Отчёт по лабораторной работе №2

Дисциплина: Математическое моделирование

Ибатулина Дарья Эдуардовна, НФИбд-01-22

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Целью данной работы является приобретение навыков построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задачи о погоне.

2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 12,3 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,4 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени);
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев;
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки.

3 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A.

4 Выполнение лабораторной работы

В начале я установила среду Julia с официального сайта и установила все необходимые пакеты. В частности, это *Plot*, *DifferentialEquations*. Так же рассчитала номер своего варианта (рис. 4.1):

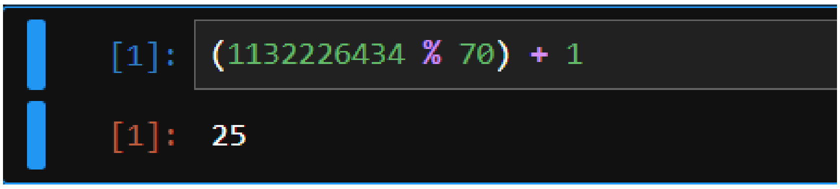

Рис. 4.1: Вычисление номера варианта

Далее перейдём к заданию 1[1].

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

В данном задаче мы моделируем движение катера береговой охраны, который должен догнать и затем следовать за лодкой браконьеров, используя полярные координаты.

Начальные условия

- $t_0 = 0$: Время, когда происходит обнаружение лодки.
- $x_{l0} = 0$: Местоположение лодки браконьеров в момент обнаружения — на полюсе, т.е. в начале координат.

- $x_{k0} = 12.3$ км: Местоположение катера береговой охраны в момент обнаружения лодки.

Установка полярной системы координат

- Полюс выбран как точка обнаружения лодки, и ось r (радиальная ось) проходит через точку нахождения катера береговой охраны.
- Угол $\theta = 0$ в момент обнаружения лодки, и катер будет двигаться вдоль этой оси до тех пор, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка.

Первоначальная прямая траектория катера

Катер должен двигаться вдоль прямой, пока не окажется на одинаковом расстоянии от полюса, как и лодка. Лодка за время t пройдет расстояние x, а катер — расстояние $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от того, с какой стороны катер относительно полюса).

Время, за которое оба пройдут это расстояние, будет одинаковым. Для лодки это время равно $\frac{x}{v}$, где v — скорость лодки. Для катера время будет $\frac{k-x}{4.4v}$ (или $\frac{k+x}{4.4v}$, в зависимости от положения катера).

Поскольку время одинаковое, мы составляем уравнение:

$$\frac{x}{v} = \frac{k - x}{4.4v}$$

или

$$\frac{x}{v} = \frac{k + x}{4.4v}$$

Таким образом, для первого случая, где $k = 12.3$:

$$x_1 = \frac{12.3}{5.4}$$

Для второго случая:

$$x_2 = \frac{12.3}{3.4}$$

Переход к круговой траектории

После того как катер окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка, он должен начать движение по круговой траектории вокруг полюса. При этом катер должен удаляться от полюса с той же скоростью v, что и лодка.

Для этого мы разбиваем скорость катера на две составляющие: - Радиальная скорость (v_r) — это скорость, с которой катер удаляется от полюса. Мы полагаем, что радиальная скорость равна скорости лодки:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = v$$

- Тангенциальная скорость (v_τ) — это скорость, с которой катер движется по окружности вокруг полюса. Эта скорость определяется через угловую скорость $\frac{d\theta}{dt}$:

$$v_\tau = r\frac{d\theta}{dt}$$

Так как катер движется с более высокой скоростью (в 4,4 раза больше скорости лодки), мы находим тангенциальную скорость:

$$v_\tau = \sqrt{19.36 \cdot v^2 - v^2} = \sqrt{18.36} \cdot v$$

Система дифференциальных уравнений

Теперь мы можем описать движение катера в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{18.36} \cdot v \end{cases}$$

С начальными условиями для первого случая:

$$
\begin{cases}
\theta_0 = 0 \\
r_0 = \frac{12.3}{5.4}
\end{cases}
$$

Для второго случая:

$$
\begin{cases}
\theta_0 = -\pi \\
r_0 = \frac{12.3}{3.4}
\end{cases}
$$

Уравнение для радиальной зависимости

Исключая из системы производную по времени t, можно получить уравнение, которое связывает радиус r и угол θ:

$$
\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{18.36}}
$$

Это уравнение можно решить, чтобы получить траекторию катера в полярных координатах.

