Отчёт по лабораторной работе №2

Дисциплина: Математическое моделирование

Ибатулина Дарья Эдуардовна, НФИбд-01-22

Содержание

# 1 Цель работы

Целью данной работы является приобретение навыков построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задачи о погоне.

# 2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 12,3 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,4 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени);
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев;
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки.

# 3 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A.

# 4 Выполнение лабораторной работы

В начале я установила среду Julia с официального сайта и установила все необходимые пакеты. В частности, это *Plot*, *DifferentialEquations*. Так же рассчитала номер своего варианта (рис. [1](#fig:001)):

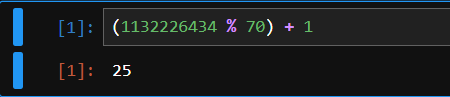


Figure 1: Вычисление номера варианта

Далее перейдём к заданию 1[1].

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

В данном задаче мы моделируем движение катера береговой охраны, который должен догнать и затем следовать за лодкой браконьеров, используя полярные координаты.

**Начальные условия**

* : Время, когда происходит обнаружение лодки.
* : Местоположение лодки браконьеров в момент обнаружения — на полюсе, т.е. в начале координат.
* км: Местоположение катера береговой охраны в момент обнаружения лодки.

**Установка полярной системы координат**

* Полюс выбран как точка обнаружения лодки, и ось (радиальная ось) проходит через точку нахождения катера береговой охраны.
* Угол в момент обнаружения лодки, и катер будет двигаться вдоль этой оси до тех пор, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка.

**Первоначальная прямая траектория катера**

Катер должен двигаться вдоль прямой, пока не окажется на одинаковом расстоянии от полюса, как и лодка. Лодка за время пройдет расстояние , а катер — расстояние (или , в зависимости от того, с какой стороны катер относительно полюса).

Время, за которое оба пройдут это расстояние, будет одинаковым. Для лодки это время равно , где — скорость лодки. Для катера время будет (или , в зависимости от положения катера).

Поскольку время одинаковое, мы составляем уравнение:

или

Таким образом, для первого случая, где :

Для второго случая:

**Переход к круговой траектории**

После того как катер окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка, он должен начать движение по круговой траектории вокруг полюса. При этом катер должен удаляться от полюса с той же скоростью , что и лодка.

Для этого мы разбиваем скорость катера на две составляющие: - Радиальная скорость () — это скорость, с которой катер удаляется от полюса. Мы полагаем, что радиальная скорость равна скорости лодки:

* Тангенциальная скорость () — это скорость, с которой катер движется по окружности вокруг полюса. Эта скорость определяется через угловую скорость :

Так как катер движется с более высокой скоростью (в 4,4 раза больше скорости лодки), мы находим тангенциальную скорость:

**Система дифференциальных уравнений**

Теперь мы можем описать движение катера в виде системы дифференциальных уравнений:

С начальными условиями для первого случая:

Для второго случая:

**Уравнение для радиальной зависимости**

Исключая из системы производную по времени , можно получить уравнение, которое связывает радиус и угол :

Это уравнение можно решить, чтобы получить траекторию катера в полярных координатах.

1. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

Здесь уже был необходим следующий код:

using DifferentialEquations, Plots # используемые пакеты  
  
# Расстояние между лодкой и катером  
k = 12.3   
  
# Начальные условия для двух случаев  
r0 = k / 5.4 # к кратности скоростей прибавляем 1  
r0\_2 = k / 3.4 # из кратности скоростей вычитаем 1  
theta0 = (0.0, 2\*pi) # целый круг  
theta0\_2 = (-pi, pi) # целый круг  
  
# Угол движения лодки браконьеров и интервал времени  
fi = 3\*pi/4  
t = (0, 50)  
  
# Функция, описывающая движение лодки браконьеров  
x(t) = tan(fi) \* t  
  
# Дифференциальное уравнение для движения катера  
f(r, p, t) = r / sqrt((4.4) ^ 2 - 1) # (4.4) ^ 2 - 1 = 18.36  
  
# Решение ДУ для первого случая с подставленными начальными условиями  
prob = ODEProblem(f, r0, theta0)  
sol = solve(prob, saveat = 0.01)  
  
# Построение траектории катера  
plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 10), label="Траектория катера")

После этого я выполнила построение траектории лодки:

# Угол и координаты для построения траектории лодки (первый случай)  
ugol = [fi for i in range(0, 15)]  
x\_lims = [x(i) for i in range(0, 15)]  
  
