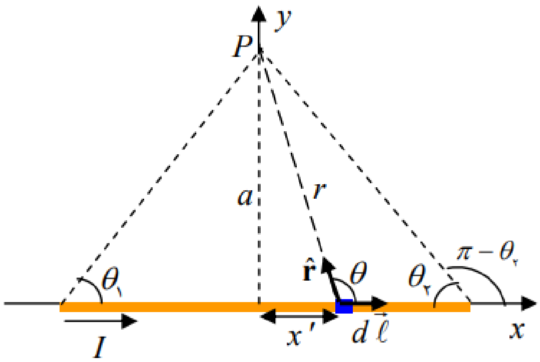
پاسخ سوال اول

مثال ۱- ۱۰ میدان مغناطیسی سیم راست محدود: سیم راست و نازکی برابر شکل (۲-۱۰) در راستای محور x قرار دارد و جریان پایای I از آن می گذرد. میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P به فاصله‌ی a از سیم به‌دست آورید. (اثرهای رابط ها در دوانتهای سیم را نادیده بگیرید)



شکل ۲- سیم نازک با جریان I

حل: نخست جزء طول $d\vec{\ell} = +dx'\,\mathbf{i}$ در نظر بگیرید که جریان I از آن می‌گذرد. مختصات مکان این جزء جریان $\mathbf{r}' = x'\,\hat{\mathbf{i}}$ است. حال نقطه‌ی میدان را در نظر بگیرید. آن را با زیرنویس "P" نشان خواهیم داد. مختصات نقطه‌ی میدان در $(x\,,y) = (\circ,a)$ است. بردار مکان آن $\mathbf{r}_P = a\,\hat{\mathbf{j}}$ است. بنابراین، بردار نسبی بین چشمه‌ی جریان و نقطه‌ی میدان $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}'$ است. پس، در این مثال $\mathbf{r} = a\,\hat{\mathbf{j}} - x'\,\hat{\mathbf{i}}$ است. اندازه‌ی بردار $\mathbf{r}$ ، فاصله‌ی بین چشمه‌ی جریان و نقطه‌ی P، برابر $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{a^۲ + x'^۲}$ است. با توجه به شکل (۲-۱۰) بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ از چشمه تا نقطه‌ی میدان عبارت است از

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{a\,\hat{\mathbf{j}} - x'\,\hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{a^۲ + x'^۲}} = \sin(\pi-\theta)\,\hat{\mathbf{j}} + \cos(\pi-\theta)\,\hat{\mathbf{i}} = \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}} - \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱۰-۵)$$

حالا می‌توان ضرب خارجی $d\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}}$ را حساب کرد. داریم

$$d\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}} = (+dx'\,\hat{\mathbf{i}})\times(\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}} - \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}) = (dx'\sin\theta)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۶)$$

بنابراین، میدان مغناطیسی حاصل از چشمه‌ی جریان جزیی $Id\vec{\ell}$ عبارت است از

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^۲} = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\frac{dx'\sin\theta}{r^۲}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۷)$$

که نشان می‌دهد جهت میدان در نقطه‌ی P در راستای $+\hat{\mathbf{k}}$ یا به سوی بیرون از صفحه است. متغیرهای r و θ و x' مستقل ازهم نیستند و بهتر است x' و r را برحسب θ بازنویسی کنیم. با توجه به شکل (۲-۱۰) داریم:

$$r = \frac{a}{\sin(\pi-\theta)} = a\csc\theta \quad , \quad x' = a\cot(\pi-\theta) = -a\cot(\theta) \Rightarrow dx' = a\csc^2\theta\,d\theta \qquad (۱۰-۸)$$

که اگر در رابطه ی (۷-۱۰) قرار دهیم به‌دست می‌آید

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\frac{(a\csc^۲\theta\,d\theta)\sin\theta}{(a\csc\theta)^۲}\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi a}\sin\theta\,d\theta\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۹)$$

برای این که میدان مغناطیسی کل را بیابیم، باید از رابطه‌ی (۹-۱۰) انتگرال بگیریم. حدود انتگرال باید همه‌ی سیم حامل جریان را دربر داشته باشد. یعنی، زاویه ی θ از $\theta_۱$ تا $\pi-\theta_۲$ تغییر می کند. پس:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi a}\int_{\theta_۱}^{\pi-\theta_۲}\sin\theta\,d\theta\,\hat{\mathbf{k}} = -\frac{\mu_\circ I}{۴\pi a}\left[\cos(\pi-\theta_۲) - \cos\theta_۱\right]\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi a}\left(\cos\theta_۲ + \cos\theta_۱\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۱۰)$$

جمله‌ی اول شامل $\theta_۲$ سهم قسمتی از سیم است که در راستای $+x$ محور افقی قرار دارد و جمله‌ی دوم (شامل $\theta_۱$) سهم آن بخش از سیم است که در امتداد $-x$ قرار دارد. این دو جمله باهم جمع می شوند!

