Практическое занятие 12: Проверка статистических гипотез

Цель занятия: приобретение навыков проверки статистических гипотез.

Виды статистических гипотез:

1. Гипотеза о законе распределения статистической совокупности.
2. Числовые характеристики стат. совокупностей, закон распределения которых уже известен:
   - Гипотеза о генеральной средней нормального распределения
   - Гипотеза о равенстве генеральных средних двух распределений
   - Гипотеза о генеральной дисперсии нормального распределения;
   - Гипотеза о равенстве ген. дисперсий двух нормальных распределений;
   - Гипотеза о вероятности события;
   - Сравнение вероятностей двух биномиальных распределений

Гипотеза о равенстве генеральных средних двух распределений

Постановка задачи

Из двух генеральных совокупностей извлечены выборки объёмов n и m и найдены их выборочные средние: и соответственно.

Требуется на уровне значимости α проверить гипотезу H0: о равенстве генеральных средних против одной из следующих конкурирующих гипотез: H1: , H1: или H1: .

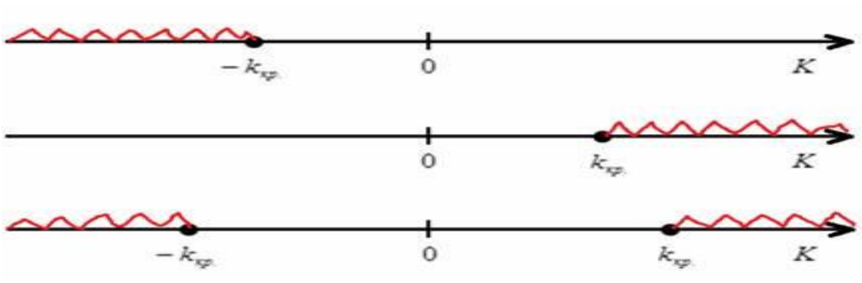
Как и в гипотезе о значении генеральной средней, в первом случае строится левосторонняя критическая область, во втором – правосторонняя и в третьем – двусторонняя.

При этом возможны следующие вариации задачи:

а) выборки независимы, генеральные совокупности распределены нормально и известны их дисперсии σ^2_x, σ^2_y .

Тогда для проверки нулевой гипотезы используют **статистический критерий** , где $\overline{X}$, $\overline{Y}$ – случайные значения выборочных средних.

Критическая область однозначно определяется критическим значением $z_{кр}$, которое отыскивается из соотношения $\Phi(z_{кр})=(1-2\alpha)/2$ для односторонней области и $\Phi(z_{кр})=(1-\alpha)/2$ – для двусторонней, где α – выбранный уровень значимости, а $\Phi(z)$ – функция Лапласа.



Далее на основании выборочных данных рассчитывается **наблюдаемое значение критерия**:

$$Z_{набл} = \frac{\overline{x}_в - \overline{y}_в}{\sqrt{\frac{\sigma^2{}_x}{n} + \frac{\sigma^2{}_y}{m}}}$$

Если $\boldsymbol{z_{набл}}$ в критическую область ***НЕ попадает***, то гипотезу $\boldsymbol{H_0}$: $\overline{x}_Г = \overline{y}_Г$ на уровне значимости $\boldsymbol{\alpha}$ **принимаем**.

Если же $\boldsymbol{z_{набл}}$ в критическую область ***попадает***, то нулевая гипотеза отвергается в пользу альтернативной гипотезы $\boldsymbol{H_1}$.

Задание 1

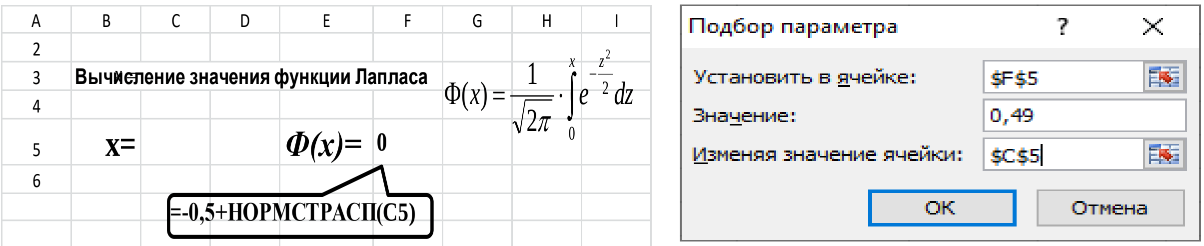
По выборке объема $\boldsymbol{n}$=30 найден средний вес $\overline{x}_в$ =130 г изделий, изготовленных на первом станке; по выборке объема m=40 найден средний вес $\overline{y}_в$ =125 г изделий, изготовленных на втором станке. Известны генеральные дисперсии $\boldsymbol{\sigma^2_x}$ =60 г^2, $\boldsymbol{\sigma^2_y}$ =80 г^2. Требуется на уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $\boldsymbol{H_0}$: $\overline{x}_Г = \overline{y}_Г$ против конкурирующей гипотезы $\boldsymbol{H_1}$: $\overline{x}_Г > \overline{y}_Г$. Предполагается, что генеральные совокупности распределены нормально, а выборки независимы.

Методика выполнения

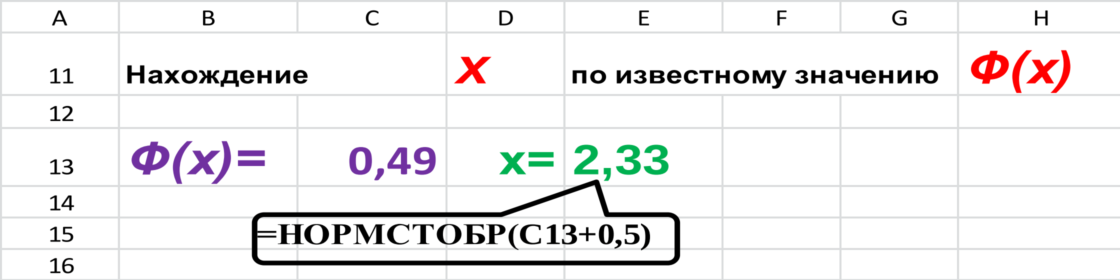
По условию, известны генеральные дисперсии, поэтому для проверки гипотезы о равенстве генеральных средних используем критерий

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma^2{}_x}{n} + \frac{\sigma^2{}_y}{m}}}.$$

Для конкурирующей гипотезы $\overline{x}_Г > \overline{y}_Г$ строится правостороння критическая область. Критическое значение при $\boldsymbol{\alpha}$=0,01 найдём из соотношения $\boldsymbol{\Phi(z_{кр})=(1-2\alpha)/2}$=(1-2*0,01)/2=0,49. ⇒ Используем таблицу значений функции Лапласа либо MS Excel ⇒ $\boldsymbol{z_{кр}} \approx 2{,}33$.

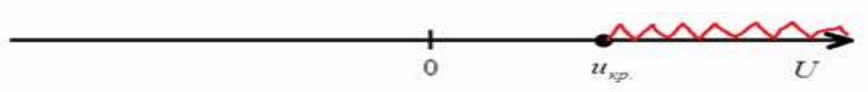


Альтернативный вариант определения аргумента функции Лапласа:



A	B	C	D	E	F	G	H
11	Нахождение		*x*	по известному значению			*Ф(x)*
12							
13	*Ф(x)=*	0,49	x=	2,33			
14							
15		=НОРМСТОБР(C13+0,5)					
16							

Таким образом, при $z<z_{кр}$ нулевая гипотеза принимается, а при $z>z_{кр}$ отвергается:



По выборочным данным вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{набл}=\frac{\bar{x}_в-\bar{y}_в}{\sqrt{\frac{\sigma^2{}_x}{n}+\frac{\sigma^2{}_y}{m}}}=\frac{130-125}{\sqrt{\frac{60}{30}+\frac{80}{40}}}=2,5$$

$z_{набл}>z_{кр}$,, поэтому **на уровне значимости 0,01 гипотезу H_0:** $\bar{x}_Г=\bar{y}_Г$ **отвергаем**. Иными словами, выборочные средние $\bar{x}_в$=130, $\bar{y}_в$=125 ***статистически значимо*** отличаются друг от друга, и это отличие вряд ли объяснимо случайными факторами. А объяснимо оно именно различием генеральных средних.

Ответ: на уровне значимости 0,01 нулевую гипотезу отвергаем. Это значит, что с вероятностью 1% мы совершили ошибку первого рода (отвергли правильную гипотезу).

Варианты задания 1

$H_0:\bar{x}_Г=\bar{y}_Г$ $H_1:\bar{x}_Г>\bar{y}_Г$

№ вар.	n	m	$\bar{x}_в$	$\bar{y}_в$	Дисп. X	Дисп. У	Ур.
1	34	40	133	127	62	76	0,10
2	29	43	140	132	60	81	0,10
3	26	36	126	137	64	83	0,10
4	27	35	136	126	57	84	0,10
5	27	40	120	125	65	84	0,10
6	25	38	129	145	54	70	0,10
7	30	42	140	141	61	75	0,10
8	29	38	122	128	64	90	0,10
9	28	45	124	144	66	72	0,10
10	26	37	115	122	66	70	0,10
11	25	45	136	145	61	76	0,10
12	28	35	113	138	66	76	0,10
13	30	45	118	126	67	74	0,05

$H_0:\bar{x}_Г=\bar{y}_Г$ $H_1:\bar{x}_Г>\bar{y}_Г$

№ вар.	n	m	$\bar{x}_в$	$\bar{y}_в$	Дисп	Дисп	Ур.
14	32	36	137	139	60	70	0,05
15	35	45	129	130	65	73	0,05
16	32	39	136	137	64	71	0,05
17	30	36	121	135	55	78	0,05
18	30	37	133	134	53	88	0,05
19	35	45	117	137	57	81	0,05
20	30	35	138	143	68	89	0,05
21	32	36	117	143	50	90	0,05
22	33	42	131	120	58	72	0,05
23	33	45	139	129	55	87	0,05
24	34	44	138	126	69	70	0,05
25	33	41	117	137	52	80	0,05
26	31	38	119	141	53	74	0,05

Задание 2

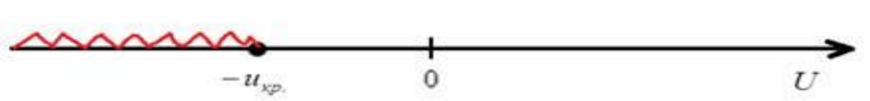
Из продукции двух автоматических линий извлечены по 50 гвоздей и вычислены их выборочные средние длины $\overline{x}_{в1}$ =180,3 и $\overline{x}_{в2}$ =180,9 мм. Нормативная погрешность линий есть нормальная случайная величина с дисперсией $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$ =4,2 мм^2. На уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве генеральных средних H_0: $a_1=a_2$ против конкурирующих гипотез: а) H_1: $a_1<a_2$, б) H_1: $a_1 \neq a_2$.

