Отчёт по лабораторной работе №5

Модель Лотки-Вольерры

Ибатулина Дарья Эдуардовна, НФИбд-01-22

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Исследовать математическую модель Лотки-Вольерры.

2 Задание

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.61x(t) + 0.059x(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.51y(t) - 0.047x(t)y(t) \end{cases}$$

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 9, y_0 = 12$. Найти стационарное состояние системы [1].

3 Теоретическое введение

Моде́ль Ло́тки — Вольте́рры (модель Ло́тки — Вольтерра́[1]) — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь своих авторов (Лотка, 1925; Вольтерра 1926), которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга.

Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами[2].

В математической форме предложенная система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{cases}$$

где x — количество жертв,

y — количество хищников,

t — время,

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами [3–5].

4 Выполнение лабораторной работы

Для того, чтобы построить графики нам нужно сначала решить систему ДУ. Для этого мы используем язык программирования Julia и ПО OpenModelica, затем сравним результат.

4.1 Реализация на Julia

Напишем код для решения системы ДУ, используя библиотеку `DifferentialEquations.jl`, а затем построим графики с помощью библиотеки `Plots`.

```
# Используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# задания системы ДУ, описывающей модель Лотки-Вольтерры
function LV(u, p, t)
    x, y = u
    a, b, c, d = p
    dx = a*x - b*x*y
    dy = -c*y + d*x*y
    return [dx, dy]
end

# Начальные условия
```

```
u0 = [9, 12]
p = [-0.61, -0.059, -0.51, -0.047]
tspan = (0.0, 50.0)
prob = ODEProblem(LV, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, Tsit5())

# Постановка проблемы и ее решение
plot(sol, title = "Модель Лотки-Вольтерры",
    xaxis = "Время", yaxis = "Численность популяции",
    label = ["жертвы" "хищники"],
    c = ["green" "purple"], box =:on)

plot(sol, vars=(1, 2),
    xlabel="x, жертвы", ylabel="y, хищники",
    title="Фазовый портрет")
```

В результате получаем следующие графики изменения численности хищников и численности жертв (рис. 4.1) и зависимости численности хищников от численности жертв (рис. 4.2).

