Лабораторная работа №4.

Закон больших чисел и предельные теоремы

Цели занятия:

- изучить неравенства Маркова и Чебышева;
- приобрести навыки оценки вероятностей событий.

Задание:

- на основе лекционного материала и представленной методики выполнения заданий произвести расчёт вероятностей событий в соответствии с заданным вариантом;
- для автоматизации расчётов использовать MS Excel;
- оформить отчёт по лабораторной работе в соответствии с установленными правилами.

Краткие сведения из теории

Под законом больших чисел в широком смысле понимается общий принцип, согласно которому, по формулировке академика А.Н. Колмогорова, *совокупное действие большого числа случайных факторов приводит* (при некоторых весьма общих условиях) *к результату почти не зависящему от случая*. Другими словами, при большом числе случайных величин их средний результат перестаёт быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определённости.

Неравенство Маркова

Теорема. ***Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание, то для любого положительного числа A верно неравенство***

$$P(x > A) \le \frac{M(X)}{A} \qquad (1)$$

Доказательство. Расположим значения дискретной случайной величины X в порядке возрастания. Из этих значений часть ($x_1, x_2, \ldots, x_k$), будет не более числа A, а другая часть – $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ будет больше A (рис. 1).

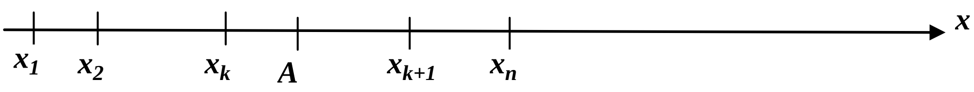

Рис. 1

Запишем выражение для математического ожидания M(X):

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k + x_{k+1}p_{k+1} + \ldots + x_np_n = M(X),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - вероятности того, что случайная величина X примет значения соответственно $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Отбрасывая первые к неотрицательных слагаемых (поскольку по условию все $x_i \ge 0$), получим $x_{k+1}p_{k+1} + \ldots + x_np_n \le M(X)$. Заменяя в левой части значения $x_{k+1}, \ldots, x_n$ меньшим числом A, получим более сильное неравенство

$$A(p_{k+1} + \ldots + p_n) \le M(X) \text{ или } p_{k+1} + \ldots + p_n \le M(X)/A.$$

Сумма вероятностей в левой части неравенства есть вероятность события X>A. Поэтому $P(x > A) \le \frac{M(X)}{A}$.

Так как события ***X>A*** и ***X≤A*** противоположные, то придём к другой форме неравенства Маркова

$$P(x \le A) \ge 1 - \frac{M(X)}{A}$$

Пример 1. Среднее количество вызовов, поступивших на коммутатор завода в течение часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов превысит 400.

Решение. M(X)=300. P(X>400) ≤ 300/400, т.е. вероятность того, что число вызовов превысит 400, будет не более 0,75.

Неравенство Чебышева

Теорема. ***Для любой случайной величины, имеющей математическое ожидание и дисперсию, справедливо неравенство***

$$P(|X-a| > \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \qquad (2)$$

где ***a=M(X), ε>0***.

Доказательство. Применим неравенство Маркова к случайной величине $X'=(X-a)^2$, взяв в качестве положительного числа $A=\varepsilon^2$. Получим

$$P[(X-a)^2 > \varepsilon^2] \le \frac{M(X-a)^2}{\varepsilon^2}$$

Так как неравенство $(X-a)^2 > \varepsilon^2$ равносильно неравенству $|X-a| > \varepsilon$, а $M(X-a)^2$ есть дисперсия случайной величины X, то теорема доказана.

