*Лабораторная работа №1.*

# *Непосредственное вычисление вероятностей*

## Цели занятия:

- изучить основные формулы комбинаторики;
- приобрести навыки расчёта числа возможных исходов испытаний;
- исходя из анализа возможных исходов научиться рассчитывать вероятности интересующих событий.

## Задание:

- на основе лекционного материала и представленной методики выполнения заданий произвести расчёт вероятностей событий в соответствии с заданным вариантом;
- для автоматизации расчётов использовать MS Excel;
- оформить отчёт по лабораторной работе в соответствии с установленными правилами.

## *Краткие сведения из теории*

### Правило суммы:

***Если элемент $A_1$ может быть выбран $n_1$ способами, элемент $A_2$ – другими $n_2$ способами, …, $A_к$ – $n_k$ способами, отличными от первых (к-1), то выбор одного из элементов: или $A_1$, или $A_2$, …, или $A_к$ может быть осуществлён $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.***

**Пример 1**. В ящике 300 деталей: 150 – 1-го сорта, 120 – 2-го сорта, 30 – 3-го сорта. Сколько существует способов извлечения из ящика деталей 1 и 2-го сорта?

Решение: по правилу суммы существует $n_1 + n_2 = 150+120=270$ способов.

### Правило произведения:

***Если элемент $A_1$ может быть выбран $n_1$ способами, после каждого такого выбора элемент $A_2$ может быть выбран $n_2$ способами, …, после каждого (к-1) выбора элемент $A_к$ может быть выбран $n_k$ способами, то выбор всех элементов $A_1$, $A_2$, $A_к$ в указанном порядке может быть осуществлён $n_1\, n_2\, \ldots\, n_k$ способами.***

**Пример 2**. В группе 30 человек. Нужно выбрать старосту, его заместителя и профорга. Каково количество вариантов?

Решение. Старостой может быть выбран любой из 30 учащихся, его заместителем – любой из 29 оставшихся, профоргом - любой из 28 оставшихся. Общее число выборов $n_1n_2n_3$ = 30*29*28 = 24360.

## Размещения.

Если комбинации из $n$ элементов по $m$ отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения, либо и тем и другим, то число размещений из $n$ элементов по $m$ равно $A^m_n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$ или $A^m_n = n!/(n-m)!$

**Пример 1**. Расписание одного дня состоит из 5 занятий. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.

Решение. Каждый вариант – набор 5 дисциплин из 11, отличающийся от других вариантов как составом дисциплин, так и порядком их следования (или и тем и другим). Поэтому число вариантов расписания равно числу размещений из 11 по 5:
$A^5_{11}$ = 11*10*9*8*7 = 55440.

**Пример 2**. Из 7 заводов организация должна выбрать 3 для размещения трёх различных заказов. Сколькими способами можно разместить заказы?

Решение. Так как заводы различны, то каждый завод может либо получить 1 заказ, либо не получить ни одного: $A_7^3$ = 7!/4! = 210.

## Размещения с повторениями.

Если в размещениях из ***n*** элементов по ***m*** некоторые из элементов (или все) могут оказаться одинаковыми, то число вариантов равно

$$\overline{\mathrm{A}}_n^m = n^m.$$

**Пример 3**. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 фильмов. Сколько вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные призы?

Решение. $\tilde{A}^5_{10} = 10^5$ = 100 000.

## Сочетания.

Если комбинации из ***n*** элементов по ***m*** отличаются только составом элементов, то число сочетаний из ***n*** элементов по ***m*** равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Свойства числа сочетаний: $C_n^m = C_n^{n-m}$, $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ .

**Пример 4**. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно, чтобы между любыми двумя участниками была сыграна одна партия?

Решение. Каждая партия играется двумя участниками и отличается от других только составом пар участников. Поэтому $C^2_{16}$ = 16*15/2 = 120.

## Сочетания с повторениями.

Если в сочетаниях из ***n*** элементов по ***m*** некоторые из элементов (или все) могут оказаться одинаковыми, то число вариантов равно

$$\overline{\mathrm{C}}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

**Пример 5**. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 фильмов. Сколько вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные призы?

Решение. Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок следования фильмов в комбинациях 5 призёров значения не имеет. Поэтому

$\hat{C}^5_{10} = C^5_{10+5-1} = C^5_{14}$ = 14*13*12*11*10/5! = 2002.

