Álgebra Linear

Ter uma base sólida de álgebra linear te ajudará muito lá na frente quando estiver lidando com assuntos de Data Science mais complexos mas que são construídos em cima destes conceitos. No vídeo abaixo tem algumas aplicações da Álgebra Linear no mundo de Ciência de Dados.

Álgebra Linear - Aplicação em Ciência de dados
Why is Linear Algebra Useful? (10 min, em inglês)

Nesse vídeo você vê como a estrutura de matriz e vetores te ajudará a estruturar os cálculos para resolução de problemas e como transformar uma imagem em uma coleção de números para aplicar técnicas de reconhecimento de imagem e redução de dimensionalidade. Coisas que te ajudarão a reduzir o número de variáveis, minimizando a perda de informação.

Vetores

Vetor pode ser conceituado de diversas formas. Uma delas é: um segmento de reta **orientado** que corresponde ao deslocamento de um ponto A até outro ponto B.
Vamos começar imaginando um bairro super simples. Em amarelo nós temos as avenidas x(horizontal) e y(vertical), as linhas brancas são nossas ruas e cada quadra tem 1km x 1km.

Imagem 1: mapa cartesiano.

Agora imagine que você está bem no encontro dessas avenidas. Vamos chamar este local de **Ponto de Origem**.

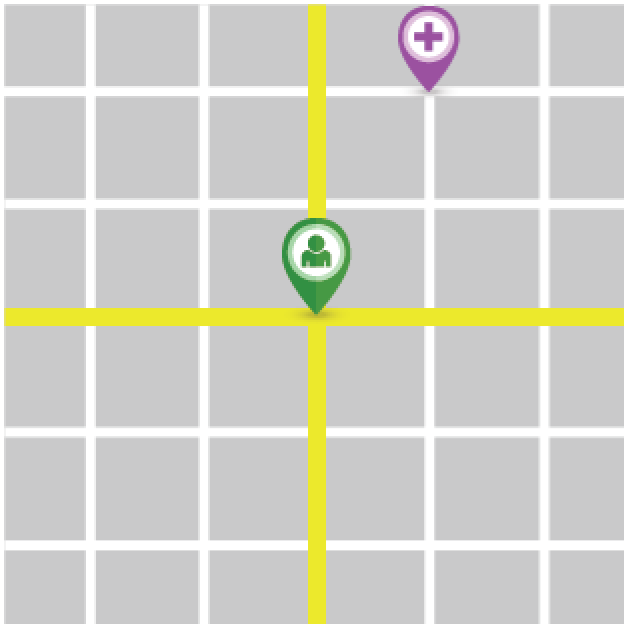


Imagem 2: mapa com um ícone de usuário e um ícone de farmácia.

E como poderíamos indicar onde fica a farmácia à partir do ponto de origem?

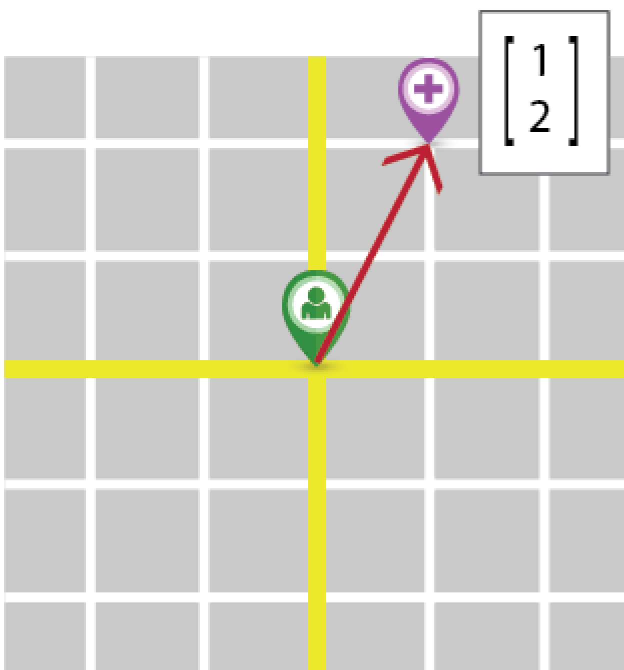


Imagem 3: mapa com um ícone de usuário e um ícone de farmácia e uma seta saindo do ponto de origem até a farmácia.

