

16. Una taza de café recién hecha tiene 95°C de temperatura en una habitación a 20°C . Cuando la temperatura es de 70°C , se enfría en una proporción de 1°C por cada minuto. ¿Cuándo sucede esto?
17. La razón de cambio de la presión atmosférica P con respecto a la altitud h es proporcional a P , considere que la temperatura es constante. En 15°C la presión es 101.3 kPa al nivel del mar y 87.14 kPa en $h = 100$ m.
 (a) ¿Cuál es la presión en una altitud de 3 000 m?
 (b) ¿Cuál es la presión en la cima del monte McKinly, en una altitud de 6 187 m?
18. (a) Si se prestan 1 000 dólares al 8% de interés anual, calcular la cantidad que se debe al final de 3 años si el interés es compuesto. (i) anual, (ii) trimestral, (iii) mensual, (iv) semanal, (v) diario, (vi) por hora, y (vii) de manera continua.
 (b) Considere que se prestan 1 000 dólares y el interés es compuesto de manera continua. Si $A(t)$ es la cantidad que se debe en t años, donde $0 \leq t \leq 3$, grafique $A(t)$ para cada una de las tasas de interés anual 6%, 8% y 10% en una pantalla común.
19. (a) Si invierta 3 000 dólares al 5% de interés anual, calcule el valor de la inversión al final de 5 años si el interés es compuesto (i) anual, (ii) semestral, (iii) mensual, (iv) semanal, (v) por día, y (vi) de manera continua.
 (b) Si $A(t)$ es la cantidad de la inversión al tiempo t para el caso de composición combinada, escriba una ecuación diferencial y una condición inicial que satisfaga $A(t)$.
20. (a) ¿Cuánto transcurrirá para que una inversión se duplique en valor si la tasa de interés anual es de 6% compuesto de manera continua?
 (b) ¿Cuál es la tasa de interés anual equivalente?

3.9

RELACIONES AFINES

Si está inflando un globo, tanto su volumen como su radio se incrementan y sus proporciones de incremento están relacionadas entre sí. Pero es mucho más fácil medir de modo directo la proporción de aumento de volumen que la proporción de incremento del radio.

En un problema de relaciones afines, la idea es calcular la relación de cambio de una cantidad en términos de la relación de cambio de otra cantidad, la cual, además, se podría medir con más facilidad. El procedimiento es determinar una ecuación que relaciona las dos cantidades y aplicar la regla de la cadena para derivar ambos miembros con respecto al tiempo.

EJEMPLO 1 Se infla un globo esférico y su volumen se incrementa en una proporción de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?

■ De acuerdo con los principios de la resolución de problemas estudiados en la página 76, el primer paso es entender el problema. Ahí está incluida la lectura cuidadosa del problema, la identificación de los datos con que se cuenta y lo que se desconoce y la introducción de una notación conveniente.

SOLUCIÓN Empezé por identificar dos aspectos:

la información que se proporciona:

la proporción de incremento del volumen del aire es $100 \text{ cm}^3/\text{s}$

y lo que se desconoce:

la rapidez de incremento del radio cuando el diámetro es 50 cm

Con objeto de expresar estas cantidades en forma matemática, introduzca una *notación* sugerente:

Sea V el volumen del globo y r su radio.

La clave que hay que tener presente es que las razones de cambio son derivables. En este problema, tanto el volumen como el radio son funciones del tiempo t . La proporción de incremento del volumen con respecto al tiempo es la derivada dV/dt , y la rapidez del incremento del radio es dr/dt . Por lo tanto, replantee lo que conoce y lo que desconoce de la manera siguiente:

$$\text{Conocido: } \frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\text{Desconocido: } \frac{dr}{dt} \text{ cuando } r = 25 \text{ cm}$$

■ La segunda etapa de la resolución de problemas es pensar en un plan para relacionar la información conocida con la desconocida.

Con objeto de relacionar dV/dt y dr/dt , primero relacione V y r mediante la fórmula del volumen de una esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Para utilizar la información dada, derive con respecto a t a ambos miembros de la ecuación. Para derivar el lado derecho necesita aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Ahora resuelva para la cantidad desconocida:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dV}{dt}$$

■ Observe que aunque dV/dt es constante, dr/dt no lo es.

Si sustituye $r = 25$ y $dV/dt = 100$ en esta ecuación, obtiene

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2} 100 = \frac{1}{25\pi}$$

El radio del globo se incrementa en una proporción de $1/(25\pi) \approx 0.0127$ cm/s. □

EJEMPLO 2 Una escalera de 10 pies de largo está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared en una proporción de 1 pie/s, ¿qué tan rápido la parte superior de la escalera resbala hacia abajo por la pared cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?