Методика выполнения

По условию, известны генеральные дисперсии, поэтому для проверки гипотезы используем критерий $Z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2{}_1}{n} + \dfrac{\sigma^2{}_2}{m}}}$.

а) Для гипотезы H_1: $a_1<a_2$ строим левостороннюю критическую область. Критическое значение для уровня значимости α=0,05 найдём из соотношения $\Phi(z_{кр})=(1-2\alpha)/2$=(1-2*0,05)/2=0,45. ⇒ $z_{кр}\approx 1{,}64$.

Таким образом, при $z>-z_{кр}$ нулевую гипотезу принимаем, а при $z<-z_{кр}$ (в критической области) – отвергаем:



Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{набл} = \frac{\overline{x}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2{}_1}{n} + \dfrac{\sigma^2{}_2}{m}}} = \frac{180{,}3 - 180{,}9}{\sqrt{\dfrac{4{,}2}{50} + \dfrac{4{,}2}{50}}} \approx -1{,}46$$

$z_{набл}>-z_{кр}$, поэтому на уровне значимости 0,05 нулевую гипотезу принимаем.

б) Для гипотезы H_1: $a_1 \neq a_2$ строим двустороннюю критическую область.

Критическое значение для уровня значимости α=0,05 найдём из соотношения $\Phi(z_{кр})=(1-\alpha)/2$=(1-0,05)/2=0,475. ⇒ $z_{кр}\approx 1{,}96$.

Наблюдаемое значение критерия $z_{набл}\approx -1{,}46$ попало в область принятия гипотезы $-z_{кр}<z_{набл}<z_{кр}$, поэтому на уровне значимости 0,05 нулевую гипотезу принимаем.

Ответ: в обоих случаях гипотезу H_0: $a_1=a_2$ принимаем.

Примечание: это не 100%-ное доказательство гипотезы, т.к. существует β-вероятность того, что принята неверная гипотеза (совершена ошибка второго рода).

Варианты задания 2

$H_0: a_1=a_2$	$H_1: a_1<a_2$	$H_1: a_1 \neq a_2$					$H_0: a_1=a_2$	$H_1: a_1<a_2$	$H_1: a_1 \neq a_2$			
№ вар.	n	$x_{в1}$	$x_{в2}$	Дисп	Ур.		№ вар.	n	$x_{в1}$	$x_{в2}$	Дисп	Ур.
1	48	181,2	179,1	4,419	0,05		14	58	181,1	180,4	4,155	0,10
2	34	181	179,9	4,369	0,05		15	35	179	180,1	4,204	0,10
3	25	179,8	181,6	4,087	0,05		16	35	180,5	181,6	3,986	0,10
4	34	179,7	181,4	3,937	0,05		17	27	180,8	181,3	4,273	0,10
5	32	179,2	180	4,163	0,05		18	35	180,1	180,3	4,165	0,10
6	26	179,4	181,5	4,249	0,05		19	26	179,9	179,7	3,948	0,10
7	33	180,5	179,7	3,954	0,05		20	28	179,9	181,6	3,933	0,10
8	35	181,4	179,9	4,217	0,05		21	31	179,6	180,6	4,007	0,10
9	30	180,2	181	4,158	0,05		22	32	179,5	182,2	4,292	0,10
10	33	179,1	182,1	4,211	0,05		23	30	181,2	180,9	4,22	0,10
11	31	179,7	182	4,228	0,05		24	31	180,9	181,6	4,13	0,10
12	32	179,7	180,9	4,449	0,05		25	27	179	181,2	4,438	0,10
13	25	180,1	180,9	4,331	0,05		26	34	181,4	180,9	4,232	0,10

б) независимые выборки достаточно большие (*n*>30, *m*>30), генеральные дисперсии неизвестны, причём ген. совокупности могут иметь и другое распределение (не нормальное)

При условии ***n*>30, *m*>30** можно использовать приближенный критерий

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{D_в(X)}{n} + \frac{D_в(Y)}{m}}}$$

, где $\overline{X}$, $\overline{Y}$ – случайные значения выборочных средних, а $D_в(X)$, $D_в(Y)$, – соответствующие выборочные дисперсии.

Исправлением дисперсий тут можно пренебречь *(т.к. выборки большие)*.

в) это малые независимые выборки (*n*<30, *m*<30), ген. совокупности распределены нормально и дисперсии их не известны

В этом случае выборочные дисперсии дают плохую оценку генеральных дисперсий, поэтому критерий предыдущего пункта не годится. Но если предположить или доказать, что генеральные дисперсии одинаковы (хотя и не известны), то для проверки гипотезы H_0: $\overline{x}_Г = \overline{y}_Г$ можно использовать следующий критерий:

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n-1)S_x^{\ 2} + (m-1)S_y^{\ 2}}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} ,$$

где где $\overline{X}$, $\overline{Y}$ – случайные значения выборочных средних, а S_x^2, S_y^2 – соответствующие **исправленные выборочные дисперсии**. Эта случайная величина распределена по **закону Стьюдента** с $k=n+m-2$ степенями свободы.

Задание 3

Из двух партий деталей, изготовленных одинаковыми станками, извлечены выборки объемами n=10 и m=15 деталей. По результатам исследования найдены $\overline{x}_в$=256 мм, S_x=5 мм и $\overline{y}_в$=259 мм, S_y=4 мм. Предполагая, что **погрешность изготовления есть нормальная случайная величина**, проверить на уровне значимости α=0,05 гипотезу H_0: $a_1=a_2$ против конкурирующей гипотезы H_1: $a_1 \neq a_2$.

В этом тяжелом случае удалось раздобыть всего лишь 10 и 15 гвоздей, но ситуацию спасает то, что станки одинаковые, поэтому можно смело допустить, что их погрешности (ген. дисперсии) одинаковы. Кроме того, можно проверить **гипотезу о равенстве генеральных дисперсий**.

Методика выполнения

полагая, что генеральные дисперсии одинаковы, используем критерий

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(n-1)S_x^{\,2}+(m-1)S_y^{\,2}}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}.$$

Поскольку конкурирующая гипотеза имеет вид $\boldsymbol{H_1}$: $\boldsymbol{a_1 \neq a_2}$, то критическая область двусторонняя. Найдём критическое значение.

Для уровня значимости $\boldsymbol{\alpha}$=0,05 и числа степеней свободы $\boldsymbol{k=n+m-2}$= 10+15-2=23 по таблице значений Стьюдента определяем:

$\boldsymbol{t_{кр}=t_{двуст.кр}(\alpha,k)}= t_{двуст.кр}(0{,}05,\ 23)\approx 2{,}07$.

При $\boldsymbol{-t_{кр} < t_{набл} < t_{кр}}$ нулевая гипотеза принимается, а вне этого интервала – отвергается.

Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$t_{набл}=\frac{\overline{x}_в-\overline{y}_в}{\sqrt{(n-1)S_x^{\,2}+(m-1)S_y^{\,2}}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}=\frac{256-259}{\sqrt{9*5^2+14*4^2}}\sqrt{\frac{10*15*23}{10+15}}\approx -1{,}66$$

полученное значение попало в область принятия гипотезы.

Таким различие выборочных средних $\overline{x}_в$=256 мм, $\overline{y}_в$=259 мм, *статистически не значимо* и объяснимо влиянием случайных факторов (погрешностью станков и тем, что в саму выборку попали случайные гвозди).

Ответ: на уровне значимости 0,05 гипотезу $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{a_1=a_2}$ принимаем.

Варианты задания 3

$H_0: a_1=a_2$ $\quad$ $H_1: a_1\neq a_2$

№ вар.	n	m	$x_в$	$y_в$	Sx	Sy	Ур.
1	8	16	252	260	6	5	0,05
2	9	17	257	256	4	4	0,05
3	9	17	262	255	6	5	0,05
4	11	15	260	264	6	3	0,05
5	11	16	251	265	4	5	0,05
6	11	12	257	264	6	3	0,05
7	10	13	262	266	4	4	0,05
8	10	15	257	265	4	4	0,05
9	9	13	255	253	5	3	0,05
10	10	12	257	256	6	3	0,05
11	12	17	250	263	6	4	0,05
12	8	15	257	265	6	4	0,05
13	11	13	257	261	6	3	0,05
14	11	14	251	263	5	4	0,10
15	8	17	253	260	5	3	0,10
16	9	13	254	256	6	4	0,10
17	8	16	260	258	6	5	0,10
18	10	15	260	256	6	5	0,10
19	8	13	250	262	6	5	0,10
20	8	15	252	257	4	3	0,10
21	10	14	257	252	5	5	0,10
22	11	17	258	262	4	5	0,10
23	8	17	251	261	4	5	0,10
24	12	16	262	265	5	4	0,10
25	12	12	260	264	4	4	0,10
26	12	12	255	254	4	3	0,10

г) ген. совокупности распределены нормально, ген. дисперсии неизвестны, выборки зависимы

Здесь рассматриваются выборки одинакового объёма, *варианты* которых **попарно зависимы**. Что это значит? Пример: возьмём 50 помидоров и измерим их диаметр линейкой: $x_1, x_2, x_3, \dots , x_n$. Затем в том же порядке – штангенциркулем: $y_1, y_2, y_3, \dots , y_n$. Совершенно понятно, что соответствующие результаты будут хоть чуть-чуть, но различны: $x_i \neq y_i$, следовательно, выборочные средние – тоже: $\overline{x}_в \neq \overline{y}_в$.

