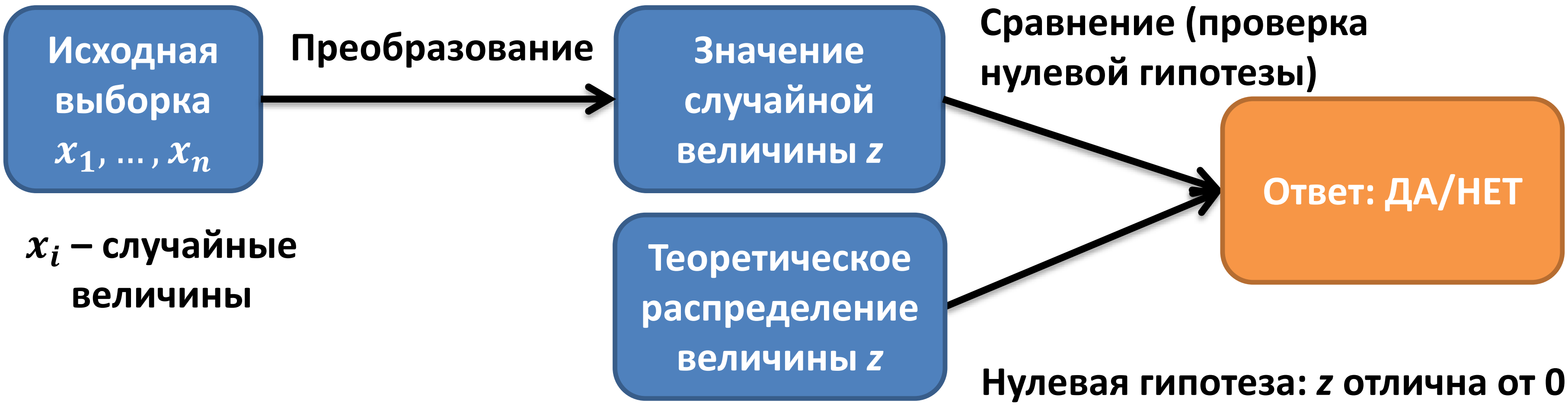
Лекция 3. Проверка статистических гипотез

1. Одновыборочный критерий Стьюдента (t-критерий)
2. Двухвыборочный критерий Стьюдента (t-критерий)
3. Распределение хи-квадрат и критерий Пирсона
4. Распределение Фишера и критерий Фишера (F-test)

