Отчёт по лабораторной работе №4

Модель гармонических колебаний

Ибатулина Дарья Эдуардовна, НФИбд-01-22

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Построить математическую модель гармонического осциллятора.

2 Задание

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев [1]:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы:

$$x + 2.2x = 0$$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы:

$$x + 2.4x + x = 0$$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы:

$$x + 3.5x + 13x = 2.5cos(2t).$$

На интервале $t \in [0; 44]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = -1.1, \ y_0 = 0$.

3 Теоретическое введение

Гармонические колебания — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону.

Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

или

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где x — отклонение колеблющейся величины в текущий момент времени t от среднего за период значения (например, в кинематике — смещение, отклонение колеблющейся точки от положения равновесия); A — амплитуда колебания, то есть максимальное за период отклонение колеблющейся величины от среднего за период значения, размерность A совпадает с размерностью x [2]; ω (радиан/с, градус/с) — циклическая частота, показывающая, на сколько радиан (градусов) изменяется фаза колебания за 1 с;

$(\omega t + \varphi_0) = \varphi$ (радиан, градус) — полная фаза колебания (сокращённо — фаза, не путать с начальной фазой);

φ_0 (радиан, градус) — начальная фаза колебаний, которая определяет значение полной фазы колебания (и самой величины x) в момент времени $t = 0$. Дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания, имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

[2, 3, 4].

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Модель колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

Для начала реализуем эту модель на языке программирования Julia.

```
using DifferentialEquations
using Plots

# Параметры уравнения x'' + 2.2x = 0
omega_squared = 2.2

# Функция, описывающая систему уравнений первого порядка
function harmonic_oscillator!(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]        # dx/dt = v
    du[2] = -omega_squared * u[1]  # dv/dt = -omega^2 * x
end

# Начальные условия
x0 = -1.1  # x(0) = -1.1
v0 = 0.0   # v(0) = 0
u0 = [x0, v0]  # Вектор начальных условий
```

```
# Временной интервал
tspan = (0.0, 44.0)

# Задача Коши
prob = ODEProblem(harmonic_oscillator!, u0, tspan)

# Решение задачи
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat=0.05)

# График решения x(t) и y(t)

plot(sol.t, sol[1,:], label="x(t)",
    xlabel="t", ylabel="x(t), y(t)",
    title="Решение уравнения без затухания и без внешней силы",
    legend=true,
    size=(800, 600))

plot!(sol.t, sol[2,:], label="y(t)",
    xlabel="t", ylabel="x(t), y(t)",
    title="Решение уравнения без затухания и без внешней силы",
    legend=true,
    size=(800, 600))
```

