Практическое занятие 8: Статистические оценки параметров генеральной совокупности. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Цель занятия: приобретение навыков оценки параметров генеральной совокупности.

Для изучения *генеральной совокупности* объёма ***N*** из неё производится *выборка*, состоящая из ***n*** элементов, которая хорошо характеризует всю совокупность (свойство *представительности*). И на основании исследования этой *выборочной совокупности* с высокой достоверностью можно оценить генеральные характеристики.

Чаще всего требуется выявить **закон распределения генеральной совокупности** и оценить его важнейшие числовые параметры, такие как **генеральная средняя** $\overline{x}_Г$, **генеральная дисперсия** $D_Г$ и **среднее квадратическое отклонение** $\sigma_Г$.

Очевидно, что для оценки этих параметров нужно вычислить соответствующие выборочные значения. Так, **выборочная средняя** $\overline{x}_в$ позволяет оценить генеральную среднюю $\overline{x}_Г$, причём, оценить её *точечно*. Почему точечно? Потому что $\overline{x}_в$ – это отдельно взятое, конкретное значение. Если из той же генеральной совокупности будут проводиться многократные выборки, то в общем случае будут получаться *различные* выборочные средние, и каждая из них представляет собой ***точечную оценку*** генерального значения $\overline{x}_Г$.

Аналогично, **несмещённой** *точечной оценкой* генеральной дисперсии $D_Г$ является **исправленная выборочная дисперсия** s^2, и соответственно, стандартного отклонения $\sigma_Г$ – исправленное стандартное отклонение s.

Недостаток точечных оценок состоит в том, что при небольшом объёме выборки (как оно часто бывает), можно получать выборочные значения, которые далеки от истины.

И в этих случаях логично потребовать, чтобы выборочная характеристика $\theta_в$ *(средняя, дисперсия или какая-то другая)* **отличалась** от генерального значения $\theta_Г$ **не более** чем на некоторое положительное значение **δ** (греческая буква «дельта»). θ – греческая буква «тета».

Значение **δ** называется ***точностью оценки***, и озвученное выше требование можно записать с помощью **модуля**: $|\boldsymbol{\theta_Г} - \boldsymbol{\theta_в}| < \boldsymbol{\delta}$.

Точность оценки также обозначают через $\boldsymbol{\varepsilon}$ *(«эпсилон»)*.

Но статистические методы не позволяют 100%-но утверждать, что рассчитанное значение $\boldsymbol{\theta_в}$ будет удовлетворять этому неравенству – ведь в статистике всегда есть место случайности, когда мы можем «выиграть в лотерею» в плохом смысле этого слова.

Таким образом, можно говорить лишь о *вероятности* $\boldsymbol{\gamma}$, с которой это неравенство осуществится: $P(|\boldsymbol{\theta_Г} - \boldsymbol{\theta_в}| < \boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\gamma}$.

Раскроем модуль:

$- \boldsymbol{\delta} < \boldsymbol{\theta_Г} - \boldsymbol{\theta_в}| < \boldsymbol{\delta}$

$\boldsymbol{\theta_в} - \boldsymbol{\delta} < \boldsymbol{\theta_Г} < \boldsymbol{\theta_в} + \boldsymbol{\delta}$

Интервал $(\boldsymbol{\theta_в} - \boldsymbol{\delta};\ \boldsymbol{\theta_в} + \boldsymbol{\delta})$ называется ***доверительным интервалом*** и представляет собой ***интервальную оценку*** генерального значения $\boldsymbol{\theta_Г}$ по найденному выборочному значению $\boldsymbol{\theta_в}$.

Данный интервал с вероятностью $\boldsymbol{\gamma}$ «накрывает» истинное значение $\boldsymbol{\theta_Г}$.

Эта вероятность называется ***доверительной вероятностью*** или ***надёжностью*** интервальной оценки.

Надёжность «гамма» часто задаётся наперёд, популярные варианты $\gamma=0,95$, $\gamma=0,99$, $\gamma=0,999$.

Доверительный интервал для оценки генеральной средней нормально распределённой генеральной совокупности

<u>Пример</u>

Известно, что генеральная совокупность распределена **нормально** со средним квадратическим отклонением $\sigma=5$.

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания $\boldsymbol{a}$ с надежностью 0,95, если выборочная средняя $\overline{x}_в=24,15$, а объем выборки $\boldsymbol{n}=100$.

Выборочная средняя – это *точечная оценка* неизвестной_генеральной средней $\overline{x}_Г=\boldsymbol{a}$. Как отмечалось выше, недостаток точечной оценки состоит в том, что она может оказаться далёкой от истины. И по условию, требуется найти интервал $(\overline{x}_в-\boldsymbol{\delta},\ \overline{x}_в+\boldsymbol{\delta})$, которой с вероятностью $\gamma=0,95$ накроет истинное значение $\overline{x}_Г = \boldsymbol{a}$.

