پاسخ سری نهم تمرینات کوانتم پیشرفته ۲

آ) (6.10) Sakurai 3rd ed] برای سه تا از ذرات با اسپین $\frac{1}{2}$ در جعبه‌ی مکعبی به طول L تبهگنی و انرژی مطلوبست

با توجه به اینکه ذره در جعبه پتانسیل اش برابر $0<x<L$, $0<y<L$, $0<z<L$ صفر و در باقی نقاط ∞ است.

لذا هامیلتونی را برای سه ذره در چنین پتانسیلی می‌نویسیم:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla_1^2 + \nabla_2^2 + \nabla_3^2\right) + V_{tot}$$

با توجه به اینکه حل چنین H برای یک ذره به صورت ذیل است:

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)$$

در حالت n ذره تعمیم داده می‌شود:

$$E_{\substack{\text{n ذره} \\ \text{در جعبه}}} = \sum_{i=1}^{n} E_i = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\sum_{i=1}^{n}\left(n_{ix}^2 + n_{iy}^2 + n_{iz}^2\right). \qquad \text{I}$$

که برای سه ذره در جعبه‌ی مکعبی به طول L ، انرژی به دست می‌آید:

$$E_{\substack{\text{سه ذره} \\ \text{در جعبه}}} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2 + n_{2x}^2 + n_{2y}^2 + n_{2z}^2 + n_{3x}^2 + n_{3y}^2 + n_{3z}^2\right)$$

+ انرژی حالت پایه به ازای $n=1$ برای همه n_x, n_y, n_z ها بدست می‌آید. به عبارتی یک انتخاب داریم چرا که $\binom{9}{9}=1$ می‌شود. تا ۹ تا n را برابر کمترین مقدار یک بین ۹ انتخاب کنیم.

اما با توجه به جمع اسپین ذره، که هر ذره دو انتخاب $\pm\frac{1}{2}$ برای اسپین را دارد. $2^3=8$ حالت می‌تواند داشته باشد. لذا در کل، تعداد حالات ممکن حالت پایه $1\times8=8$ برابر است: $E_1=\frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$

+ برای اولین انرژی برانگیخته یکی از ۹، n را باید برابر 2 شدن انتخاب کنیم لذا $9=\frac{9!}{8!}=\binom{9}{1}$ و همانطور که گفته شد هر ذره دو انتخاب دارد. لذا $2^3=8$ بنابراین حالات کل می‌شود: $9\times8=72$ ؛ $E_2=\frac{6\pi^2\hbar^2}{mL^2}$

+ برای دومین انرژی برانگیخته، دو تا از ۹ n را باید برابر 2 شدن انتخاب کنیم $\frac{9!}{7!2!}=36$ $\binom{9}{2}=$ و همانطور که گفته شد هر ذره دو انتخاب دارد. لذا حالات کل بدست می‌آید:

$E_3=\frac{15\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ ؛ $36\times8=288$

3 (b) 6.10 // انرژی سیستم شامل چهار ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ داخل جعبه مکعبی به طول L مطلوب است.

انرژی از همان رابطه (I) بدست می‌آید:

$$E_{\text{چهار ذره در جعبه}}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(n_{1x}^2+n_{1y}^2+n_{1z}^2+n_{2x}^2+n_{2y}^2+n_{2z}^2+n_{3x}^2+n_{3y}^2+n_{3z}^2+n_{4x}^2+n_{4y}^2+n_{4z}^2\right).$$

+ برای حالت پایه باید همه ۱۲ n، را انتخاب کنیم تا 1 جایگذاری شود لذا $\binom{12}{12}=1$ و هر ذره دو اسپین $\pm\frac{1}{2}$ دارد لذا $2^4=16$

و کل حالات پایه برابر می‌شود با $1\times12=12$ حالت؛ $E_1=\frac{6\pi\hbar^2}{mL^2}$

+ برای اولین حالت برانگیخته کافی از 12 n را انتخاب کنیم تا 2 بشود لذا $\binom{12}{1} = \frac{12!}{1!\,11!} = 12$ و هر ذره دو اسپین دارد $2^4 = 16$

بنابراین کل حالات برابر می‌شود با $12 \times 16 = 192$ حالت؛

$$E_2 = \frac{15\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

+ برای دومین حالت برانگیخته دوتا از 12 n را انتخاب کنیم تا 2 بشوند لذا 66 $\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!\,10!} = 66$ و هر ذره دو اسپین دارد $2^4 = 16$

بنابراین کل حالت‌ها برابر می‌شود با $66 \times 16 = 1056$ حالت؛

$$E_3 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{mL^2}$$

{ 4.2.(a) } « دو عملگر انتقال در دو راستای متفاوت و مقادیر متفاوت با هم جابجا می‌شوند.