# Добавление траектории лодки на график  
plot!(ugol, x\_lims, proj=:polar, lims=(0, 10), label="Траектория лодки")

И получила следующий результат (график) (рис. [2](#fig:002))

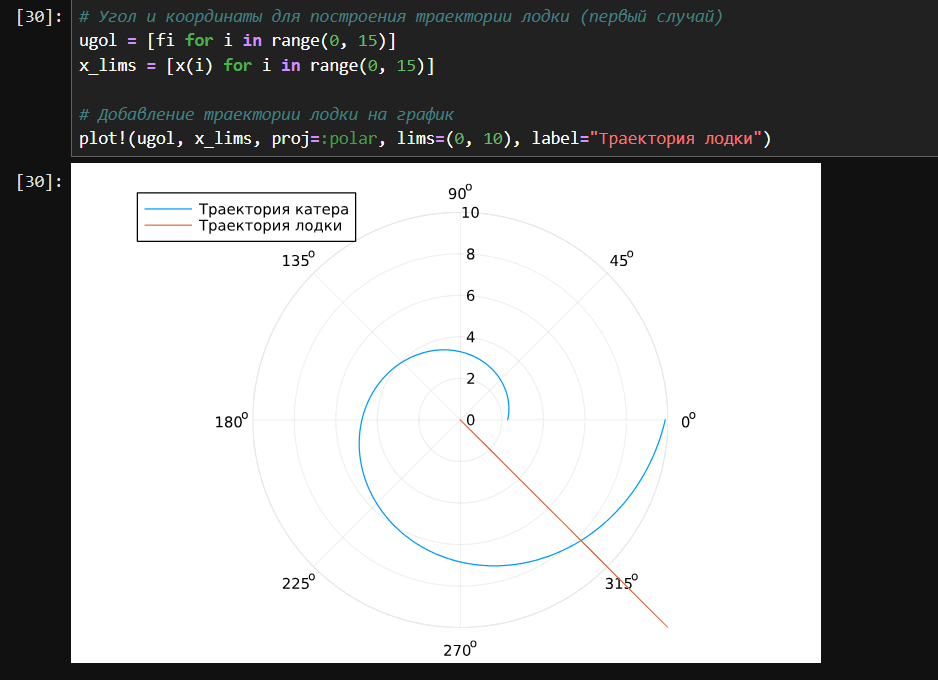


Figure 2: График для первого случая (траектория лодки и траектория катера)

Далее повторила действия для второго случая. Получился график, немного отличный от предыдущего - спираль закручивается в другую сторону (рис. [3](#fig:003)):

# Решение ДУ для второго случая  
prob\_2 = ODEProblem(f, r0\_2, theta0\_2)  
sol\_2 = solve(prob\_2, saveat = 0.01)  
  
# Построение траектории катера во втором случае  
plot(sol\_2.t, sol\_2.u, proj=:polar, lims=(0, 15), label="Траектория катера")  
  
# Добавление траектории лодки на график  
plot!(ugol, x\_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label="Траектория лодки")