И возникает **вопрос**: значимо или незначимо это отличие?

В случае зависимых выборок гипотеза о равенстве генеральных средних сводится к уже разобранной **гипотезе о значении генеральной средней**. Представим, что описанные выше попарные опыты проводятся много-много раз. Тогда речь заходит о случайной величине $\overline{D} = \overline{X}_в - \overline{Y}_в$ – *случайной разнице* между случайными значениями $\overline{X}_в, \overline{Y}_в$ выборочных средних. И мы проверяем гипотезу о том, что генеральная средняя (матожидание) этой разницы равна нулю H_0: $M(\overline{D}) = 0$ против очевидной альтернативы H_1: $M(\overline{D}) \neq 0$ или H_1: $M(\overline{D}) > 0$ либо H_1: $M(\overline{D}) < 0$.

Задание 4

Физическая подготовка 9 спортсменов была проведена при поступлении в спортивную школу *(в 1-й строке число баллов при поступлении, во 2-й – после недели тренировок)*, а затем после недели тренировок. Итоги проверки в баллах оказались следующими:

xi	***76***	***71***	***57***	***49***	***70***	***69***	***26***	***65***	***59***
yi	***81***	***85***	***52***	***52***	***70***	***63***	***33***	***83***	***62***

Требуется на уровне значимости 0,05 установить, значимо или незначимо улучшилась физическая подготовка спортсменов, в предположении, что число баллов распределено нормально.

И предположение это небезосновательно, т. к. человеческие характеристики, как правило, распределены нормально.

Методика выполнения

Проверим гипотезу о том, что матожидание случайной величины $\overline{D} = \overline{X}_в - \overline{Y}_в$ (разницы между случайными средними) равно нулю H_0: $M(\overline{D}) = a_0 = 0$ против конкурирующей гипотезы H_1: $M(\overline{D}) < 0$ *(т.к. улучшение* *физической формы выражается большим «игрековым» значением и отрицательной разностью)*.

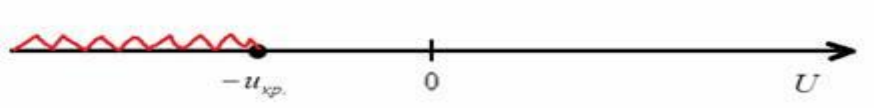
Так как генеральная дисперсия этой случайной величины не известна, то используем знакомый критерий $T=\dfrac{(\overline{D}-a_0)\sqrt{n}}{S}=\dfrac{\overline{D}\sqrt{n}}{S}$,

где $\overline{D}$ – случайная *разница* между выборочными средними и $\boldsymbol{S}$ – соответствующее **исправленное стандартное отклонение**.

Справка: этот критерий имеет **распределение Стьюдента** с количеством степеней свободы $\boldsymbol{k=n-1}$.

Для уровня значимости $\boldsymbol{\alpha}$=0,05 и $\boldsymbol{k}$=9-1=8 найдём критическое значение левосторонней критической области (по нижней строке таблицы распределения Стьюдента): $\boldsymbol{t_{кр}=t_{одн.кр}(\alpha, k)}= \boldsymbol{t_{одн.кр}}(0{,}05,\ 8) \approx 1{,}86$.

При $\boldsymbol{t_{набл} > -t_{кр}}$ нулевую гипотезу принимаем, а при $\boldsymbol{t_{набл} < -t_{кр}}$ – отвергаем.



Для нахождения наблюдаемого значения критерия $t_{набл}=\dfrac{d_в\sqrt{n}}{s_в}$ нужно рассчитать выборочные характеристики. Вычислим разности между вариантами $\boldsymbol{d_i=x_i-y_i}$, их квадраты $\boldsymbol{d_i^2}$ и суммы:

x_i	y_i	d_i	d_i^2
76	81	-5	25
71	85	-14	196
57	52	5	25
49	52	-3	9
70	70	0	0
69	63	6	36
26	33	-7	49
65	83	-18	324
59	62	-3	9
	Σ=	-39	673

Выборочная средняя разница

$$\overline{d}_в = -4{,}333333333$$

исправленное стандартное отклонение

$$s_в=\sqrt{\frac{\sum d_i^{\,2}-\dfrac{(\sum d_i)^2}{n}}{n-1}}=\sqrt{\frac{673-\dfrac{(-39)^2}{9}}{8}}=\sqrt{63}\approx 7{,}937$$

Таким образом: $t_{набл} = \dfrac{d_в \sqrt{n}}{s_в} \approx \dfrac{-4{,}33\sqrt{9}}{\sqrt{63}} \approx -1{,}64$ > **-$t_{кр}$**, поэтому на уровне значимости 0,05 нет оснований отвергать гипотезу $\boldsymbol{H_0}$: $M(\overline{D}) = 0$.

Таким образом, средняя разница $\overline{d}_в =$ -4,33 между вариантами $\boldsymbol{x_i}$ *(физ. форма до тренировки)* и соответствующими вариантами $\boldsymbol{y_i}$ *(физ. форма после тренировки)* статистически незначима.

Ответ: на уровне значимости 0,05 нет оснований утверждать, что после недельной тренировки физическая форма спортсменов значимо улучшилась.

Варианты задания 4

$H_0: a_0=0$		α=0,05									
№ вар.											
1	x_i	73	55	49	72	51	70	73	68	47	56
	y_i	61	44	46	42	56	40	79	76	39	79
2	x_i	74	49	61	75	67	54	47	71	72	56
	y_i	75	82	75	62	50	80	62	36	68	72
3	x_i	70	70	57	73	57	61	60	68	62	59
	y_i	74	62	35	52	59	63	80	51	52	46
4	x_i	69	65	62	73	67	60	62	59	66	65
	y_i	75	76	47	37	82	35	67	38	57	47
5	x_i	61	69	50	46	55	66	70	62	69	72
	y_i	61	74	53	46	79	75	76	52	42	64
6	x_i	50	62	59	51	53	51	66	55	70	62
	y_i	70	59	69	65	60	36	56	77	35	54
7	x_i	73	63	54	51	56	73	60	53	62	67
	y_i	37	39	38	50	66	42	56	57	73	59
8	x_i	60	60	54	64	56	64	69	51	67	53
	y_i	71	63	40	65	71	37	50	37	82	76
9	x_i	56	58	52	72	47	68	67	58	53	47
	y_i	58	47	75	64	66	59	64	45	55	67
10	x_i	66	63	63	72	48	62	66	65	75	69
	y_i	69	37	76	53	35	46	63	33	61	45
11	x_i	58	73	62	59	46	51	64	62	51	59
	y_i	61	66	49	80	66	68	35	34	54	33
12	x_i	62	62	69	67	74	60	67	67	64	48
	y_i	69	33	74	49	46	39	74	53	57	33
13	x_i	70	60	55	53	68	58	49	61	73	68
	y_i	42	39	64	63	54	66	72	46	61	73

$H_0: a_0=0$		α=0,05									
№ вар.											
14	x_i	73	61	75	50	56	66	67	54	57	65
	y_i	73	60	58	68	44	68	68	62	34	39
15	x_i	49	52	67	57	71	59	49	52	66	57
	y_i	74	70	63	50	35	47	43	57	82	38
16	x_i	61	70	50	71	65	73	53	51	57	67
	y_i	39	63	72	75	71	55	69	49	47	80
17	x_i	59	56	52	59	48	65	68	54	69	70
	y_i	52	45	79	60	64	33	35	63	54	43
18	x_i	60	62	72	67	59	53	55	68	50	46
	y_i	51	62	48	41	71	80	49	77	53	74
19	x_i	55	55	68	74	62	58	63	75	74	56
	y_i	44	72	64	43	59	71	60	69	66	53
20	x_i	55	71	51	49	72	56	52	51	66	67
	y_i	51	41	49	52	46	58	37	55	73	81
21	x_i	67	66	49	50	70	71	70	54	71	66
	y_i	35	37	37	77	42	55	55	66	80	39
22	x_i	71	58	61	53	65	58	67	47	59	62
	y_i	43	81	79	53	64	34	74	36	64	54
23	x_i	49	70	55	61	59	46	68	48	67	54
	y_i	59	57	42	78	71	61	37	38	70	51
24	x_i	66	56	74	64	74	75	55	69	72	47
	y_i	66	75	59	56	69	63	40	68	39	53
25	x_i	67	46	54	45	47	53	74	74	65	53
	y_i	78	41	81	50	52	47	68	46	40	62
26	x_i	54	52	60	56	46	75	71	65	66	45
	y_i	59	77	71	55	72	59	45	40	34	65

Задание 5

Две химические лаборатории исследовали 8 проб на допинг одним и тем же методом. Получены следящие результаты (процент содержания некоторого вещества в соответствующих пробах):

xi	***15***	***20***	***16***	***22***	***24***	***14***	***18***	***20***
yi	***15***	***22***	***14***	***25***	***29***	***16***	***20***	***24***

Требуется на уровне значимости 0,05 определить, значимо или незначимо различаются средние результаты анализов, в предположении, что они распределены нормально. Иными словами, определите, не занесли ли в какую-нибудь лабораторию деньги.