Учитывая, что события $|X-a| > \varepsilon$ и $|X-a| \le \varepsilon$ противоположны, неравенство Чебышева можно записать и в другой форме:

$$P(|X-a| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Для случайной величины ***X=m***, имеющей биномиальный закон распределения с математическим ожиданием ***a=M(X)=np*** и дисперсией ***D(X)=npq***:

$$P(|m-np| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}$$

Для частности m/n события в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью ***a=M(m/n)=p***, и имеющей дисперсию ***D(m/n)=pq/n***: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$

Применение неравенства Чебышева для группы независимых случайных величин

Если дисперсии ***n*** независимых случайных величин ограничены одной и той же постоянной С, т.е. $M(X_1) = a_1$, $M(X_2) = a_2$, … , $M(X_n) = a_n$,

$D(X_1) \le C$, $D(X_2) \le C$, …, $D(X_n) \le C$, то (2) принимает вид:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right| < \varepsilon\right) \le 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (3)$$

Пример 2. Средний расход воды на животноводческой ферме составляет 1000 л в день, а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 200 *л*. Найти вероятность того, что расход воды на ферме в любой день не превзойдет 2000 *л*.

Решение. Дисперсия $D(X) = \sigma^2 \le 200^2$. Так как границы интервала $0 \le X \le 2000$ симметричны относительно математического ожидания $M(X) = 1000$, то для оценки вероятности искомого события можно применить неравенство Чебышева

$P(X \le 2000) = P(0 \le X \le 2000) = P(|X - 1000| \le 1000) \ge 1 - 200^2/1000^2 = 0{,}96.$

Методические рекомендации

Неравенство Маркова

Пример 3. Сумма всех вкладов в отделение банка составляет 2 млн. ед., а вероятность того, что случайно взятый вклад не превысит 10 тыс. ед., равна 0,6. Что можно сказать о числе вкладчиков?

Решение. Пусть X – размер случайно взятого вклада, а n – число вкладчиков. Тогда средний размер вклада M(X)=2000/n (тыс.ед.).

Согласно неравенству Маркова $P(X\le 10) \ge 1\text{-}M(X)/10$ или $P(X\le 10) \ge 1\text{-}2000/(10n)$

Учитывая, что $P(X\le 10)=0{,}6$, получим $0{,}6 \ge 1\text{-}200/n$, откуда $n \le 500$.

Неравенство Чебышева

Пример 4. Вероятность выхода с автомата стандартной летали равна 0,96. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что число бракованных среди 2000 деталей находится в границах от 60 до 100 (включительно).

Решение. По условию вероятность того, что деталь бракованная, равна p = 1-0,96 = 0,04. Число бракованных деталей = m имеет биномиальный закон распределения, а его границы 60 и 100 симметричны относительно математического ожидания = $M(X) = np$ = 2000 • 0,04 = 80. Следовательно, оценку вероятности искомого события

$P(60 \le m \le 100)= P(-20 \le m -80 \le 20)= P(\backslash m - 80| \le 20)$

$P(\backslash m - 80| \le 20) = 1\text{-}(2000*0{,}04*0{,}96)/20^2 = 1 - 76{,}8/400 = 0{,}808.$

Пример 5. Оценить вероятность того, что отклонение любой случайной величины от её математического ожидания будет не более 3 средних квадратических отклонений (по абсолютной величине).

Решение. Учитывая, что D(X)=σ^2 получим $P(|X - a| \le 3\sigma) \ge 1 - \dfrac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \dfrac{8}{9} \approx 0{,}889.$

Пример 6. Для определения средней продолжительности горения электроламп в партии из 200 ящиков было взято на выборку по 1 лампе из каждого ящика. Известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения ламп в каждом ящике меньше 7 часов. Оценить вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 ламп отличается от средней продолжительности горения ламп во всей партии не более чем на 5 ч. (по абсолютной величине).

Решение.