Общая схема проверки статистических гипотез



x_i – случайные величины

$F(x)$ – функция распределения

Нулевая гипотеза: *z* отлична от 0

Способы сравнения

<u>А) С помощью квантилей: $z > z_{\text{крит}}$</u>

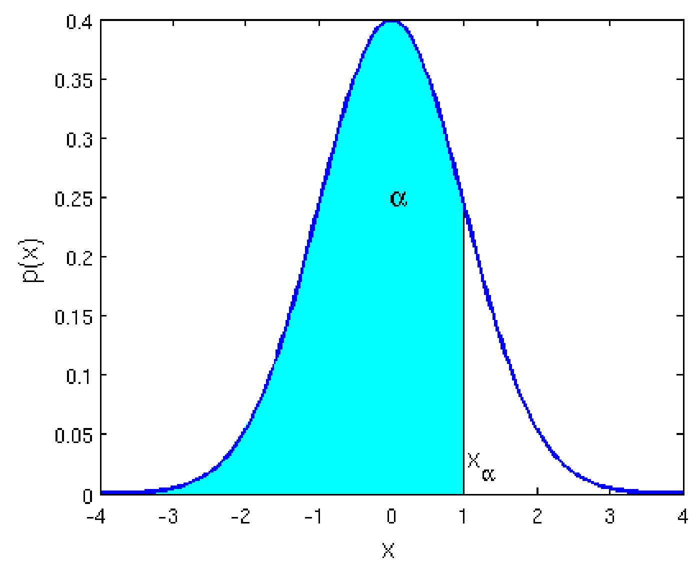
Квантили находятся решением уравнения

$$F(z_{\text{крит}}) = 1 - p_{\text{крит}}$$

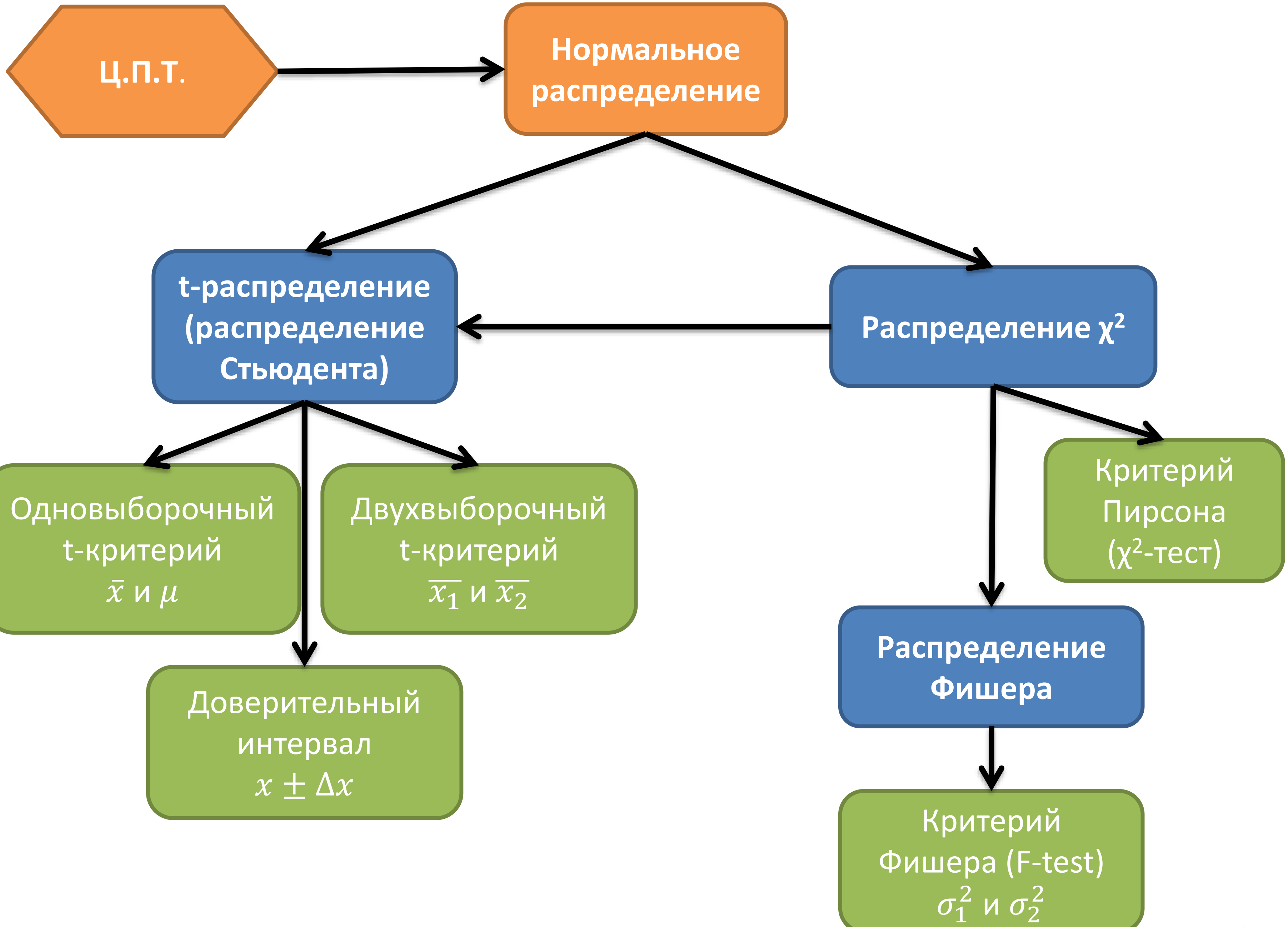
Обычно значения квантилей есть в справочных таблицах