Код для фазового портрета:

```
using Plots

# Построение фазового портрета
plot(sol[1,:], sol[2,:],
     xlabel="x", ylabel="v",
```

```
title="Фазовый портрет: без затухания и без действия внешних сил",
legend=false,
size=(800, 600))  # Установка размера графика в пикселях
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. 4.1) и его фазового портрета (рис. 4.2).

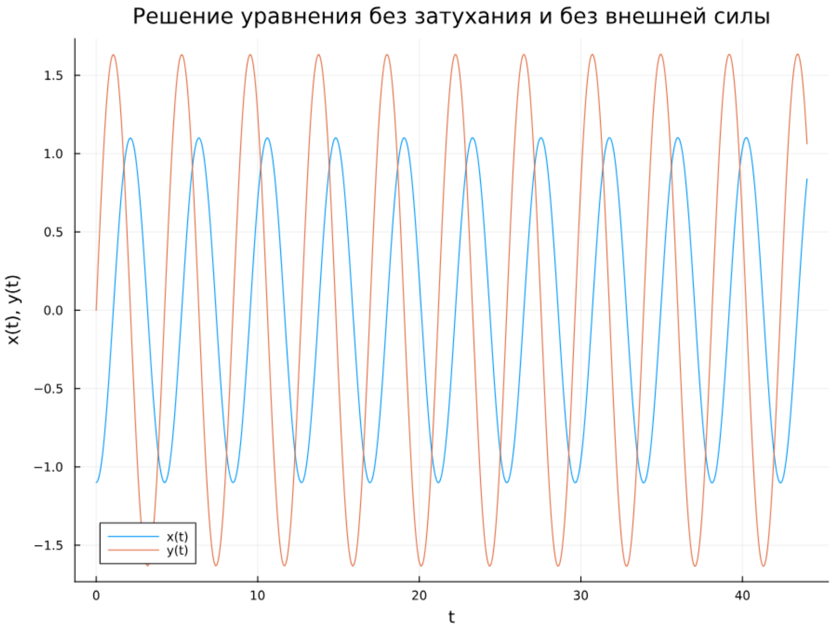

Рис. 4.1: Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

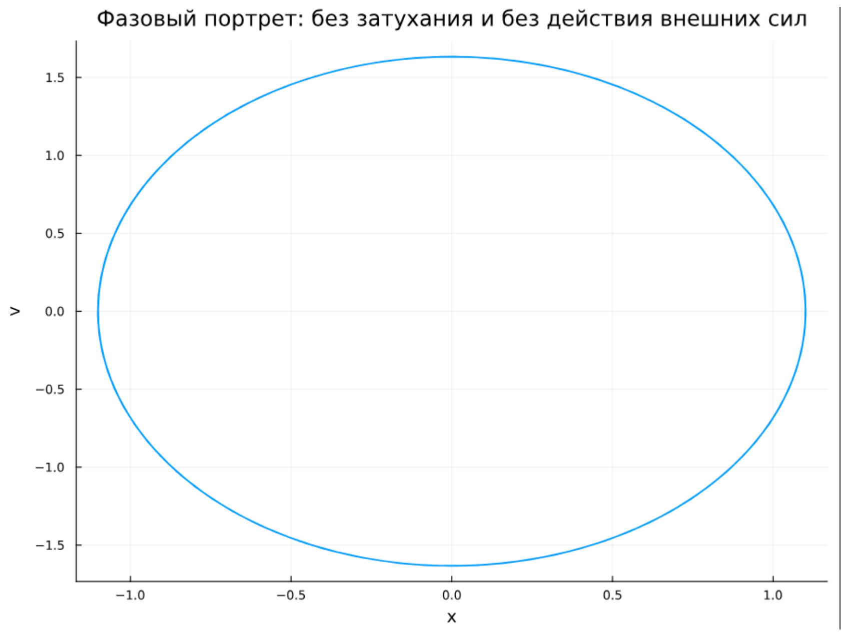

Рис. 4.2: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

Можно заметить, что колебание осциллятора периодично, график не задухает. Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model HarmonicOscillator
  // Параметры
  parameter Real omega_squared = 2.2;

  // Переменные состояния
  Real x(start = -1.1); // Начальное значение x
  Real v(start = 0.0);  // Начальное значение v

  // Уравнения
  equation
    der(x) = v; // dx/dt = v
    der(v) = -omega_squared * x; // dv/dt = -omega^2 * x
```

```
end HarmonicOscillator;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. 4.3) и его фазового портрета (рис. 4.4).

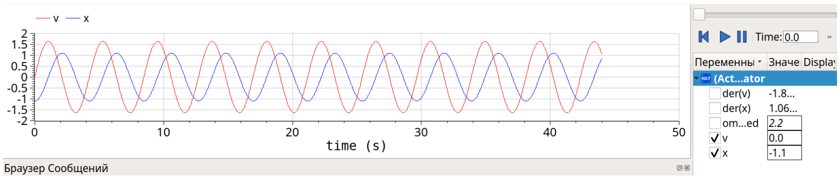

Рис. 4.3: Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica

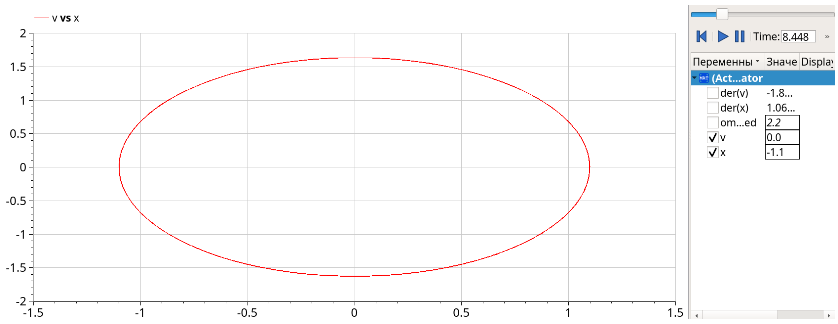

Рис. 4.4: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica

Также несложно увидеть, что графики, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

4.2 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

Реализуем эту модель на языке программирования Julia.

