پاسخ سری دهم تمرینات کوانتوم پیشرفته ۲

3.15 (a): با توجه به تعریف عملگر چگالی، معادله 3.100 را می‌توان نوشت:

$$\rho(t)=\sum_i w_i |\alpha^{(i)},t\rangle\langle\alpha^{(i)},t|$$

و در تصویر شرودینگر می‌دانیم تحول یک حالت به صورت زیر قابل بیان است:

$$|\alpha^{(i)},t\rangle = U(t,t_0)|\alpha^{(i)},t_0\rangle$$

حال با این جایگذاری می‌توان نوشت:

$$\rho(t)=\sum_i w_i\, U(t,t_0)|\alpha,t_0\rangle\langle\alpha,t_0|\,U^\dagger(t,t_0)$$

$$= U(t,t_0)\underbrace{\sum_i w_i |\alpha,t_0\rangle\langle\alpha,t_0|}\,U^\dagger(t,t_0)$$

$$\rho(t)= U(t,t_0)\,\rho(t_0)\,U^\dagger(t,t_0)$$

توجه شود که این معادله عملاً (علیرغم شباهت ظاهری) با تحول عملگر در تصویر هایزنبرگ متفاوت است
تفاوت بارز آن در علامت منفی است ($A^H(t) = U^\dagger(t,t_0) A(t_0) U(t,t_0)$) و اینکه اپراتور ساندویچ شده
در آن، در زمان t محاسبه ولی در معادله فوق در t_0 است.

این معادله به معادله لیوویل فون-نیومن مرسوم است.

3.15 (b): یک هنگرد خالص را می‌توان نوشت $\rho = |\alpha^{(n)}\rangle\langle\alpha^{(n)}|$ یا به عبارتی $\rho^2=\rho$

حال اگر یک هنگرد در زمان $t=t_0$، خالص باشد می‌توان نوشت $\rho^2(t_0)=\rho(t_0)$، حال اگر در
$t>t_0$ نیز همین برقرار باشد می‌توان نوشت در آن زمان نیز خالص باقی می‌ماند.

با توجه به 3.15 (ب) پاسخ سوال ۱ در تمرین ۲ تست :

$$\rho^2(t) = U(t,t_0)\rho(t_0)\underbrace{U^{+}(t,t_0)U(t,t_0)}_{=1}\rho(t_0)U^{+}(t,t_0)$$

$$= U(t,t_0)\underbrace{\rho^2(t_0)}_{=\rho(t_0)}U^{+}(t,t_0)$$

$$= \rho(t)$$

لذا بعد از هر زمانی، همچنان خالص باقی خواهد ماند.