پاسخنامه‌ی پنجم تمرینات کوانتوم پیشرفته ۲

(3.24) می‌خواهیم در حالت $|l,m\rangle$ مقادیر چشمداشتی L_x ، L_y ، L_x^2 ، L_y^2 را محاسبه کنیم. ویژه‌کت مشترک L_z ، L^2.

با توجه به تعریف $J_\pm = J_x \pm iJ_y$ می‌توان گفت، $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ و $L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$ همچنین داریم:

$$L_y^2 = -\frac{1}{4}(L_+^2 + L_-^2 - L_+L_- - L_-L_+) \ , \quad L_x^2 = \frac{1}{4}(L_+^2 + L_-^2 - L_+L_- + L_-L_+)$$

همچنین روابط مقابل را داریم:

$$L_\pm |l,m\rangle = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}\,\hbar\,|l, m \pm 1\rangle$$

حال شروع به محاسبه می‌کنیم:

$$\langle L_x \rangle = \frac{1}{2}\{\underbrace{\langle l,m|\overbrace{L_+|l,m\rangle}^{\propto |l,m+1\rangle}}_{=0} + \underbrace{\langle l,m|\overbrace{L_-|l,m\rangle}^{\propto |l,m-1\rangle}}_{=0}\} = 0$$

$$\langle L_y \rangle = \frac{1}{2i}\{\underbrace{\langle l,m|\overbrace{L_+|l,m\rangle}^{\propto |l,m+1\rangle}}_{=0} - \underbrace{\langle l,m|\overbrace{L_-|l,m\rangle}^{\propto |l,m-1\rangle}}_{=0}\} = 0$$

$$\langle L_x^2 \rangle = \frac{1}{4}\{\underbrace{\langle lm|\overbrace{L_+^2|l,m\rangle}^{\propto |l,m+2\rangle}}_{=0} + \underbrace{\langle lm|\overbrace{L_-^2|lm\rangle}^{\propto |l,m-2\rangle}}_{=0} - \langle lm|L_+L_-|lm\rangle - \langle lm|L_-L_+|lm\rangle\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\hbar^2\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\sqrt{(l-m+1)(l+m)} + \hbar^2\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\}$$

$$= \frac{1}{4}\hbar^2\{(l+m)(l-m+1) + (l-m)(l+m+1)\} = \frac{1}{2}\hbar^2[l(l+1) - m^2]$$

$$\langle L_y^2\rangle = -\frac{1}{4}\{\underbrace{\langle l,m|\overbrace{L_+^2|l,m\rangle}^{\propto|l,m+2\rangle}}_{=0} + \underbrace{\langle l,m|\overbrace{L_-^2|l,m\rangle}^{\propto|l,m-2\rangle}}_{=0} - \langle l,m|L_+L_-|l,m\rangle - \langle l,m|L_-L_+|l,m\rangle\}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}\{ l(l+1)-m^2 \}$$

همچنین $L_z|l,m\rangle = m\hbar|l,m\rangle$ پس $\langle L_z^2\rangle = m^2\hbar^2$ بنابراین اگر تعریف کلاسیک را در نظر بگیریم داریم:

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \longrightarrow \langle L^2\rangle = \langle L_x^2\rangle + \langle L_y^2\rangle + \langle L_z^2\rangle$$

$$= \hbar^2\{ l(l+1) - m^2 \} + m^2\hbar^2 = l(l+1)\hbar^2$$

و این همان مقدار ویژه‌ی L^2 می‌باشد: $L^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle$.

3.27 - با توجه به معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

که در آن $\rho = |\psi|^2$ و $\vec{j}$ به صورت مقابل است:

$$\vec{j}(\vec{r},t) = -\left(\frac{i\hbar}{2m}\right)\left[\psi^* \vec{\nabla}\psi - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi\right]$$

$$= \left(\frac{\hbar}{m}\right) \mathrm{Im}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi\right)$$

در راستای مولفه $\hat{r}$، $\vec{j}$ به صورت مقابل می‌شود:

$$j_r = \vec{j}\cdot\hat{r} = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(\psi^* \frac{\partial}{\partial r}\psi\right)$$

$$= \frac{\hbar}{m} R_{El}(r) \frac{d}{dr} R_{El}(r)$$

با قرار دادن قسمت شعاعی: $\psi = R_{El}(r) Y_l^m(\theta,\varphi)$:

+ با توجه به تعریف $R_{El}(r) = \frac{u_{El}(r)}{r}$، در صورتی که $u \propto r^{l+1}$، در این صورت $R \propto r^l$:

$$j_r \propto l . r^{2l-1}$$

شار خروجی از یک کره به شعاع r برابر این می‌شود:

$$4\pi r^2 j_r \propto l r^{2l+1}$$

که در حد $r \to 0$، شار خروجی صفر می‌شود، و پایستگی برقرار می‌شود.

+ اما در صورتی که $u \propto r^{-l}$، $R \propto r^{-(l+1)}$ در این صورت

$$j_r \propto (l+1) r^{-2l-3}$$

شار خروجی از کره نیز می‌شود:

$$4\pi r^2 j_r \propto (l+1) r^{-2l-1}$$

که در حد $r \to 0$، شار خروجی نامعین (بینهایت) می‌شود! و به این معنی پایستگی برقرار نخواهد بود. مانند این است که یک منبع جریان (تولید ذره) در مبدا کره وجود دارد.

3.31- با توجه به اینکه $(A\times B)^\dagger = -B\times A$ ، می‌توان به سادگی نشان داد که M هرمیتی است.

$$\vec{M}^\dagger = \frac{1}{2m}\left(-\vec{L}\times\vec{p} + \vec{p}\times\vec{L}\right) - \frac{Ze^2}{r}\vec{r} \longrightarrow M^\dagger = M$$

حال با توجه به اینکه $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{Ze^2}{r}$ است می‌توان نشان داد:

$$[\vec{M}, H] = 0$$

جهت نشان دادن این عبارت کافیست $\vec{p}$ و $\vec{L}$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$L_x = i\left(\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$L_y = i\left(\cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} - \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$P_x = -i\left(\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$P_y = -i\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$P_z = -i\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

لذا با جایگذاری در تعریف بردار رانگ - لنز می‌توان دید که جابجاگرش با هامیلتونی (مسئله) صفر است.