```
using DifferentialEquations
using Plots

# Параметры уравнения x'' + 2.4x' + x = 0
gamma = 2.4       # Коэффициент затухания
omega_squared = 1.0  # omega^2 = 1

# Функция, описывающая систему уравнений первого порядка с затуханием
function damped_oscillator!(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]              # dx/dt = v
    du[2] = -gamma * u[2] - omega_squared * u[1]  # dv/dt = -gamma*v - omega^2 *
end

# Начальные условия
x0 = -1.1  # x(0) = -1.1
v0 = 0.0   # v(0) = 0
u0 = [x0, v0]  # Вектор начальных условий

# Временной интервал
tspan = (0.0, 44.0)

# Задача Коши
prob = ODEProblem(damped_oscillator!, u0, tspan)

# Решение задачи
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat=0.05)

# График решения x(t) и y(t)
```

```
plot(sol.t, sol[1,:], label="x(t)",
    xlabel="t", ylabel="x(t), y(t)",
    title="Решение уравнения с затуханием и без внешней силы",
    legend=true,
    size=(800, 600))

plot!(sol.t, sol[2,:], label="y(t)",
    xlabel="t", ylabel="x(t), y(t)",
    title="Решение уравнения с затуханием и без внешней силы",
    legend=true,
    size=(800, 600))
```

Код для фазового портрета:

```
using Plots

# Построение фазового портрета
plot(sol[1,:], sol[2,:],
     xlabel="x", ylabel="v",
     title="Фазовый портрет: с затуханием и без внешней силы",
     legend=false,
    size=(800, 600))
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. 4.5) и его фазового портрета (рис. 4.6).