Решение. *Точность оценки* рассчитывается по формуле

$$\delta = \frac{t_y \sigma}{\sqrt{n}}$$, где t_y – *коэффициент доверия*.

Этот коэффициент отыскивается из соотношения

$2\Phi(t_y)=\gamma$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

В данном случае γ=0,95, следовательно:

$2\Phi(t_y)=0{,}95 \Rightarrow \Phi(t_y)=0{,}475$

И по таблице значений функции Лапласа либо пользуясь MS Excel (функция=-0,5+НОРМСТРАСП(t_y)), выясняем, что значению $\Phi(t_y)=0{,}475$ соответствует аргумент $t_y \approx 1{,}96$.

Таким образом, точность оценки:

$$\delta = \frac{t_y \sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{1{,}96 * 5}{\sqrt{100}} = 0{,}98$$

и искомый доверительный интервал:

($\overline{x}_в$-**δ**, $\overline{x}_в$+**δ**) = (24,15-0,98; 24,15+0,98) = (23,17; 25,13).

Этот интервал с вероятностью γ=0,95 (надёжностью) накрывает истинное генеральное значение $\overline{x}_г = a$. Но всё же остаётся 5%-ная вероятность, что генеральная средняя окажется вне найденного интервала.

Ответ: 23,17<***a*<25,13.**

И тут возникает желание уменьшить этот интервал – чтобы получить более точную оценку.

Из формулы $\delta = \frac{t_y \sigma}{\sqrt{n}}$ следует что чем меньше **стандартное отклонение** (мера разброса значений), тем короче доверительный интервал. Но это в отдельно взятой задаче ни на что не влияет – ведь нам известно конкретное значение σ, и изменить его нельзя.

Поэтому для уменьшения «дельты» можно уменьшить *коэффициент доверия*, например, вместо $t_y = 1{,}96$ рассмотреть $t_y = 1$ и тогда: $\delta = \frac{t_y \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1*5}{\sqrt{100}} = 0{,}5$, и доверительный интервал

($\overline{x}_в$-**δ**, $\overline{x}_в$+**δ**) = (24,15-0,5; 24,15+0,5) = (23,65; 24,65).

действительно станет в 2 раза короче.

Но **проблема** в том, что ***упадёт и доверительная вероятность***:

$\gamma = 2\Phi(t_y) = 2\Phi(1) = 2*0{,}3413 = 0{,}6826$, то есть о том, что этот более узкий интервал накроет *генеральную среднюю*, теперь можно утверждать лишь с вероятностью 68,26%.

Поэтому для уменьшения доверительного интервала (при том же значении γ) остаётся увеличивать объём выборки ***n***, ведь чем больше объём выборки, тем точнее она характеризует генеральную совокупность (при прочих равных условиях).

Задание 1

По результатам выборочного исследования ***n***=100 объектов найдена выборочная средняя $\overline{x}_в$=93.

1) С какой вероятностью можно утверждать, что генеральная средняя отличается от найденного значения менее чем на 3, если известно, что генеральная совокупность распределения нормально с дисперсией 400?

2) Определить доверительный интервал, который с надежностью γ *=0,99* накроет истинное значение генеральной средней.

И тут, наверное, есть вопросы – а откуда известно, что генеральная совокупность распределена **нормально**, и тем более, откуда известно её стандартное отклонение?

Обычно эта информация известна из предыдущих исследований. Классический пример – измерительный прибор. Очевидно, что его случайные погрешности удовлетворяют условию **теоремы Ляпунова**, а значит, распределены нормально. Кроме того, производитель, как правило, тестирует прибор, и указывает в его паспорте стандартное отклонение случайных ошибок измерения, которое можно принять за $\boldsymbol{\sigma}$.

Но если установить нормальность распределения достаточно просто (в том числе **статистическими методами**), то с генеральным значением σ всё сложнее – зачастую вычислить его трудно или невозможно.

В такой ситуации остаётся ориентироваться на **исправленное стандартное отклонение** $\boldsymbol{\varepsilon}$, и решение несколько изменится.

Методика выполнения

1) По условию, точность оценки равна **δ**=3 и дисперсия σ^2=400 ⇒ σ=20.

