{i\alpha}}_{=1}|-\vec{p}'\rangle$$

* مکان را مشاهده‌گر زوج معرفی می‌کنیم با توجه به خواص انتظاری‌اش :

$$\langle\alpha|\vec{X}|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\vec{X}|\tilde{\alpha}\rangle \longrightarrow \Theta\vec{X}\,\Theta^{-1} = \vec{X}$$

* تکانه زاویه‌ای را مشاهده‌گر فرد معرفی می‌کنیم ، چراکه ، $\vec{J}=\vec{x}\times\vec{p}$ است لذا $\vec{x}$ که زوج و $\vec{P}$ فرد بود بنابراین :

$$\vec{J} = \vec{x}\times\vec{p} \quad \text{where } \vec{x} \text{ even } \& \ \vec{P} \text{ is odd} \longrightarrow \Theta\vec{J}\,\Theta^{-1} = -\vec{J}$$

• مقادیر نشان داد که قید وارون زمانی روابط جابجایی $\vec{x}$ و $\vec{p}$ و مولدهای دوران (تکانه زاویه‌ای) را بدون نقض می‌گذارد.

$$* \quad \Theta[x_i, p_j]\Theta^{-1} = \Theta(i\hbar\delta_{ij})\Theta^{-1} \longrightarrow \Theta(x_i\Theta^{-1}\Theta p_j - p_j\Theta^{-1}\Theta x_i)\Theta^{-1} = -i\hbar\delta_{ij}$$

$$\longrightarrow x_i(-p_j) - (-p_j)x_i = -i\hbar\delta_{ij} \longrightarrow [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

$$* \quad \Theta[J_i, J_j]\Theta^{-1} = \Theta\, i\hbar\epsilon_{ijk}J_k\Theta^{-1} \xrightarrow[\text{است}]{\vec{J}\ \text{فرد}} [J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$$

• (همانطور که در صفحه 24 دیدیم) تابع موج (ذره بدون اسپین) تحت وارون زمانی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\psi_\alpha(\vec{x}') \longrightarrow \tilde{\psi}_\alpha(\vec{x}') = \psi_\alpha^*(\vec{x}') \qquad (A)$$

اینبار می‌توانیم با توجه به فرمول (A) که دریافتیم این موضوع را نشان دهیم:

* ذره بدون اسپین، در نمایش مکانی به صورت زیر می‌تواند نمایش داده شود: $|\alpha\rangle = \int d^3x' \, |\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'|\alpha\rangle = \int d^3x' \, |\vec{x}'\rangle \psi_\alpha(\vec{x}')$

حال اگر تبدیل وارون زمانی اعمال شود:

$$\Theta|\alpha\rangle = UK|\alpha\rangle = UK\int d^3x' \, |\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'|\alpha\rangle = \int d^3x' \, |\vec{x}'\rangle \, U\langle\vec{x}'|\alpha\rangle^* = \int d^3x' \, |\vec{x}'\rangle \, \psi_\alpha^*(\vec{x}')$$

برای ذره بدون اسپین، $U = \mathbb{1}$

با مقایسه این دو عبارت اخیر می‌توان نحوه ی تبدیل تابع موج ذره بدون اسپین را دریافت.

• حالت زاویه‌ای $|l,m\rangle$ تحت وارون زمانی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$|l,m\rangle \longrightarrow |\widetilde{l,m}\rangle = (-1)^m |l,-m\rangle \qquad (B)$$

چرا که اگر قسمت زاویه ای تابع موج را در نظر بگیریم که به صورت نکته فوق تبدیل می‌شود، می‌توان نوشت:

$$Y_l^m(\theta',\varphi') \longrightarrow \tilde{Y}_l^m(\theta',\varphi') = Y_l^{m*}(\theta',\varphi')$$

که می‌توان Y_l^{m*} را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\tilde{Y}_l^m(\theta',\varphi') = (-1)^m \, Y_l^{-m}(\theta',\varphi')$$

