

**Лабораторная работа №7.**

## **Прогнозирование временных рядов методами скользящего среднего и экспоненциального сглаживания**

**Цели занятия:**

приобрести навыки применения методов скользящего среднего и экспоненциального сглаживания для прогнозирования временных рядов.

**Задание:**

- построить и проанализировать график временного ряда спроса на товар с точки зрения применимости методов скользящего среднего и экспоненциального сглаживания;
- выбрать наиболее приемлемое значение:
  - 1)  $m$  из  $m=4$  и  $m=8$ ;
  - 2)  $\alpha$  из  $\alpha =0,05$  и  $\alpha =0,3$ .
- сделать прогноз спроса на следующий месяц методом скользящего среднего и экспоненциального сглаживания.

**Краткие сведения из теории**

Методы скользящего среднего и экспоненциального сглаживания используются для прогнозирования временных рядов. Формально **временной ряд** – это множество пар данных ( $X, Y$ ), в которых  $X$  – это моменты или периоды времени (независимая переменная), а  $Y$  – параметр (зависимая переменная), характеризующий величину исследуемого явления. Цель исследования временных рядов состоит в **выявлении тенденции** изменения фактических значений параметра  $Y$  во времени и **прогнозировании** будущих значений  $Y$ . Модель, построенную по ретроспективным данным можно использовать при наличии **устоявшейся тенденции** в динамике значений прогнозируемого параметра. К возможным ситуациям нарушения такой тенденции относятся: коренное изменение плана деятельности фирмы, которая стала терпеть убытки; резкое изменение параметров внутренней или внешней ситуации (цен на сырье; уровня инфляции); стихийные бедствия, военные действия, общественные беспорядки.

Суть методов **скользящего среднего и экспоненциального сглаживания** состоит в том, фактические уровни исследуемого временного ряда заменяются их средними значениями, погашающими случайные колебания. Это позволяет более четко выделить основную тенденцию изменения исследуемого параметра. Эти относительно простые методы прогнозирования временных рядов, основанные на представлении прогноза  $y_{t+1}^*$  в виде суммы  $m$  предыдущих наблюдаемых значений  $y_{t-i}$  ( $i=1, \dots, m-1$ ), причем каждое из них учитывается с определенным весовым коэффициентом  $\beta_t$

$$\mathbf{y}_{t+1}^* = \beta_t \mathbf{y}_t + \beta_{t-1} \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \beta_{t-m+1} \mathbf{y}_{t-m+1}.$$

Использование методов скользящего среднего и экспоненциального сглаживания основано на следующих допущениях:

- временной ряд является **устойчивым** в том смысле, что его элементы являются реализациями следующего случайного процесса:  $\mathbf{y}_t = \mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$ , где  $\mathbf{b}$  – неизвестный постоянный параметр,  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  – случайная ошибка.
- случайная ошибка  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  имеет нулевое математическое ожидание и постоянную дисперсию;
- данные для различных периодов времени не коррелированы.

### **Метод скользящего среднего**

Расчет прогноза и сглаживание временного ряда **методом скользящего среднего** производится по формуле

$$\mathbf{y}_{t+1}^* = (\mathbf{y}_t + \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \mathbf{y}_{t-m+1})/m.. \quad (7.1)$$

При этом предполагается, что все  $m$  значений  $\mathbf{y}_{t-i}$  за  $m$  моментов времени вносят равный вклад в прогнозируемое значение  $\mathbf{y}_{t+1}^*$  и учитываются с одинаковым весовым коэффициентом  $1/m$ .

### **Метод экспоненциального сглаживания**

В **методе экспоненциального сглаживания** весовые коэффициенты предыдущих наблюдаемых значений увеличиваются по мере приближения к последним (по времени) данным. Кроме того, в формировании прогнозируемого значения участвуют все  $n$  известных значений  $\mathbf{y}_{t-i}$  ( $i=1, \dots, n-1$ ), временного ряда

$$\mathbf{y}_{t+1}^* = \alpha \mathbf{y}_t + \alpha(1 - \alpha)\mathbf{y}_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2\mathbf{y}_{t-2} + \dots \quad (7.2)$$

Для расчета прогноза и для сглаживания временного ряда методом экспоненциального сглаживания используют формулу (7.2) в виде

$$\mathbf{y}_{t+1}^* = \alpha \mathbf{y}_t + \alpha(1 - \alpha)\mathbf{y}_t^* \quad (7.3)$$

где  $\alpha$  – **константа сглаживания**. Таким образом, значение  $\mathbf{y}_{t+1}^*$  можно вычислить рекуррентно на основании значения  $\mathbf{y}_t^*$ .