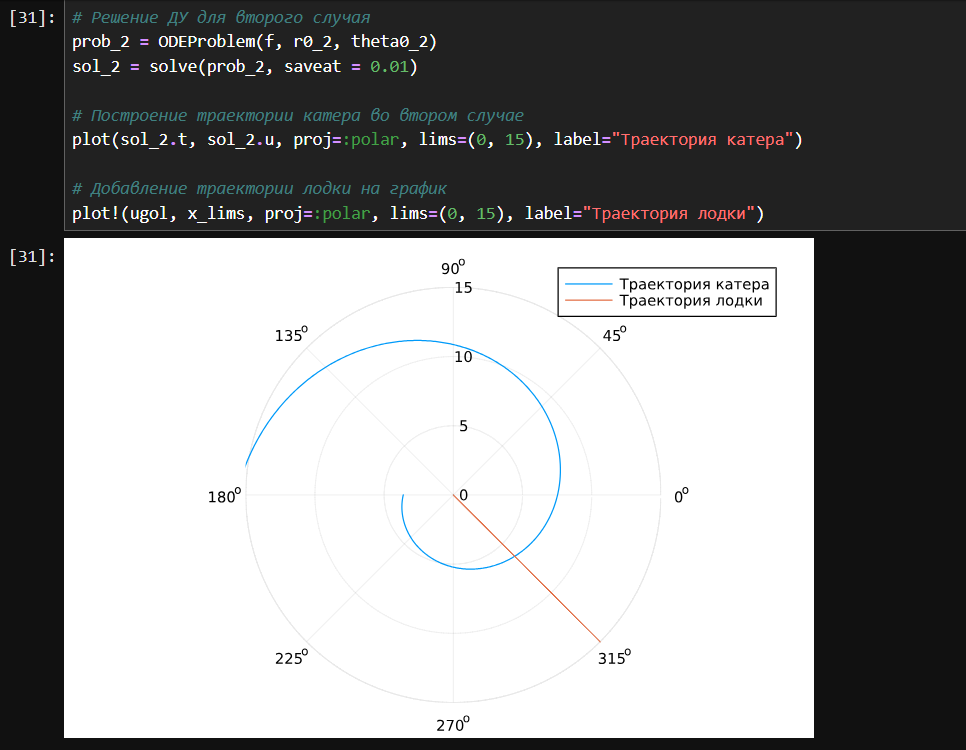


Figure 3: График для второго случая (траектория лодки и траектория катера)

1. Найти точку пересечения траектории катера и лодки, код для первого случая (рис. [4](#fig:004)):

# Точное решение уравнения движения катера  
y(x) = (41\*exp((5\*x)/(3\*sqrt(51))+(5\*pi)/(3\*sqrt(51))))/(18)  
# Определение точки пересечения для первого случая  
y(fi)

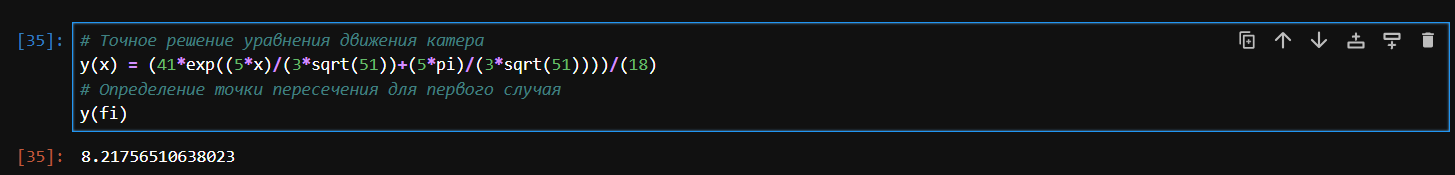


Figure 4: Найти точку пересечения траектории катера и лодки, код для первого случая

Как мы получили такое решение? Путем решения ОДУ в онлайн-калькуляторе (рис. [5](#fig:005)):

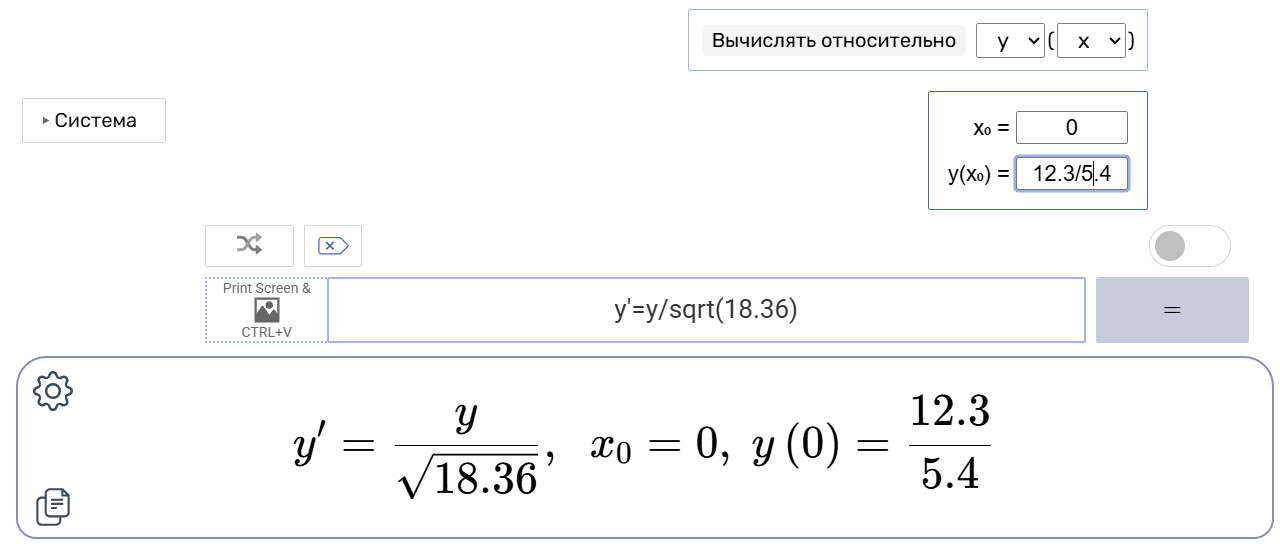


Figure 5: ОДУ для первого случая

Полученные ответы, вместо х в которых мы потом подставили , ничего не прибавляя, так как таково начальное условие для первого случая и получили значение (см. рис. [4](#fig:004)).