<u>Б) С помощью *p*-value (*p*-значения): $p < p_{\text{крит}}$</u>

$$p = 1 - F(z)$$



Обычно $p_{\text{крит}} = 0.05$


Ц.П.Т.
Нормальное распределение
t-распределение (распределение Стьюдента)
Распределение χ^2
Одновыборочный t-критерий $\bar{x}$ и μ
Двухвыборочный t-критерий $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$
Доверительный интервал $x \pm \Delta x$
Критерий Пирсона (χ^2-тест)
Распределение Фишера
Критерий Фишера (F-test) σ_1^2 и σ_2^2

Одновыборочный t-критерий

Пусть

$\bar{x}$- среднее по выборке
μ – математическое ожидание
$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ - несмещённая оценка дисперсии
n – число элементов в выборке

Тогда

$$t(n-1) \sim \frac{\boldsymbol{\bar{x}} - \boldsymbol{\mu}}{s_x/\sqrt{n}}$$

Где t(n-1) – распределение Стьюдента для *n*-1 степеней свободы

<u>Дано:</u> выборка $x_1, \dots, x_n$ и математическое ожидание μ

<u>Использование критерия:</u>

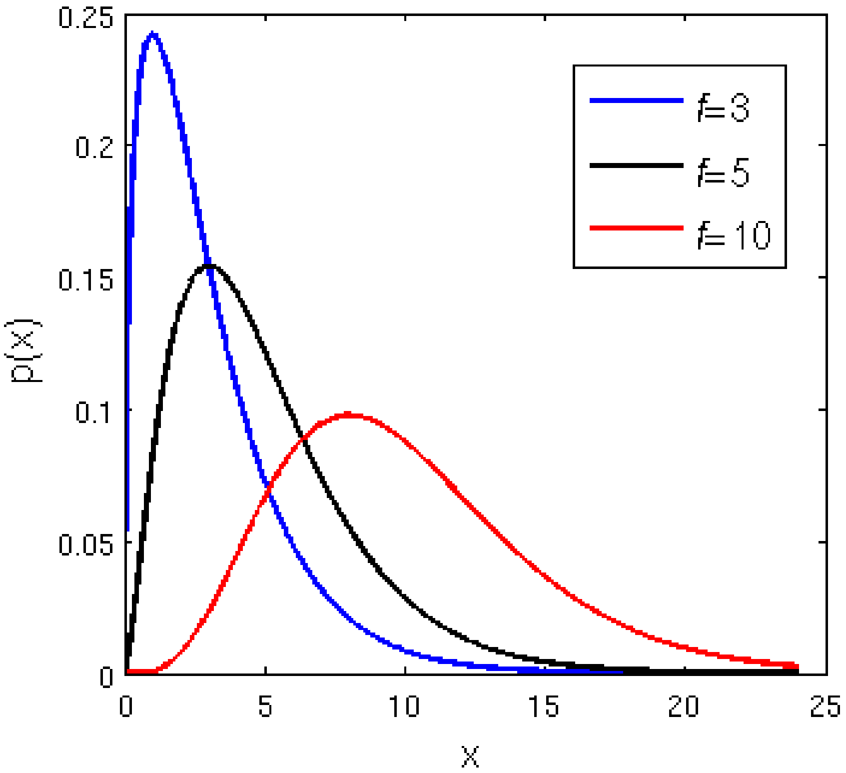
1. Рассчитать значения $\bar{x}$, s_x^2 для выборки
2. Рассчитать значение $t_{real}(n\text{-}1) = \frac{\bar{x}-\mu}{s_x/\sqrt{n}}$
3. Рассчитать t(n-1) (см. `СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х` в MS Excel)
4. Если $t_{real}(n-1) > t(n-1)$, то $\bar{x} \neq \mu$