با توجه به اینکه $\langle\hat{n}|l,m\rangle = Y_l^m$ است:

$$\langle\hat{n}|\widetilde{l,m}\rangle = (-1)^m \langle n|l,-m\rangle$$

بنابراین:

$$|\widetilde{l,m}\rangle = (-1)^m \, |l,-m\rangle$$

• نتیجه: اگر دو اپراتور با هم جابجا شوند و آن سیستم دارای حالات غیرتبهگن باشد، حتماً ویژه تابع حقیقی خواهد داشت

برای نشان دادن این موضوع، با توجه به اینکه وارونی زمان با هامیلتونی جابجا است، $[H, \Theta]=0$ خواهد بود، میتوان نوشت:

$$H\,\Theta|n\rangle = \Theta H|n\rangle$$

$$H\,\Theta|n\rangle = \Theta E_n|n\rangle$$

با توجه به اینکه E_n حقیقی است:

$$H(\Theta|n\rangle) = E_n(\Theta|n\rangle)$$

یا به عبارتی:

$$H|\tilde{n}\rangle = E_n|\tilde{n}\rangle$$

با توجه به $H|n\rangle = E_n|n\rangle$، اگر $|n\rangle$ غیرتبهگن باشد باید عبارت زیر برقرار باشد:

$$|\tilde{n}\rangle = \underbrace{e^{i\theta}}_{=1}|n\rangle \qquad (*)$$

حال با ضرب از چپ عبارت فوق در $\langle x'|$ داریم:

$$\langle x'|\tilde{n}\rangle = \langle x'|n\rangle$$

$$\tilde{\Psi}_n(x') = \Psi_n(x')$$

با توجه به رابطه $(*)$ از جلسه گذشته، تحت وارونی زمانی تابع موج $\Psi_n(x')$ به $\Psi_n^*(x')$ تبدیل میشود، بنابراین داریم:

$$\Psi_n^*(x') = \Psi_n(x')$$

عبارت حاصل شده واقعاً حقیقی بودن تابع موج را نشان میدهد

* به عنوان مثال تابع موج آزاد، مختلط است چرا که با وجود تقارن وارونی زمانی، تبهگن است

[سوال 4.8 ...]

• تابع موج در فضای تکانه ذره بدون اسپین) تحت وارونی زمانی به صورت ذیل تبدیل می‌شود:

$$\varphi_\alpha(\vec{p}\,') \longrightarrow \tilde{\varphi}_\alpha(\vec{p}\,') = \varphi^*_\alpha(-\vec{p}\,')$$

* چرا که می‌توان نشان داد برای حالت دلخواه داریم:

$$|\alpha\rangle = \int d^3p'\, |\vec{p}\,'\rangle\langle\vec{p}\,'|\alpha\rangle = \int d^3p'\, |\vec{p}\,'\rangle\, \varphi_\alpha(\vec{p}\,')$$

حال اگر وارون زمانی اعمال شود، داریم:

$$\Theta|\alpha\rangle = \Theta\int d^3p'\, |\vec{p}\,'\rangle\langle\vec{p}\,'|\alpha\rangle = \int d^3p'\, |-\vec{p}\,'\rangle\langle\vec{p}\,'|\alpha\rangle^* = \int d^3p'\, |\vec{p}\,'\rangle\langle-\vec{p}\,'|\alpha\rangle^* = \int d^3p'\, |\vec{p}\,'\rangle\,\varphi^*_\alpha(-\vec{p}\,')$$

با مقایسه با دو عبارت فوق واضح است که تابع موج در فضای تکانه چگونه تبدیل می‌شود.

• فرم صریح عملگر وارون زمانی برای اسپین $\frac{1}{2}$ به صورت ذیل می‌باشد:

$$\Theta = \eta\, e^{-i\pi S_y/\hbar} K$$

$$\doteq -i\eta \frac{2}{\hbar} S_y K$$

* برای نشان دادن این موضوع، یادآوری از صفحه 26 می‌کنیم که تکانه زاویه‌ای عملگری فرد بود، بنابراین:

$$\Theta|s\rangle = \eta|-s\rangle$$

که در آن η یک فاز ثابت می‌باشد. اگر $|s\rangle$ را یک حالت دلخواه اسپین مانند $|\vec{S}\cdot\hat{n};+\rangle$ فرض کنیم می‌دانیم که با دو بار چرخش از $|S_z;+\rangle$ می‌توانیم آن را بسازیم:

$$|\vec{S}\cdot\hat{n};+\rangle = e^{-iS_z\alpha/\hbar}\, e^{-iS_y\beta/\hbar}\, |+\rangle$$