Pronto! Aproveitamos para colocar o "endereço" da farmácia $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Lembre-se que estes valores são relativos ao ponto de origem. Também podemos ler da seguinte maneira: andamos uma quadra para a direita e duas quadras para cima (1, 2).

Representação de vetores
Existem mais de uma forma de representar os vetores. Abaixo as formas mais recorrentes.
(1,2) ou $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
Essas duas maneiras querem dizer a mesma coisa: um vetor no qual você "andou" um passo no eixo *x* e dois passos no eixo *y*

Voltando para o nosso mapa:

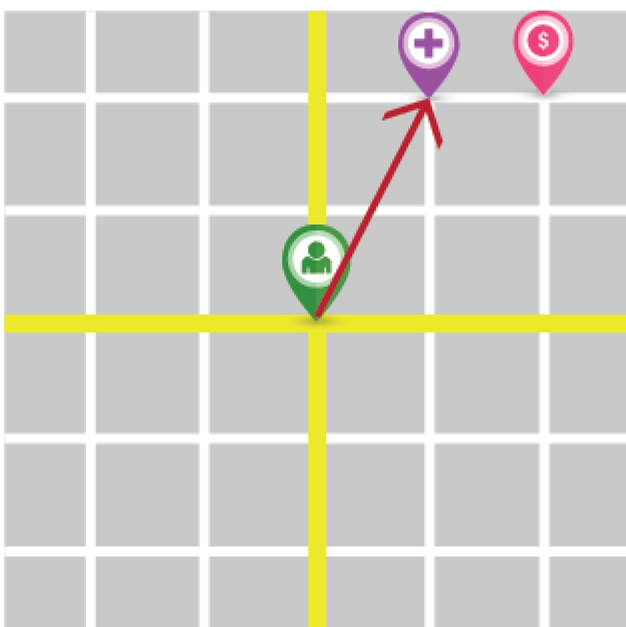


Imagem 4: mapa com um ícone de usuário e um ícone de farmácia, uma seta saindo do ponto de origem até a farmácia e um ícone indicando que há banco à direita da farmácia.

Agora que chegamos ao destino (farmácia), como podemos fazer para ir de lá até o banco? Podemos andar uma quadra para a direita e não fazer nenhum movimento no sentido vertical.

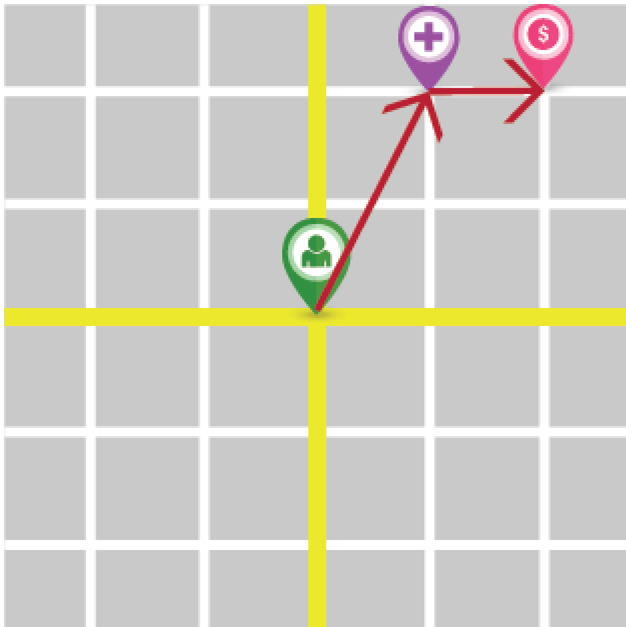


Imagem 5: mapa com um ícone de usuário e um ícone de farmácia, uma seta saindo do ponto de origem até a farmácia e um ícone indicando que há banco à direita da farmácia, agora com um vetor começando de onde o anterior havia terminado (ou seja, ligando a farmácia ao banco).