<u>Примечание:</u> можно использовать функцию MS Excel `ДОВЕРИТ.СТЬЮДЕНТ`

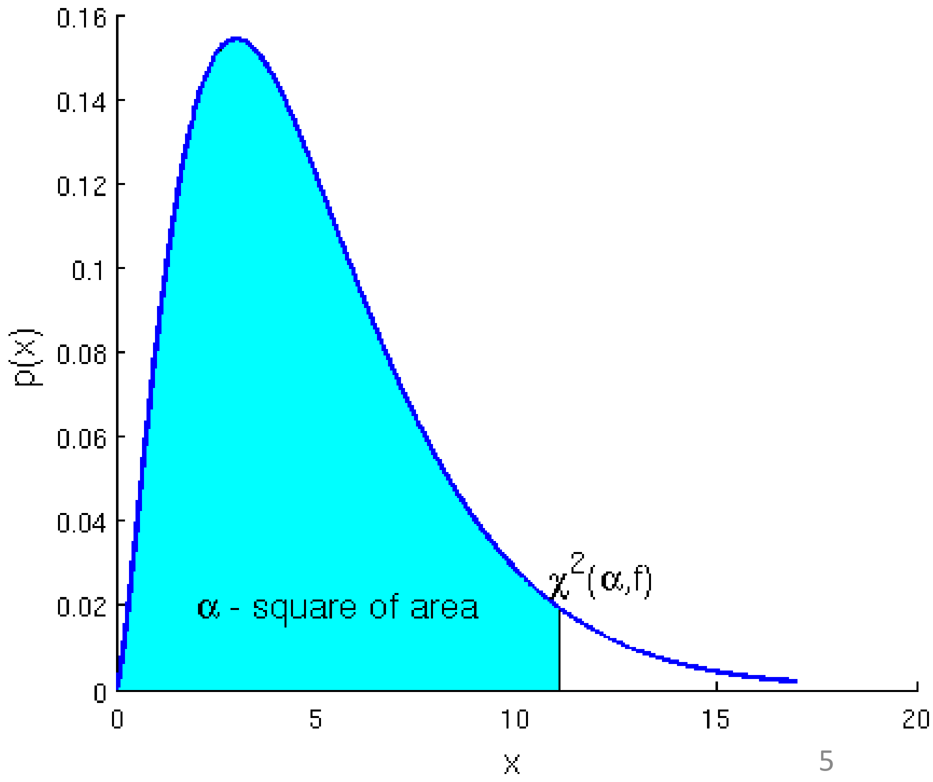
Распределение хи-квадрат (χ^2)

Пусть $z_1, \dots, z_k$ - независимые стандартные нормальные случайные величины (т.е. $z_i \sim N(0; 1)$)
Тогда величина $x = \sum_i z_i^2$ имеет распределение χ^2 с k степенями свободы (т.е. $x \sim \chi^2(k)$).

