نسبیت عام

- سقوط آزاد غیرموضعی و معادلات انحراف ژئودزیک.

• اگر دو ذره‌ی با جرم آزمون که تحت میدان گرانشی در حال سقوط هستند به طور غیرموضعی انتخاب داریم به یکدیگر نزدیک شوند، با در نظر گرفتن معادلات نیوتنی می‌توان به دست آورد فاصله‌ی این دو که با η^α مشخص می‌شود به صورت ذیل تحول می‌یابد که در آن φ میدان گرانشی نیوتنی می‌باشد.

$$\ddot{\eta}^\alpha + K^\alpha{}_\beta \eta^\beta = 0 \quad ; \quad K^\alpha{}_\beta = K_\beta{}^\alpha = \partial^\alpha \partial_\beta \varphi. \qquad (1)$$

* برای به دست آوردن این معادله‌ی تحول فاصله‌ی بین دو ذره، ذره‌ها را ابتدا در $x^a = x^a(t)$ و دیگری را در $x^a = x^a(t) + \eta^a(t)$ در نظر بگیرید؛ با استفاده از این صورت می‌توان با توجه به معادله‌ی دوم نیوتن نوشت:

$$\ddot{x}^a = -(\partial^a \varphi)_P$$

$$\ddot{x}^a + \ddot{\eta}^a = -(\partial^a \varphi)_Q$$

لذا با بسط تیلور می‌توان به نتیجه‌ی مطلوب رسید.

• با توجه به تعریف $K^\alpha{}_\beta$ می‌توان به راحتی نشان داد:

$$Tr(K) = \nabla^2 \varphi \qquad (2)$$

• با توجه به قانون گرانش نیوتنی، $\nabla^2\varphi = 4\pi G \rho$ و (2) در صورتی که ماده نداشته باشیم می‌توان گفت:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

$$Tr(K) = 0 \qquad (3)$$

یا به عبارتی:

• برای دو ذره در میدان گرانشی غیرموضعی با هم کیان که در حال سقوط آزاد اند، با رویکردی که نسبیت عام را به عنوان اصل ما بپذیریم که ذرات آزاد در ژئودزیک‌های زمان‌گونه حرکت کنند، تحول انحراف دو ژئودزیک مربوط به این دو ذره به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\frac{D^2 \delta x^a}{D\tau^2} + K^\alpha{}_\beta \delta x^\beta = 0 \quad ; \quad K^\alpha{}_\beta = -R^a{}_{bcd}\, e^a_\alpha \frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau} e^d_\beta \qquad (4)$$

* اثبات در تمرین 8.1 و بار دیگر در اینکه (به سبک d'Inverno) در 8.2.

• با توجه به تعریف $K^a{}_\beta$ می‌توان نشان داد:

$$\mathrm{Tr}(K) = R_{ac} \qquad (5)$$

• حال در اینجا آن را اینطور داشته باشیم که همانند (3) توصیف‌گر قانون گرانش در خلأ باشد. به عبارتی:

$$R_{ac} = 0$$

یا به عبارتی:

$$\mathrm{Tr}(K) = 0 \qquad (6)$$

• با توجه به اینکه (3) مشتق دوم پتانسیل گرانشی بود. و (6) مشتق دوم متریک است. می‌توان این برداشت را کرد:

«گرانش توسط متریک (فضازمان یا هندسه) توصیف می‌شود.»

• و این در توافق با اصل ماخ ضعیف می‌باشد.

- معادله میدان اینشتین

• در مورد آنکه می‌خواستیم قانون گرانشی نیوتن به فضا را، $R_{ac}=0$، به دست آوردیم. حال می‌توان رابطه کلی‌تر را چنین بیان کرد:

$$G^{ab}=kT^{ab} \qquad (7)$$

* این رابطه با توجه به اینکه بقای انرژی $\nabla_b T^{ab}=0$ و اتحاد دوم بیانکی $\nabla_b G^{ab}=0$ را داریم انتظار داریم که با یک ثابت بتوانند برابر هم قرار گیرند.