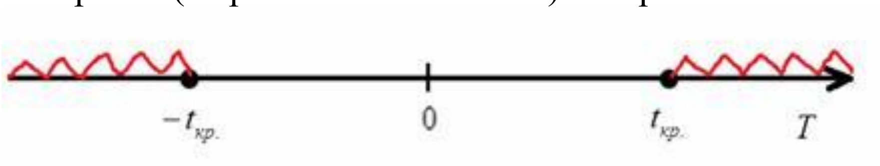
Методика выполнения

рассмотрим случайную величину $\overline{D} = \overline{X}_в - \overline{Y}_в$, где $\overline{X}_в$, $\overline{Y}_в$ – случайные значения выборочных средних, и проверим гипотезу $\boldsymbol{H_0}$: $M(\overline{D}) = 0$ против конкурирующей гипотезы $\boldsymbol{H_1}$: $M(\overline{D}) \neq 0$. Поскольку генеральная дисперсия этой случайной величины не известна, то используем критерий $T = \dfrac{\overline{D}\sqrt{n}}{S}$, распределённый по закону Стьюдента с количеством степеней свободы $\boldsymbol{k=n-1}$.

Для уровня значимости $\boldsymbol{\alpha}$=0,05 и $\boldsymbol{k}$=8-1=7 по таблице критических точек распределения Стьюдента находим критическое значение для двусторонней критической области:

$\boldsymbol{t_{кр}=t_{двуст.кр}(\alpha, k)}= \boldsymbol{t_{двуст.кр}}(0{,}05,\ 7)\approx 2{,}36$

Таким образом, при $-\boldsymbol{t_{кр}}<\boldsymbol{t}<\boldsymbol{t_{кр}}$ нулевую гипотезу принимаем, и вне этого интервала (в критической области) отвергаем:



Найдём наблюдаемое значение критерия. Для этого нужно вычислить выборочную среднюю разницу $\overline{d}_в$ между выборочными средними $\overline{x}_в$ и $\overline{y}_в$ и соответствующую дисперсию $\boldsymbol{s_в}$.

x_i	y_i	d_i	d_i^2
15	15	0	0
20	22	-2	4
16	14	2	4
22	25	-3	9
24	29	-5	25
14	16	-2	4
18	20	-2	4
20	24	-4	16
	Σ=	-16	66

Выборочная средняя разница

$$\overline{d}_в = -2$$

исправленное стандартное отклонение

$$s_в = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{66 - \frac{(-16)^2}{8}}{7}} = \sqrt{\frac{34}{7}} \approx 2{,}2$$

Наблюдаемое значение критерия:

$t_{набл} = \frac{d_в \sqrt{n}}{s_в} \approx \frac{-2\sqrt{8}}{2{,}2} \approx -2{,}57$ – полученное значение попало в критическую область, поэтому на уровне значимости 0,05 гипотезу $\boldsymbol{H_0}$: $M(\overline{D}) = M(\overline{X}_в - \overline{Y}_в) = 0$ отвергаем.

Ответ: на уровне значимости 0,05 результаты лабораторий отличны друг от друга.

Варианты задания 5

$H_0 : M(\overline{D}) = 0$ $H_1 : M(\overline{D}) \neq 0$ **α=0,05**

№ вар.											
1	x_i	13	15	15	23	23	17	22	22	19	14
	y_i	17	21	13	15	19	14	15	17	21	21
2	x_i	23	21	20	13	16	19	13	23	19	17
	y_i	25	17	21	15	22	13	21	23	24	14
3	x_i	22	21	15	22	19	18	14	21	22	24
	y_i	24	25	17	20	16	20	19	21	15	14
4	x_i	14	13	25	22	16	21	18	21	18	23
	y_i	17	22	20	23	15	19	19	14	24	25
5	x_i	15	22	18	21	18	13	25	14	21	23
	y_i	19	14	23	14	14	24	21	17	14	22
6	x_i	23	18	13	25	23	13	24	13	23	16
	y_i	16	13	22	16	14	24	24	13	20	13
7	x_i	22	23	17	15	15	17	25	14	18	21
	y_i	21	14	24	17	16	25	13	13	18	25
8	x_i	15	14	25	17	20	24	17	20	18	20
	y_i	23	22	21	17	20	24	18	14	17	24
9	x_i	15	25	24	13	24	22	16	16	18	20
	y_i	20	13	19	15	22	16	22	24	17	15
10	x_i	14	13	19	23	18	15	15	23	24	13
	y_i	23	17	24	16	25	18	20	16	17	15
11	x_i	17	23	18	25	18	25	21	13	25	18
	y_i	17	25	18	18	24	20	19	25	24	16
12	x_i	14	13	18	16	14	15	15	25	17	16
	y_i	14	25	15	19	24	14	24	16	25	15
13	x_i	25	20	15	20	16	21	21	14	16	19
	y_i	24	18	15	23	18	14	21	23	24	18

$H_0 : M(\overline{D}) = 0$ $H_1 : M(\overline{D}) \neq 0$ **α=0,05**

№ вар.											
14	x_i	17	22	13	25	21	14	18	15	19	22
	y_i	14	16	16	16	22	17	18	15	21	18
15	x_i	23	19	13	24	17	14	21	15	23	23
	y_i	18	23	20	19	17	23	17	22	18	22
16	x_i	18	19	17	18	19	24	20	15	22	25
	y_i	14	18	21	23	16	16	20	21	15	19
17	x_i	23	20	15	17	18	21	13	23	21	14
	y_i	24	21	18	22	21	23	22	16	21	20
18	x_i	17	16	23	15	14	22	14	15	13	13
	y_i	16	20	14	23	20	19	23	13	22	21
19	x_i	13	21	20	19	21	20	24	18	13	24
	y_i	13	23	17	20	21	20	18	21	22	17
20	x_i	17	17	13	21	23	19	16	15	21	19
	y_i	14	20	20	23	25	19	15	13	13	16
21	x_i	15	22	15	14	19	24	22	25	24	16
	y_i	13	20	22	17	13	14	19	17	23	15
22	x_i	24	13	18	17	15	17	25	20	23	23
	y_i	17	23	20	16	14	14	24	25	24	25
23	x_i	23	14	20	22	20	18	21	16	21	20
	y_i	22	13	19	25	17	20	14	13	19	23
24	x_i	14	19	20	25	15	21	21	17	24	23
	y_i	19	24	23	17	21	22	23	18	13	20
25	x_i	23	24	19	22	19	19	16	22	25	14
	y_i	21	16	22	17	17	14	24	18	23	18
26	x_i	16	22	24	21	22	18	22	25	17	25
	y_i	13	13	21	17	19	20	15	21	21	20

Гипотеза о генеральной дисперсии нормального распределения

Она по своей сути похожа на **гипотезу о генеральной средней**: есть основания полагать, что **генеральная дисперсия** σ^2 нормальной совокупности равна некоторому значению σ_0^2. По результатам выборки объёма n найдена **исправленная выборочная дисперсия** s^2 и возникает **вопрос**: она значимо отличается от σ_0^2 или нет?

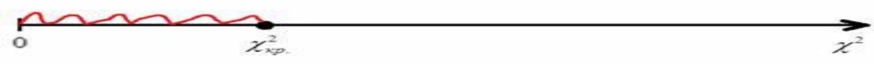
Таким образом, на уровне значимости α требуется проверить гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ – о том, что генеральная дисперсия действительно равна своему гипотетическому значению.

Для проверки этой гипотезы использует критерий $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, где S^2 – случайное значение исправленной дисперсии.

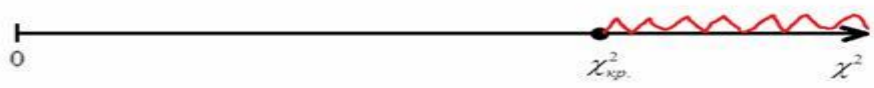
Данная случайная величина имеет **распределение хи-квадрат** с количеством степеней свободы $k=n-1$ и принимает лишь неотрицательные значения.

Критическая область зависит от вида конкурирующей гипотезы, а критические значения можно определить **по соответствующей таблице**.

1) Для гипотезы H_1: $\sigma^2<\sigma_0^2$ строится левосторонняя область, критическое значение равно $\chi^2_{кр} = \chi^2_{кр}(1-\alpha, k)$.



2) Для гипотезы H_1: $\sigma^2>\sigma_0^2$ строится правосторонняя область, критическое значение равно $\chi^2_{кр} = \chi^2_{кр}(\alpha, k)$.



3) И для гипотезы H_1: $\sigma^2\neq\sigma_0^2$ строится двусторонняя критическая область, левая и правая критические точки определяются по формулам

$\chi^2_{кр.лев.} = \chi^2_{кр.}(1-\alpha/2; k)$, $\chi^2_{кр.прав.} = \chi^2_{кр.}(\alpha/2; k)$

Если наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2_0}$ попадает в критическую область, то гипотеза H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ на уровне значимости α отвергается.

Задание 6

Допустимая погрешность измерительного прибора по паспорту составляет σ_0^2=5. В результате 10 измерений найдено фактическое значение погрешности s^2=6,2. Требуется на уровне значимости 0,05 проверить, соответствуют ли экспериментальный результат заявленной точности прибора.

Методика выполнения

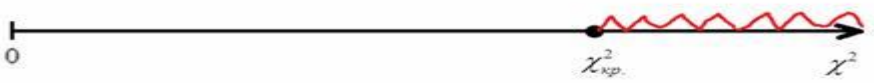
Полагая, что **погрешность измерений распределена нормально**, проверим гипотезу о том, что генеральная дисперсия действительно равна H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$ =5 против конкурирующей гипотезы H_1: σ^2 >5.