Функции плотности вероятности



Квантиль $\chi^2(\alpha, f)$

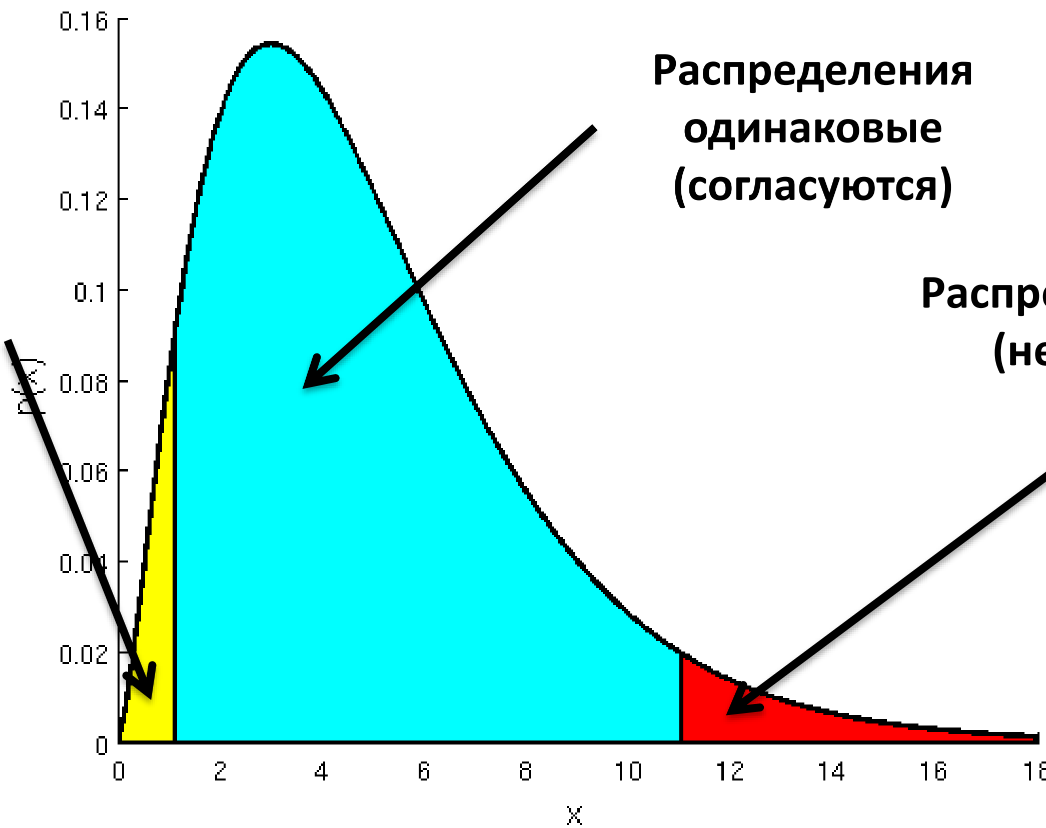


Критерий согласия χ² (Пирсона)

Пусть имеются 2 дискретных распределения, заданных двумя наборами частот O_i $(i = 1 \dots m)$ (наблюдаемые частоты, Observed) и E_i $(i = 1 \dots m)$ (ожидаемые частоты, Expected), причём $\sum_i O_i = \sum_i E_i$.

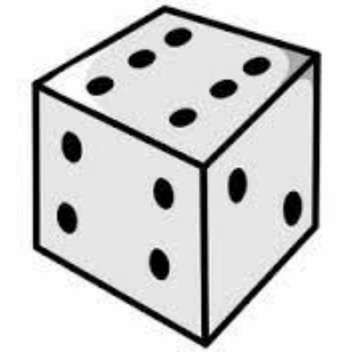
Тогда если $\chi^2_{emp} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} < \chi^2(\alpha, m-1)$, то с вероятностью α наблюдаемое распределение совпадает с ожидаемым

«Слишком хорошее» согласие? Возможно, систематическая ошибка или подлог?



Распределения одинаковые (согласуются)

Распределения разные (не согласуются)

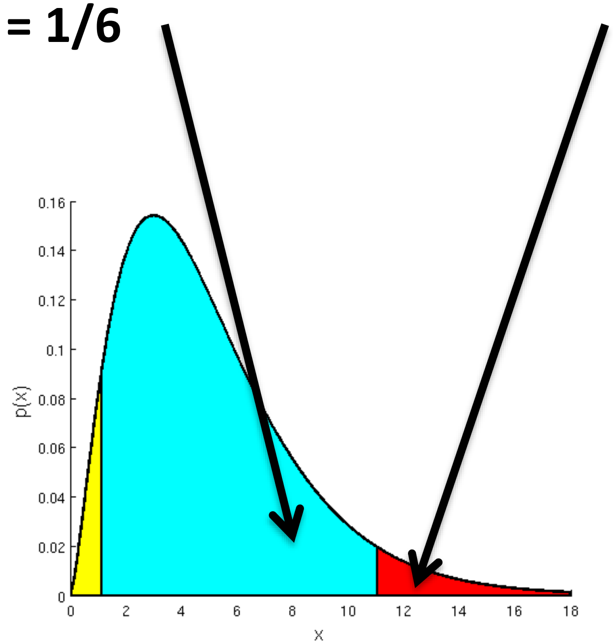


Критерий согласия χ^2 (Пирсона)
Пример с игральной костью

Игральная кость: p_i = 1/6

No	Oi	Ei
1	12	8
2	4	8
3	6	8
4	8	8
5	7	8
6	11	8
	48	48

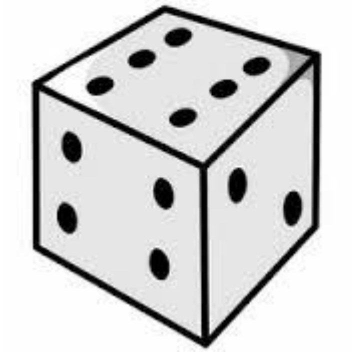
```
chi2(empirical):   5.75000
chi2(a=0.95;f=5): 11.07050
chi2(a=0.05;f=5): 1.14548
```