2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

Здесь уже был необходим следующий код:

```
using DifferentialEquations, Plots  # используемые пакеты

# Расстояние между лодкой и катером
k = 12.3

# Начальные условия для двух случаев
r0 = k / 5.4   # к кратности скоростей прибавляем 1
r0_2 = k / 3.4   # из кратности скоростей вычитаем 1
theta0 = (0.0, 2*pi)   # целый круг
theta0_2 = (-pi, pi)  # целый круг
```

```
# Угол движения лодки браконьеров и интервал времени
fi = 3*pi/4
t = (0, 50)

# Функция, описывающая движение лодки браконьеров
x(t) = tan(fi) * t

# Дифференциальное уравнение для движения катера
f(r, p, t) = r / sqrt((4.4) ^ 2 - 1)  # (4.4) ^ 2 - 1 = 18.36

# Решение ДУ для первого случая с подставленными начальными условиями
prob = ODEProblem(f, r0, theta0)
sol = solve(prob, saveat = 0.01)

# Построение траектории катера
plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 10), label="Траектория катера")
```

После этого я выполнила построение траектории лодки:

```
# Угол и координаты для построения траектории лодки (первый случай)
ugol = [fi for i in range(0, 15)]
x_lims = [x(i) for i in range(0, 15)]

# Добавление траектории лодки на график
plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 10), label="Траектория лодки")
```

И получила следующий результат (график) (рис. 4.2)

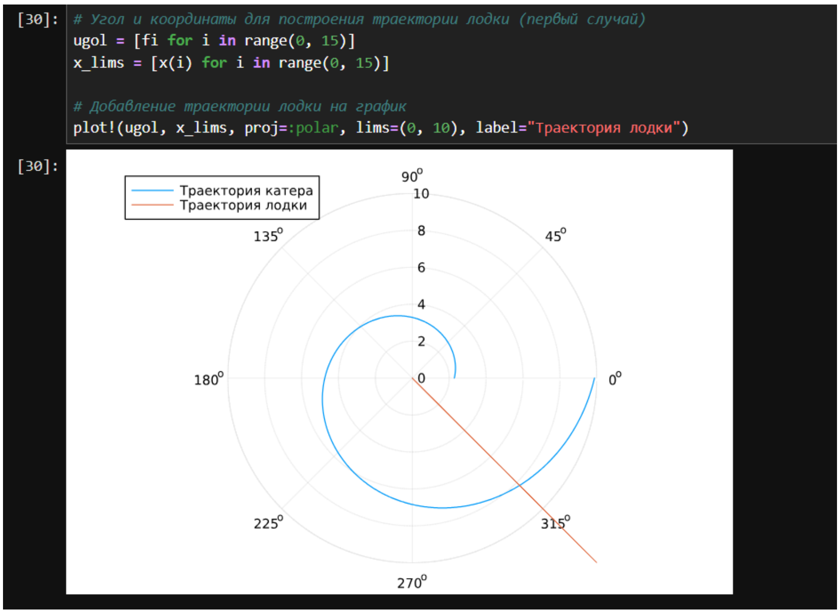

Рис. 4.2: График для первого случая (траектория лодки и траектория катера)

Далее повторила действия для второго случая. Получился график, немного отличный от предыдущего - спираль закручивается в другую сторону (рис. 4.3):

```
# Решение ДУ для второго случая
prob_2 = ODEProblem(f, r0_2, theta0_2)
sol_2 = solve(prob_2, saveat = 0.01)

# Построение траектории катера во втором случае
plot(sol_2.t, sol_2.u, proj=:polar, lims=(0, 15), label="Траектория катера")

# Добавление траектории лодки на график
plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label="Траектория лодки")
```

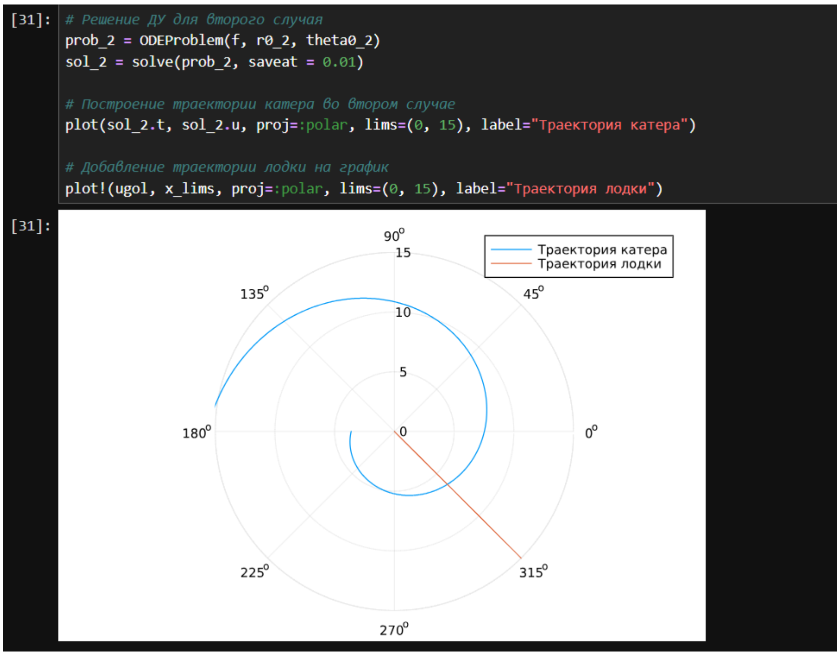

Рис. 4.3: График для второго случая (траектория лодки и траектория катера)