## Перестановки.

Если комбинации из ***n*** элементов отличаются только порядком расположения этих элементов, то число перестановок из ***n*** элементов равно $P_n = n!$

**Пример 6**. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Каково число вариантов жеребьёвки?

Решение. $P_7$ = 7! = 5040.

## Перестановки с повторениями.

Если в перестановках из общего числа ***n*** элементов есть ***k*** различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется $n_1$ раз, 2-й элемент повторяется $n_2$ раз, ***k*** -й элемент повторяется $n_k$ раз, причём $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ , то такие перестановки называются перестановками с повторениями из $n$ элементов. Число перестановок с повторениями из $n$ элементов равно

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

**Пример 7**. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5, 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

Решение. $n_1 = 3$, $n_2 = n_3 = 2$. При этом $n_1 + n_2 + n_3 = 7$.

Поэтому $P_7(3;2;2) = 7!/(3!2!2!) = 210$.

## Методические рекомендации

**Пример 8**. Из 25 студентов 6 имеют задолженности. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента – задолжники?

Решение представлено на рис. 1.

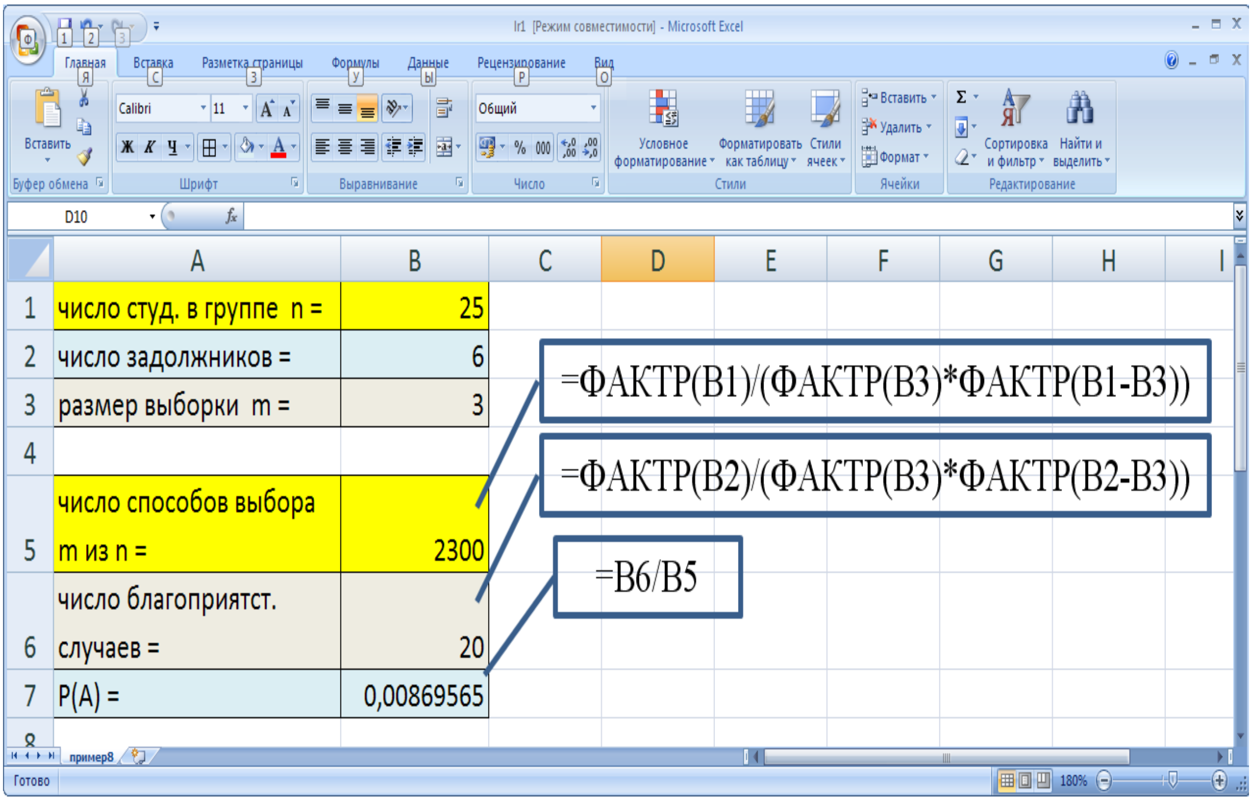
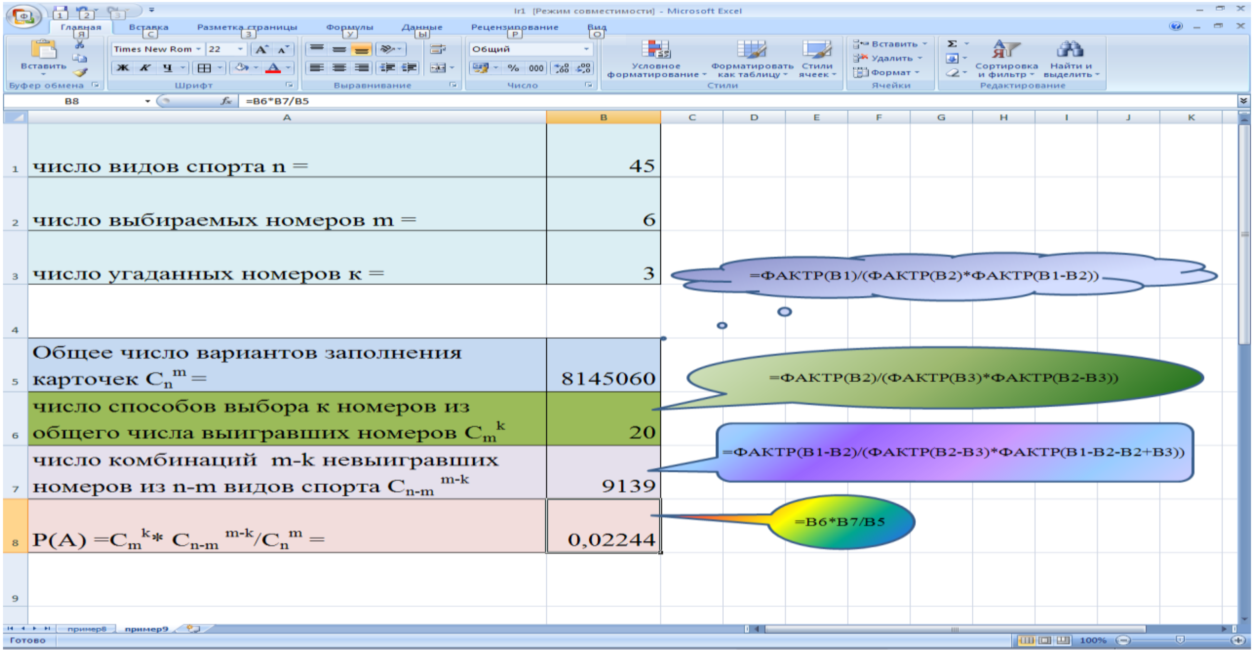