Это, кстати, самый популярный вид альтернативной гипотезы – когда есть превышение нормы, и требуется проверить, случайно оно или нет.

Используем критерий $\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2{}_0}$, где s^2 – случайное значение исправленной дисперсии.

Найдём правостороннюю критическую область. Для уровня значимости α=0,05 и количества степеней свободы $k=n-1$=10-1=9 по **таблице критических точек распределения хи-квадрат** определяем критическое значение: $\chi^2_{кр}=\chi^2_{кр}(\alpha, k)=\chi^2_{кр}(0{,}05;\,9)\approx 16{,}92$.

При $\chi^2<\chi^2_{кр}$ нулевая гипотеза принимается, а при $\chi^2>\chi^2_{кр}$ – отвергается:



Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$\chi^2{}_{набл}=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2{}_0}=\frac{9*6{,}2}{5}=11{,}16<\chi^2{}_{кр}$, поэтому **на уровне значимости 0,05 нет оснований отвергать гипотезу** H_0: σ^2=5. Таким образом, выборочный более высокий результат s^2=6,2 с большой вероятностью обусловлен случайностью.

Ответ: на уровне значимости 0,05 точность прибора соответствует норме.

Варианты задания 6

H_0:ген. дисперсия = дисп. пасп.					***H_0:ген. дисперсия = дисп. пасп.***				
H_1:ген. дисперсия > дисп. пасп.					***H_1:ген. дисперсия > дисп. пасп.***				
№ вар.	***n***	***Дисп. пасп.***	***s^2***	***Ур. зн.***	***№ вар.***	***n***	***Дисп. пасп.***	***s^2***	***Ур.***
1	**8**	**6**	**6,2**	**0,10**	**14**	**11**	**6**	**6,0**	**0,05**
2	**9**	**7**	**6,2**	**0,10**	**15**	**11**	**5**	**6,2**	**0,05**
3	**9**	**6**	**6,4**	**0,10**	**16**	**10**	**4**	**6,1**	**0,05**
4	**12**	**4**	**6,3**	**0,10**	**17**	**11**	**6**	**6,3**	**0,05**
5	**9**	**7**	**6,1**	**0,10**	**18**	**11**	**5**	**6,3**	**0,05**
6	**12**	**5**	**6,3**	**0,10**	**19**	**11**	**5**	**6,3**	**0,05**
7	**11**	**4**	**6,0**	**0,10**	**20**	**8**	**4**	**6,1**	**0,05**
8	**12**	**6**	**6,1**	**0,10**	**21**	**8**	**5**	**6,1**	**0,05**
9	**12**	**7**	**6,1**	**0,10**	**22**	**9**	**6**	**6,2**	**0,05**
10	**11**	**7**	**6,1**	**0,10**	**23**	**9**	**4**	**6,1**	**0,05**
11	**11**	**5**	**6,1**	**0,10**	**24**	**8**	**4**	**6,0**	**0,05**
12	**10**	**5**	**6,2**	**0,10**	**25**	**8**	**6**	**6,2**	**0,05**
13	**9**	**4**	**6,2**	**0,05**	**26**	**10**	**7**	**6,2**	**0,05**

Гипотеза о равенстве генеральных дисперсий двух нормальных распределений

Из двух нормальных ген. совокупностей извлечены независимые выборки объёмом n и m и найдены их исправленные дисперсии: s_x^2 и s_y^2 соответственно. Совершенно понятно, что эти значения случайны и отличны друг от друга. Но возникает **вопрос**: значимо или незначимо это отличие? Для ответа на этот вопрос на уровне значимости α проверяется гипотеза о равенстве генеральных дисперсий H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$. Если она будет принята, то различие между выборочными значениями s_x^2 и s_y^2 объяснимо случайными факторами.

Для проверки этой гипотезы используют критерий $F = \frac{S_Б^{\ 2}}{S_М^{\ 2}}$, где $S_Б^2$ – большая исправленная дисперсия, а $S_М^2$ – меньшая.

Распределение Фишера-Снедекора (так называемое ***F-распределение***): пусть — две независимые случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат: , где $\subset$ ***N***, . Тогда распределение случайной величины $F = \frac{Y_1/d_1}{Y_2/d_2}$ называется распределением Фишера (распределением Снедекора) со степенями свободы d_1 и d_2.

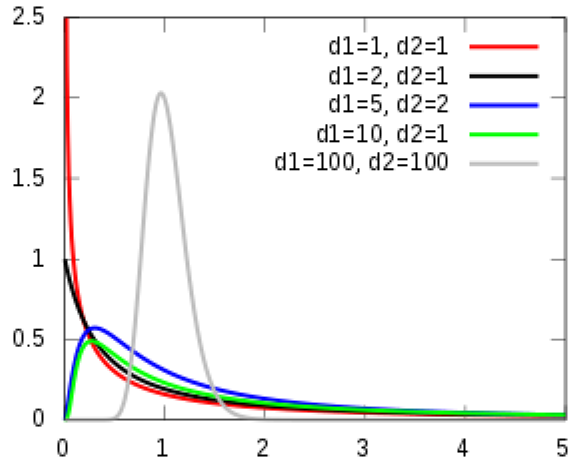
Пишут Fd_1, d_2

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей распределение Фишера, имеют вид:

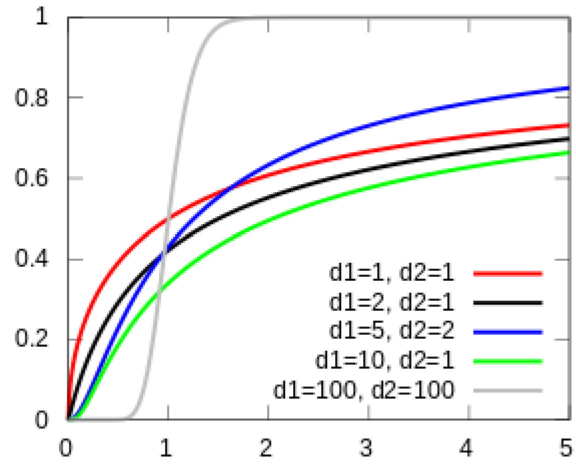
если ,

$D[F] = \frac{2d_2^{\ 2}(d_1 + d_2 - 2)}{d_1(d_2 - 2)^2(d_2 - 4)}$, если

Плотность вероятности



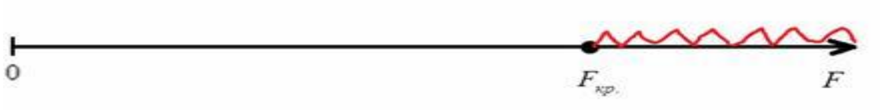
Функция распределения



Данная случайная величина имеет **распределение Фишера-Снедекора** (так называемое ***F-распределение***) со степенями свободы $k_1=n-1$, $k_2=m-1$, если $s_x^2 > s_y^2$ или $k_1=m-1$, $k_2=n-1$, если $s_x^2 < s_y^2$. **То есть, степень свободы k_1 соответствует выборке с большей исправленной дисперсией**.

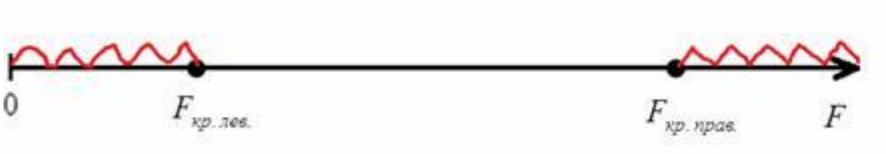
В качестве альтернативы рассматривают одну из следующих гипотез:

1) H_1: $\sigma_x^2>\sigma_y^2$ *(если* $s_x^2 > s_y^2$*)* либо H_1: $\sigma_x^2<\sigma_y^2$ *(если* $s_x^2 < s_y^2$*)*. Для этой гипотезы строят правостороннюю критическую область:



Критическое значение $F_{кр}= F_{кр}(\alpha;k_1;k_2)$ можно найти по **таблице критических значений F-распределения**, а ещё лучше – с помощью стандартной функции MS Excel.

2) H_1: $\sigma_x^2\neq\sigma_y^2$ – для этой гипотезы строится двусторонняя критическая область:



Однако для решения нашей задачи достаточно найти лишь правое критическое значение $F_{кр.прав.}= F_{кр}(\alpha/2;k_1;k_2)$.

Дело в том, что $F_{кр.лев.}= F_{кр}(1-\alpha/2;k_1;k_2)<1$, и поэтому случайное значение $F=\frac{S_Б^{\ 2}}{S_М^{\ 2}}$ (большее единицы) заведомо не может попасть в левый кусок критической области.

Далее на основании выборочных данных рассчитывается наблюдаемое значение критерия $F_{набл}=\frac{S_Б^{\ 2}}{S_М^{\ 2}}$, и если оно попадает в критическую область ($F_{набл}<F_{кр}$ для обоих случаев), то гипотеза H_0: $\sigma_x^2= \sigma_y^2$ отвергается.

Если $F_{набл}>F_{кр}$, то гипотеза H_0: $\sigma_x^2= \sigma_y^2$ принимается.

Рассматриваемая гипотеза часто возникает, когда требуется сравнить точность двух приборов, инструментов, станков, двух методов исследования.

Задание 7

Некоторая физическая величина измерена $\boldsymbol{n}$=7 и $\boldsymbol{m}$=5 раз двумя различными способами. По результатам измерений найдены соответствующие погрешности $\boldsymbol{s_x^2}$ =6,3, $\boldsymbol{s_y^2}$ =10,1.

Требуется на уровне значимости 0,05 проверить, одинаковую ли точность обеспечивают эти способы измерений.