حالت‌های خاص: (۱) اگر نقطه‌ی P روی نیمساز سیم باشد، وضعیت متقارن خواهیم داشت و $\theta_۲ = \theta_۱$ است. اگر طول سیم $۲L$ باشد، آنگاه $\cos\theta_۱ = L/\sqrt{L^۲ + a^۲}$ است و اندازه‌ی میدان عبارت است از

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}} \qquad (۱۰-۱۱)$$

(۲) **سیم بینهایت دراز:** $L \to \infty$

در این حالت $(\theta_۱, \theta_۲) \to (۰,۰)$ میل می‌کنند و از رابطه‌ی (۱۰-۱۰) خواهیم داشت:

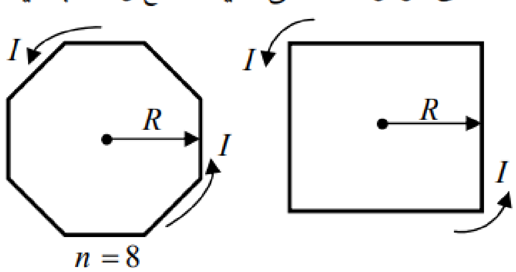
$$\mathbf{B}_\infty = \frac{\mu_۰ I}{۲\pi a}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۱۲)$$

جهت میدان در نقطه‌ی P بیرون از صفحه است. اگر نقطه‌ی P را در زیر سیم برمی گزیدیم، جهت میدان $\mathbf{B}$ در آن نقطه به سوی **درون** صفحه می شد. در حد $L \to \infty$، سامانه تقارن استوانه‌ای دارد و خط‌های میدان مغناطیسی همانند شکل (۳-۱۰) دایره‌ای اند. در حالت کلی و برای سیم دراز، جهت میدان بنا به قاعده‌ی انگشت‌های دست راست، حول سیم می‌چرخد. این رفتار در شکل (٤-۱۰) نشان داده شده است. اگر انگشت شست راست در جهت جریان باشد، چرخش چهار انگشت دیگر دست راست جهت میدان مغناطیسی را نشان می دهد.

مثال ۵- ۱۰ میدان مغناطیسی چند ضلعی منتظم[*] : **(الف)** میدان مغناطیسی را در مرکز حلقه‌ی مربع شکلی که جریان پایای I از آن می‌گذرد، به‌دست آورید. فاصله‌ی مرکز مربع تا یک ضلع را همانند شکل (۱۲-۱۰) R فرض کنید.

(ب): میدان را در مرکز یک n ضلعی منتظم با جریان پایای I حساب کنید. فاصله‌ی مرکز n ضلعی تا یک ضلع را R بنامید

(پ): نشان دهید که در حد $n \to \infty$ پاسخ شما به میدان یک حلقه‌ی دایره‌ای در مرکز آن، $B_۰ = \mu_۰ I/۲R$ کاهش می یابد.



شکل ۱۲-۱۰ میدان چند ضلعی منتظم در مرکز آن

حل: **(الف)** از رابطه‌ی (۱۰-۱۰) با $a = R$ و $\theta_۲ = \theta_۱ = ٤۵^\circ$ استفاده کنید. برای چهار ضلع به‌دست می‌آید

$$B = ٤\frac{\mu_۰ I}{٤\pi R}\left(\cos ٤۵^\circ + \cos ٤۵^\circ\right) = \frac{\sqrt{۲}\mu_۰ I}{\pi R}$$

(ب): این بار $\theta_۲ = \theta_۱ = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{n}$ و $a = R$ اند. در نتیجه، میدان یک ضلع عبارت است از

$$B_۱ = \frac{\mu_۰ I}{٤\pi R}\left(\cos(\pi/۲ - \pi/n) + \cos(\pi/۲ - \pi/n)\right) = \frac{۲\mu_۰ I}{٤\pi R}\sin\left(\pi/n\right) \qquad (۱۰-۳۱)$$

و میدان حاصل از n ضلع برابر $nB_۱$ است. در نتیجه، داریم

$$\Rightarrow B = nB_۱ = \frac{n\mu_۰ I}{۲\pi R}\sin\left(\pi/n\right) \qquad (۱۰-۳۲)$$

(پ): در حد $n \to \infty$ در رابطه‌ی (۱۰-۳۲) خواهیم داشت $\sin(\pi/n) \approx \pi/n$ و در نتیجه

$$B_\infty = \frac{n\mu_۰ I}{۲\pi R}\left(\pi/n\right) = \frac{\mu_۰ I}{۲R} \qquad (۱۰-۳۳)$$

---

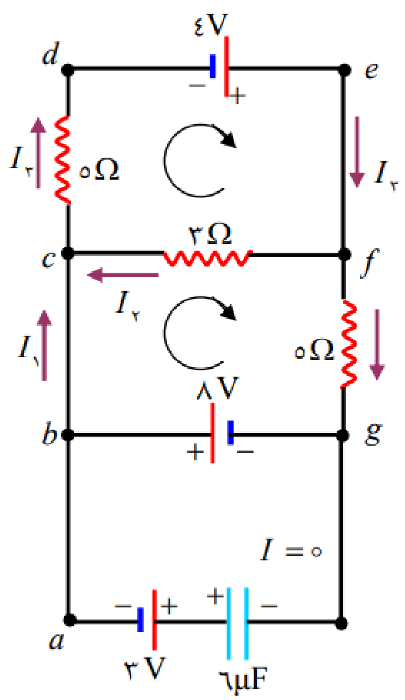
[*] برگرفته از David J. Griffiths, Introduction To Electrodynamics, 2nd edd., Prentice – Hall, 1989.