چرا که می‌توان نوشت:

$$[\tau_d, \tau_{d'}]|x'\rangle = (\tau_d\tau_{d'} - \tau_{d'}\tau_d)|x'\rangle$$

$$= |x'+d+d'\rangle - |x'+d'+d\rangle = 0$$

۲.(ب) { 4.2(b) } « دو عملگر دوران در دو راستا و اندازه‌های مختلف با هم جابجا نمی‌شوند.

چرا که مولدهای دوران یعنی J_i ، J_j با یکدیگر جابجا نمی‌شوند.

{ 4.2.(c) } « عملگر پاریته و انتقال جابجا نمی‌شوند.

با توجه به اینکه:

$$\pi|x'\rangle = |-x'\rangle \rightarrow \tau_d\pi|x'\rangle = |-x'+d\rangle.$$

و همچنین:

$$\tau_d|x'\rangle = |x'+d\rangle \rightarrow \pi\tau_d|x'\rangle = |-x'-d\rangle$$

بنابراین می‌توان نشان داد که:

$$[\tau_d, \pi]|x'\rangle = (\tau_d\pi - \pi\tau_d)|x'\rangle \neq 0$$

[// 4.2.(d)] عملگر پاریته و دوران با هم جابجا می‌شوند.

چرا که اگر داشته باشیم $|\vec{x}''\rangle = D(\hat{n},\varphi)|\vec{x}'\rangle$ ، می‌توان نوشت:

$$[D(\hat{n},\varphi),\Pi]|\vec{x}'\rangle = \big(D(\hat{n},\varphi)\Pi - \Pi D(\hat{n},\varphi)\big)|\vec{x}'\rangle$$

$$= D(\hat{n},\varphi)|-\vec{x}'\rangle - \Pi|\vec{x}''\rangle$$

$$= |-\vec{x}''\rangle - |-\vec{x}''\rangle = 0$$

[// 4.4(a)]. تابع اسپین زاویه‌ای ذره اسپین‌دار را می‌دانیم به صورت ذیل است، که:

$$\mathcal{Y}_l^{j=l\pm\overbrace{1/2}^{=m},\,m} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\begin{pmatrix}\pm\sqrt{l+m+\frac{1}{2}}\;Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\\ \sqrt{l\mp m+\frac{1}{2}}\;Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}$$

اگر پتانسیل مرکزی حاکم باشد به دلیل تقارن کروی می‌توان گفت $l=0$ می‌باشد. لذا با توجه به اینکه داده است، $j=\frac{1}{2}$ فراهم بود

و به ازای $m=-\frac{1}{2}$ پاسخ صفر خواهیم داشت. بنابراین به چنین حالتی داریم:

$$\mathcal{Y}_{l=0}^{j=\frac{1}{2},\,m=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

[// 4.4 (b)] . $\vec{\sigma}\cdot\vec{x}$ را اگر بخواهیم روی $\mathcal{Y}_0^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ اثر دهیم بهتر است ابتدا فرم ماتریسی‌اش را بسازیم:

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}y + \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}z = \begin{pmatrix}z & x-iy\\ x+iy & -z\end{pmatrix}$$

حال می‌توان نوشت:

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{x}\,\mathcal{Y}_0^{1/2,1/2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} z\\ x+iy\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta\cos\varphi + i r\sin\theta\sin\varphi\end{pmatrix} = \frac{r}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\, e^{i\varphi}\end{pmatrix}.$$

با توجه به تعریف Y_1^0 و Y_1^1 می‌توان نوشت:

$$= \frac{r}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} Y_1^0 \\ -\sqrt{2}\, Y_1^1\end{pmatrix}$$