Ситуации тут могут быть разные: это измерение двумя однотипными инструментами (например, двумя линейками), или инструментами разными (например, линейкой и штангенциркулем), или речь вообще идёт о двух методах измерения (например, с зажмуренным левым и правым глазом).

И возникает **вопрос**: различие между $\boldsymbol{s_x^2}$ и $\boldsymbol{s_y^2}$ случайно или обусловлено тем, что какой-то способ точнее?

Методика выполнения

Полагая, что погрешности измерений распределены нормально, проверим гипотезу $\boldsymbol{H_0: \sigma_x^2= \sigma_y^2}$ о том, что точность двух способов одинакова против конкурирующей гипотезы $\boldsymbol{H_1: \sigma_x^2< \sigma_y^2}$ (она правдоподобнее, нежели $\boldsymbol{\sigma_x^2\neq \sigma_y^2}$).

Для проверки гипотезы используем критерий $F=\frac{S_Б^2}{S_M^2}$, где $\boldsymbol{S_Б^2}$ – большая исправленная дисперсия, а $\boldsymbol{S_M^2}$ – меньшая.

Найдём критическое значение $\boldsymbol{F_{кр}= F_{кр}(\alpha;k_1;k_2)}$.

Степень свободы $\boldsymbol{k_1}$ должна соответствовать выборке с большей дисперсией, следовательно, $\boldsymbol{k_1=m-1}$=5-1=4 и $\boldsymbol{k_{12}=n-1}$=7-1=6. .

По **таблице критических значений F-распределения** находим:

$\boldsymbol{F_{кр}= F_{кр}(}0{,}05;4;6\boldsymbol{)} \approx 4{,}53$.

При $\boldsymbol{F<F_{кр}}$ нулевая гипотеза принимается, а при $\boldsymbol{F>F_{кр}}$ (в критической области) – отвергается.

Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$F_{набл}=\frac{S_Б^2}{S_M^2}=\frac{S_y^2}{S_x^2}=\frac{10{,}1}{6{,}3}\approx 1{,}6<F_{кр}$, поэтому **на уровне значимости 0,05 нет оснований отвергать гипотезу** $\boldsymbol{H_0: \sigma_x^2= \sigma_y^2}$. Иными словами, различие выборочных значений $\boldsymbol{s_x^2}$ =6,3, $\boldsymbol{s_y^2}$ =10,1 обусловлено случайными факторами, но прежде всего, малым количеством опытов.

Так, если бы было проведено в 10 раз больше измерений ($\boldsymbol{n}$=70, $\boldsymbol{m}$=40) и получены те же самые погрешности, то $\boldsymbol{F_{кр}= F_{кр}(}0{,}05;39;69\boldsymbol{)}\approx 1{,}57$, и гипотеза о равенстве ген. дисперсий уже отвергается. То есть здесь расхождение между $\boldsymbol{s_x^2}$ =6,3 и $\boldsymbol{s_y^2}$ =10,1 уже нельзя объяснить случайностью, а объяснимо оно именно тем, что второй способ менее точный (справедлива гипотеза $\boldsymbol{H_1: \sigma_x^2< \sigma_y^2}$).

Ответ: на уровне значимости 0,05 точность способов измерения одинакова.

Варианты задания 7

H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$			H_1: $\sigma_x^2 < \sigma_y^2$			H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$			H_1: $\sigma_x^2 < \sigma_y^2$		
№ вар.	***n***	***m***	s_x^2	s_y^2	***Ур.***	**№ вар.**	***n***	***m***	s_x^2	s_y^2	***Ур.***
1	**8**	**6**	**6,2**	**9,9**	**0,10**	**14**	**8**	**6**	**6,4**	**10,4**	**0,05**
2	**8**	**6**	**6,6**	**10,4**	**0,10**	**15**	**7**	**6**	**6,0**	**10,5**	**0,05**
3	**7**	**4**	**6,1**	**10,1**	**0,10**	**16**	**8**	**4**	**6,5**	**9,9**	**0,05**
4	**5**	**6**	**6,5**	**10,5**	**0,10**	**17**	**7**	**7**	**6,1**	**10,2**	**0,05**
5	**5**	**5**	**6,2**	**10,8**	**0,10**	**18**	**9**	**5**	**6,1**	**10,8**	**0,05**
6	**9**	**4**	**6,1**	**10,0**	**0,10**	**19**	**9**	**5**	**6,3**	**10,4**	**0,05**
7	**8**	**4**	**6,1**	**9,9**	**0,10**	**20**	**9**	**5**	**6,5**	**10,5**	**0,05**
8	**8**	**4**	**6,6**	**10,7**	**0,10**	**21**	**5**	**6**	**6,2**	**10,6**	**0,05**
9	**9**	**4**	**6,0**	**10,4**	**0,10**	**22**	**5**	**7**	**6,4**	**9,9**	**0,05**
10	**5**	**4**	**6,4**	**9,9**	**0,10**	**23**	**5**	**4**	**6,3**	**10,2**	**0,05**
11	**7**	**7**	**6,1**	**9,8**	**0,10**	**24**	**5**	**5**	**6,4**	**10,5**	**0,05**
12	**8**	**3**	**6,1**	**10,6**	**0,10**	**25**	**9**	**5**	**6,5**	**10,0**	**0,05**
13	**5**	**7**	**6,0**	**9,8**	**0,05**	**26**	**8**	**5**	**6,0**	**10,5**	**0,05**

Задание 8

Две группы студентов-первокурсников написали контрольную по математическому анализу со следующими результатами:

Предполагая, что успеваемость студентов распределена нормально, на уровне значимости 0,1:

1) Проверить гипотезу $\boldsymbol{H_0}$: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ – о том, что группы однородны по составу (в плане соотношения лучше и хуже успевающих студентов) против конкурирующей гипотезы $\boldsymbol{H_1}$: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

2) Проверить гипотезу $\boldsymbol{H_0}$: $\overline{x}_Г = \overline{y}_Г$ – об одинаковой успеваемости групп против гипотезы о том, что одна из групп более слабая.

Оц., x_i	Кол-во студ. 1-й гр., n_i	Кол-во студ. 2-й гр., m_i
2	3	1
3	9	12
4	4	8
5	2	2

Методика выполнения
Заполним расчётную таблицу:

x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$		m_i	$x_i m_i$	$x_i^2 m_i$
2	3	6	12		1	2	4
3	9	27	81		11	33	99
4	4	16	64		8	32	128
5	2	10	50		3	15	75
Σ=	**18**	**59**	**207**		**23**	**82**	**306**

$$\bar{x}_в = \frac{\sum x_i n_i}{n} \approx \mathbf{3{,}278} \qquad \bar{x}_в = \frac{\sum x_i m_i}{m} \approx \mathbf{3{,}565}$$

Выборочные дисперсии

$$D_x = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_в)^2 \approx \frac{207}{18} - 3{,}278^2 \approx \mathbf{0{,}76}$$

$$D_y = \frac{\sum x_i^2 m_i}{m} - (\bar{y}_в)^2 \approx \frac{306}{23} - 3{,}565^2 \approx \mathbf{0{,}59}$$

Исправленные дисперсии

$$s_x^2 = \frac{n}{n-1} D_x \approx \mathbf{0{,}8}$$

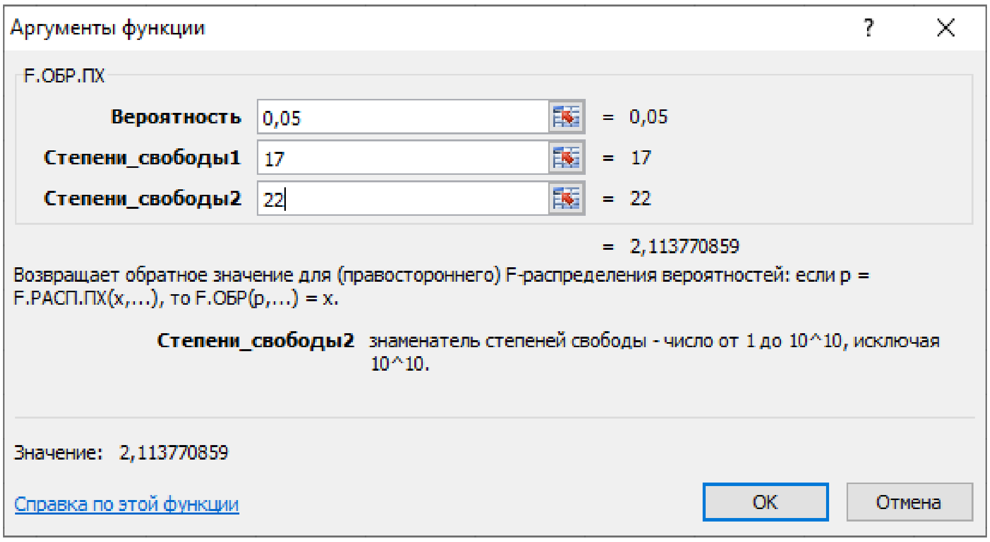
$$s_y^2 = \frac{m}{m-1} D_y \approx \mathbf{0{,}62}$$

1) На уровне значимости 0,1 проверим гипотезу $\boldsymbol{H_0}$: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ против конкурирующей гипотезы $\boldsymbol{H_1}$: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

Используем критерий $F = \frac{S_Б^2}{S_М^2}$, где $\boldsymbol{S_Б^2}$ – большая исправленная дисперсия, а $\boldsymbol{S_М^2}$ – меньшая.