Игральная кость: $p_1 = 3p_i$ (i=2..6)

No	Oi	Ei
1	20	8
2	4	8
3	5	8
4	10	8
5	5	8
6	4	8
+	48	48

```
chi2(empirical):   24.75000
chi2(a=0.95;f=5): 11.07050
chi2(a=0.05;f=5): 1.14548
```

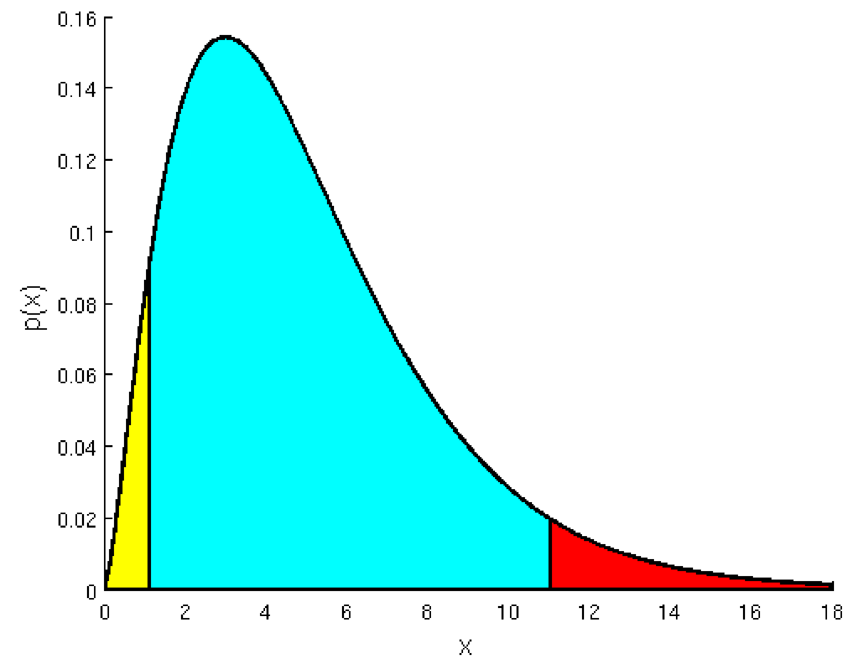


Критерий согласия χ^2 (Пирсона)
Пример с игральной костью

Игральная кость: «подгонка»

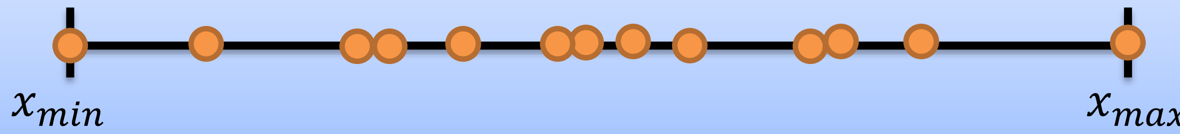
No	Oi	Ei
1	9	8
2	7	8
3	8	8
4	7	8
5	9	8
6	8	8
+	48	48

```
chi2(empirical):   0.50000
chi2(a=0.95;f=5): 11.07050
chi2(a=0.05;f=5); 1.14548
```

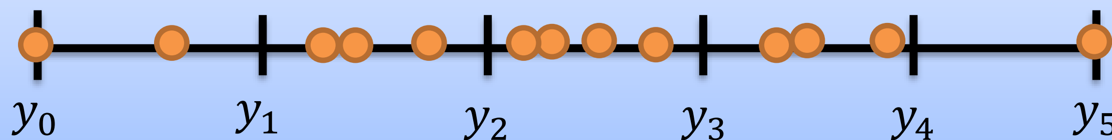


Критерий согласия χ^2 : непрерывное распределение

1. Найти минимальное x_{min} и максимальное x_{max} значение в выборке x_i



2. Разделить отрезок на 5-6 равных промежутков, рассчитать O_i для каждого из них (т.е. построить гистограмму)