Рис.1

**Пример 9**. Участник лотереи «Спортлото 6 из 45», угадавший 3, 4, 5, 6 номеров, получает денежный приз. Найти вероятность угадывания 3 цифр.

Решение представлено на рис. 2.



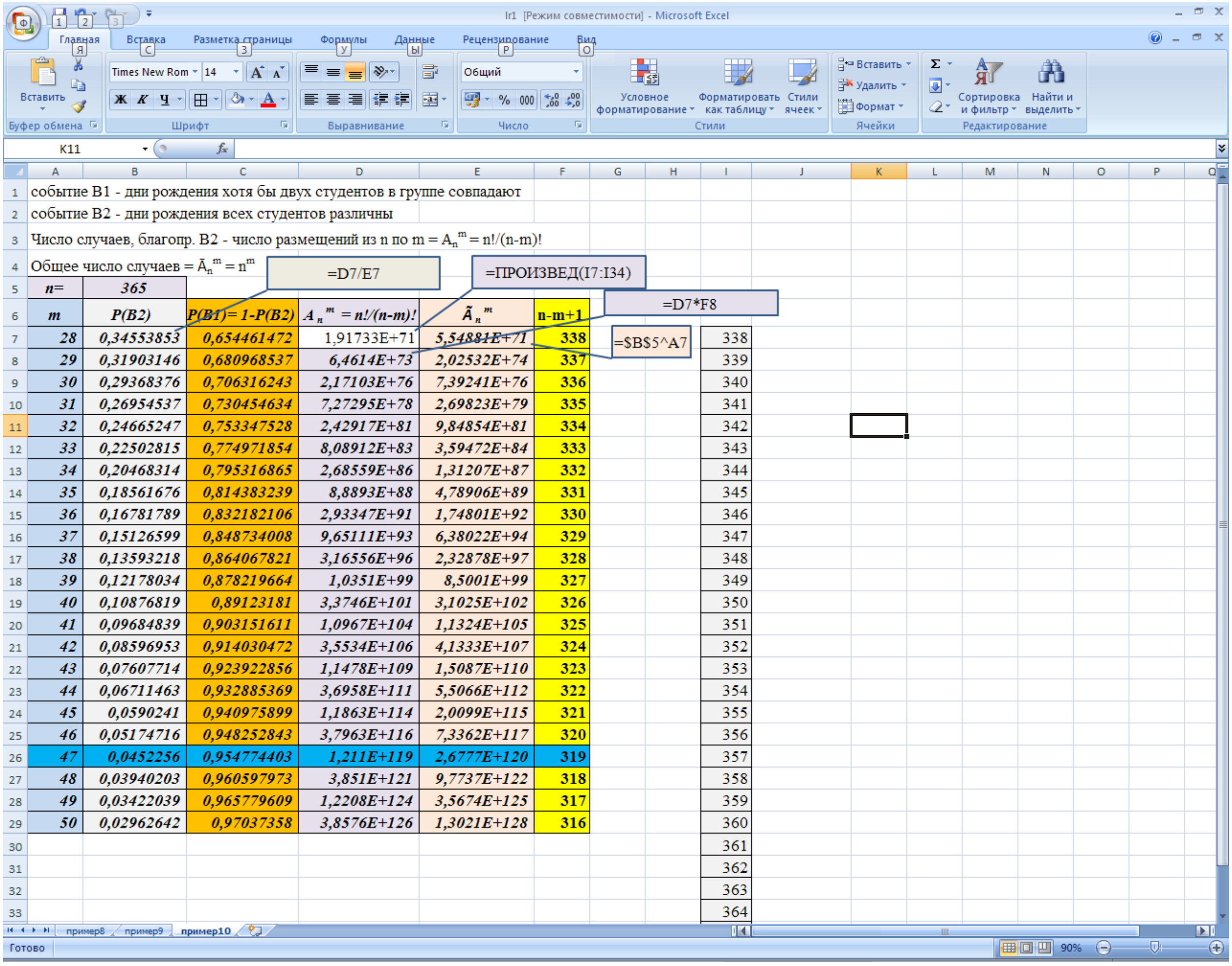
| | |
|---|---|
| число видов спорта n = | 45 |
| число выбираемых номеров m = | 6 |
| число угаданных номеров к = | 3 |
| | |
| Общее число вариантов заполнения карточек $C_n^m$ = | 8145060 |
| число способов выбора к номеров из общего числа выигравших номеров $C_m^k$ | 20 |
| число комбинаций m-k невыигравших номеров из n-m видов спорта $C_{n-m}^{m-k}$ | 9139 |
| $P(A) = C_m^k * C_{n-m}^{m-k}/C_n^m$ = | 0,02244 |



Рис. 2

**Пример 10**. При каком числе студентов в учебной группе вероятность того, что хотя бы у двух студентов дни рождения совпадают ≥ 0,95?

Решение представлено на рис. 3.