## Методические рекомендации

### Задача № 7.01

Построить и проанализировать график временного ряда, представленного в табл. 7.1 с точки зрения применимости методов скользящего среднего и экспоненциального сглаживания. Сделать прогноз для  $t=8$  методом скользящего среднего для  $m=4$ ; методом экспоненциального сглаживания для  $\alpha=0,6$ .

Таблица 7.1

$t$	1	2	3	4	5	6	7
$y_t$	46	50	48	53	51	52	57

### Решение

График исходного временного ряда представлен на рис. 7.1.

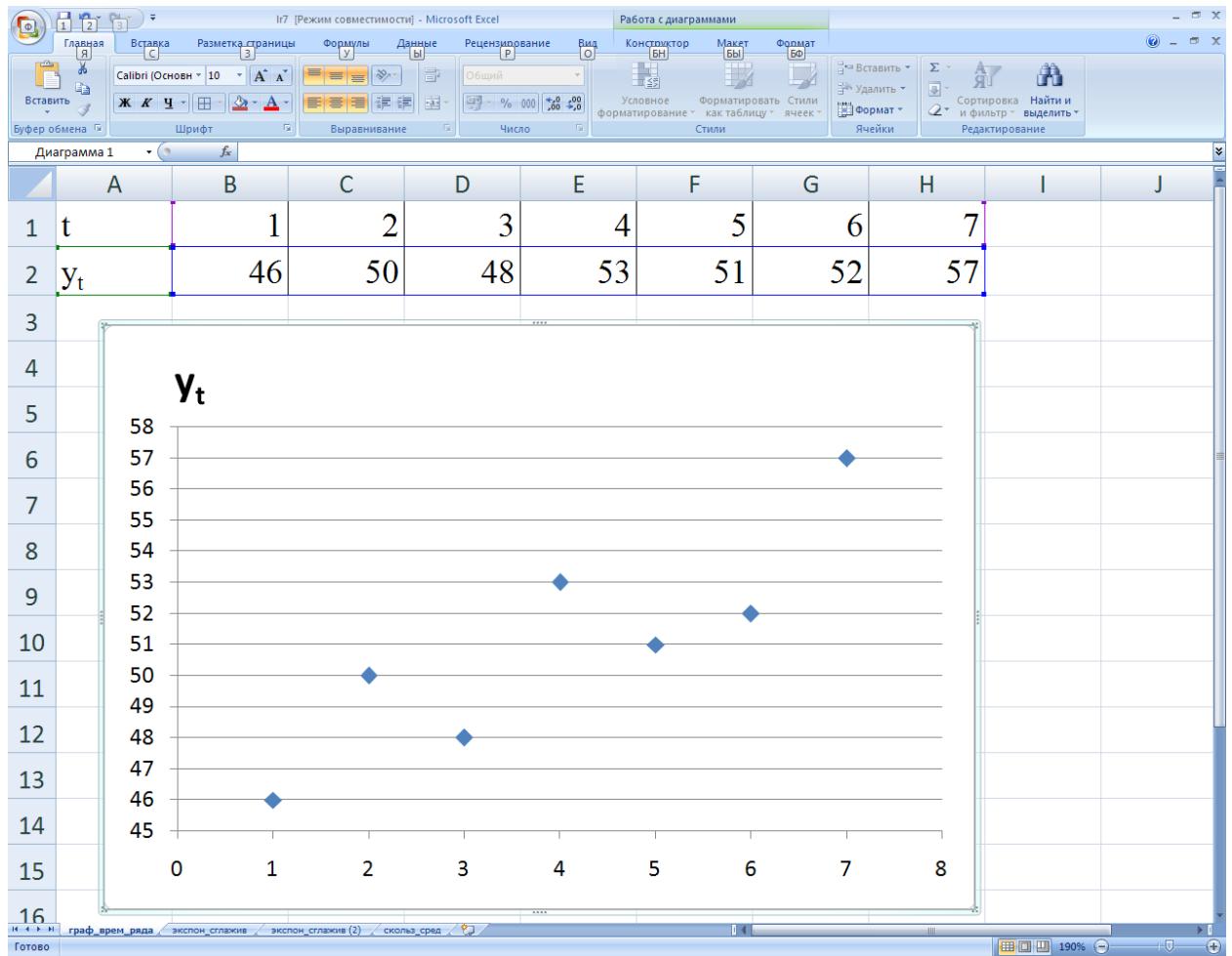


Рис. 7.1 График временного ряда задачи

Из графика видно, что наблюдается явная тенденция к возрастанию значений временного ряда  $y_t$ , что приведет к неточности в прогнозах, выполненных методами скользящего среднего и экспоненциального

сглаживания (это следует из допущений методов), к подавлению этой тенденции.