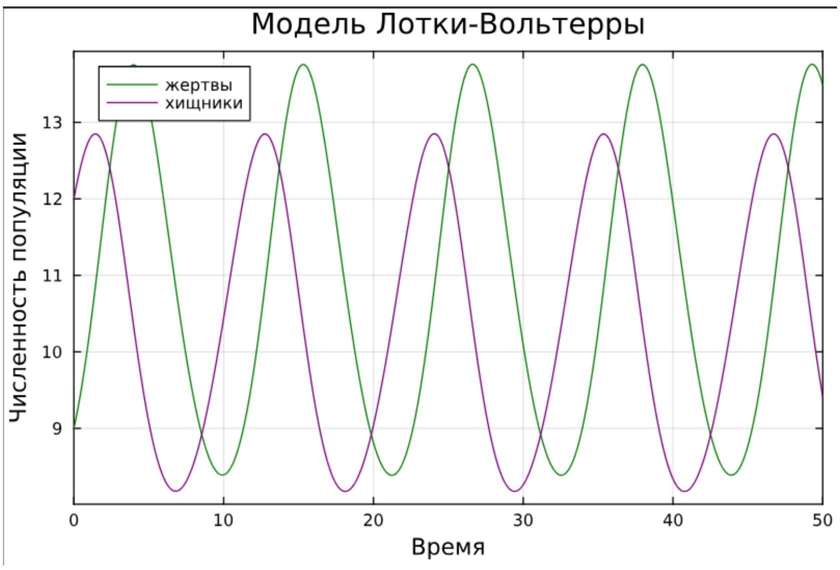

Рис. 4.1: График изменения численности хищников и численности жертв

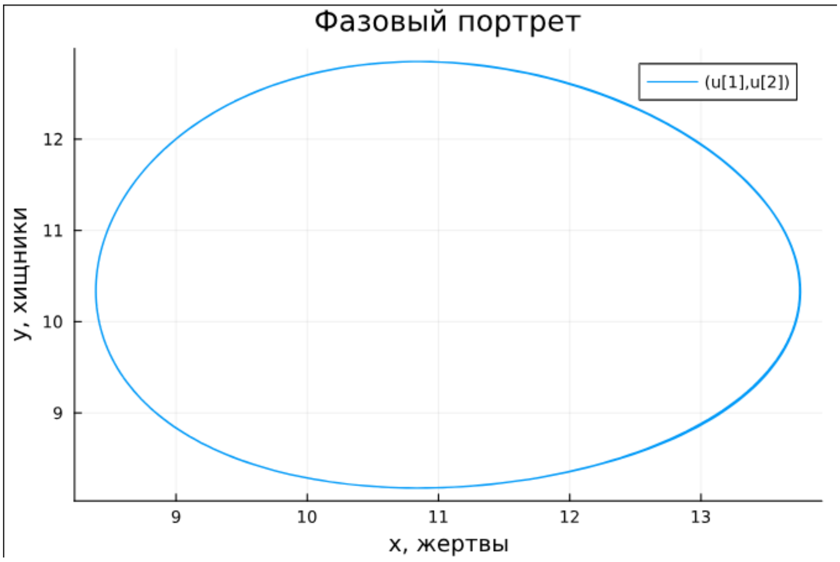

Рис. 4.2: График зависимости численности хищников от численности жертв

Графики периодичны, фазовый портрет замкнут, как и должно быть в жесткой модели Лотки-Вольтерры.

Далее найдем стационарное состояние системы по формуле:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\gamma}{\delta} \\ y_0 = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

Получим, что $x_0 = \frac{0.51}{0.047}$, а $y_0 = \frac{0.61}{0.059}$

Проверим, что эта точка действительно является стационарной, подставив ее в начальные условия.

```
x_c = p[3]/p[4]
y_c = p[1]/p[2]
u0_c = [x_c, y_c]
prob2 = ODEProblem(LV, u0_c, tspan, p)
sol2 = solve(prob2, Tsit5())


plot(sol2, xaxis = "Жертвы", yaxis = "Хищники",
```

```
    label = ["Жертвы" "Хищники"],
    c = ["green" "purple"], box =:on)

plot(sol2, vars=(1, 2), label="y от x",
    xlabel="x, жертвы", ylabel="y, хищники",
    title="Фазовый портрет", xlimit = [0,12],
    ylimit=[0,12], lw=10)
```

Получим график из двух прямых, параллельных оси абсцисс, то есть численность и жертв, и хищников не меняется, как и должно быть в стационарном состоянии (рис. 4.3).

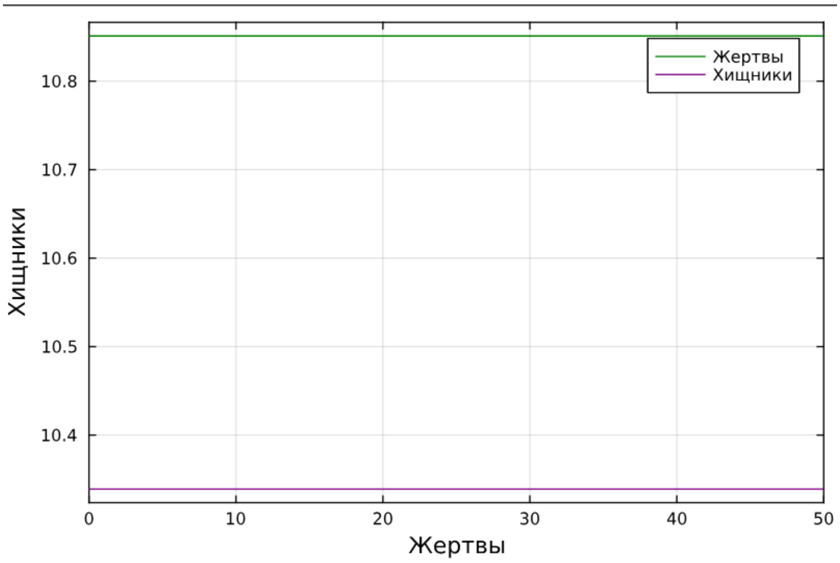

Рис. 4.3: График изменения численности хищников и численности жертв в стационарном состоянии

Фазовый портрет в стационарном состоянии выглядит следующим образом (рис. 4.4).