یا می‌توان به فرم مقابل نوشت:

$$= \frac{-r}{\sqrt{2(1)+1}}\begin{pmatrix} -\sqrt{1-\frac12+\frac12}\; Y_1^0 \\ \sqrt{1+\frac12+\frac12}\; Y_1^1\end{pmatrix}$$

که دقیقاً به این تعریف $\mathcal{Y}_1^{1/2,1/2}$ است:

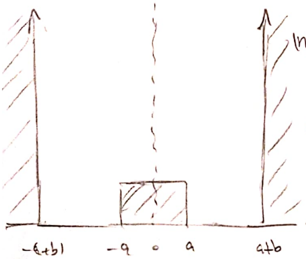
$$= -r\,\mathcal{Y}_1^{1/2,1/2}$$

[(a)، (b)، (c)] با توجه به اینکه $\vec{\sigma}\cdot\vec{x}$ شبه اسکالر است، چرا که $\vec{\sigma}\cdot\vec{x} = -\Pi\, \vec{\sigma}\cdot\vec{x}\, \Pi^{-1}$، طبق قضیه‌ی ویگنر-اکارت، تحت دوران $j=j'$ و $m'=m$ باقی می‌ماند.

ولی چون $\vec{\sigma}\cdot\vec{x}$، دارای پاریته‌ی فرد است لذا حالت $l=0$ که زوج است را به $l=1$ تبدیل می‌کند.

اختلاف انرژی دو حالت پایین پتانسیل چاه دوگانه مستطیلی مطلوب است؟ [Sakurai 3rd ed.. 4.6]

* برای چنین پتانسیلی که در شکل نیز نمایش داده شده، با توجه به تصویر، چون پاریته تقارن سیستم است، $[H,\Pi]=0$ و حالات نیز تبهگن هستند، ویژه حالت مشترک H و Π، همان $|n\rangle$ مربوطه که همان ویژه حالات H می‌باشد. از سوی دیگر می‌دانیم که ویژه حالت پاریته یا زوج می‌باشد یا فرد بنابراین کافیست برای دو حالت پاریته زوج و فرد تابع موج را بیابیم.



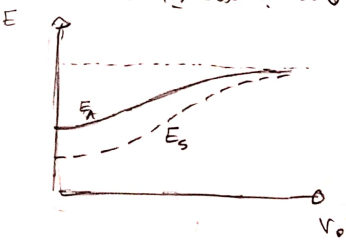
* همچنین یادآوری می‌کنیم که در ناحیه‌ای که پتانسیل نداریم، با توجه به معادله شرودینگر $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+k^2\psi(x)=0$ که در آن $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ است، تابع موج حاصل می‌شود:

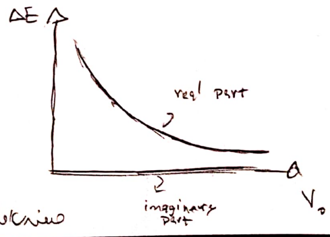
$$\psi(x) = A\sin(kx)+B\cos(kx) \quad \text{(I)}$$

و برای ناحیه‌ای که پتانسیل V_0 داریم، با توجه به معادله شرودینگر $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+k'^2\psi(x)=0$ که در آن $k'=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$ است:

$$\psi(x)=A'\sinh(k'x)+B'\cosh(k'x) \quad \text{(II)}$$

* اختلاف انرژی بدست آمده که در رابطه (IV) صفحه‌ی چهارم نشان داده شده به صورت زیر است:





* برای حالت متقارن :

+ در ناحیه $a<x<(a+b)$ ، چون پتانسیل نداریم از رابطه ① در صفحه قبل استفاده می‌کنیم.

البته باید توجه کرد که چاه پتانسیل به طول منتقل شده است ، بنابراین :

$$\psi(x)=A_s\sin k_s[x-(a+b)]+B_s\cos k_s[x-(a+b)].$$

همچنین باید توجه کرد که در $x=a+b$ ، $\psi(x)=0$ باید باشد. بنابراین :

$$\psi(x)=A_s\sin k_s[x-(a+b)] \quad ; \quad a<x<(a+b)$$

+ با توجه به پاریته‌ی زوج در حالت متقارن باید در ناحیه $-(a+b)<x<-a$ نیز به صورت $\psi(-x)=\psi(x)$ باشد.