Найдём правое критическое значение двусторонней критической области. Для уровня значимости $\boldsymbol{\alpha}$=0,1 и числа степеней свободы $\boldsymbol{k_1=n\text{-}1}$=17. $\boldsymbol{k_2=m\text{-}1}$=22 с помощью MS Excel находим:

$\boldsymbol{F_{кр}= F_{кр.прав.} = F_{кр}(\alpha/2;k_1;k_2) = F_{кр}}(0{,}05;17;22) \approx 2{,}11.$



Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$F_{набл} = \frac{S_Б^{\ 2}}{S_M^{\ 2}} = \frac{S_x^{\ 2}}{S_y^{\ 2}} = 0{,}8/0{,}62 \approx 1{,}3 < F_{кр},$$ поэтому на уровне значимости 0,1 гипотезу $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{\sigma_x^2 = \sigma_y^2}$ принимаем. Таким образом, группы однородны (в плане соотношения лучше и хуже успевающих студентов).

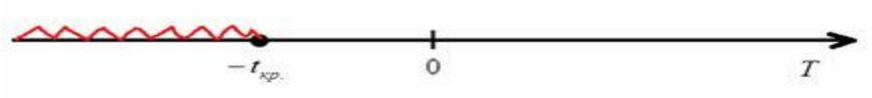
Замечание: здесь, конечно, речь идёт не о строгом, а о примерном равенстве генеральных дисперсий.

2) На уровне значимости 0,1 проверим гипотезу $\boldsymbol{H_0}$: $\bar{x}_Г = \bar{y}_Г$ против гипотезы $\boldsymbol{H_1}$: $\bar{x}_Г < \bar{y}_Г$ о том, что 1-я группа учится слабее. Исследуемые совокупности достаточно малы ($\boldsymbol{n}$<30, $\boldsymbol{m}$<30) и их генеральные дисперсии неизвестны, но в предыдущем пункте статистически обосновано незначимое различие ген. дисперсий. Поэтому для проверки гипотезы можно использовать критерий

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)s_x^{\ 2} + (m-1)s_y^{\ 2}}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}},$$ где $\bar{X}$, $\bar{Y}$ – случайные значения выборочных средних, а $\boldsymbol{s_x^2}$, $\boldsymbol{s_y^2}$ – соответствующие исправленные выборочные дисперсии.

Поскольку конкурирующая гипотеза имеет вид $\boldsymbol{H_1}$: $\bar{x}_Г < \bar{y}_Г$, то критическая область будет левосторонней. Для уровня значимости $\boldsymbol{\alpha}$=0,1 и числа степеней свободы $\boldsymbol{k=n+m-2}$=18+23-2=39 найдём критическое значение односторонней области: $\boldsymbol{t_{кр}=t_{одн.кр}(\alpha;\ k)=t_{одн.кр}}(0{,}1;\ 39) \approx 1{,}3$.

При $\boldsymbol{t<t_{кр}}$ нулевая гипотеза отвергается, а при $\boldsymbol{t>-t_{кр}}$ – принимается:



Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$t_{набл} = \frac{\overline{x}_в - \overline{y}_в}{\sqrt{(n-1)s_x^{\ 2} + (m-1)s_y^{\ 2}}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} \approx \frac{3{,}278 - 3{,}565}{\sqrt{17*0{,}8 + 22*0{,}62}}\sqrt{\frac{18*23*39}{41}} \approx -1{,}09$$

$\boldsymbol{t_{набл} > -t_{кр}}$, поэтому на уровне значимости 0,1 нет оснований отвергать гипотезу $\boldsymbol{H_0}$**:** $\overline{x}_Г = \overline{y}_Г$.

Таким образом, по результатам контрольной работы нельзя утверждать, что различие между средними оценками $\overline{x}_в \approx 3{,}28$, $\overline{y}_в \approx 3{,}57$ обусловлено тем, что 1-я группа более слабая. Для проверки этого предположения требуется дальнейший мониторинг за успеваемостью.

Ответ: на уровне значимости 0,1 нет оснований отвергнуть нулевые гипотезы.

Варианты задания 8

№ вар.	x_i	n_i	m_i
1	2	6	7
	3	9	1
	4	3	8
	5	9	7
2	2	8	10
	3	4	8
	4	5	8
	5	8	1
3	2	4	6
	3	4	5
	4	9	1
	5	3	9
4	2	4	2
	3	2	4
	4	9	4
	5	6	3
5	2	9	7
	3	5	1
	4	7	7
	5	5	3
6	2	4	8
	3	7	1
	4	5	8
	5	6	5
7	2	4	6
	3	7	1
	4	2	6
	5	6	4
8	2	6	7
	3	7	6
	4	2	4
	5	4	8
9	2	5	2
	3	2	3
	4	5	6
	5	9	1
10	2	7	2
	3	6	1
	4	6	3
	5	8	3
11	2	4	5
	3	3	7
	4	6	8
	5	4	7
12	2	9	6
	3	8	5
	4	4	1
	5	5	8
13	2	3	4
	3	2	3
	4	5	1
	5	7	7
14	2	3	9
	3	5	6
	4	8	10
	5	3	5
15	2	2	2
	3	3	5
	4	2	7
	5	6	9
16	2	8	10
	3	3	10
	4	7	6
	5	6	7
17	2	9	8
	3	7	7
	4	8	8
	5	6	1
18	2	5	10
	3	2	9
	4	8	3
	5	6	4
19	2	4	9
	3	2	6
	4	3	10
	5	9	7
20	2	3	2
	3	2	4
	4	2	4
	5	4	4
21	2	6	6
	3	9	10
	4	4	10
	5	3	10
22	2	5	10
	3	8	5
	4	8	8
	5	9	6
23	2	7	5
	3	6	8
	4	8	5
	5	3	5
24	2	2	4
	3	4	3
	4	2	7
	5	6	9
25	2	4	4
	3	6	2
	4	2	4
	5	9	7
26	2	7	4
	3	7	5
	4	7	9
	5	8	8

Гипотеза о вероятности события

Пусть в достаточно большом количестве ***n*** **независимых испытаний** некоторое случайное событие появилось ***m*** раз, и есть основание полагать, что вероятность ***p*** появления этого события (в каждом испытании) равна некоторому значению p_0.

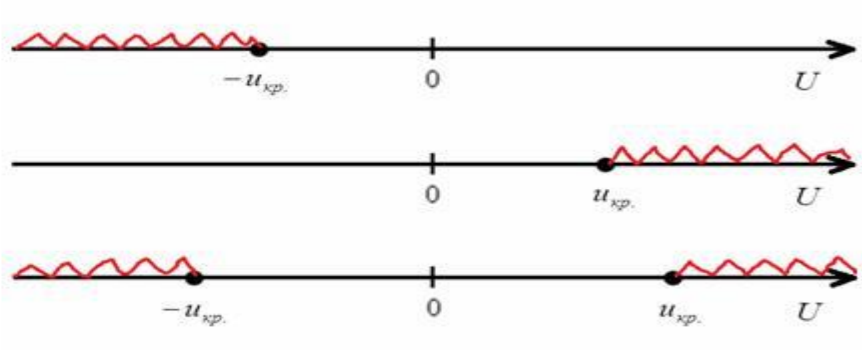
Возникает **вопрос**: значимо или незначимо отличается **относительная частота** $\omega = m/n$ от этого гипотетического значения?

Для проверки гипотезы $H_0: p=p_0$ используют критерий

$$U = \frac{\left(\frac{M}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}},$$

где $q_0=1-p_0$, а M – случайное количество испытаний, в которых событие появилось. При этом для качественного результата должно выполняться неравенство $np_0q_0>10$.

Далее технически всё похоже на **гипотезу о генеральной средней**. Для конкурирующей гипотезы $H_1: p<p_0$ строится левосторонняя критическая область, для $H_1: p>p_0$ – правосторонняя и для $H_1: p\neq p_0$ – двусторонняя:



Критическое значение отыскивается из соотношения

$\Phi(u_{кр}) = (1-2\alpha)/2$ для односторонней области

$\Phi(u_{кр}) = (1-\alpha)/2$ – для двусторонней,

где α – выбранный уровень значимости, а $\Phi(u)$ – функция Лапласа.

Если наблюдаемое значение критерия $u_{набл} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$ попадает в критическую область, то гипотеза $H_0: p=p_0$ отвергается.

Задание 9

В результате длительных наблюдений установлено, что вероятность полного выздоровления больного, принимавшего лекарство ***A***, равна 0,8. Новое лекарство ***B*** назначено 800 больным, причём 660 из них полностью выздоровели. Можно ли считать новое лекарство значимо эффективнее лекарства ***A*** на пятипроцентном уровне значимости (α =0,05)?

Итак, в результате использования нового лекарства получена **относительная частота** полного выздоровления $\omega = m/n$=660/800=0,825 и возникает **вопрос**: этот результат случаен или лекарство ***B*** действительно эффективнее?

Методика выполнения

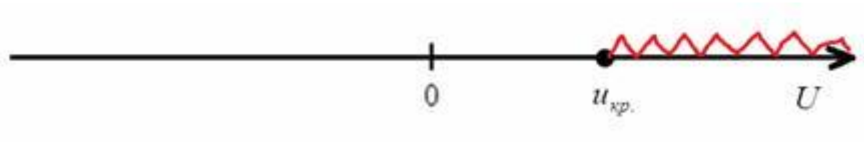
На уровне значимости α =0,05 проверим гипотезу H_0: $p=p_0$ =0,8 о том, что новое лекарство имеет такую же эффективность против конкурирующей гипотезы H_1: $p>0,8$, что оно более эффективно.

Используем критерий $U = \dfrac{\left(\dfrac{M}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$, где ***M*** – случайное количество пациентов из n=800, которые полностью выздоровеют.

Критическое значение правосторонней критической области найдём из соотношения $\Phi(u_{кр}) = (1-2\alpha)/2$ = (1-2*0,05)/2 = 0,45

По **таблице значений функции Лапласа** или с помощью MS Excel, определяем, что этому значению функции соответствует аргумент $u_{кр} \approx 1{,}64$.