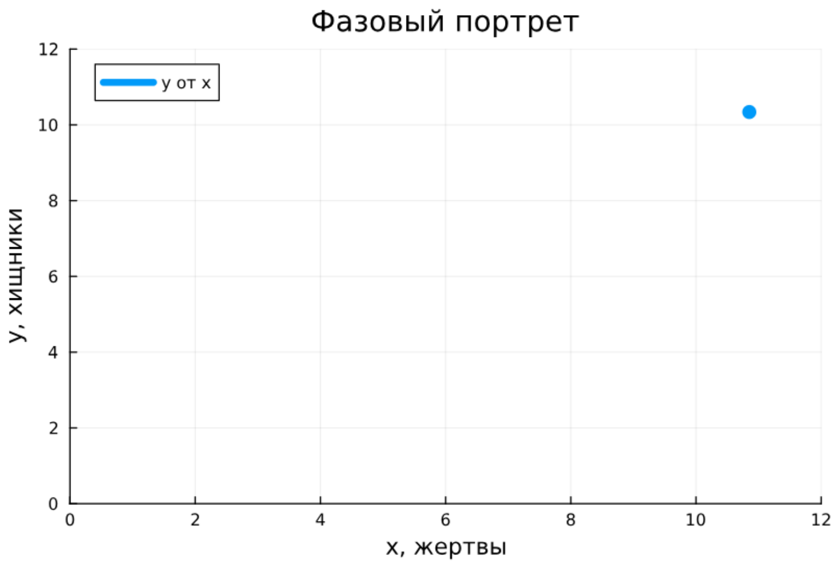

Рис. 4.4: График зависимости численности хищников от численности жертв в стационарном состоянии

4.2 Реализация на OpenModelica

Зададим параметры и систему ДУ.

```
model lab5_1
  parameter Real a = -0.61;
  parameter Real b = -0.059;
  parameter Real c = -0.51;
  parameter Real d = -0.047;
  parameter Real x0 = 9;
  parameter Real y0 = 12;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);

equation
```

```
    der(x) = a*x - b*x*y;
    der(y) = -c*y + d*x*y;
end lab5_1;
```

Выполним симуляцию на интервале от (0, 50), который брали для Julia и получим следующие графики изменения численности хищников и численности жертв (рис. 4.5) и зависимости численности хищников от численности жертв (рис. 4.6).

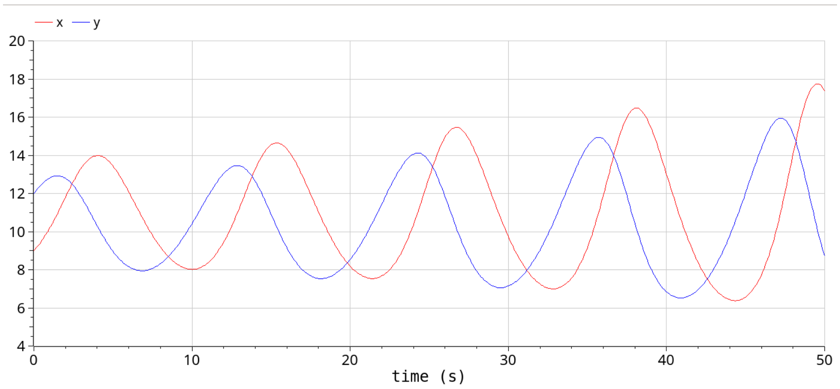

Рис. 4.5: График изменения численности хищников и численности жертв. OpenModelica

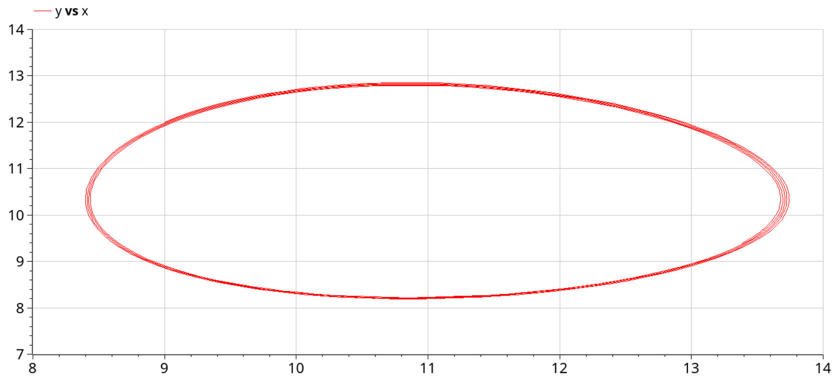

Рис. 4.6: График зависимости численности хищников от численности жертв. OpenModelica

Графики периодичны, фазовый портрет замкнут, как и должно быть в жесткой модели Лотки-Вольтерры.