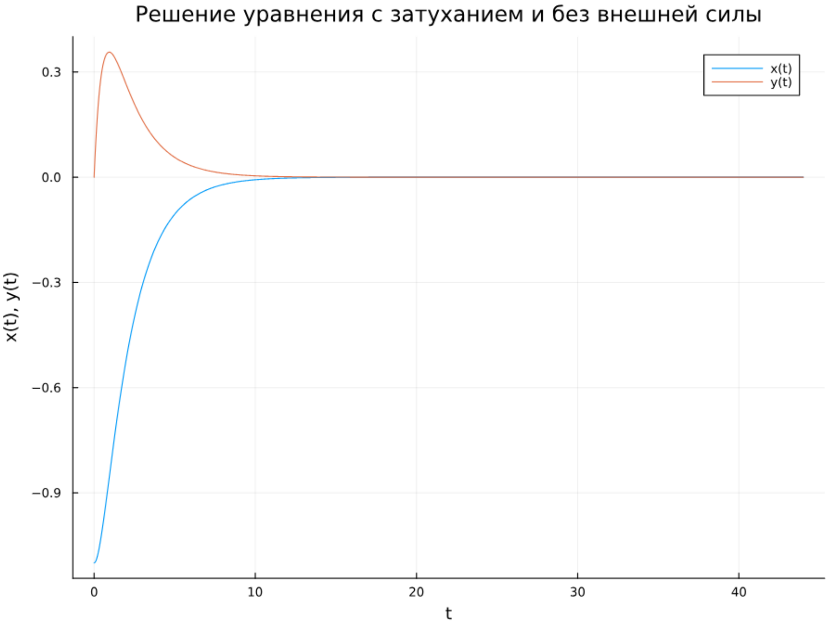

Рис. 4.5: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

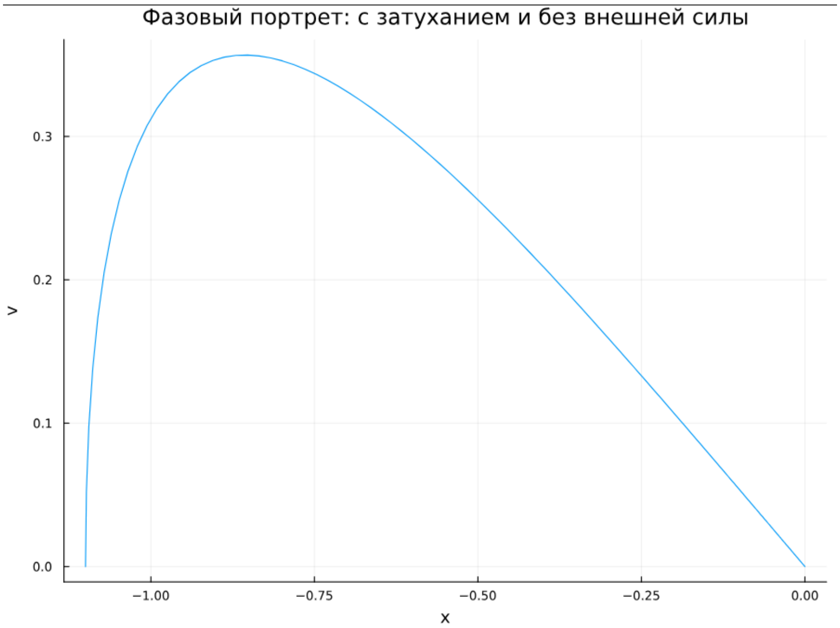

Рис. 4.6: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

В этом случае сначала происходят колебания осциллятора, а затем график затухает, поскольку у нас есть параметр, отвечающий за потери энергии.

Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model DampedOscillator
  // Параметры
  parameter Real gamma = 2.4; // Коэффициент затухания
  parameter Real omega_squared = 1.0; // omega^2 = 1

  // Переменные состояния
  Real x(start = -1.1); // Начальное значение x
  Real v(start = 0.0); // Начальное значение v

  // Уравнения
  equation
    der(x) = v; // dx/dt = v
    der(v) = -gamma * v - omega_squared * x; // dv/dt = -gamma*v - omega^2 * x

end DampedOscillator;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. 4.7) и его фазового портрета (рис. 4.8).

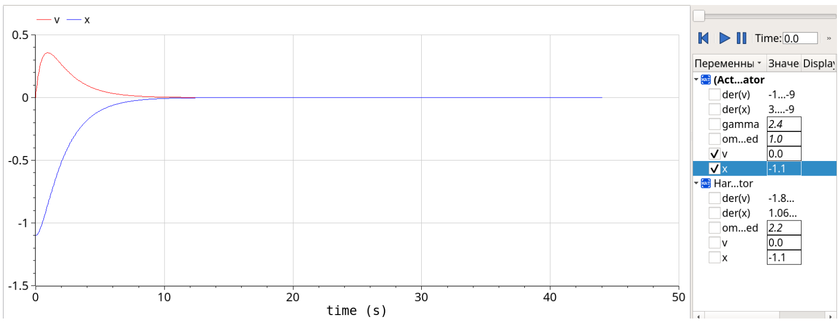

Рис. 4.7: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. OpenModelica

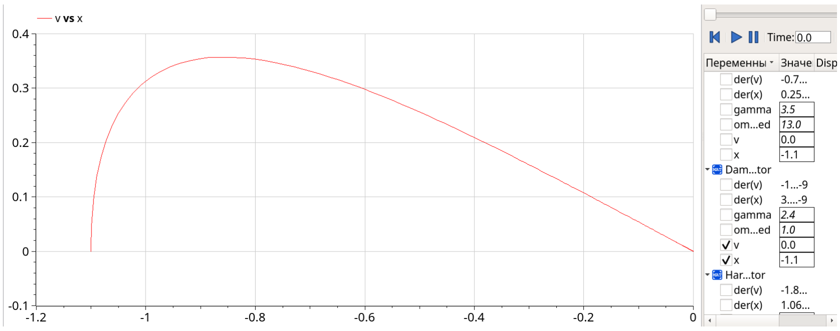

Рис. 4.8: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. OpenModelica

Во второй модели также несложно увидеть, что графики, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