При $u<u_{кр}$ нулевая гипотеза принимает, а при $u>u_{кр}$ – отвергается:



Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$u_{набл} = \dfrac{\left(\dfrac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}} = \dfrac{\left(\dfrac{660}{800} - 0{,}8\right)\sqrt{800}}{\sqrt{0{,}8 * 0{,}2}} \approx 1{,}78 > u_{кр}$, поэтому на уровне значимости 0,05 гипотезу H_0: p=0,8 отвергаем в пользу конкурирующей гипотезы H_1: $p>0,8$. Таким образом, выборочный результат$\omega = m/n$=660/800=0,825 вряд ли объясним случайностью.

Ответ: на пятипроцентном уровне значимости новое лекарство эффективнее лекарства ***A***.

Варианты задания 9

$H_0: p=0,8$					$H_0: p=0,8$			
	$H_1: p>0,8$					$H_1: p>0,8$		
№ вар.	***n***	***m***	***Ур.***		**№ вар.**	***n***	***m***	***Ур.***
1	841	773	0,10		14	818	630	0,05
2	846	724	0,10		15	835	676	0,05
3	959	560	0,10		16	897	635	0,05
4	952	621	0,10		17	958	766	0,05
5	998	558	0,10		18	931	571	0,05
6	852	731	0,10		19	833	614	0,05
7	892	518	0,10		20	963	712	0,05
8	902	716	0,10		21	996	592	0,05
9	908	583	0,10		22	827	772	0,05
10	847	603	0,10		23	994	685	0,05
11	853	761	0,10		24	985	581	0,05
12	978	735	0,10		25	995	532	0,05
13	841	717	0,05		26	904	502	0,05

Сравнение вероятностей двух биномиальных распределений

Стоит задача сравнить вероятности двух биномиальных распределений.

Пусть в двух генеральных совокупностях проводятся **независимые испытания**, в каждом из которых событие $\boldsymbol{A}$ может появиться – с неизвестной вероятностью $\boldsymbol{p_1}$ в первой совокупности и с неизвестной вероятностью $\boldsymbol{p_2}$ – во второй. По выборочным сериям испытаний объёмами $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$найдены соответствующие **относительные частоты**:

$\boldsymbol{\omega_1(A)=m_1/n_1}$, $\boldsymbol{\omega_2(A)=m_2/n_2}$, где $\boldsymbol{m_1, m_2}$ – фактическое число появлений события $\boldsymbol{A}$ в 1-й и во 2-й выборке.

Требуется оценить, значимо или незначимо отличаются друг от друга относительные частоты. Незначимое отличие объяснимо случными факторами и справедливостью гипотезы $\boldsymbol{H_0: p_1=p_2}$.

Для проверки этой гипотезы используют критерий:

$$U=\frac{\dfrac{M_1}{n_1}-\dfrac{M_2}{n_2}}{\sqrt{\dfrac{M_1+M_2}{n_1+n_2}\left(1-\dfrac{M_1+M_2}{n_1+n_2}\right)\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}},$$

где M_1, M_2 – случайное количество появлений события $\boldsymbol{A}$ в 1-й и во 2-й выборке соответственно.

В качестве альтернативы рассматривают гипотезы $\boldsymbol{H_1: p_1<p_2}$, $\boldsymbol{H_1: p_1>p_2}$, $\boldsymbol{H_1: p_1\neq p_2}$.

Почему здесь можно использовать лапласовские соотношения? А дело в том, что при достаточно большой выборке **биномиальное распределение** близко к **нормальному**.

Задание 10

От двух поставщиков в магазин поступило $\boldsymbol{n_1}$=200 и $\boldsymbol{n_2}$=300 однотипных изделий. В первой партии оказалось $\boldsymbol{m_1}$=14 бракованных изделий, а во второй – $\boldsymbol{m_2}$=27. Требуется на уровне значимости 0,05 оценить, одинаково ли хороши поставщики.

Очевидно, что здесь существуют вполне конкретные вероятности $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$ – того, что магазин получит бракованное изделие от 1-го и 2-го поставщика соответственно. И эти вероятности не известны. Однако в нашем распоряжении есть выборочные данные – относительные частоты:

$\boldsymbol{\omega_1}$=14/200=0,07, $\boldsymbol{\omega_2}$=27/300=0,09.

И возникает **вопрос**: эта разница случайна или нет?

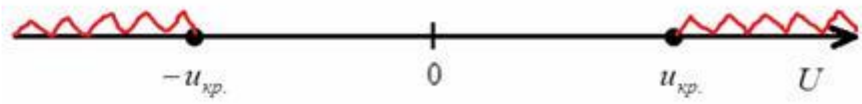
Методика выполнения

на уровне значимости α=0,05 проверим гипотезу H_0***:*** $p_1=p_2$ о том, что поставщики равноценны против конкурирующей гипотезы H_1***:*** $p_1 \neq p_2$.

Критическое значение двусторонней критической области найдём из соотношения $\Phi(u_{кр})=(1-\alpha/2)$ =(1-0,05)/2=0,475.

По **таблице значений функции Лапласа** или с помощью MS Excel определяем $u_{кр} \approx 1,96$.

При $-u_{кр}<u<u_{кр}$ нулевая гипотеза принимается, а при $u>|u_{кр}|$ – отвергается:



Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$u_{набл} = \frac{\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{14}{200} - \frac{27}{300}}{\sqrt{\frac{14+27}{200+300}\left(1-\frac{14+27}{200+300}\right)\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{300}\right)}} \approx -0,8$$

– полученное значение попало в область принятия гипотезы H_0***:*** $p_1=p_2$, таким образом, различие относительных частот ω_1=14/200=0,07, ω_2=27/300=0,09, скорее всего, случайно.

Ответ: на уровне значимости 0,05 нет оснований отдавать предпочтение какому-то одному из поставщиков.

Варианты задания 10

$H_0: p_1=p_2$					
	$H_1: p_1 \neq p_2$				
№ вар.	n_1	n_2	m_1	m_2	Ур.
1	192	294	12	24	0,10
2	192	304	17	30	0,10
3	196	306	14	27	0,10
4	196	283	18	24	0,10
5	220	299	15	26	0,10
6	191	284	12	25	0,10
7	188	282	18	26	0,10
8	207	304	14	29	0,10
9	188	297	15	24	0,10

$H_0: p_1=p_2$					
	$H_1: p_1 \neq p_2$				
№ вар.	n_1	n_2	m_1	m_2	Ур.
10	216	294	13	25	0,10
11	218	299	11	30	0,10
12	217	301	16	25	0,10
13	198	290	16	30	0,05
14	197	306	17	27	0,05
15	208	313	18	25	0,05
16	204	290	11	27	0,05
17	185	309	15	29	0,05
18	196	315	14	28	0,05

$H_0: p_1=p_2$					
	$H_1: p_1 \neq p_2$				
№ вар.	n_1	n_2	m_1	m_2	Ур.
19	181	303	17	24	0,05
20	213	297	12	24	0,05
21	217	301	11	27	0,05
22	199	310	16	27	0,05
23	186	290	14	25	0,05
24	211	291	17	29	0,05
25	209	295	18	30	0,05
26	182	282	18	24	0,05

Задание 11

Два стрелка совершили по 50 выстрелов в цель. Первый стрелок поразил цель 41 раз, а второй – 36. Можно ли на уровне значимости 0,1 утверждать, что первый стрелок более меткий?

Методика выполнения

на уровне значимости α=0,1 проверим гипотезу H_0: $p_1=p_2$ против гипотезы H_1: $p_1>p_2$ о том, что 1-й стрелок стреляет точнее.

Найдём критическое значение правосторонней критической области:

$\Phi(u_{кр})=(1-2\alpha/2)$ =(1-2*0,1)/2=0,4. $\Rightarrow$ $u_{кр}\approx$1,28.

При $u<u_{кр}$ нулевую гипотезу принимаем, а при $u>u_{кр}$ – отвергаем.

Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$u_{набл}=\frac{\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{\frac{41}{50}-\frac{36}{50}}{\sqrt{\frac{41+36}{50+50}\left(1-\frac{41+36}{50+50}\right)\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{50}\right)}}\approx 1{,}19$$

$u_{набл}<u_{кр}$, следовательно, на уровне значимости 0,1 нет оснований отвергать гипотезу H_0: $p_1=p_2$.

Ответ: на уровне значимости 0,1 нет оснований считать, что 1-й стрелок более меткий.

Варианты задания 11

$H_0: p_1=p_2$

$H_1: p_1>p_2$

№ вар.	n_1	n_2	m_1	m_2	Ур.
1	52	48	40	34	0,10
2	50	50	43	40	0,10
3	48	49	41	36	0,10
4	50	51	37	38	0,10
5	52	50	43	36	0,10
6	52	50	43	36	0,10
7	51	48	42	34	0,10
8	50	52	41	35	0,10
9	52	50	41	36	0,10

$H_0: p_1=p_2$

$H_1: p_1>p_2$

№ вар.	n_1	n_2	m_1	m_2	Ур.
10	51	50	38	35	0,10
11	50	52	42	37	0,10
12	52	48	42	36	0,10
13	50	51	42	39	0,05
14	48	51	40	37	0,05
15	51	49	38	39	0,05
16	50	52	38	40	0,05
17	50	49	42	35	0,05
18	48	48	41	35	0,05

$H_0: p_1=p_2$

$H_1: p_1>p_2$

№ вар.	n_1	n_2	m_1	m_2	Ур.
19	52	52	38	36	0,05
20	51	49	39	35	0,05
21	49	51	40	36	0,05
22	51	48	40	36	0,05
23	48	48	42	37	0,05
24	48	51	41	40	0,05
25	50	52	38	37	0,05
26	48	50	38	37	0,05