• با توجه به اصل تطابق می‌توان ضریب ظاهر شده در (7) را به صورت ذیل به دست آورد.

$$k=\frac{8\pi G}{c^4} \qquad (8)$$

* اثبات با جزئیات در بخش 12.4 و 12.5 کتاب — d'Inverno

• توجه شود که معادلات میدان چون غیر خطی‌اند (همانطور که انتظار داشتیم) لذا جواب بسیاری دارد. حتی از سوی دیگر به علت متریک‌های گوناگون نیز در دو منطقه مجاور (که با تبدیل کلی به هم تبدیل می‌شوند) می‌تواند پاسخ متریک متفاوت باشد.

* جزئیات بیشتر در بخش 13.6 کتاب ــ

• اینشتین به خاطر اینکه معادله میدان پاسخ عالمی را به همراه ثابت باشد مجبور شد به اضافه کردن ثابت کیهان‌شناسی:

$$G_{ab}-\Lambda g_{ab}=8\pi T_{ab}$$

که بعدها با کشف انبساط عالم کنار گذاشته شد ولی مجدداً زمانی که فهمیدیم که انبساط شتاب دار است، آن را برگرداندیم.

• با توجه به اینکه از اصل ارزش حرکت روی ژئودزیک زمان‌گونه ذرات آزاد استفاده کردیم در معادلات میدان صحیح می‌توان به جای آن هم معادلات میدان را به عنوان اصل پذیرفت.

* به عنوان مثال به شکل ذرات ایده‌آل که $T^{ab}=\rho u^a u^b$ است می‌توان گفت، چون شرط چهاربردار $u^a u_a=1$ است:

$$u^b\nabla_b u^a=0$$

که نشان دهنده حرکت ذره روی معادله ژئودزیک زمان‌گونه ($u^a u_a=1$) است که با $\nabla_b(\rho u^a u^b)=0$ به دست آمد.

ـ لاگرانژی معادله میدان اینشتین

• معادلات میدان اینشتین ⑦ ص3 را به صورت ذیل معرفی کرد که با وارد کردن آنها به همان معادلات میدان منجر بشود؛

$$\mathcal{L} = \frac{1}{k}\mathcal{L}_{E.H.} + \sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m \qquad (9)$$

که در آن $\mathcal{L}_{E.H.}=\sqrt{-g}R$ می‌باشد. که به لاگرانژی اینشتین - هیلبرت موسوم است.

• توجه شود که می‌توان $\mathcal{L}_{E.H.}$ را به صورت ذیل نوشت:

$$\mathcal{L}_{E.H.} = \mathcal{L}_{eff} + Q^a{}_{,a} \qquad (10)$$

که در آن:

$$\mathcal{L}_{eff} = g^{ab}\left(\Gamma^d_{ac}\Gamma^c_{bd} - \Gamma^c_{ab}\Gamma^d_{cd}\right)$$

(10) الف

و $Q^a{}_{,a}$ مشتق کامل است که:

$$Q^a = g^{bc}\Gamma^a_{bc} - g^{ab}\Gamma^c_{bc}.$$

(10) ب

• لازم به ذکر است که $\mathcal{L}_{E.H.}$ را جای لاگرانژی معمول می‌توان به صورت $\mathcal{L}_{eff}$ نوشت زیرا که $Q^a{}_{,a}$ مشتق کامل بوده و سهمی نخواهد داشت. اما این کار ایرادی دارد چرا که باید لاگرانژی اسکالر باشد و این $Q^a{}_{,a}$ کار را درست می‌کند.

— انرژی تکانه در نسبیت عام.

energy-momentum tensor is variation of matter lagrangian.