پاسخ سوال دوم

مثال ۱۶-۸ مدار با چند حلقه: (الف) در مدار شکل (۳٤-۸) و در شرایط پایا، جریان‌های $I_۱$، $I_۲$ و $I_۳$ را به‌دست آورید.

(ب): بار خازن را حساب کنید.

حل: پیش از هر چیز توجه کنید که چون خازن پر است (شرایط پایا) ، جریانی از آن نمی‌گذرد. در نتیجه، در مسیر $ghab$ بین نقاط g و b جریان وجود ندارد. بنابراین، وقتی بارهای مربوط به جریان $I_۱$ به نقطه‌ی g می‌رسند، همگی با گذشتن ازباتری ۸ ولتی به سوی نقطه‌ی b می‌روند. پس، $I_{gb}=I_۱$ است. جریان‌ها را همانند شکل نمادگذاری کنید و قانون اول کرکهوف را در پیوندگاه c به‌کار ببرید. به‌دست می‌آید



شکل ۳٤-۷ مدار با چند حلقه

$$I_۱+I_۲=I_۳ \qquad (۸-۸۷)$$

حالا از قانون دوم کرکهوف در حلقه‌های $defcd$ و $cfgbc$ استفاده کنید.حرکت خود را ساعتگرد برگزینید. داریم

$$defcd \qquad ٤\,\mathrm{V}-(۳\Omega)I_۳-(٥\Omega)I_۲=۰ \qquad (۸-۸۸)$$

$$cfgbc \qquad (۳\Omega)I_۳-(٥\Omega)I_۱+۸\,\mathrm{V}=۰ \qquad (۸-۸۹)$$

از معادله‌ی (۸۷-۸) داریم $I_۱=I_۳-I_۲$ ، آن را درمعادله‌ی (۸۹-۸) جایگزین کنید. به دست می‌آید

$$(۸\Omega)I_۳-(٥\Omega)I_۲+۸\,\mathrm{V}=۰ \qquad (۸-۹۰)$$

اگر معادله‌ی (۹۰-۸) را از معادله‌ی (۸۸-۸) کم کنیم، $I_۲$ حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$I_۳=-\frac{٤\,\mathrm{V}}{۱۱\Omega}=-۰{,}۳٦٤\,\mathrm{A} \qquad (۸-۹۱)$$

چون $I_۳$ منفی است، نتیجه می‌گیریم که جهت $I_۳$ در مقاومت ۳ اهمی از c به f است.

با وجود این تفسیر از جهت جریان $I_۳$، در دنباله‌ی مسئله باید از همین مقدار منفی استفاده کنیم، چون معادله‌های ما بر اساس گزینه‌ی اولیه‌ی جهت‌های نوشته شده اند.

با استفاده از $I_۳=-۰{,}۳٦٤\,\mathrm{A}$ در معادله‌های (۸۷-۸) و (۸۹-۸) به‌دست میاید

$$I_۱=۱{,}۳۸\,\mathrm{A} \quad , \quad I_۲=۱{,}۰۲\,\mathrm{A} \qquad (۸-۹۱)$$

(ب): می‌توانیم قانون دوم کرکهوف را در حلقه‌ی $bghab$ (یا هر حلقه‌ی دیگری که شامل خازن است) به کار ببریم و اختلاف پتانسیل دو سر خازن، ΔV_{cap}، را حساب کنیم. ما از این اختلاف پتانسیل در معادله‌ی حلقه استفاده می‌کنیم اما از هیچ قراردادی برای علامت آن استفاده نمی‌کنیم، چون بار روی خازن فقط به اندازه‌ی اختلاف پتانسیل بستگی دارد. اگر در حلقه‌ی $bghab$ ساعتگرد حرکت کنیم خواهیم داشت

$$-۸\,\mathrm{V}+\Delta V_{cap}-۳\,\mathrm{V}=۰ \quad \Rightarrow \quad \Delta V_{cap}=۱۱\,\mathrm{V} \qquad (۸-۹۲)$$

چون $Q=C\Delta V$ است، پس بار روی خازن برابر است با

$$Q=(٦\,\mu\mathrm{F})(۱۱\,\mathrm{V})=٦٦\,\mu\mathrm{C} \qquad (۸-۹۳)$$