3. Построить теоретическую гистограмму E_i (например, на основе s^2 и $\bar{x}$)

$$E_i = N \int_{y_{i-1}}^{y_i} p(x)dx = N(F(y_i) - F(y_{i-1}))$$

N – число точек, n – число промежутков (карманов, корзин); $y_0 = -\infty, y_n = +\infty$

4. Применение критерия Пирсона

$$\chi^2_{emp} = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Непрерывное распределение: графический способ

Построить эмпирическую интегральную функцию распределения

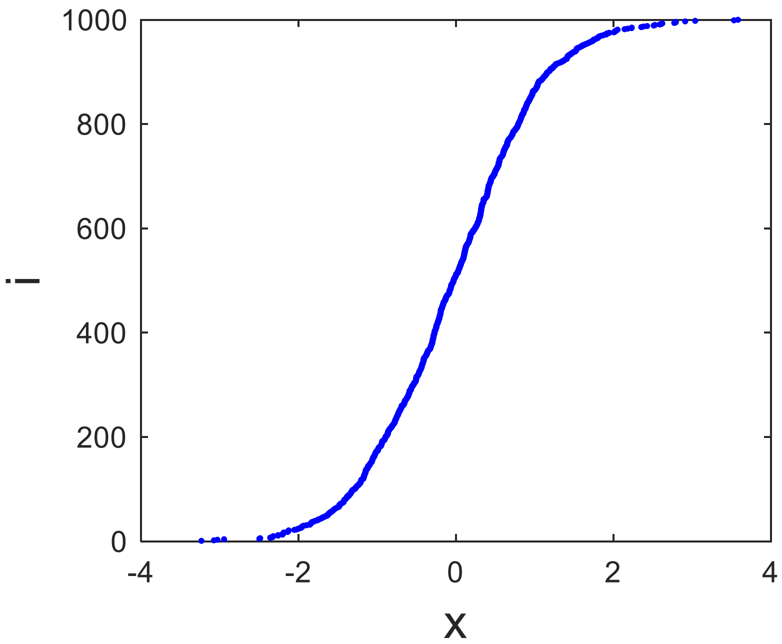
1. Отсортировать точки выборки по возрастанию и пронумеровать их: $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$
2. Для каждой точки рассчитать вероятность $p_\mathrm{i} = P(x \le x_i) = i/n$
3. Построить график в координатах (x_i, p_i) и/или (x_i, i)

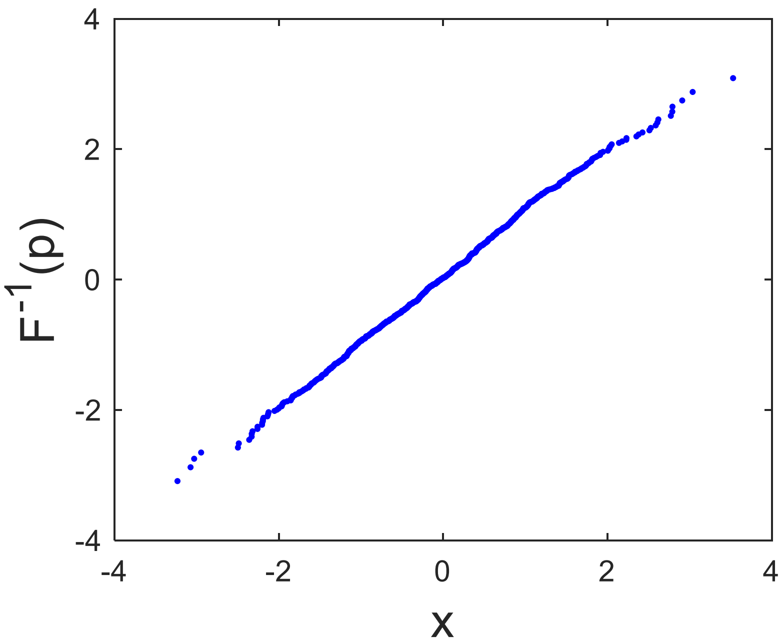
Сравнить полученную функцию с эталонной

1. Построить график в координатах $(x_i, F^{-1}(p_i))$, где F^{-1} - функция, обратная интегральной функции **теоретического** распределения
2. Если эмпирическое распределение соответствует теоретическому, то должна получиться прямая линия!