Для прогнозирования методом скользящего среднего достаточно выполнить единственный расчет

$$y^*_{8(m=4)} = (53+51+52+57)/4 = 53,25 \text{ [тыс. шт.]}$$

Для прогнозирования методом экспоненциального сглаживания необходимо провести расчеты ( $y_{t+1}^* = \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha)y_t^*$ ) для всех моментов времени, за исключением  $t=1$ :

$$y^*_{2(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 46 + 0,4 \cdot 46 = 46;$$

$$y^*_{3(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 50 + 0,4 \cdot 46 = 48,4;$$

$$y^*_{4(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 48 + 0,4 \cdot 48,4 = 48,16;$$

$$y^*_{5(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 53 + 0,4 \cdot 48,16 = 51,064;$$

$$y^*_{6(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 51 + 0,4 \cdot 51,064 = 51,026;$$

$$y^*_{7(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 52 + 0,4 \cdot 51,026 = 51,61;$$

$$y^*_{8(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 57 + 0,4 \cdot 51,61 = 54,844 \text{ [тыс. шт.]}$$

На рис. 7.2 показано решение этой задачи в MS Excel.

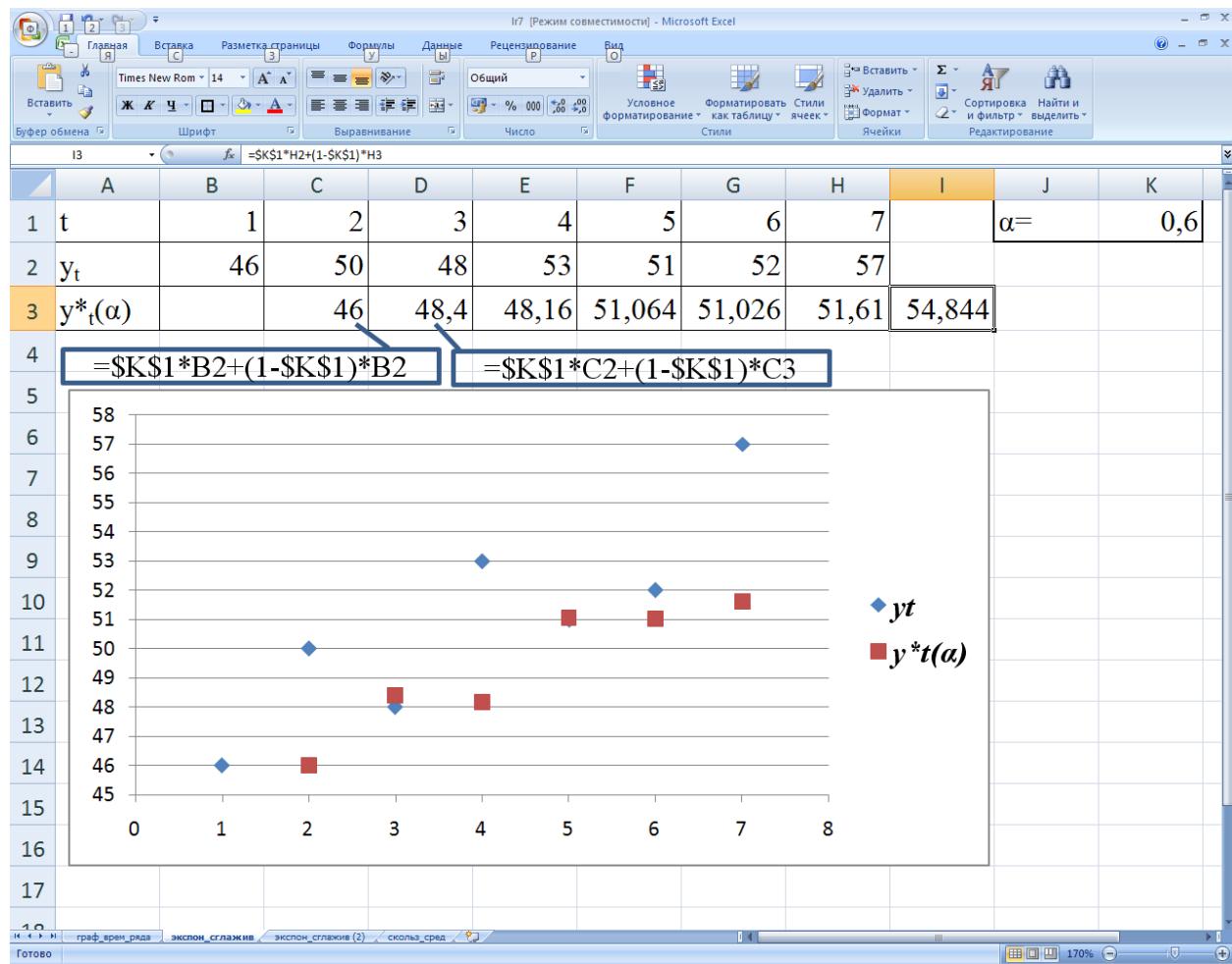


Рис. 7.2

Не существует четкого правила для выбора числа членов скользящей средней  $m$  или параметра экспоненциального сглаживания  $\alpha$ . Они определяются статистикой исследуемого процесса. Чем меньше  $m$  и чем больше  $\alpha$ , тем сильнее реагирует прогноз на колебания временного ряда, и наоборот, чем больше  $m$  и чем меньше  $\alpha$ , тем более инерционным является процесс прогнозирования. На практике величина  $m$  обычно принимается в пределах от 2 до 10, а  $\alpha$  – в пределах от 0,01 до 0,30. При наличии достаточного числа элементов временного ряда значение  $m$  и  $\alpha$ , приемлемое для прогноза, можно определить следующим образом:

- задать несколько предварительных значений  $m$  ( $\alpha$ );
- сгладить временной ряд, используя каждое заданное значение  $m$  ( $\alpha$ );
- вычислить среднюю ошибку прогнозирования как среднее абсолютное отклонение (mean absolute deviation – MAD)

$$MAD = (\sum |y_t - \hat{y}_t|) / m ; \quad (10.4)$$

- выбрать значение  $m$  ( $\alpha$ ), соответствующее минимальной ошибке. Для рассмотренной задачи число анализируемых значений при применении метода скользящего среднего  $m = 3$  (рис. 7.3). При применении же экспоненциального сглаживания параметр  $\alpha=0,6$  (рис. 7.4).