E se fossemos direto do ponto de origem para o banco teríamos o seguinte caminho:

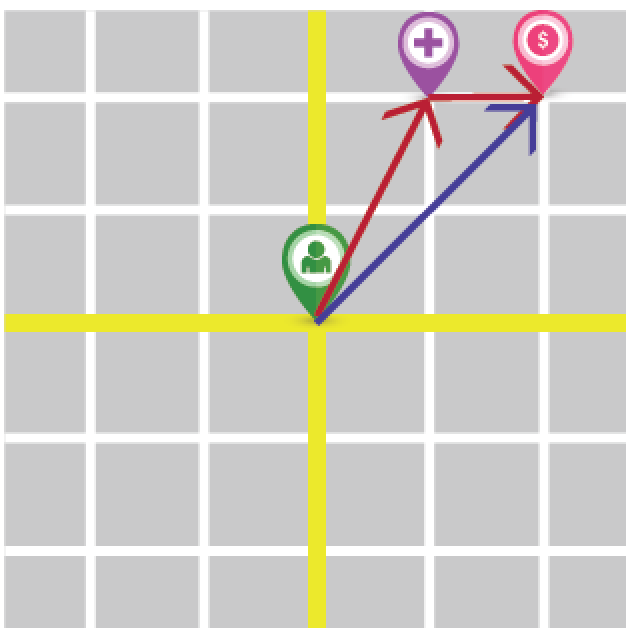


Imagem 6: Soma de vetores

Intuitivamente você já fez sua primeira **soma de vetores**! Veremos ela em detalhes mais adiante.

Ah! E não é necessário que você fique confinado à apenas duas dimensões.

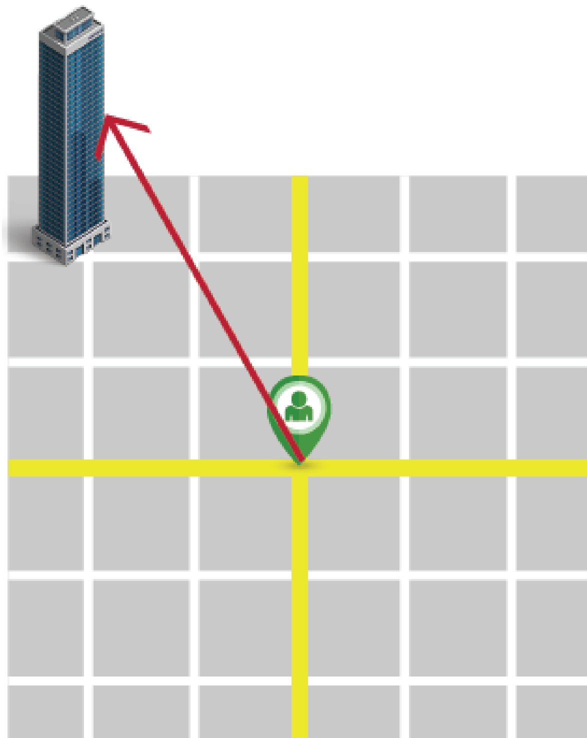


Imagem 7: Mapa com a terceira dimensão. Representado por andares de um prédio

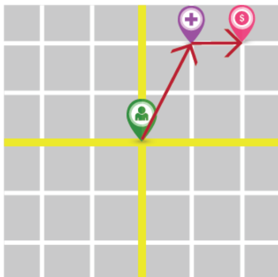
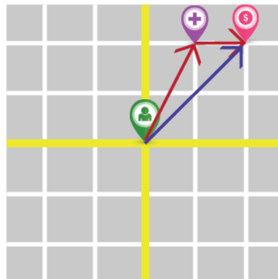
Para ir do ponto de origem até o oitavo andar deste prédio podemos pensar no seguinte vetor

$\overrightarrow{p} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ ou $\overrightarrow{p} = (-2, 2, 8)$

Você pode voltar nas imagens anteriores sempre que precisar reforçar o conceito. Agora que já temos uma intuição geométrica, vamos dar uma olhada em suas representações numéricas. A grande vantagem de fazer isso é que facilita na hora de fazer os cálculos e também permite trabalhar em n-dimensões.

