پاسخنامه‌ی چهارم تمرینها — کوانتوم پیشرفته ۲

3.22 — با توجه به اینکه $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ تعریف ما در مکانیک کلاسیک است، حال در اینجا با قرار دادن $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ به عنوان اپراتور، می‌توان به کوانتوم تعمیم داد:

$$\vec{L} = -i\hbar(\vec{r} \times \vec{\nabla})$$

حال می‌دانیم در دستگاه کروی گرادیان به چه صورت است:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

می‌دانیم $\vec{r} = r\hat{r}$ بنابراین:

$$\vec{L} = -i\hbar\left\{ r\cancel{(\hat{r}\times\hat{r})}\frac{\partial}{\partial r} + \overbrace{(\hat{r}\times\hat{\theta})}^{\hat{\varphi}}\frac{\partial}{\partial \theta} + \overbrace{(\hat{r}\times\hat{\varphi})}^{-\hat{\theta}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right\}$$

$$= -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\varphi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

بنابراین $\vec{L}$ به θ و φ وابستگی پیدا کرد:

حال همه را به کارتزین برمی‌گردانیم با توجه به:

$$\begin{cases} \hat{\theta} = (\cos\theta\cos\varphi)\hat{i} + (\cos\theta\sin\varphi)\hat{j} - (\sin\theta)\hat{k} \\ \hat{\varphi} = -(\sin\varphi)\hat{i} + (\cos\varphi)\hat{j} \end{cases}$$

$$\vec{L} = -i\hbar\left[(-\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})\frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right\}$$

$$= \underbrace{(-i\hbar)\left\{-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} - \cos\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial \varphi}\right\}}_{=L_x}\hat{i} + \underbrace{(-i\hbar)\left\{\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} - \sin\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial \varphi}\right\}}_{=L_y}\hat{j} + \underbrace{(-i\hbar)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)}_{=L_z}\hat{k}$$

3.26 + برای ذره‌ای با اسپین $s=1$ ، همانطور که در سوال 6 ... نیز بدست می‌آید :

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

همینطور با توجه به تعریف $S_\pm = S_x \pm iS_y$ و عناصر ماتریسی $S_\pm$: $\langle s, m' | S_\pm | s, m \rangle = \hbar\sqrt{2 - m(m\pm1)}\ \delta_{m', m\pm1}$

ماتریس‌ها می‌شوند :

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

بنابراین بدست می‌آید :

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-) = \frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

+ حال برای S_x ، ویژه مقادیر بدست می‌آید :

$$\det(S_x - \lambda I) = 0 \longrightarrow \lambda = -\hbar, 0, +\hbar$$

ویژه توابع متناظر نیز بدست می‌آید :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

+ برای S_y ویژه مقادیر بدست می‌آید :

$$\det(S_y - \lambda I) = 0 \longrightarrow \lambda = -i\hbar, 0, +i\hbar$$

ویژه توابع متناظر نیز بدست می‌آید

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e \end{pmatrix}$$