событие B1 - дни рождения хотя бы двух студентов в группе совпадают

событие B2 - дни рождения всех студентов различны

Число случаев, благопр. B2 - число размещений из n по m = $A_n^m = n!/(n-m)!$

Общее число случаев = $\bar{A}_n^m = n^m$

n= 365

| m | P(B2) | P(B1)= 1-P(B2) | $A_n^m = n!/(n-m)!$ | $\tilde{A}_n^m$ | n-m+1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | 0,34553853 | 0,654461472 | 1,91733E+71 | 5,54881E+71 | 338 | 338 |
| 29 | 0,31903146 | 0,680968537 | 6,4614E+73 | 2,02532E+74 | 337 | 339 |
| 30 | 0,29368376 | 0,706316243 | 2,17103E+76 | 7,39241E+76 | 336 | 340 |
| 31 | 0,26954537 | 0,730454634 | 7,27295E+78 | 2,69823E+79 | 335 | 341 |
| 32 | 0,24665247 | 0,753347528 | 2,42917E+81 | 9,84854E+81 | 334 | 342 |
| 33 | 0,22502815 | 0,774971854 | 8,08912E+83 | 3,59472E+84 | 333 | 343 |
| 34 | 0,20468314 | 0,795316865 | 2,68559E+86 | 1,31207E+87 | 332 | 344 |
| 35 | 0,18561676 | 0,814383239 | 8,8893E+88 | 4,78906E+89 | 331 | 345 |
| 36 | 0,16781789 | 0,832182106 | 2,93347E+91 | 1,74801E+92 | 330 | 346 |
| 37 | 0,15126599 | 0,848734008 | 9,65111E+93 | 6,38022E+94 | 329 | 347 |
| 38 | 0,13593218 | 0,864067821 | 3,16556E+96 | 2,32878E+97 | 328 | 348 |
| 39 | 0,12178034 | 0,878219664 | 1,0351E+99 | 8,5001E+99 | 327 | 349 |
| 40 | 0,10876819 | 0,89123181 | 3,3746E+101 | 3,1025E+102 | 326 | 350 |
| 41 | 0,09684839 | 0,903151611 | 1,0967E+104 | 1,1324E+105 | 325 | 351 |
| 42 | 0,08596953 | 0,914030472 | 3,5534E+106 | 4,1333E+107 | 324 | 352 |
| 43 | 0,07607714 | 0,923922856 | 1,1478E+109 | 1,5087E+110 | 323 | 353 |
| 44 | 0,06711463 | 0,932885369 | 3,6958E+111 | 5,5066E+112 | 322 | 354 |
| 45 | 0,0590241 | 0,940975899 | 1,1863E+114 | 2,0099E+115 | 321 | 355 |
| 46 | 0,05174716 | 0,948252843 | 3,7963E+116 | 7,3362E+117 | 320 | 356 |
| 47 | 0,0452256 | 0,954774403 | 1,211E+119 | 2,6777E+120 | 319 | 357 |
| 48 | 0,03940203 | 0,960597973 | 3,851E+121 | 9,7737E+122 | 318 | 358 |
| 49 | 0,03422039 | 0,965779609 | 1,2208E+124 | 3,5674E+125 | 317 | 359 |
| 50 | 0,02962642 | 0,97037358 | 3,8576E+126 | 1,3021E+128 | 316 | 360 |
| | | | | | | 361 |
| | | | | | | 362 |
| | | | | | | 363 |
| | | | | | | 364 |



Рис. 3

Таким образом, в группе должно быть не менее 47 человек.

# *Варианты заданий*

## Непосредственное вычисление вероятностей

1. В урне ***a*** белых и ***b*** чёрных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.
2. В урне ***a*** белых и ***b*** чёрных шаров. Из урны вынимают наугад один шар, оказавшийся белым, и откладывают в сторону. Найти вероятность того, что следующий вытащенный из урны шар – белый.
3. В урне ***a*** белых и ***b*** чёрных шаров. Из урны вынимают наугад один шар и, не глядя, откладывают в сторону. После этого из урны взяли ещё один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар вытащенный из урны– тоже белый.
4. В урне ***a*** белых и ***b*** чёрных шаров. Из урны вынимают все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что оставшийся шар – белый.
5. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность появления чётного числа очков.
6. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность появления не менее 5 очков.
7. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность появления не более 5 очков.
8. В 1-й урне ***a*** белых и ***b*** чёрных шаров. Во 2-й урне ***c*** белых и ***d*** чёрных шаров. Из каждой урны вынимается по 1 шару. Найти вероятность того, что оба шара – белые.
9. В 1-й урне ***a*** белых и ***b*** чёрных шаров. Во 2-й урне ***c*** белых и ***d*** чёрных шаров. Из каждой урны вынимается по 1 шару. Найти вероятность того, что вынутые шары – разных цветов.
10. В карточной колоде 36 карт. Найти вероятность вытаскивания из колоды туза.

## Задачи на размещения

1. Из разрезной азбуки составляют слово «ТЕОРИЯ». Затем все буквы этого слова перемешиваются и в случайном порядке выбирают 3 карточки. Какова вероятность того, что снова получится слово «ТОР». (= 1/120)
2. На карточках написаны буквы П, Р, И, З, Н, А, К. После перестановки вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что при выборе 4 произвольных карточек получится слово «ЗНАК».
3. На карточках написаны буквы С, О, Б, Ы, Т, И, Е. После перестановки вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что при выборе 5 произвольных карточек получится слово «БЫТИЕ».
4. На карточках написаны буквы С, О, Б, Ы, Т, И, Е. После перестановки вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что при выборе 3 произвольных карточек получится слово «БЫТ».
5. На карточках написаны буквы С, О, Б, Ы, Т, И, Е. После перестановки вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что при выборе 4 произвольных карточек получится слово «СОТЫ».

## Задачи на размещения с повторениями

1. Из разрезной азбуки составляют слово «АНАНАС». Затем все буквы этого слова перемешиваются и снова вкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «АНАНАС». (=1/60)

2. Из разрезной азбуки составляют слово «ЭКОНОМИКА». Затем все буквы этого слова перемешиваются и снова вкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «ЭКОНОМИКА».
3. Из разрезной азбуки составляют слово «СТАТИСТИКА». Затем все буквы этого слова перемешиваются и снова вкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «СТАТИСТИКА».
4. Из разрезной азбуки составляют слово «КАЗАК». Затем все буквы этого слова перемешиваются и снова вкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «КАЗАК».
5. Из разрезной азбуки составляют слово «КАЛЬКУЛЯТОР». Затем все буквы этого слова перемешиваются и снова вкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «КАЛЬКУЛЯТОР».
6. В учебной группе 25 студентов. Какова вероятность того, что хотя бы у двух студентов дни рождения совпадают?
7. В лифт на 1-м этаже девятиэтажного дома вошли 4 человека. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут на одном этаже? ($\approx 0{,}00195$)
8. В лифт на 1-м этаже девятиэтажного дома вошли 4 человека. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут на 6-м этаже? ($\approx 0{,}00024$)
9. В лифт на 1-м этаже девятиэтажного дома вошли 4 человека. Какова вероятность того, что все пассажиры не выйдут на одном этаже?
10. В лифт на 1-м этаже девятиэтажного дома вошли 4 человека. Каково общее число способов выхода пассажиров со 2-го по 9-й этажи?

## Задачи на сочетания

1. Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента – разрядники? ($\approx 0{,}\ 03$)
2. Участник лотереи «Спортлото 6 из 45», угадавший 4, 5, 6 номеров, получает денежный приз. Найти вероятность угадывания всех 6 цифр. ($\approx 0{,}\ 0000001$)
3. Участник лотереи «Спортлото 6 из 45», угадавший 4, 5, 6 номеров, получает денежный приз. Найти вероятность угадывания 5 цифр.
4. Участник лотереи «Спортлото 6 из 45», угадавший 4, 5, 6 номеров, получает денежный приз. Найти вероятность угадывания 4 цифр. ($\approx 0{,}00136$)
5. В партии 100 изделий, из которых 4 – бракованные. Партия произвольно разделена на 2 равные части, которые отправлены двум потребителям. Какова вероятность того, что все бракованные изделия достанутся одному потребителю? ($\approx 0{,}117$)
6. В партии 100 изделий, из которых 4 – бракованные. Партия произвольно разделена на 2 равные части, которые отправлены двум потребителям. Какова вероятность того, что все бракованные изделия достанутся обоим потребителям поровну? ($\approx 0{,}383$)
7. В магазине было продано 21 из 25 холодильников 3 марок, имеющихся в количестве 5, 7 и 13 штук. Полагая, что вероятность продажи каждой марки одна и та же, найти вероятность того, что остались нераспроданными холодильники одной марки. ($\approx 0{,}06$)
8. В магазине было продано 17 из 20 телевизоров 3 марок, имеющихся в количестве 5, 7 и 8 штук. Полагая, что вероятность продажи каждой марки одна и та же, найти вероятность того, что остались нераспроданными телевизоры трёх разных марок.
9. В магазине было продано 17 из 20 телевизоров 3 марок, имеющихся в количестве 5, 7 и 8 штук. Полагая, что вероятность продажи каждой марки одна и та же, найти вероятность того, что остались нераспроданными телевизоры одной марки.
10. В магазине было продано 21 из 25 холодильников 3 марок, имеющихся в количестве 5, 7 и 13 штук. Полагая, что вероятность продажи каждой марки одна и та же, найти вероятность того, что остались нераспроданными холодильники трёх разных марок ($\approx 0{,}396$).
11.

## Задачи на перестановки

1. Из разрезной азбуки составляют слово «ТЕОРИЯ». Затем все буквы этого слова перемешиваются и снова вкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «ТЕОРИЯ». (= 1/720)
2. На полке в случайном порядке расставлен трехтомник какого-то писателя. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо. (= 1/6)
3. Из разрезной азбуки составляют слово «КОПИР». Затем все буквы этого слова перемешиваются и снова вкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «КОПИР».
4. На столе 30 экзаменационных билетов. Какова вероятность того, что они будут взяты студентами в порядке их нумерации?
5. В течение сессии учебной группе предстоят экзамены по 5 дисциплинам. Какова вероятность того, что экзамены будут сдаваться в алфавитном порядке?