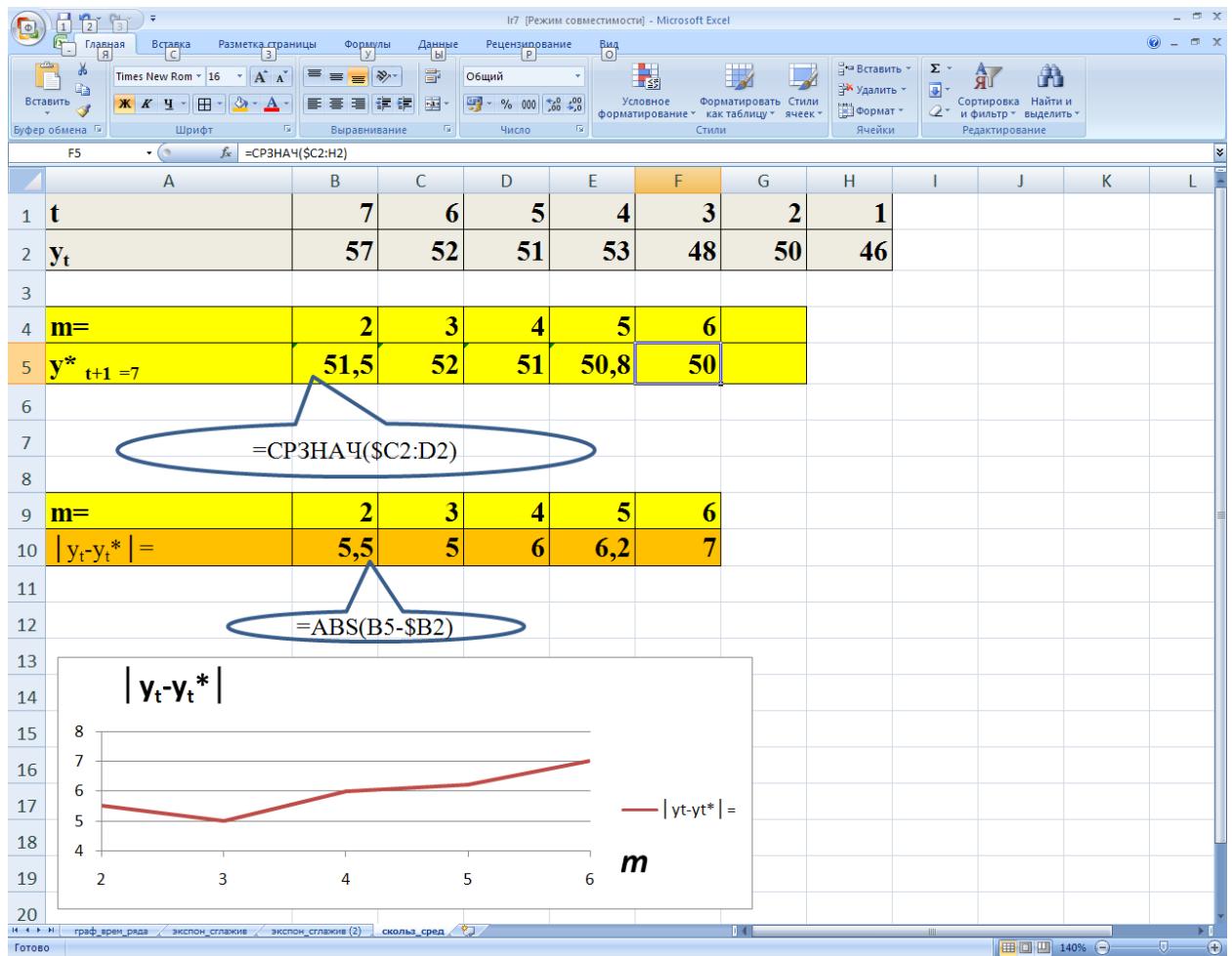


Рис. 7.3

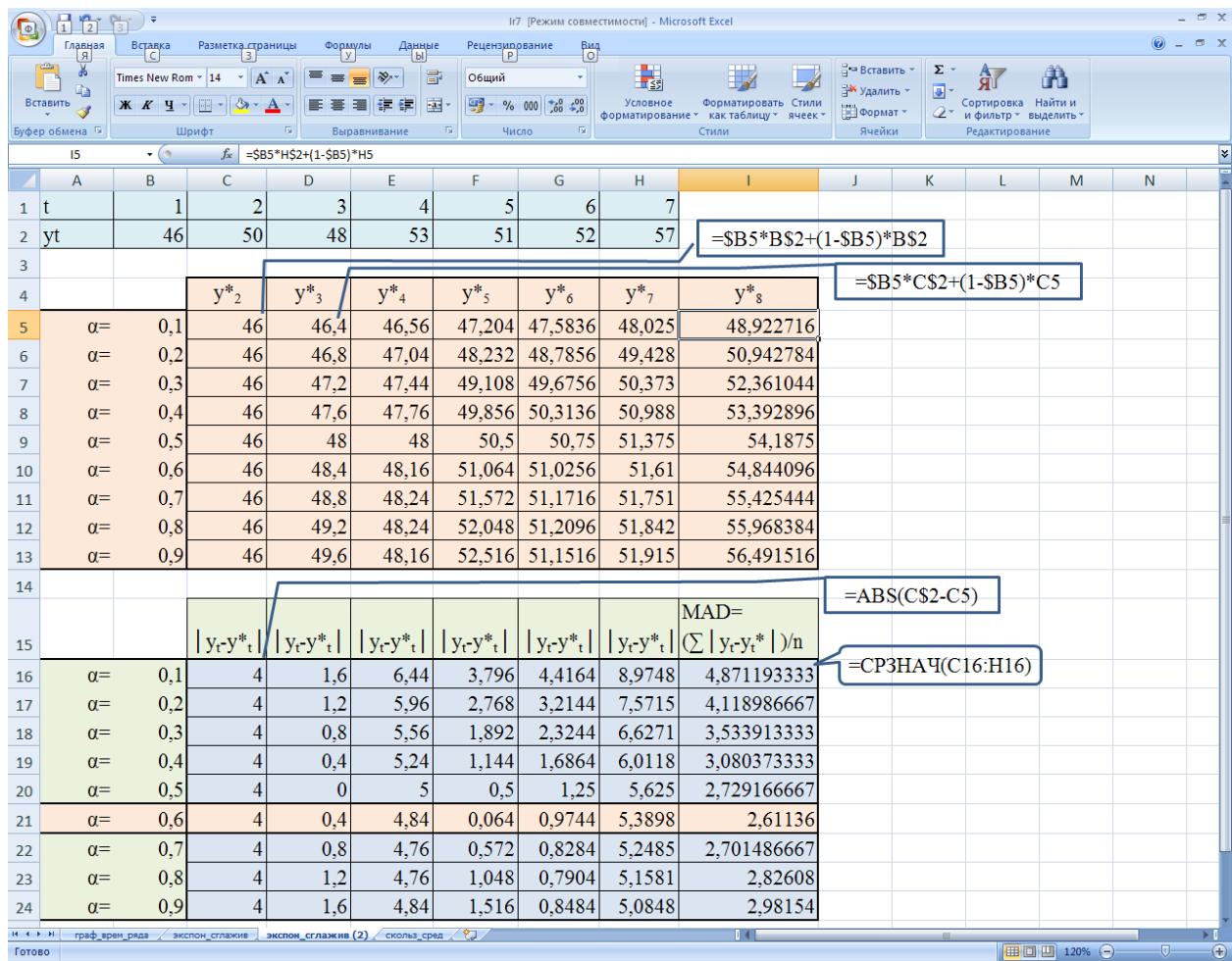


Рис. 7.4

### Варианты заданий

В табл. 7.2 приведены данные о спросе на некоторый товар за прошедший год. Построить и проанализировать график временного ряда с точки зрения применимости методов скользящего среднего и экспоненциального сглаживания. Выбрать наиболее приемлемое значение:

- 3) m из m=4 и m=8;
- 4)  $\alpha$  из  $\alpha = 0,05$  и  $\alpha = 0,3$ .

Сделать прогноз спроса на следующий месяц методом скользящего среднего и экспоненциального сглаживания.

Таблица 10.2 *Объем спроса на товар*

Месяц № вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	46	56	54	43	57	56	67	62	50	56	47	56
2	54	42	64	60	70	66	57	55	52	62	70	72
3	1054	1104	1149	1291	1427	1505	1513	1635	1987	1884	1776	1893