Soma de vetores

Relembrando essa operação que fizemos anteriormente:

 → 

Vamos traduzir em números:

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

Conseguimos representar graficamente até 3 dimensões. Mas a beleza da abstração da álgebra linear é que podemos executar operações em quantas dimensões quisermos!

$$\begin{bmatrix}1\\2\\2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\3\\5\\-8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\5\\7\\-5\end{bmatrix}$$

Multiplicação de vetor por um escalar

Quando você multiplica um vetor por um número, esse número é chamado de escalar. Isso pois ele transforma a escala do vetor em que atua. Imagine que se você multiplicar um vetor por 2, você estará "esticando" a reta até que ela fique com o dobro do tamanho.

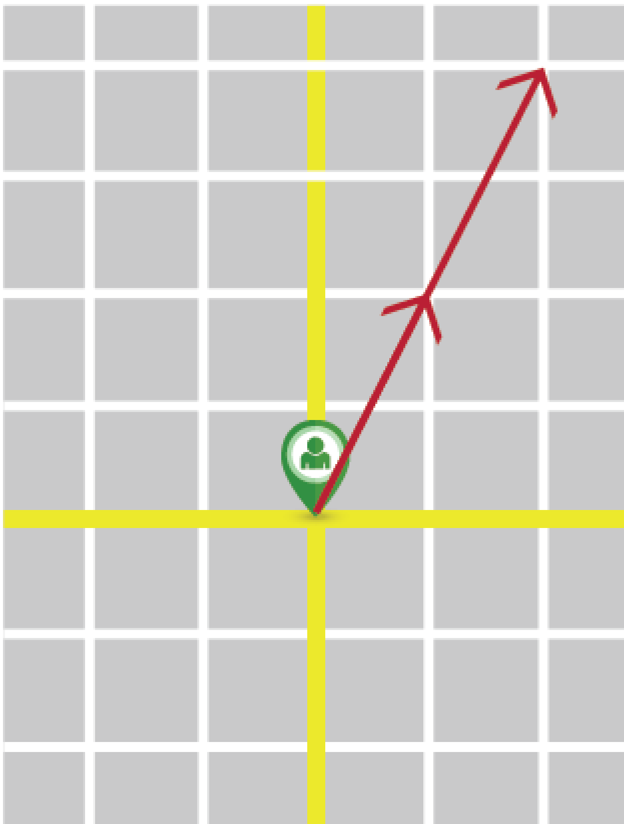


Imagem 8: "Escalando" um vetor

Podemos representar essa operação da seguinte maneira:

$$2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

Combinação linear

Existem duas explicações mais usadas para combinação linear. Escolha a mais intuitiva para você.

Lembra que no primeiro mapa falamos que cada quadra correspondia a 1 km? Vamos chamar esse tamanho de quadra de ***a*** para as quadras ao longo do eixo x, e de ***b*** para as quadras ao longo do eixo y.

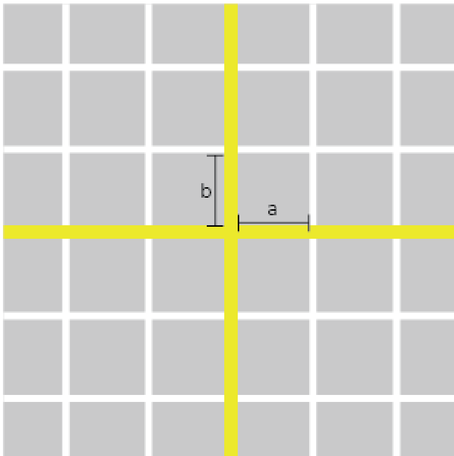


Imagem 9: Mapa indicando a e b como "distâncias" base

E se ao invés de 1 km a e b tivessem 0,5 km. Qual seria a distância do ponto de origem até o banco?

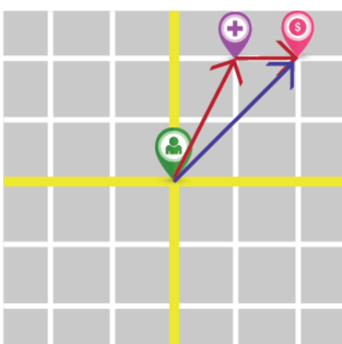


Imagem 10: Soma de vetores

O número de quadras permanece o mesmo, a única coisa que mudou foi o tamanho delas.