و می‌توان از عبارت فوق که عبارتی فرد است با ضرب یک منفی تابع زوج ساخت :

$$\psi(x)=-A_s\sin k_s[x-(a+b)] \quad ; \quad -(a+b)<x<-a.$$

+ در ناحیه $-a<x<a$ ، چون پتانسیل V_0 را داریم باید پاسخ همانند رابطه ② صفحه قبل باشد.

اما با توجه به اینکه پاسخ باید زوج باشد در حالت متقارن ، فقط جمله‌ی $\cosh$ قابل قبول است :

$$\psi(x)=B'_s\cosh(k'_s x) \quad ; \quad -a<x<a.$$

+ توجه شود که k_s و k'_s به صورت ذیل مشخص می‌شوند :

$$k_s=\sqrt{\frac{2mE_s}{\hbar^2}} \quad , \quad k'_s=\sqrt{\frac{2m(V_0-E_s)}{\hbar^2}}$$

+ اما اگر $V_0 \gg E_s$ باشد :

$$k_s=\sqrt{\frac{2mE_s}{\hbar^2}} \quad ; \quad k'\equiv k'_s\simeq\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

- حال با توجه به شرط پیوستگی تابع موج و مشتق آن در $x = a$ ، می‌توان نوشت :

$$A_s \sin(K_s b) = B'_s \cosh(k' a)$$

$$K_s A_s \cos(k_s b) = -k' B'_s \sinh(k'_s a)$$

از روابط فوق با تقسیم بر هم به دست می‌آید :

$$\frac{\tan(k_s b)}{k_s} = -\frac{\coth(k' a)}{k'}$$

* برای حالت پادمتقارن :

+ برای ناحیه $a < x < (a+b)$ به مانند قبل داریم :

$$\psi(x) = A_A \sin k_A[x-(a+b)] \quad ; \quad a < x < (a+b)$$

+ برای ناحیه $-(a+b) < x < -a$ باید فرد باشد لذا :

$$\psi(x) = A_A \sin k_A[x-(a+b)] \; ; \; -b-a < x < -a$$

+ برای ناحیه $-a < x < a$ ، چون باید فرد باشد :

$$\psi(x) = A_A \sinh(k'_A x)$$

+ که در آنها k'_A و k_A به صورت زیر است اگر $E_0 << V_0$:

$$k_A = \sqrt{\frac{2mE_a}{\hbar^2}} \quad ; \quad k' \equiv k'_A \simeq \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}.$$

حال با توجه به شرط پیوستگی تابع موج و مشتق آن در $x=a$ می‌توان به عبارت زیر رسید :

$$\frac{\tan(k_a b)}{k_a} = -\frac{\tanh(k' a)}{k'}$$

* به ترتیب چاه بی‌نهایت به طول l، معادله شرودینگر تابع موج‌ها این گونه باشد و رابطه‌ی $kl=n\pi$ را داشتیم.

حال چون گفتیم $E_{S,A} \ll V_0$، می‌توان گفت ناحیه‌های $a<x<(a+b)$ و $-(a+b)<x<-a$، مانند چاه

پتانسیل بی‌نهایت هستند لذا رابطه‌ی مشابه $K_{S,A}\, b \simeq n\pi$ را خواهیم داشت که به دقیق کردن آن، اضافات تصحیحی را

که کوچک باشد، یعنی $\varepsilon_{A,S}$ را اضافه می‌کنیم:

$$K_{S,A}\, b = n\pi + \varepsilon_{A,S}$$

چون به دو حالت انرژی پایین کار می‌کردیم همان اولین حالت (پایه) متقارن و پادمتقارن مد نظر است. لذا دو رابطه‌ی زیر را داریم:

$$K_S b = \pi + \varepsilon_S \quad ; \quad K_A b = \pi + \varepsilon_A$$

حال می‌توان تقریب زیر را نیز نوشت:

$$\tan(K_{S,A} b) = \tan(\pi + \varepsilon_{S,A}) = \tan(\varepsilon_{S,A}) \simeq \varepsilon_{S,A} = bK_{S,A} - \pi$$