4.3 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Реализуем эту модель на языке программирования Julia.

```
using DifferentialEquations
using Plots

# Параметры уравнения x'' + 3.5x' + 13x = 2.5cos(2t)
gamma = 3.5        # Коэффициент затухания
omega_squared = 13.0 # omega^2 = 13
F0 = 2.5           # Амплитуда внешней силы
Omega = 2.0        # Частота внешней силы

# Функция, описывающая систему уравнений первого порядка с затуханием и внешней с
function forced_oscillator!(du, u, p, t)
```

```
    du[1] = u[2]                      # dx/dt = v
    du[2] = -gamma * u[2] - omega_squared * u[1] + F0 * cos(Omega * t)  # dv/dt =
end

# Начальные условия
x0 = -1.1  # x(0) = -1.1
v0 = 0.0   # v(0) = 0
u0 = [x0, v0]  # Вектор начальных условий

# Временной интервал
tspan = (0.0, 44.0)

# Задача Коши
prob = ODEProblem(forced_oscillator!, u0, tspan)

# Решение задачи
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat=0.05)

# График решения x(t) и y(t)
plot(sol.t, sol[1,:], label="x(t)",
     xlabel="t", ylabel="x(t), y(t)",
     title="Решение уравнения с затуханием и под действием внешней силы",
     legend=true,
    size=(800, 600))

plot!(sol.t, sol[2,:], label="y(t)",
     xlabel="t", ylabel="x(t), y(t)",
     title="Решение уравнения с затуханием и под действием внешней силы",
     legend=true,
```

```
    size=(800, 600))
```

