Отчёт по лабораторной работе №2

Дисциплина: Математическое моделирование

Ибатулина Дарья Эдуардовна, НФИбд-01-22

Содержание

1	Цель работы	4
2	Задание	5
3	Теоретическое введение	6
4	Выполнение лабораторной работы	7
5	Выводы	16
Список литературы		17

Список иллюстраций

4.1	Вычисление номера варианта	7
4.2	График для первого случая (траектория лодки и траектория катера)	12
		13
	Найти точку пересечения траектории катера и лодки, код для пер-	
	вого случая	13
4.5	ОДУ для первого случая	14
	Найти точку пересечения траектории катера и лодки, код для вто-	
	рого случая	14
4.7	ОДУ для второго случая	15

1 Цель работы

Целью данной работы является приобретение навыков построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задачи о погоне.

2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 12,3 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,4 раза больше скорости браконьерской лодки.

- 1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени);
- 2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев;
- 3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки.

3 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка А равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки Р такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки А.

4 Выполнение лабораторной работы

В начале я установила среду Julia с официального сайта и установила все необходимые пакеты. В частности, это *Plot*, *DifferentialEquations*. Так же рассчитала номер своего варианта (рис. 4.1):

```
[1]: (1132226434 % 70) + 1
[1]: 25
```

Рис. 4.1: Вычисление номера варианта

Далее перейдём к заданию 1[1].

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

В данном задаче мы моделируем движение катера береговой охраны, который должен догнать и затем следовать за лодкой браконьеров, используя полярные координаты.

Начальные условия

- $t_0=0$: Время, когда происходит обнаружение лодки.
- $x_{l0}=0$: Местоположение лодки браконьеров в момент обнаружения на полюсе, т.е. в начале координат.

• $x_{k0}=12.3$ км: Местоположение катера береговой охраны в момент обнаружения лодки.

Установка полярной системы координат

- Полюс выбран как точка обнаружения лодки, и ось r (радиальная ось) проходит через точку нахождения катера береговой охраны.
- Угол $\theta=0$ в момент обнаружения лодки, и катер будет двигаться вдоль этой оси до тех пор, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка.

Первоначальная прямая траектория катера

Катер должен двигаться вдоль прямой, пока не окажется на одинаковом расстоянии от полюса, как и лодка. Лодка за время t пройдет расстояние x, а катер — расстояние k-x (или k+x, в зависимости от того, с какой стороны катер относительно полюса).

Время, за которое оба пройдут это расстояние, будет одинаковым. Для лодки это время равно $\frac{x}{v}$, где v — скорость лодки. Для катера время будет $\frac{k-x}{4.4v}$ (или $\frac{k+x}{4.4v}$, в зависимости от положения катера).

Поскольку время одинаковое, мы составляем уравнение:

$$\frac{x}{v} = \frac{k - x}{4.4v}$$

или

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{4.4v}$$

Таким образом, для первого случая, где k=12.3:

$$x_1 = \frac{12.3}{5.4}$$

Для второго случая:

$$x_2 = \frac{12.3}{3.4}$$

Переход к круговой траектории

После того как катер окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка, он должен начать движение по круговой траектории вокруг полюса. При этом катер должен удаляться от полюса с той же скоростью v, что и лодка.

Для этого мы разбиваем скорость катера на две составляющие: - Радиальная скорость (v_r) — это скорость, с которой катер удаляется от полюса. Мы полагаем, что радиальная скорость равна скорости лодки:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = v$$

• Тангенциальная скорость ($v_{ au}$) — это скорость, с которой катер движется по окружности вокруг полюса. Эта скорость определяется через угловую скорость $\frac{d\theta}{dt}$:

$$v_{\tau} = r \frac{d\theta}{dt}$$

Так как катер движется с более высокой скоростью (в 4,4 раза больше скорости лодки), мы находим тангенциальную скорость:

$$v_{\tau} = \sqrt{18.36 \cdot v^2 - v^2} = \sqrt{18.36} \cdot v$$

Система дифференциальных уравнений

Теперь мы можем описать движение катера в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{18.36} \cdot v \end{cases}$$

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{12.3}{5.4} \end{cases}$$

Для второго случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{12.3}{3.4} \end{cases}$$

Уравнение для радиальной зависимости

Исключая из системы производную по времени t, можно получить уравнение, которое связывает радиус r и угол θ :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{18.36}}$$

Это уравнение можно решить, чтобы получить траекторию катера в полярных координатах.