3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки, код для первого случая (рис. 4.4):

```
# Точное решение уравнения движения катера
y(x) = (41*exp((5*x)/(3*sqrt(51))+(5*pi)/(3*sqrt(51))))/(18)
# Определение точки пересечения для первого случая
y(fi)
```

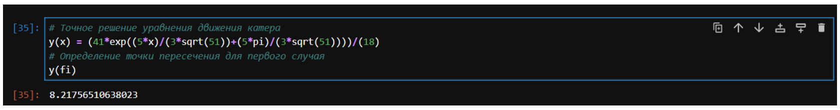

Рис. 4.4: Найти точку пересечения траектории катера и лодки, код для первого случая

Как мы получили такое решение? Путем решения ОДУ в онлайн-калькуляторе (рис. 4.5):

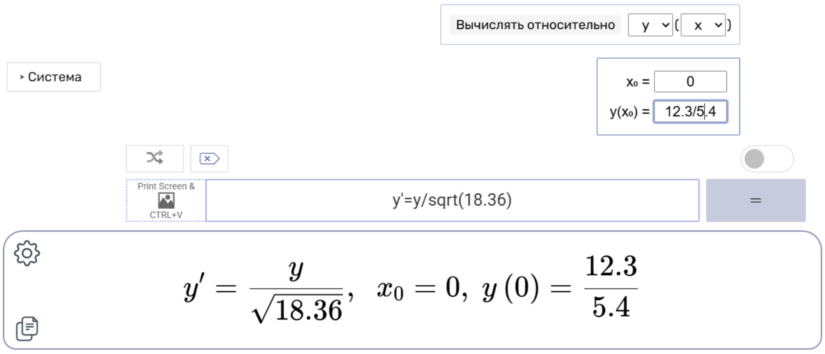

Рис. 4.5: ОДУ для первого случая

Полученные ответы, вместо x в которых мы потом подставили θ, ничего не прибавляя, так как таково начальное условие для первого случая и получили значение (см. рис. 4.4).

$$y' = \frac{y}{\sqrt{18.36}}, \quad x_0 = 0, \ y(0) = \frac{12.3}{5.4}$$

$$y(x) = \frac{41 \cdot \exp\left(\frac{5x}{3\sqrt{51}} + \frac{5\pi}{3\sqrt{51}}\right)}{18}$$

Код для второго случая (рис. 4.6):

```
# Точное решение уравнения движения катера
y(x) = (123*exp((5*x)/(3*sqrt(51))+(5*pi)/(3*sqrt(51))))/(34)
# Определение точки пересечения для второго случая
y(fi-pi)
```

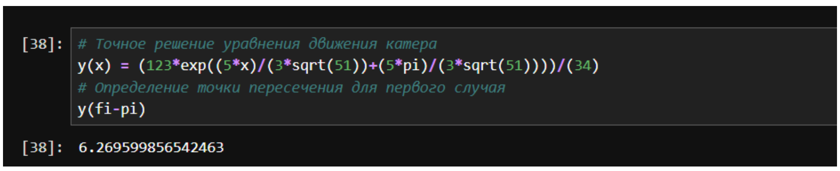

Рис. 4.6: Найти точку пересечения траектории катера и лодки, код для второго случая

Как мы получили такое решение? Путем решения ОДУ в онлайн-калькуляторе (рис. 4.7):

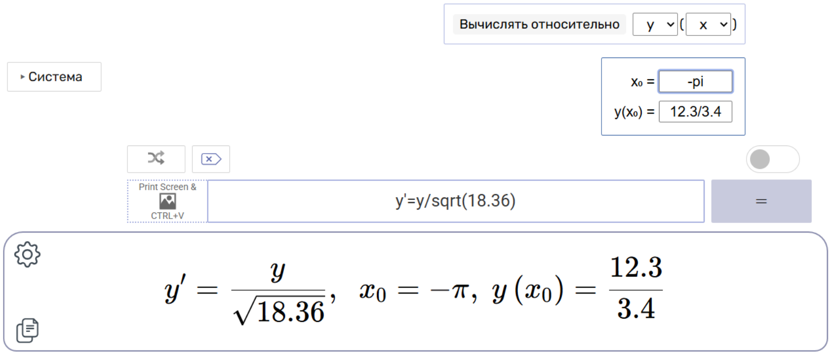

Рис. 4.7: ОДУ для второго случая

Полученные ответы, вместо x в которых мы потом подставили $\theta - \pi$ и получили значение (см. рис. 4.6).

$$y' = \frac{y}{\sqrt{18.36}}, \quad x_0 = -\pi, \; y(0) = \frac{12.3}{3.4}$$

$$y = \frac{123\, e^{\frac{5\, x}{3\sqrt{51}} + \frac{5\, \pi}{3\sqrt{51}}}}{34}$$

5 Выводы

В ходе данной работы я приобрела практические навыки построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска.

Список литературы

1. Кулябов Д.С. Руководство к лабораторной работе №2. Математическое моделирование. - 2025. — 4 с.