Код для второго случая (рис. [6](#fig:006)):

# Точное решение уравнения движения катера  
y(x) = (123\*exp((5\*x)/(3\*sqrt(51))+(5\*pi)/(3\*sqrt(51))))/(34)  
# Определение точки пересечения для второго случая  
y(fi-pi)

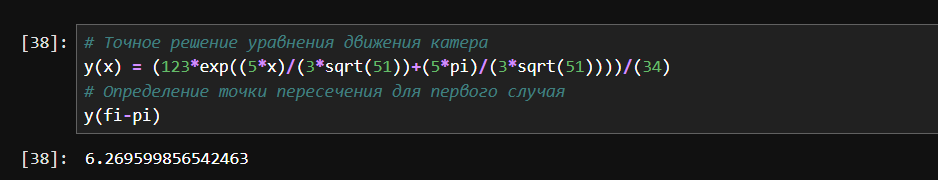


Figure 6: Найти точку пересечения траектории катера и лодки, код для второго случая

Как мы получили такое решение? Путем решения ОДУ в онлайн-калькуляторе (рис. [7](#fig:007)):

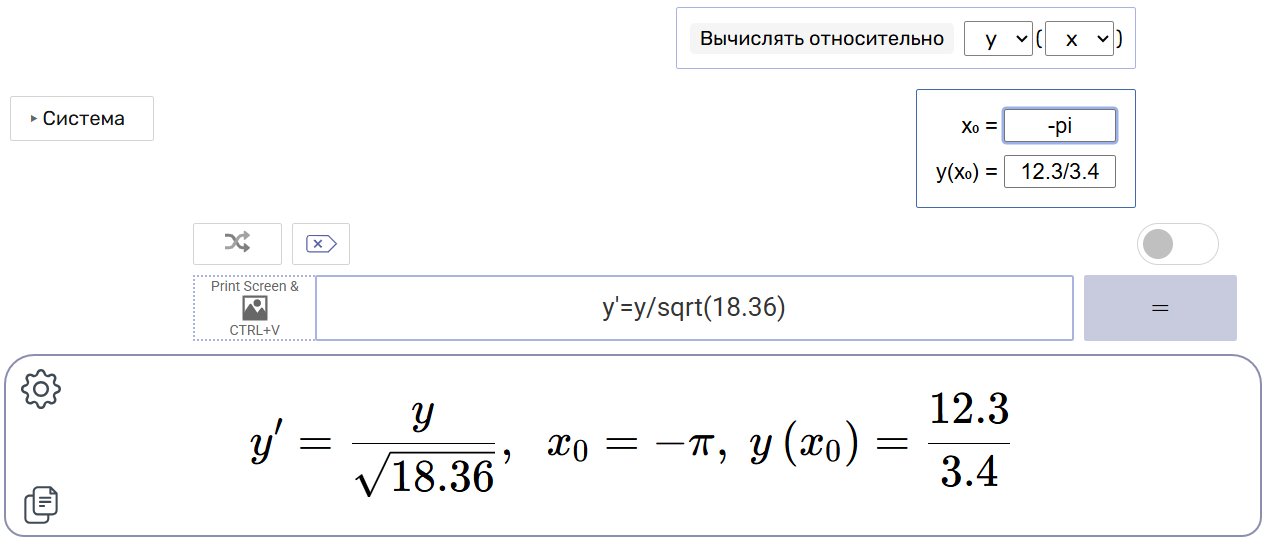


Figure 7: ОДУ для второго случая

Полученные ответы, вместо х в которых мы потом подставили и получили значение (см. рис. [6](#fig:006)).

# 5 Выводы

В ходе данной работы я приобрела практические навыки построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска.

# Список литературы

1. Кулябов Д.С. Руководство к лабораторной работе №2. Математическое моделирование. - 2025. — 4 с.