См. также: (а) нормальная вероятностная бумага (б) критерий Колмогорова-Смирнова

Непрерывное распределение: графический способ

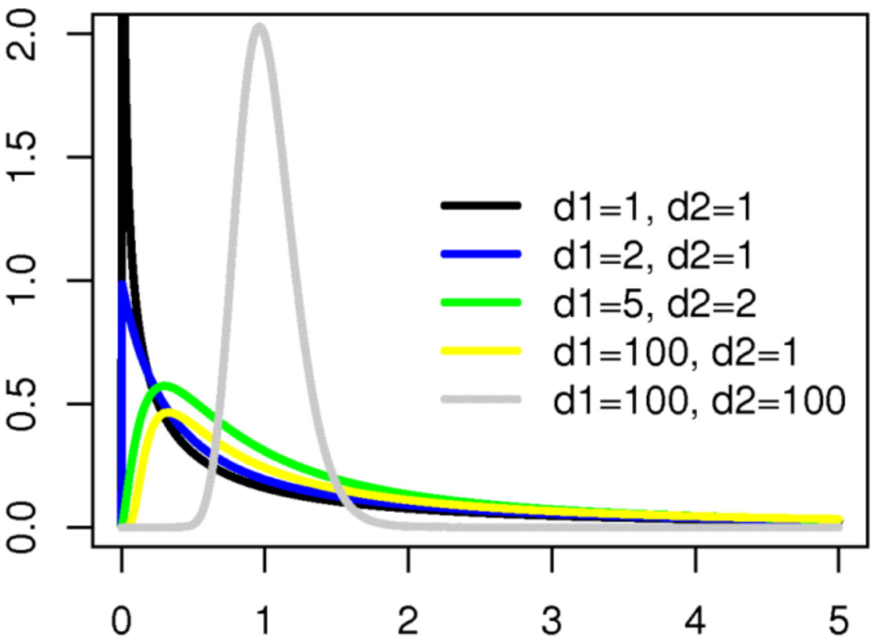




F-распределение (Фишера)

Пусть Y_1 и Y_2 - две независимые случайные величины с распределением χ^2, т.е. $Y_i = \chi^2(d_i)$, где $d_i \in \mathbb{N}$.

Тогда $F(d_1, d_2) = \frac{Y_1/d_1}{Y_2/d_2}$ - распределение Фишера (F-распределение)



Свойства:

- Если $F \sim F(d_1, d_2)$, то $F^{-1} \sim F(d_2, d_1)$
- Если $d_1, d_2 \to \infty$, то $F \to \delta(x-1)$

Дельта-функция:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 \text{ если } x \neq 0 \\ +\infty \text{ если } x = 0 \end{cases}$$

F-тест (критерий Фишера)

Пусть имеются две выборки X_i $(i = 1 \dots m)$ и Y_i $(i = 1 \dots n)$ нормально распределённых случайных величин X и Y, а σ_X^2 и σ_Y^2 - выборочные дисперсии

Тогда $F = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \sim F(m-1, n-1)$

1. Рассчитать стандартные отклонения s_x^2, s_y^2 для выборок X и Y

2. Если $s_x^2 < s_y^2$, то поменять выборки местами

3. Рассчитать $F_{emp} = \frac{s_x^2}{s_y^2}$ и $F(\alpha; m-1, n-1)$

Если $F_{emp} < F$, то дисперсии одинаковы

Функции MS Excel: `F.ТЕСТ`, `F.РАСП`, `F.ОБР`, `ФТЕСТ`, `ФОБР`, `FРАСП`, `FРАСПОБР`

Двухвыборочный t-критерий

$$t_{\text{эмп}}(p; df) = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{x-y}}$$

Функции MS Excel: пакет анализа данных

Одинаковые дисперсии (по критерию Фишера)

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

Разные дисперсии (по критерию Фишера)

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$df = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$