همچنین $|\vec{S}\cdot\hat{n};-\rangle$ را که معادلاً می‌توان ساخت:

$$|\vec{S}\cdot\hat{n};-\rangle = e^{-i\alpha S_z/\hbar}\, e^{-i(\pi+\beta)S_y/\hbar}\, |+\rangle$$

حال با جایگذاری دو عبارت قبلی در عبارت اولیه می‌توان نوشت:

$$\Theta\, e^{-iS_z\alpha/\hbar}\, e^{-iS_y\beta/\hbar}\,|+\rangle = \eta\, e^{-i\alpha S_z/\hbar}\, e^{-i(\pi+\beta)S_y/\hbar}\,|+\rangle$$

بنابراین با توجه به اینکه $\Theta = UK$ است، قسمت یکانی عملگر به دست می‌آید:

$$U = \eta\, e^{-i\pi S_y/\hbar}$$

همچنین با توجه به اینکه می‌توان نوشت $e^{-i\pi S_y} = \cos\pi - iS_y\sin\pi$ ، به صورت زیر نیز نوشت:

$$U = -i\eta\,\frac{2}{\hbar}\,S_y\,K$$

(یادآوری می‌کنیم که چون $\sigma_y = \frac{2}{\hbar}S_y$ است، U را برحسب σ_y نیز می‌توان نوشت.)

* می‌توان چک کرد که اپراتور بدست آمده مثلا برای S_x، درست کار می‌کند چرا که انتظار داریم فرد باشد؟

$$\Theta S_x \Theta^{-1} = -S_x$$

می‌توان از سمت چپ شروع کرد و به جای Θ، عملگر به دست آمده را قرار داد:

$$\Theta S_x \Theta^{-1} = [\Theta, S_x]\Theta^{-1} + S_x \underbrace{\Theta\Theta^{-1}}_{=1} = [-i\eta\,\sigma_y K, S_x]\,\Theta^{-1} + S_x$$

$$= -i\eta\,\frac{\hbar}{2}K\underbrace{[\sigma_y, \sigma_x]}_{=-2i\sigma_z}\Theta^{-1} + S_x = -\eta\hbar K\sigma_z\,(i\eta^*\sigma_y K^+) + S_x$$

$$= -i\hbar\underbrace{\eta^2}_{=1}\underbrace{\sigma_z\sigma_y}_{=-iS_x} + S_x = -\hbar\eta^2\sigma_x + S_x = -2S_x + S_x = -S_x .$$

* می‌توان چک کرد که عملگر به‌دست‌آمده برای اسپین ½، درست کار می‌کند، چرا که انتظار داریم داشته باشیم:

$$\Theta S_y \Theta^{-1} = -S_y$$

می‌توان از سمت چپ شروع کرد و به جای Θ، عملگر به‌دست‌آمده را قرار داد:

$$\Theta S_y \Theta^{-1} = [\Theta, S_y]\Theta^{-1} + S_y \Theta\Theta^{-1} = -i\eta\sigma_y K \frac{\hbar}{2}\sigma_y \frac{\hbar}{2}\sigma_y i\eta\sigma_y K \quad \Theta^{-1} + S_y$$

$$= i\eta\hbar K(i\eta^* \sigma_y K^{+}) + S_y = -\hbar\sigma_y + S_y = -2S_y + S_y = -S_y.$$

• می‌توان نشان داد فرم صریح عملگر وارون زمانی برای هر اسپینی به صورت زیر می‌باشد:

$$\Theta = \eta e^{-\frac{i}{\hbar}\pi J_y} K \qquad ⊛$$

$$\doteq -i\eta \frac{2}{\hbar} J_y K$$

توجه: اعمال دوبار وارون زمانی بر سیستم بوزون، خودش را می‌دهد، بر فرمیون، مخالف خودش را می‌دهد:

* برای نشان دادن این، حالت دلخواه $|\alpha\rangle$ را دوبار وارون زمانی می‌کنیم:

$$\Theta^2|\alpha\rangle = \Theta\left(\Theta \sum_{jm} |j,m\rangle\langle j,m|\alpha\rangle\right)$$

با توجه به اینکه فرم صریح Θ را در رابطه ⊛ چنین معرفی کردیم:

$$\Theta^2|\alpha\rangle = \Theta\left(\eta \sum e^{-i\pi J_y/\hbar} |j,m\rangle\langle j,m|\alpha\rangle^*\right)$$

$$\Theta^2|\alpha\rangle = \underbrace{|\eta|^2}_{=1} \sum e^{-2\pi i J_y/\hbar} |j,m\rangle\langle j,m|\alpha\rangle$$

مقدار $\langle j,m| e^{-2\pi i J_y/\hbar}$ را که دوران خاص حول y است را می‌توان مانند رابطه 3.5.49 نوشت که در آن $D^{(j)}_{m'm}(R)$ در 3.5.50 آمده

که برای مثال ما $\alpha=\gamma=0$ است و داریم $D^{(j)}_{m'm}(R)=d^{(j)}_{m'm}(\beta)$ که اینها از رابطه ویگنر قابل محاسبه است. 3.9.33.

و حاصل عبارت به دست آمده، $(-1)^{2j}$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\Theta^2|\alpha\rangle = \sum (-1)^{2j}\,|jm\rangle\langle jm|\alpha\rangle$$

$$\Theta^2|\alpha\rangle = (-1)^{2j}\,|\alpha\rangle$$

$$\Theta^2|\alpha\rangle = \begin{cases} |\alpha\rangle & ; \text{ برای } j \text{ (صحیح) بوزون‌ها} \\ -|\alpha\rangle & ; \text{ برای } j \text{ (نیم‌صحیح) فرمیون‌ها} \end{cases}$$

• برای تانسورکردن که هرمیتی باشد و زوج یا فرد باشد، قاعده‌ی گزینشی ذیل را خواهیم داشت:

$$\langle \alpha,j,m|T^{(k)}_{q'}|\alpha,j,m\rangle = \pm(-1)^k\langle\alpha,j,m|T^{(k)}_{q'}|\alpha,j,m\rangle.$$

* برای نشان دادن این، کافی است، $q=0$ را در نظر بگیریم به علت داشتن تقارن کارت-ویگنر. با توجه به اینکه وارون زمانی

یافته‌ی $|\alpha,j,m\rangle$ از رابطه‌ی D صفحه‌ی 27، مشخص است $\widetilde{|\alpha,j,m\rangle}=|\alpha,j,-m\rangle$. بنابراین همانند رابطه‌ی ** در

صفحه‌ی 26، از زوج یا فرد بودن $T^{(k)}_0$ می‌توان نوشت:

$$\langle\alpha,j,m|T^{(k)}_0|\alpha,j,m\rangle = \pm\langle\alpha,j,-m|T^{(k)}_0|\alpha,j,-m\rangle.$$

می‌توان $|\alpha,j,-m\rangle$ را دوران یافته‌ی $|\alpha,j,m\rangle$ حول y به اندازه‌ی π نوشت:

$$\langle\alpha,j,m|T^{(k)}_0|\alpha,j,m\rangle = \pm\langle\alpha,j,m|D^\dagger(0,\pi,0)\,T^{(k)}_0\,D(0,\pi,0)|\alpha,j,m\rangle$$

از رابطه‌ی 3.11.22a داریم:

$$D^\dagger(R)\,T^{(k)}_q\,D(R) = \sum_{q'=-k}^{k} D^{*(k)}_{qq'}\,T^{(k)}_{q'}$$

بنابراین به ازای $q=0$، می‌توان نوشت:

$$\langle\alpha,j,m|T^{(k)}_0|\alpha,j,m\rangle = \pm\langle\alpha,j,m|(-1)^k T^{(k)}_0|\alpha,j,m\rangle$$

بنابراین داریم:

$$\langle\alpha,j,m|T^{(k)}_0|\alpha,j,m\rangle = \pm(-1)^k\langle\alpha,j,m|T^{(k)}_0|\alpha,j,m\rangle$$

* به عنوان مثال $\vec{X}$ که یک تانسور مرتبه‌ی $k=1$ است و یک تابع زوج است قاعده‌ی گزینش به صورت زیر خواهد شد:

$$\langle \alpha, j, m | \vec{X} | \alpha, j, m \rangle = +(-1)^1 \langle \alpha, j, m | \vec{X} | \alpha, j, m \rangle$$

لذا چون سمت چپ عبارت برابر منفی عبارت شده، بدست می‌آید:

$$\langle \alpha, j, m | \vec{X} | \alpha, j, m \rangle = 0$$

* به عنوان مثال دیگر، $\vec{P}$ که یک تانسور مرتبه‌ی $k=1$ است، یک تابع فرد است، قاعده‌ی گزینش می‌گوید:

$$\langle \alpha, j, m | \vec{P} | \alpha, j, m \rangle = \langle \alpha, j, m | \vec{P} | \alpha, j, m \rangle$$

بنابراین هیچ قاعده‌ای روی $\vec{P}$ نمی‌توان تحمیل کرد.

• تبهگنی کرامرز: اگر یک سیستم فرمیونی داشته باشیم، حتماً حالات آن دارای تبهگنی خواهد بود. اگر و تنها اگر تقارن زمانی در سیستم وجود داشته باشد.

* برای اثبات این قضیه از برهان خلف استفاده می‌کنیم، یعنی فرض (الف) سیستم تبهگنی نباشد. و دارای زمان تقارن سیستم باشد.

در این صورت طبق رابطه‌ی Θ به قضیه‌ی صفحه‌ی 28، می‌توان نوشت:

$$\Theta |n\rangle = e^{-i\theta} |n\rangle$$

در صورتی که مجدداً Θ را به عبارت فوق اعمال کنیم، به دست می‌آید:

$$\Theta^2 |n\rangle = \Theta e^{-i\theta} |n\rangle$$

$$\Theta^2 |n\rangle = e^{-i\theta} \Theta |n\rangle$$

$$\Theta^2 |n\rangle = e^{-i\theta} e^{i\theta} |n\rangle$$

$$\Theta^2 |n\rangle = |n\rangle$$

نتیجه‌ی به دست آمده با قضیه‌ی ص 31 متناقض بوده، لذا، فرض خلف باطل و حکم صادق است.

* به عنوان مثال آزمایش SG که تقارن دوران زمانی ندارد بنابراین تبهگنی نمایان باشد ولی اتم هیدروژن تبهگنی دارد.

• طبق قضیه‌ی نوتر، برای هر تقارن پیوسته (فضازمان یا داخلی)، یک جریان پایسته خواهیم داشت.

* مثال‌های فضازمان $T(a)$ و $U(t,t_0)$ و $D(R)$ است که جریان‌های پایسته‌شان به ترتیب $\vec{P}$، H و $\vec{L}$ هستند.

* مثال‌های داخلی $U(1)$ و $SU(2)_L$ و $SU(3)_{color}$ است.

• توجه شود که قضیه‌ی نوتر برای تقارن‌های گسسته برقرار نیست ولی اگر هر تقارن گسسته‌ای یک لحظه در سیستم برقرار باشد، تا آخر آن تقارن حفظ خواهد شد * طبق قضیه‌ی صها

* مثال‌های فضازمان، Π و Θ است.

* مثال داخلی C (مزدوج بار) است.

• توجه شود که این تقارن‌های گسسته مطرح شده می‌توانند برای هر سیستم برقرار باشد یا نباشد.

* مثلاً در QED، هر سه تقارن جدا جدا برقرارند.

* در برهم‌کنش ضعیف Π و C برقرار نمی‌باشد (به شدت) و $C\Pi$ نیز (کمی) برقرار نمی‌باشد.

• طبق قضیه‌ی $C\Pi\Theta$ هر تئوری سازگار با QM و SR، باید تقارن $C\Pi\Theta$ را هم زمان داشته باشد!