Также построим тут изменения численности хищников и численности жертв в стационарном состоянии.

```
model lab5_2
  parameter Real a = -0.61;
  parameter Real b = -0.059;
  parameter Real c = -0.51;
  parameter Real d = -0.047;
  parameter Real x0 = 0.51/0.047;
  parameter Real y0 = 0.61/0.059;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);

equation
    der(x) = a*x - b*x*y;
    der(y) = -c*y + d*x*y;
end lab5_2;
```

Получим график, в котором численность жертв и хищников постоянна(рис. 4.7).

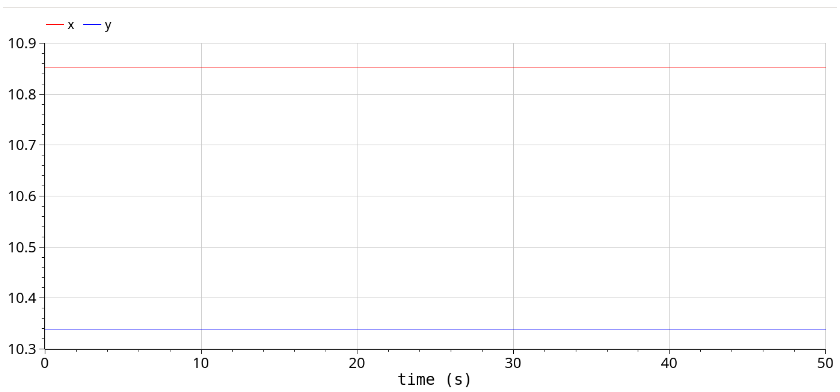

Рис. 4.7: График изменения численности хищников и численности жертв в стационарном состоянии

Фазовый портрет в стационарном состоянии выглядит следующим образом (рис. 4.8).

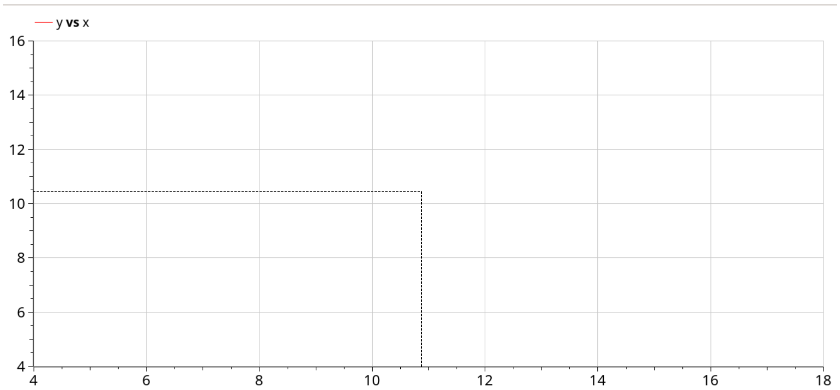

Рис. 4.8: График зависимости численности хищников от численности жертв в стационарном состоянии

5 Сравнение построения модели на Julia и в OpenModelica

Полученные графики идентичны. Никаких особых различий не видно.

6 Выводы

В результате выполнения лабораторной работы я построила математическую модель Лотки-Вольтерры на Julia и в OpenModelica.

Список литературы

1. Кулябов Д.С. Руководство к лабораторной работе №5. Математическое моделирование. 2025. С. 5.
2. Lotka A.J. Elements of Physical Biology. Baltimore: Williams & Wilkins, 1925.
3. Volterra V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically // Nature. 1926. Т. 118. С. 558–560.
4. Wikipedia contributors. Lotka–Volterra equations. https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations, 2025.
5. Цибулин В.Г., Ха Т.Д., Зеленчук П.А. Анализ существующих динамических моделей на примере системы «хищник-жертва» // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 28, № 5. С. 1–14.