2) Из формулы $\delta = \frac{t_y \sigma}{\sqrt{n}}$ найдём коэффициент доверия*:*

$3 = \frac{t_y 20}{\sqrt{100}}$ ⇒ $\boldsymbol{t_y}$=3*10/20= 1,5

Вычислим соответствующую доверительную вероятность: γ = $2\Phi(t_y)=2\Phi(1,5)=2*0,4332=0,8664$ – таким образом, с вероятностью 86,64% можно утверждать, что генеральная средняя $\overline{x}_Г$=***a*** отличается от $\overline{x}_в$=93 менее чем на **δ**=3 (т.е. находится в доверительном интервале от 90 до 96).

3) Для доверительной вероятности γ *=0,99*: $2\Phi(t_y)=0,99$ ⇒ $\Phi(t_y)=0,495$ – этому значению функции Лапласа соответствует аргумент: $t_y \approx 2,58$.

Вычислим точность оценки: $\delta = \frac{t_y \sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{2,58*20}{10} = 5,16$

Определим доверительный интервал: $\overline{x}_{в}-\boldsymbol{\delta}<\boldsymbol{a}<\overline{x}_{в}+\boldsymbol{\delta}$ $93-5{,}16<\boldsymbol{a}<93+5{,}16$ $87{,}84<\boldsymbol{a}<98{,}16$ – данный интервал с вероятностью 99% накрывает истинное значение $\overline{x}_{Г}=\boldsymbol{a}$.

Ответ: а) $\gamma=0{,}8664$, б) $87{,}84<\boldsymbol{a}<98{,}16$.

Варианты задания 1

№ вар.	n	$\overline{x}_{в}$	δ	$D_{Г}$	γ	№ вар.	n	$\overline{x}_{в}$	δ	$D_{Г}$	γ
1	94	91	5	383	0,858	14	98	80	2	336	0,833
2	112	81	5	332	0,987	15	92	92	6	297	0,935
3	91	83	6	415	0,828	16	120	68	4	494	0,887
4	77	85	7	287	0,879	17	110	86	7	401	0,860
5	81	74	6	371	0,982	18	102	88	3	372	0,811
6	80	80	7	377	0,977	19	82	75	2	376	0,942
7	85	90	6	394	0,887	20	108	93	7	316	0,994
8	105	76	5	480	0,891	21	99	82	6	332	0,900
9	112	88	5	374	0,950	22	85	84	5	462	0,986
10	107	88	5	282	0,884	23	105	71	4	302	0,901
11	114	99	5	383	0,828	24	109	78	3	279	0,925
12	92	82	7	359	0,946	25	105	82	6	495	0,903
13	118	94	5	350	0,954	26	111	87	7	276	0,949

Задание 2

На основании $\boldsymbol{n}$=20 испытаний установлено, что в среднем для изготовления полупроводникового диода требуется $\overline{x}_в$=76 секунд, а исправленное среднее квадратическое отклонение составляет $\boldsymbol{s}$=11 секунд. Предположив, что время изготовления диода есть нормальная случайная величина, определить с надежностью γ *=0,999* доверительный интервал для оценки среднего времени изготовления диода.

Методика выполнения

Доверительный интервал для оценки истинного значения $\overline{x}_Г = \boldsymbol{a}$ измеряемой величины имеет вид: $\overline{x}_в - \frac{t_y \varepsilon}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + \frac{t_y \varepsilon}{\sqrt{n}}$

Для заданного уровня доверительной вероятности $\gamma = 0,999$

$2\Phi(t_y) = 0,999$ – этому значению функции Лапласа соответствует аргумент: $t_y \approx 3,8833$.

Вычислим точность оценки:

$$\delta = \frac{t_y \varepsilon}{\sqrt{n}} = \frac{3,8833 * 11}{20} \approx 9,55$$ сек.

Таким образом, искомый доверительный интервал:

76-9,55<***a***<76+9,55

66,45<***a***<85,55 – данный интервал с вероятностью 99,9% накрывает истинное значение ***a*** среднего времени изготовления одного диода.

Варианты задания 2

№ вар.	n	$\overline{x}_в$	S	γ
1	38	59	11	0,845
2	39	65	8	0,889
3	26	64	9	0,837
4	28	65	8	0,884
5	20	68	8	0,827
6	23	68	12	0,848
7	22	84	7	0,821
8	19	86	9	0,906
9	16	56	10	0,923
10	25	46	8	0,937
11	15	88	7	0,880
12	28	75	12	0,989
13	25	77	7	0,821

№ вар.	n	$\overline{x}_в$	S	γ
14	20	70	9	0,960
15	37	77	8	0,856
16	24	79	11	0,886
17	19	74	9	0,857
18	17	63	9	0,904
19	38	82	8	0,930
20	31	49	10	0,959
21	38	70	12	0,996
22	26	86	11	0,808
23	20	61	7	0,916
24	29	63	12	0,918
25	38	50	11	0,882
26	26	61	8	0,866