Код для фазового портрета:

```
using Plots

# Построение фазового портрета
plot(sol[1,:], sol[2,:],
     xlabel="x", ylabel="v",
     title="Фазовый портрет: с внешней силой",
     legend=false,
    size=(800, 600))
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. 4.9) и его фазового портрета (рис. 4.10).

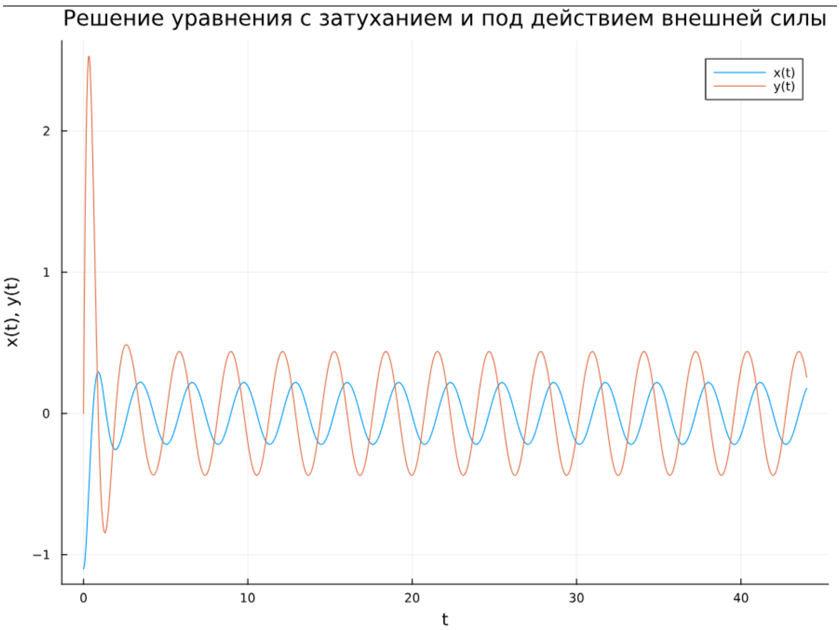

Рис. 4.9: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

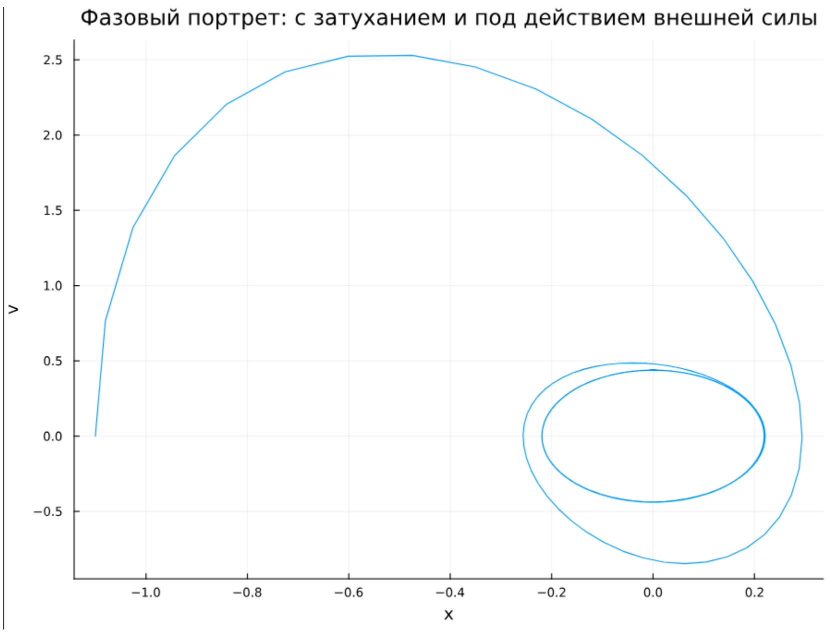

Рис. 4.10: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model ForcedDampedOscillator
  // Параметры
  parameter Real gamma = 3.5; // Коэффициент затухания
  parameter Real omega_squared = 13.0; // omega^2 = 13
  parameter Real F0 = 2.5; // Амплитуда внешней силы
  parameter Real Omega = 2.0; // Частота внешней силы

  // Переменные состояния
  Real x(start = -1.1); // Начальное значение x
  Real v(start = 0.0); // Начальное значение v

  // Уравнения
  equation
    der(x) = v; // dx/dt = v
```

```
    der(v) = -gamma * v - omega_squared * x + F0 * cos(Omega * time); // dv/dt = -
gamma*v - omega^2*x + F0*cos(Omega*t)

end ForcedDampedOscillator;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. 4.11) и его фазового портрета (4.12).

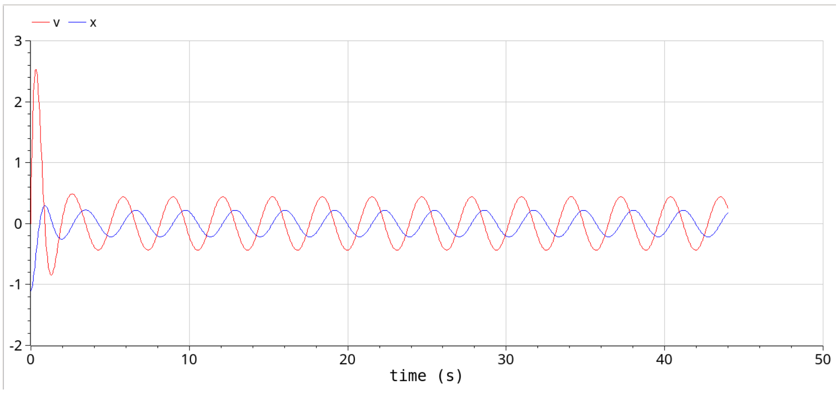

Рис. 4.11: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. OpenModelica

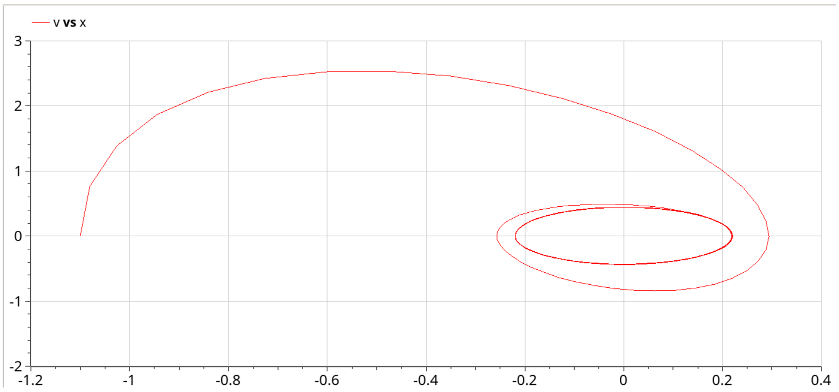

Рис. 4.12: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. OpenModelica

В третьем случае графики, полученные с помощью OpenModelica и Julia все также идентичны.

5 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель гармонического осциллятора.

Список литературы

1. Кулябов Д.С. Руководство к лабораторной работе №4. Математическое моделирование. - 2025. — 4 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том 1. Механика. — Москва: Наука, 1973. — 170 с.
3. Иванов И. И. Гармонические колебания в физических системах // Журнал физики. — 2010. — Т. 10, № 2. — С. 12—20.
4. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — Москва: Наука, 1977. — 832 с.