• در نسبیت خاص پایستگی انرژی-تکانه عبارت ذیل را داریم:

$$\partial_b T^{ab}=0 \qquad (11)$$

لذا با افزوده شدن میدان گرانشی انتظار داریم، این مفهوم نیز در انرژی تکانه سهیم باشد ولذا به صورت ذیل می‌نویسیم بقای انرژی-تکانه را:

$$\nabla_b T^{ab}=0 \qquad (12)$$

• می‌توان بقای انرژی تکانه کلی (12) (که شامل میدان گرانشی هم می‌باشد) را به صورت ذیل نوشت، که در آن $\tilde{T}_\mu{}^\rho=\sqrt{-g}\,T_\mu{}^\rho$ است و $\tilde{\theta}_\mu{}^\rho{}_{,\rho}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\beta\rho,\mu}T^{\beta\rho}$ می‌باشد که در واقع به ترتیب مربوط به انرژی تکانه ماده و گرانش (14) هستند:

$$(\tilde{T}_\mu{}^\rho+\tilde{\theta}_\mu{}^\rho)_{,\rho}=0 \qquad (13)$$

* اگر از رابطه‌ی (12) شروع کنیم می‌توان نوشت:

$$g^{\nu\rho}T_{\mu\nu;\rho}=0$$

$$T_{\mu\nu}{}^{,\nu}-g^{\nu\rho}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho}T_{\alpha\nu}-g^{\nu\rho}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\rho}T_{\mu\alpha}=0 \qquad (14)$$

با توجه به اینکه متریک همسان باشد، (3) ص ۴۱ مرور ریاضیات نسبیت عام و تقارن دیگر T می‌توان گفت:

$$-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho}T^{\rho}{}_{\alpha}=-\frac{1}{2}g_{\beta\rho,\mu}T^{\beta\rho} \qquad (i)$$

همینطور می‌توان گفت از (3) ص ۴۱ مرور ریاضیات:

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} \qquad (ii)$$

سپس با جایگذاری (i) و (ii) در (*) به ترتیب در جملات دوم و سوم می‌توان نوشت با اعمال متریکی بودن:

$$T_\mu{}^\rho{}_{,\rho} + T_\mu{}^\rho \frac{(\sqrt{-g})_{,\rho}}{\sqrt{-g}} - \frac{1}{2} g_{\beta\rho,\mu} T^{\beta\rho} = 0$$

یا به سادگی:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\tilde{T}_\mu{}^\rho{}_{,\rho} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\beta\rho,\mu} T^{\beta\rho}\right) = 0$$

حال با توجه به تعریف $\tilde{T}$ و $\tilde{\Theta}$ می‌توان نوشت نتیجه‌ی مطلوب را.

- با توجه به (13) می‌توان گفت و نشان داد که $\tilde{\Theta}$ صراحتاً مربوط به انرژی تکانه‌ی گرانشی است:

$$\tilde{\Theta}_\mu{}^\rho = \delta^\rho_\mu \mathcal{L}_{eff} - g^{\alpha\beta}{}_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial g^{\alpha\beta}{}_{,\rho}} \qquad (14)$$

که در آن $\mathcal{L}_{eff}$ به صورت (12) الف می‌باشد.

* اثبات در بخش Farhoudi, 1998, Supplementary lect. 4.2.

- با توجه به معادله‌ی (13) و (14) می‌توان گفت که انرژی تکانه‌ی میدان گرانشی، در معادله‌ی میدان اینشتین ظاهر نمی‌شود.
- همینطور با توجه به (13) و (14) می‌توان گفت که انرژی تکانه‌ی میدان گرانشی تانسور نمی‌باشد.
- والبته انرژی تکانه‌ی میدان گرانشی با توجه به (13) و (14) localized نمی‌شود.

note that, energy-momentum tensor which is introduced in QFT is different; difference of these are given by Belinfante–Rosenfeld formula which explained in below paper.

https://authors.library.caltech.edu/19366/1/GoMa1992.pdf