Então nós andamos 0,5x1 para a direita e 0,5x2 para cima, ficando com o vetor: $\begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Analisando nossa soma vetorial que fizemos anteriormente para chegar até o banco teríamos: $a\vec{v_1} + b\vec{v_2}$

Ou seja, Combinando diferentes "tamanhos" de quadra podemos chegar em diferentes vetores.

Agora se você preferir uma definição mais direta, porém um pouco mais abstrata pense da seguinte forma: Combinação linear é a Representação de um vetor através da soma e multiplicação por escalares de outros vetores. $\overrightarrow{banco} = a\vec{v_1} + b\vec{v_2}$

Matrizes

Como cientista de dados você não irá analisar os seus temas de estudo somente ponto a ponto, ou vetor a vetor, por isso é necessário um sistema em que se possa sistematizar uma porção de observações. Nos nossos exemplos anteriores, poderíamos ter um conjunto de vetores, sendo cada vetor uma posição de nosso interesse, como a farmácia e o banco. Sendo $\overrightarrow{v_1}$ a farmácia e $\overrightarrow{v_2}$ o banco teríamos uma matriz composta por $\begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2} \end{bmatrix}$ que seria o mesmo que $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Você pode criar Matrizes com quantas linhas e com quantas colunas precisar.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m12} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Operação com matrizes

Soma de duas matrizes: Basta somar os elementos de mesma posição, veja abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+3 \\ 0+2 & 1+2 \\ 3+1 & 4+4 \end{bmatrix}$$

Que resulta em:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matriz por um escalar: Cada elemento da matriz será multiplicado pelo escalar

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 1 & 3\times 2 \\ 3\times 0 & 3\times 1 \\ 3\times 3 & 3\times 4 \end{bmatrix}$$

Resultando em:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Três coisas importantes para saber antes de prosseguir:

1) Para podermos multiplicar duas matrizes o número de colunas da primeira matriz precisa ter o mesmo número de linhas da segunda matriz. $A_{2\times3} \times B_{3\times2}$. Nesse caso A tem 3 colunas e B tem 3 linhas, então está ok.
2) A matriz resultante terá o número de linhas da primeira e o número de colunas da segunda. $A_{2\times3} \times B_{3\times4} = C_{2\times4}$
3) A multiplicação de matrizes não é comutativa. Ou seja, A x B **é diferente** de B x A.

Vamos efetuar a seguinte multiplicação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

Nós vamos somar os produtos da linha da primeira matriz com a coluna da segunda. Olha só:

$$\begin{bmatrix} 1\times0+0\times3+3\times4 & 1\times5+0\times1+3\times2 \\ 2\times0+1\times3+4\times1 & 2\times5+1\times1+4\times2 \end{bmatrix}$$

E ficamos com:

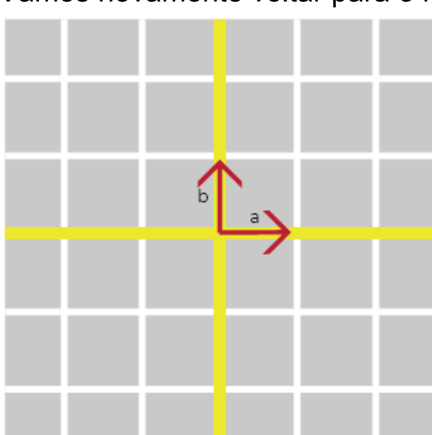
$$\begin{bmatrix} 12 & 11 \\ 19 & 19 \end{bmatrix}$$

Transformações lineares

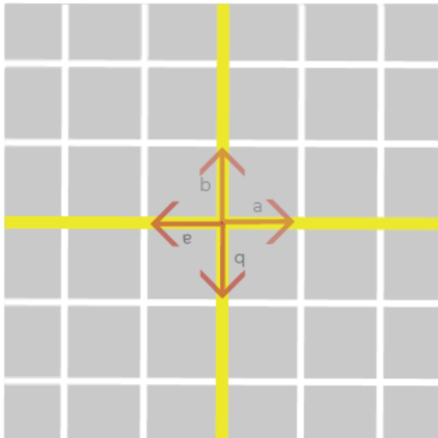
Imagine que você possa modificar todo o espaço ao seu redor. Curvar, entortar, encolher, esticar…

Isso seria uma transformação do espaço.
Uma transformação linear é fazer essa modificação, porém sem mudar o ponto de origem e mantendo as linhas paralelas e igualmente distribuídas. E sabe como podemos representar uma Transformação linear? Com uma matriz!