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{200}}{200} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{200}}{200}\right| < 5\right) \le 1 - \frac{7^2}{200 \times 5^2} \approx 0{,}9902.$$

Варианты заданий

Неравенство Маркова

1. Среднее количество вызовов, поступивших на коммутатор завода в течение часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов будет не более 500. (≥0,4)

2. Среднее количество вызовов, поступивших на коммутатор завода в течение часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов превысит 350. (≤0,857)
3. Средний электроэнергии в мастерской составляет 200 кВт*ч в день. Найти вероятность того, что расход электроэнергии в мастерской в любой день не превзойдет 300 кВт*ч. (≥0,33333)
4. Средний электроэнергии в мастерской составляет 200 кВт*ч в день. Найти вероятность того, что дневной расход электроэнергии в мастерской может превзойти 350 кВт*ч. (≤0,57)
5. Среднее изменение курса акции компании в течение одних биржевых торгов составляет 0,3 %. Оценить вероятность того, что на ближайших торгах курс изменится более, чем на 3 %. (≤0,1)
6. Среднее изменение курса акции компании в течение одних биржевых торгов составляет 0,3 %. Оценить вероятность того, что на ближайших торгах курс изменится не более, чем на 7 %. (≥0,957)
7. Отделение банка обслуживает в среднем 100 клиентов в день. Оценить вероятность того, что сегодня в отделении банка будет обслужено не более 200 клиентов. (≥0,5)
8. Отделение банка обслуживает в среднем 100 клиентов в день. Оценить вероятность того, что сегодня в отделении банка будет обслужено более 150 клиентов. (≤0,66667)
9. Средний расход воды на животноводческой ферме составляет 1000 л в день. Найти вероятность того, что расход воды на ферме в любой день не превзойдет 2000 *л*. (≥0,5)
10. Средний расход воды на животноводческой ферме составляет 1000 л в день. Найти вероятность того, что дневной расход воды на ферме превысит 1500 *л*. (≤0,66667)

Неравенство Чебышева

1. Средний электроэнергии в мастерской составляет 150 кВт*ч в день, а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 30 кВт*ч. Найти вероятность того, что расход электроэнергии в мастерской в любой день не превзойдет 300 кВт*ч. (≥0,96)
2. Средний электроэнергии в мастерской составляет 200 кВт*ч в день, а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 30 кВт*ч. Найти вероятность того, что дневной расход электроэнергии в мастерской может превзойти 400 кВт*ч. (≤0,0225)
3. Электроподстанция обслуживает сеть на 1600 электроламп, вероятность включения каждой из которых вечером равна 0,9. Оценить вероятность того, что число ламп, включенных в сеть вечером, отличается от своего математического ожидания не более чем на 100 (по абсолютной величине). (≥0,9856)
4. Среднее значение длины детали 50 см, её дисперсия – 0,1. Оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не менее 49,5 см и не более 50,5 см. (≥0,6)
5. Оценить вероятность того, что отклонение любой случайной величины от её математического ожидания будет не более 2 средних квадратических отклонений (по абсолютной величине). (≥0,75)
6. В течение времени T эксплуатируется 500 приборов. Каждый прибор имеет надёжность 0,98 и выходит из строя независимо от других. Оценить вероятность того, что доля надёжных приборов отличается от 0,98 не более чем на 0,1. ((≥0,996)
7. Сколько нужно провести измерений данной величины, чтобы с вероятностью не менее 0,95 гарантировать отклонение средней арифметической этих измерений от истинного значения величины не более чем на 1 (по абсолютной величине), если среднее квадратическое отклонение каждого из измерений не превосходит 5? (500)

8. Среднее значение длины детали 70 см, её дисперсия – 0,1. Оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не менее 69,6 см и не более 70,4 см. ($\geq$0,375)
9. Оценить вероятность того, что отклонение любой случайной величины от её математического ожидания будет не более 4 средних квадратических отклонений (по абсолютной величине). ($\geq$0,9375)
10. Сколько нужно провести измерений данной величины, чтобы с вероятностью не менее 0,97 гарантировать отклонение средней арифметической этих измерений от истинного значения величины не более чем на 1 (по абсолютной величине), если среднее квадратическое отклонение каждого из измерений не превосходит 5? (834)