4	932	1006	1200	1250	1398	1498	1536	1722	1900	2187	2250	2780
5	680	720	790	820	950	1050	970	840	750	690	900	920
6	1002	1200	1320	1508	1605	1740	1609	1510	1430	1102	1100	1608
7	2100	2300	2140	2500	2760	2400	2135	2780	2600	2800	3200	3100

Месяц № вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	2367	2913	3287	5490	4321	5502	6345	7665	8004	7983	8342	8130
9	2250	2780	3560	4378	5509	5146	5233	5620	5700	5688	5730	5690
10	900	920	1010	1100	1150	1300	1370	1450	1480	1540	1600	1570
11	1105	1608	1910	2106	2207	2404	2608	3020	2503	2306	2109	2805
12	3200	3100	3350	3700	3250	3970	5200	5400	5700	5800	5400	5670
13	1154	1204	1249	1391	1527	1605	1613	1735	2087	2406	2467	3013
14	839	978	1100	1150	1298	1368	1436	1622	1700	1187	2150	1780
15	903	1010	1320	1310	1706	1500	1452	1377	1800	1876	1900	1884
16	42	58	51	48	59	51	63	67	51	57	46	59
17	50	46	68	64	73	62	58	57	55	67	71	72
18	1034	1114	1249	1391	1327	1405	1413	1535	1887	1784	1676	1793
19	937	1016	1207	1230	1298	1478	1436	1622	1800	2117	2150	2280
20	1680	1720	1790	1820	1950	1850	1970	1840	1750	1690	1900	1920
21	1102	1290	1390	1408	1505	1640	1609	1610	1530	1402	1400	1508
22	1100	1300	1140	1500	1760	1400	1135	1780	1600	1800	1200	1100
23	2307	2613	2287	2490	3321	3502	4345	5665	5004	5983	6342	7130
24	1250	1780	1560	1378	2509	2146	2233	2620	3700	3688	3730	4690
25	910	927	1015	1110	1170	1320	1360	1410	1440	1510	1600	1570
26	1005	1308	1510	1506	1807	1404	1608	2020	1503	2006	2109	2105
27	3220	3102	3350	3706	3254	3960	5205	5407	5704	5803	5408	5640
28	1154	1204	1249	1391	1527	1605	1613	1735	2087	2406	2467	3013
29	839	978	1100	1150	1298	1368	1436	1622	1700	1187	2150	1780
30	902	1011	1325	1316	1726	1504	1432	1357	1803	1846	1900	1888