Vamos novamente voltar para o mundo 2D para ter uma melhor intuição sobre o assunto.



Olhe para os vetores a e b. Agora vou aplicar uma rotação…. Vamos ver o que acontece:



o vetor a foi parar em (-1, 0) e o vetor b for i para em (0, -1). Podemos representar essa transformação linear com a seguinte matriz: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
Ou seja, essa matriz aplica uma rotação de 180° no vetor em que ela for aplicada.

Este vídeo tem uma excelente explicação visual dessas transformações acontecendo e algumas aplicações em vetores.
[Linear transformations and matrices | Essence of linear algebra, chapter 3] (11 min, em inglês)

Sistema de equações lineares

Legal… Agora você deve estar pensando: *"E o que isso tudo tem a ver com Sistema de Equações Lineares que é mencionado na primeira linha do texto?"*

Excelente pergunta! Dê uma olhada no seguinte sistema:
2x + 5y + 3z = -3
4x + 0y + 8z = 0
1x + 3y + 0z = 2
Note que eu já alinhei as variáveis, e pra me ajudar multipliquei por zero quando a variável não estava presente na equação.

Posso escrever esse sistema da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

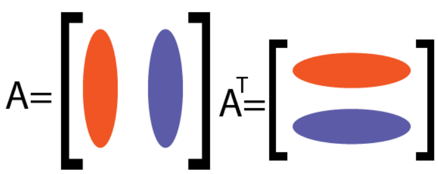
Percebeu algo interessante?
Temos uma matriz quadrada multiplicando um vetor que resulta em outro vetor. Em outras palavras. Em qual vetor que se aplicado essa Transformação Linear resulta neste outro vetor?

Mais alguns conceitos...

A seguir vou te apresentar mais alguns conceitos interessantes da álgebra linear mas que acabaram ficando de fora de uma explicação mais detalhada.

Determinante
É uma função que associa um escalar a uma matriz quadrada.
Se aplicar uma transformação linear naquele nosso mapa com quadras de 1 km, quanto a área da quadra vai mudar? No exemplo que fizemos da rotação a área não muda, só muda de posição. Então a determinante é 1.

Matriz transposta
Para transpor uma matriz basta trocar as linhas pelas colunas.



Matriz identidade
É uma matriz quadrada que sua diagonal principal é um e todas os outros elementos são zero. Se pensarmos na transformação linear, a Matriz identidade é uma transformação que deixa tudo como está, o espaço não é distorcido, nada sai do lugar….

$$I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa
No nossos sistema de equações lineares se multiplicarmos a matriz pela sua matriz inversa temos como resultado a Matriz identidade. Se quisermos "cancelar" uma transformação linear, precisamos multiplicar pela sua inversa.

E tem muito mais…

Mas acredito que conseguimos passar pelos principais conceitos. Caso queira se aprofundar um pouco mais, no final deste artigo deixamos alguns materiais de referência para guiar os seus estudos.

Foi bastante coisa e às vezes não é fácil pegar de primeira. Leia o artigo novamente e logo esses conceitos irão fazer mais sentido e se solidificar!

Aplicação Prática

Agora que já tem uma boa noção de Álgebra Linear, assista este outro vídeo que vai contextualizar e solidificar muitos dos pontos que vimos por aqui. Ele vai contar um caso muito interessante de como a Álgebra linear aplicado a imagens ajudou a resolver um crime 🤯

Álgebra Linear - Aplicação em Ciência de dados
[The Applications of Matrices | What I wish my teachers told me way earlier]()

Materiais para aprofundamento

Com o que aprendeu por aqui será mais confortável mergulhar no material abaixo caso queira se aprofundar um pouco mais na Álgebra Linear.

Curso de Álgebra linear da Khan Academy
https://pt.khanacademy.org/math/linear-algebra

Curso do MIT de Álgebra Linear
Video Lectures | Linear Algebra | Mathematics

Série do canal 3Blue1Brown sobre Álgebra Linear
https://www.youtube.com/watch?v=fNk_zzaMoSs&list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab