5. Znajdź równanie stycznej do paraboli $y = 2 - x^2$, która ogranicza wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt o najmniejszym polu.

2. Najkrótszy bok trapezu prostokątnego opisanego na okręgu o promieniu r ma długość $\frac{5}{3}r$. Oblicz pole trapezu.

3. Dwa miasta A i B są odległe od siebie o 960 km. Z tych miast wyjechały naprzeciw siebie dwa pociągi, przy czym pociąg z miasta B wyjechał 2 godziny później i jechał z prędkością o 20 km/godz. większą niż pociąg z miasta A. Pociągi te minęły się dokładnie w połowie drogi. Podaj prędkość pociągu, który wyruszył z miasta A.

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że dla dowolnych niedodatnich liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność
$$a^5 + b^5 \leqslant ab^4 + a^4b.$$
Kiedy prawdziwa jest równość?

3. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest równoramienny trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Krawędź boczna AD jest prostopadła do podstawy ostrosłupa i ma długość przeciwprostokątnej BC. Oblicz kosinusy kątów między ścianami bocznymi ostrosłupa.

7. Funkcja f dana jest wzorem
$$f(x) = p \cdot 5^x + (p+3) \cdot 5^{-x} - 4.$$
Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ równanie $f(x) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?

4. Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem
$$f(x) = x - |x| - 2^{|x|+x}.$$
Na podstawie tego wykresu podaj liczbę rozwiązań równania $3f(x+5) = m$ w zależności od parametru m.

6. Dla jakich wartości parametru p układ równań
$$\begin{cases} 4x + (p+3)y = p - 1 \\ (p-1)x + py = p - 2. \end{cases}$$
ma dokładnie jedno rozwiązanie spełniające nierówność $|x| + |y| \leqslant 4$?

6. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy długości $a = 2$ dm kąt między ścianami bocznymi ma miarę 135^o. Ostrosłup ten przecięto dwiema płaszczyznami równoległymi do postawy na trzy bryły o równych objętościach. Oblicz odległość między tymi płaszczyznami.

4. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, w którym $|AB| = 10$ cm, $|AC| = 8\,\text{cm}$ i miara kąta przy wierzchołku A jest równa 60^o.

6. W prawidłowym ostrosłupie czworokątnym krawędzie boczne są nachylone do podstawy pod kątem α. W ostrosłup wpisano półkulę o promieniu R tak, że jest ona styczna do ścian bocznych, a koło wielkie zawiera się w podstawie ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa.

7. Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x)$ jest równa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{-2-n} + 2^{1-2n}}{5^{2-n} + 2^{-1-2n}}.$$

Suma współczynników przy parzystych potęgach zmiennej x jest 3 razy większa niż suma współczynników przy potęgach nieparzystych. Znajdź reszty z dzielenia $W(x)$ przez dwumiany: a) $x - 1$, b) $x + 1$, c) $x^2 - 1$.

3. Funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^m-1}{x-1} & \text{dla} \quad x \neq 1 \\ a_m & \text{dla} \quad x = 1 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x = 1$. Wyznacz a_2, a_6 oraz a_m dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej m.

5. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem 60^o. Oblicz stosunek długości promienia kuli wpisanej w ten ostrosłup do jego wysokości.

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniających równanie

$$(x - 2y - 1)(x + 2y + 1) = 3.$$

6. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej m liczbę pierwiastków równania

$$\left|\frac{4x + 2}{x^2 + 2}\right| = m.$$

Naszkicuj wykres funkcji f.

7. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $a = 15\,\mathrm{cm}$, $b = 20\,\mathrm{cm}$ wpisany jest okrąg. Oblicz odległości od każdego wierzchołka trójkąta do punktu styczności okręgu z przeciwległym bokiem.

6. Dla jakich $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ liczby

$$\operatorname{tg} x, \quad 1, \quad \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n)? Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oblicz sumę $a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{2n}$.

5. Wykaż, że $(2n+2)$-cyfrowa liczba $\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n+1}5$ jest kwadratem liczby naturalnej (dla dowolnego n).

7. Rzucamy monetą n razy ($n \geq 2$). Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
A: reszka wypadła dokładnie k razy;
B: reszka wypadła więcej razy niż orzeł;
C: przynajmniej dwa razy pod rząd moneta upadła tą samą stroną.

3. W półokrąg o promieniu R wpisano trapez, w którym ramię jest nachylone pod kątem α do podstawy będącej średnicą okręgu. Oblicz pole trapezu.

4. Dwa różne automaty wykonują razem daną pracę w ciągu 6 godzin. Gdyby pierwszy automat pracował sam przez 2 godziny, a następnie drugi pracował sam przez 6 godzin, to wykonałyby połowę całej pracy. W jakim czasie każdy automat może samodzielnie wykonać całą pracę?

6. Dane są dwa punkty $A = (7,5), B = (1,-1)$ oraz punkt $P = (3,3)$ przecięcia wysokości trójkąta ABC. Oblicz pole trójkąta ABC i napisz równanie okręgu opisanego na nim.

2. Ile dzielników w zbiorze liczb naturalnych ma liczba $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$?

7. Zbadaj w zależności od parametru k wzajemne położenie prostych

$$l_1: \quad kx + y = 2, \qquad \text{oraz} \qquad l_2: \quad x + ky = k + 1.$$

Dla jakich k te proste przecinają się wewnątrz kwadratu, w którym punkty $A = (2,-2)$ i $C = (-2,2)$ są końcami przekątnej?

7. Znajdź równania stycznych do okręgu C o równaniu

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$

przechodzących przez punkt $P = (\frac{16}{3}, 2)$. Oblicz długość promienia okręgu stycznego do obydwu prostych i do okręgu C.

6. Oblicz pole trójkąta, mając dane dwie proste $4x + 5y + 17 = 0$ i $x - 3y = 0$, zawierające środkowe trójkąta, oraz jeden jego wierzchołek $A = (-1, -6)$.

4. Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$4\cos 2x \sin 2x + 1 = 0$$

należące do przedziału $(-\pi; \pi)$.

4. Wyznacz granicę ciągu

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[3]{n^6 + 5n^4} - n^2).$$

7. Liczby $1, 2, 3, \ldots, n$, gdzie $n \geq 3$, losowo ustawiamy w ciąg. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń
A : liczba n nie będzie ostatnim wyrazem tego ciągu;
B : liczby $1, 2, 3$ wystąpią obok siebie w kolejności wzrastania;
C : iloczyn każdej pary sąsiednich wyrazów tego ciągu jest liczbą parzystą.
Wyniki zapisz w najprostszej postaci.

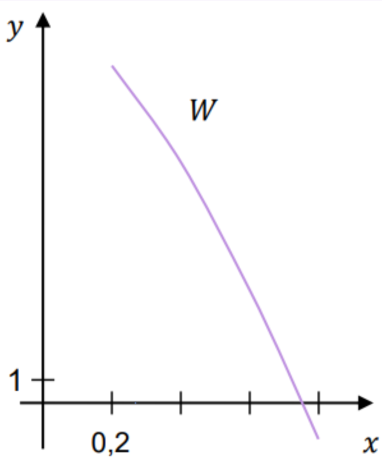
Zadanie 3. (0–3)

Na diagramie obok przedstawiono fragment wykresu wielomianu W określonego wzorem

$$W(x) = 4x^3 - 19x^2 - 12x + 18$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Oblicz wszystkie pierwiastki wielomianu W.



Zadanie 4. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{-3x + 41}{x - 13} \quad \text{dla } x \neq 13.$$

Punktem kratowym nazywamy punkt w układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

Zadanie 5. (0–3)

Wielomian W jest określony wzorem $W(x) = (x-1)(x^2 - mx + m - 1)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 6. (0–4)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = px^2 + (p-1)x + 1 - 2p$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

Zadanie 8. (0–2)

Oblicz granicę $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{6^n + 7^n}$.

Zadanie 21. (0–5)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDE$ punkt O jest środkiem symetrii podstawy ostrosłupa. Stosunek obwodu podstawy $ABCD$ do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy $1:5$. Przez przekątną AC podstawy i środek S krawędzi bocznej BE poprowadzono płaszczyznę.

Oblicz stosunek pola otrzymanego przekroju do pola podstawy ostrosłupa oraz miarę kąta BSO (w zaokrągleniu do $1°$).

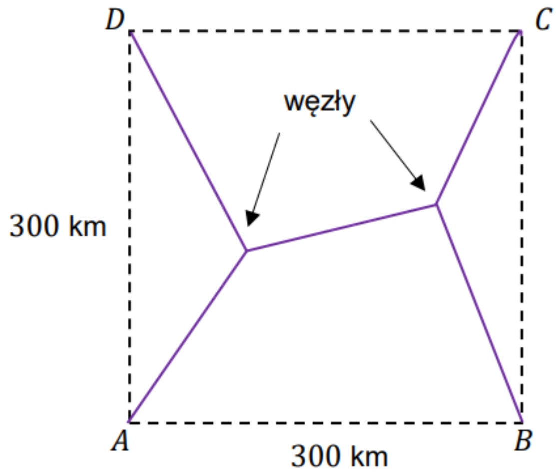
Zadanie 23. (0–4)

Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 38x + 22y - 96 = 0$. Wierzchołek A trapezu ma obie współrzędne ujemne, a odcinek AB jest dłuższą z podstaw tego trapezu. Przekątna AC trapezu $ABCD$ jest zawarta w prostej o równaniu $y = x$.

Oblicz sinus kąta ABC.

Zadanie 10. (0–6)

Cztery miasta A, B, C i D znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku 300 km. Pewna firma dostała zlecenie na zaprojektowanie sieci dróg, która będzie łączyć każde dwa z tych miast. Sieć ma posiadać dwa węzły, a łączna długość dróg w sieci ma być możliwie najmniejsza. (Przykład sieci dróg z dwoma węzłami, łączącej każde dwa z miast, przedstawiono na poniższym rysunku).



Oblicz, jaka musi być długość najkrótszej takiej sieci dróg i gdzie muszą być zlokalizowane węzły tej sieci.

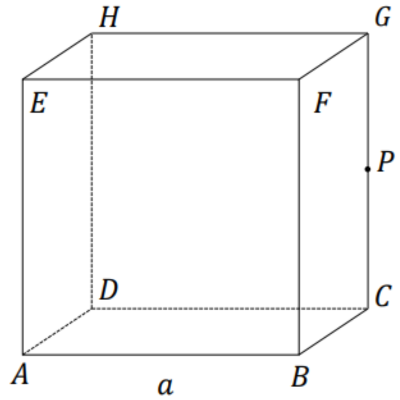
Zadanie 11. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2} + 4\log_{\frac{1}{2}} x$ dla wszystkich $x > 0$.

Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe, które należy do przedziału $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

Zadanie 25. (0–3)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a. Punkt P jest środkiem krawędzi CG tego sześcianu (zobacz rysunek poniżej).



$|PG| = |PC|$

Oblicz odległość wierzchołka C od płaszczyzny zawierającej punkty B, D oraz P.

Zadanie 27. (0–4)

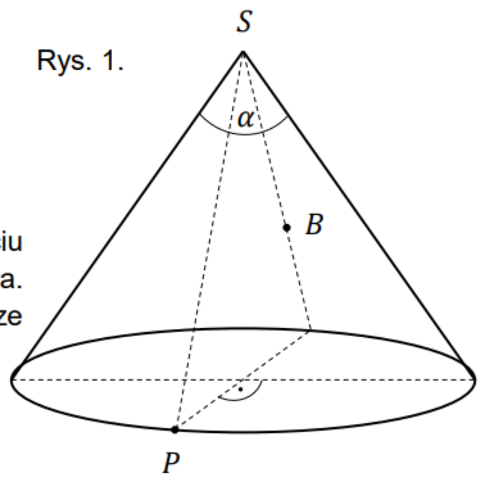
Tomek i Marek chcą wejść docelowo na szczyt S pewnej góry. W chwili początkowej znajdują się w punkcie P położonym na stoku góry dokładnie na północ od szczytu na wysokości H_0 metrów n.p.m. Tomek i Marek chcą dotrzeć do bazy B znajdującej się dokładnie na południe od szczytu na przeciwległym południowym stoku góry na wysokości H_1 metrów n.p.m., a następnie z bazy wejść na szczyt leżący na wysokości H_2 metrów n.p.m. (patrz rysunek 1.).

Oblicz długość najkrótszej drogi, jaką muszą pokonać, aby dotrzeć do bazy.

Przyjmij, że góra jest stożkiem o kącie rozwarcia α.

Wskazówka: Powierzchnia boczna stożka po rozcięciu wzdłuż tworzącej i rozłożeniu jest wycinkiem koła. Najkrótsza droga do bazy odpowiada najkrótszej drodze z punktu P do B na wycinku koła.

Rys. 1.



Zadanie 30. (0–3)

Pewna choroba dotyka $0,2\%$ całej populacji i w początkowym stadium nie daje widocznych objawów chorobowych. W ramach profilaktyki stosuje się pewien test przesiewowy, który daje wynik pozytywny lub negatywny. Prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie chorej da wynik pozytywny (oznaczający chorobę) jest równe $0,99$. Ponadto wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie zdrowej da wynik negatywny, jest równe $0,98$.

Pan X poddał się testowi, który dał wynik pozytywny. Pozytywny wynik oznacza podejrzenie choroby.