2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

Здесь уже был необходим следующий код:

```
using DifferentialEquations, Plots # используемые пакеты
# Расстояние между лодкой и катером
k = 12.3
# Начальные условия для двух случаев
```

```
r0 = k / 5.4  # к кратности скоростей прибавляем 1 r0_2 = k / 3.4  # из кратности скоростей вычитаем 1 theta0 = (0.0, 2*pi)  # целый круг theta0_2 = (-pi, pi)  # целый круг
```

```
# Угол движения лодки браконьеров и интервал времени
fi = 3*pi/4
t = (0, 50)
# Функция, описывающая движение лодки браконьеров
x(t) = tan(fi) * t
# Дифференциальное уравнение для движения катера
f(r, p, t) = r / sqrt((4.4) ^ 2 - 1) # (4.4) ^ 2 - 1 = 18.36
# Решение ДУ для первого случая с подставленными начальными условиями
prob = ODEProblem(f, r0, theta0)
sol = solve(prob, saveat = 0.01)
# Построение траектории катера
plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 10), label="Траектория катера")
 После этого я выполнила построение траектории лодки:
# Угол и координаты для построения траектории лодки (первый случай)
ugol = [fi for i in range(0, 15)]
x_{lims} = [x(i) \text{ for } i \text{ in } range(0, 15)]
# Добавление траектории лодки на график
plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 10), label="Траектория лодки")
 И получила следующий результат (график) (рис. 4.2)
```

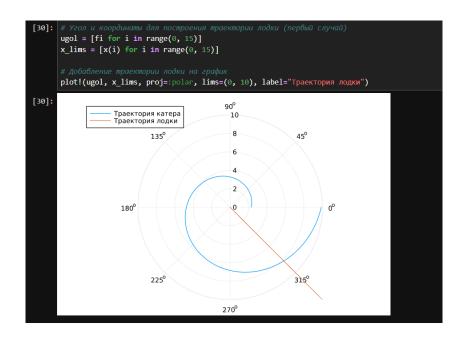


Рис. 4.2: График для первого случая (траектория лодки и траектория катера)

Далее повторила действия для второго случая. Получился график, немного отличный от предыдущего - спираль закручивается в другую сторону (рис. 4.3):

```
# Решение ДУ для второго случая

prob_2 = ODEProblem(f, r0_2, theta0_2)

sol_2 = solve(prob_2, saveat = 0.01)

# Построение траектории катера во втором случае

plot(sol_2.t, sol_2.u, proj=:polar, lims=(0, 15), label="Траектория катера")

# Добавление траектории лодки на график

plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label="Траектория лодки")
```

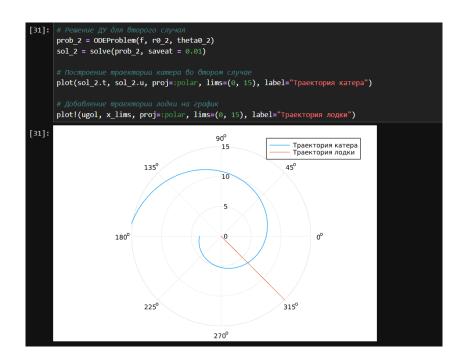


Рис. 4.3: График для второго случая (траектория лодки и траектория катера)

3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки, код для первого случая (рис. 4.4):

```
# Точное решение уравнения движения катера

y(x) = (41*exp((5*x)/(3*sqrt(51))+(5*pi)/(3*sqrt(51))))/(18)

# Определение точки пересечения для первого случая

y(fi)
```



Рис. 4.4: Найти точку пересечения траектории катера и лодки, код для первого случая

Как мы получили такое решение? Путем решения ОДУ в онлайн-калькуляторе (рис. 4.5):

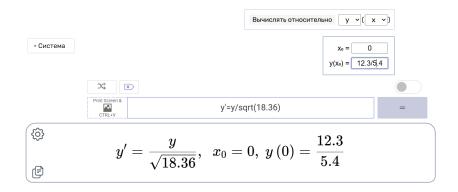


Рис. 4.5: ОДУ для первого случая

Полученные ответы, вместо х в которых мы потом подставили θ , ничего не прибавляя, так как таково начальное условие для первого случая и получили значение (см. рис. 4.4).

$$y' = \frac{y}{\sqrt{18.36}}, \quad x_0 = 0, \ y(0) = \frac{12.3}{5.4}$$

$$y = \frac{41 e^{\frac{5 x}{3 \sqrt{51}}}}{18}$$

Код для второго случая (рис. 4.6):

```
# Точное решение уравнения движения катера

y(x) = (123*exp((5*x)/(3*sqrt(51))+(5*pi)/(3*sqrt(51))))/(34)

# Определение точки пересечения для второго случая

y(fi-pi)
```



Рис. 4.6: Найти точку пересечения траектории катера и лодки, код для второго случая

Как мы получили такое решение? Путем решения ОДУ в онлайн-калькуляторе (рис. 4.7):

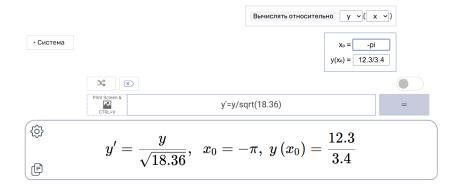


Рис. 4.7: ОДУ для второго случая

Полученные ответы, вместо х в которых мы потом подставили $\theta-\pi$ и получили значение (см. рис. 4.6).

$$y' = \frac{y}{\sqrt{18.36}}, \quad x_0 = -\pi, \ y(0) = \frac{12.3}{3.4}$$

$$y = \frac{123 e^{\frac{5x}{3\sqrt{51}} + \frac{5\pi}{3\sqrt{51}}}}{34}$$

5 Выводы

В ходе данной работы я приобрела практические навыки построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска.

Список литературы

1. Кулябов Д.С. Руководство к лабораторной работе №2. Математическое моделирование. - 2025. — 4 с.