با استفاده از رابطه‌ی اخیر در روابط (III) و (IV) در صفحه‌ی سوم می‌توان نوشت:

$$K_S = \frac{\pi}{b + \frac{\coth(k'a)}{k'}} \quad ; \quad K_A = \frac{\pi}{b + \frac{\tanh(k'a)}{k'}}$$

* بنابراین اختلاف انرژی‌ها از دو رابطه‌ی فوق و تعاریف K_A و K_S، می‌توان نوشت:

$$\Delta E = E_A - E_S = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mb^2}\left\{\left(1+\frac{\tanh(k'a)}{k'b}\right)^{-2} - \left(1+\frac{\coth(k'a)}{k'b}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2}{mb^2}\frac{1}{k'b}\left[\coth(k'a) - \tanh(k'b)\right] = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mb^2}\frac{1}{k'b}\frac{1}{\sinh(2k'a)}$$

* بنابراین به دست آمد:

$$\Delta E = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mb^2}\frac{1}{k'b}\frac{1}{\sinh(2k'a)} \; ; \; k' = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \qquad (V)$$

[4.8 a] ثابت کنید: اگر وارون زمانی تقارن سیستمی باشد و آن سیستم دارای حالات غیرتبهگن باشد،

حتما ویژه توابع اساسی را می‌توان حقیقی اختیار کرد.

۱

برای اثبات این موضوع با توجه به اینکه وارون زمانی تقارن سیستم است. $[H,\Theta]=0$ خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$H\Theta|n\rangle = \Theta H|n\rangle$$

$$H\Theta|n\rangle = \Theta E_n|n\rangle$$

$$H\Theta|n\rangle = E_n\Theta|n\rangle$$

با توجه به اینکه E_n حقیقی است:

$$H|\tilde{n}\rangle = E_n|\tilde{n}\rangle.$$

یا به عبارتی:

پس با توجه به $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ ، اگر $|n\rangle$ غیرتبهگن باشد، باید عبارت ذیل برقرار باشد:

$$|\tilde{n}\rangle = \underbrace{e^{i\alpha}}_{=1}|n\rangle$$

حال با ضرب کردن در $\langle\vec{x}|$ داریم:

$$\tilde{\psi}_n(\vec{x}) = \psi_n(\vec{x}).$$

با توجه به اینکه تابع موج تحت وارون زمان به صورت ذیل تبدیل می‌شود:

$$\psi_n(\vec{x}) \to \tilde{\psi}(\vec{x}) = \psi^*(\vec{x})$$

در عبارت اخیر جایگذاری می‌کنیم:

$$\psi^*(\vec{x}) = \psi(\vec{x})$$

و واضح است که هر عددی که برابر مزدوج خود باشد، حقیقی خواهد بود.

3) 4.8b سوال. برای ذره‌ی آزاد تابع موج مختلط است.

چرا که برای ذره‌ی آزاد تبهگنی داریم، موجی که می‌رود با موجی که برمی‌گردد انرژی یکسان دارد لذا نمی‌توان از قضیه‌ی صفحه‌ی پیشین استفاده کرد و گفت تابع موج حقیقی است در حالی که تقارن وارون زمانی دارد. چون x زوج بوده، $\vec{p}$ فرد بوده ولی تبهگنی نیز داریم که اثر فرد بودن $\vec{p}$ را تحت تبدیل وارون زمانی خنثی می‌کند.

4) 4.10a سوال) حالت تکانه زاویه‌ای $|j,m\rangle$ تحت وارون زمانی به صورت ذیل تبدیل می‌شود:

$$|j,m\rangle \longrightarrow |\widetilde{j,m}\rangle = (-1)^m |j,-m\rangle$$

* برای نشان دادن این موضوع با توجه به اینکه بخش زاویه‌ای تابع موج به صورت زیر تبدیل می‌یابد:

$$Y_l^m(\theta',\varphi') \longrightarrow \tilde{Y}_l^m(\theta',\varphi') = Y_l^{*m}(\theta',\varphi')$$

می‌توان Y_l^{m*} را به صورت زیر باز کرد با توجه به خواص Y_l^m:

$$\tilde{Y}_l^m(\theta',\varphi') = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta',\varphi')$$

با توجه به اینکه داریم $Y_l^m = \langle \hat{n}|l,m\rangle$،

$$\langle \hat{n}|\widetilde{l,m}\rangle = (-1)^m \langle n|l,-m\rangle$$

بنابراین:

$$|\widetilde{l,m}\rangle = (-1)^m |l,-m\rangle.$$

* راه دیگر نشان دادن این موضوع استفاده از فرد بودن تکانه زاویه‌ای $\Theta J \Theta^{-1} = -J$ است:

$$-\Theta J|j,m\rangle = J\Theta|j,m\rangle$$

با اثر دادن J روی $\Theta|j,m\rangle$ می‌توان دید:

$$-m\hbar\,\Theta|j,m\rangle = J\,\Theta|j,m\rangle.$$

$$\Theta|j,m\rangle \propto |j,-m\rangle.$$

بنابراین:

[...] عملگر زمانی روی $D(R)|j,m\rangle$ به صورت زیر می‌باشد:

$$D(R)|j,m\rangle \longrightarrow \widetilde{D(R)|j,m\rangle} = (-1)^m D(R)|j,-m\rangle.$$

به عبارتی وارون زمانی و دوران جابجا می‌شوند

برای نشان دادن این موضوع از فرم بی‌نهایت کوچک دوران استفاده کرده و وارون زمانی $D(R)$ را می‌یابیم:

$$\Theta D(d\phi)\Theta^{-1} = \Theta\left(1 - i\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}d\phi\right)\Theta^{-1} = 1 + \frac{i\,\Theta J\Theta^{-1}\cdot\hat{n}}{\hbar}d\phi = 1 - i\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}d\phi = D(d\phi)$$

حال با ضرب طرفین معادله فوق در Θ (از راست) و $|j,m\rangle$ می‌توان نوشت:

$$\Theta D(d\phi)|j,m\rangle = D(d\phi)\,\widetilde{\Theta|j,m\rangle}.$$

$= (-1)^m|j,-m\rangle$ مقدار این را از قسمت قبل داریم.

$$\Theta D(d\phi)|j,m\rangle = (-1)^m D(d\phi)|j,-m\rangle$$

حال با تکرار دوران کوچک، دوران محدود را می‌سازیم:

$$\lim_{N\to\infty}\Theta[D(d\phi)]^N|j,m\rangle = \lim_{N\to\infty}(-1)^m[D(d\phi)]^N|j,-m\rangle.$$

بنابراین به دست می‌آید:

$$\Theta D(R)|j,m\rangle = (-1)^m D(R)|j,-m\rangle.$$

3.10c] نشان دهید رابطه زیر بین عناصر ماتریس دوران برقرار است:

$$D^{(j)*}_{m'm}(R) = (-1)^{m-m'} D^{(j)}_{-m',-m}(R)$$

به نشان دادن این، عناصر ماتریس $\Theta D(R)$ را ابتدا می‌نویسیم سپس از رابطه‌ای که نشان داده شده در 3.9 استفاده کرده و

مقدار را از رابطه جابجایی Θ و $D(R)$:

$$\langle j,-m'|\Theta D(R)|j,m\rangle = \langle j,-m'|(-1)^m D(R)|j,-m\rangle$$

$$\sum_{m''}\langle j,-m'|\Theta|j,m''\rangle\langle j,m''|D(R)|j,m\rangle = (-1)^m D^{(j)}_{-m',-m}(R)$$

$$\sum_{m''}(-1)^{m''}\delta_{-m'',-m'} D^{(j)*}_{m'',m}(R) = (-1)^m D^{(j)}_{-m',-m}(R)$$

$$(-1)^{m'} D^{(j)*}_{m',m}(R) = (-1)^m D^{(j)}_{-m',-m}(R)$$

بنابراین معادله‌ی خواسته شده به دست می‌آید.

3.10d] نشان دهید با وارون زمانی، حالت $|j,m\rangle$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$|j,m\rangle \rightarrow \widetilde{|j,m\rangle} = i^{2m}|j,-m\rangle$$

به نشان دادن این با توجه به معادله به دست آمده در 3.9، می‌دانیم $-1 = i^2$ قرار می‌دهیم و عبارت فوق حاصل می‌شود.