SOLUCIÓN Primero dibuje un esquema y ponga los datos como se muestra en la figura 1. Sea x pies la distancia desde la parte inferior de la escalera al muro y y pies la distancia desde la parte superior de la escalera al piso. Observe que x y y son funciones del tiempo t (tiempo que se mide en segundos)

Sabe que $dx/dt = 1$ pie/s y se pide determinar dy/dt cuando $x = 6$ pies (véase figura 2). En este problema, la relación entre x y y la define el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Al derivar con respecto a t ambos miembros aplicando la regla de la cadena

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

y al resolver esta ecuación para determinar la relación deseada

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = 6$, el teorema de Pitágoras da $y = 8$ y al sustituir estos valores y $dx/dt = 1$, llega a

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(1) = -\frac{3}{4} \text{ pies/s}$$

El hecho de que dy/dt sea negativa quiere decir que la distancia desde la parte superior de la escalera al suelo *decrece* una proporción de $\frac{3}{4}$ pie/s. En otras palabras, la parte superior de la escalera se resbala hacia abajo de la pared una proporción de $\frac{3}{4}$ pie/s. □

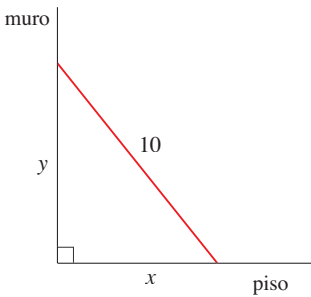


FIGURA 1

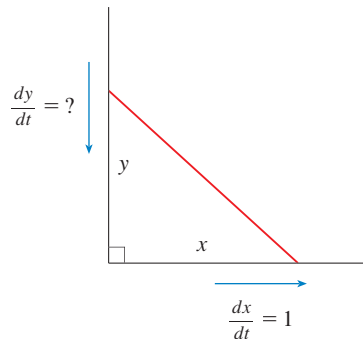


FIGURA 2

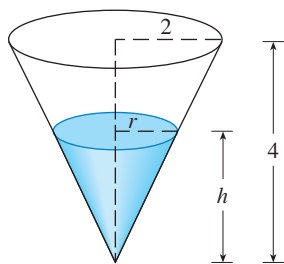


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Un depósito para agua tiene la forma de un cono circular invertido; el radio de la base es de 2 m y la altura es de 4 m. Si el agua se bombea hacia el depósito a una razón de $2 \text{ m}^3/\text{min}$, determine la rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3 m de profundidad.

SOLUCIÓN Primero elabore un diagrama del cono y anote la información como en la figura 3. Sean V , r y h el volumen del agua, el radio de la superficie circular y la altura en el tiempo t , donde t se mide en minutos.

Sabe que $dV/dt = 2 \text{ m}^3/\text{min}$ y se pide determinar dh/dt cuando h es 3 m. Las cantidades V y h se relacionan mediante la ecuación

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

pero es muy útil expresar V sólo en función de h . Con objeto de eliminar r , recurra a los triángulos semejantes en la figura 3 para escribir

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \quad r = \frac{h}{2}$$

y la expresión para V se vuelve

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{2} \right)^2 h = \frac{\pi}{12} h^3$$

Ahora puede derivar con respecto a t cada miembro:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}$$

de modo que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}$$

Al sustituir $h = 3 \text{ m}$ y $dV/dt = 2 \text{ m}^3/\text{min}$ obtiene

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2} \cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

El nivel del agua sube a razón de $8/(9\pi) \approx 0.28 \text{ m/min}$. □

■ **Reflexione.** ¿Qué ha aprendido de los ejemplos 1 a 3 que le ayude a resolver problemas futuros?

ADVERTENCIA: Un error común es la sustitución de la información numérica conocida (por cantidades que varían con el tiempo) muy pronto. La sustitución se efectúa sólo *después* de la derivación. (El paso 7 va después del paso 6.) Es decir, en el ejemplo 3 se tratan valores generales de h hasta que finalmente sustituye $h = 3$ en la última etapa. (Si hubiera sustituido $h = 3$ desde antes, habría obtenido $dV/dt = 0$, lo cual es evidentemente erróneo.)

ESTRATEGIA Es útil recordar algunos de los principios para resolver problemas que se encuentran en la página 76 y adaptarlos a las razones relacionadas luego de lo que aprendió en los ejemplos 1 a 3:

1. Lea con cuidado el problema.
2. Si es posible, dibuje un diagrama.
3. Introduzca la notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que están en función del tiempo.
4. Exprese la información dada y la relación requerida en términos de derivadas.
5. Escriba una ecuación que relacione las diferentes cantidades del problema. Si es necesario, aplique las propiedades geométricas de la situación para eliminar una de las variables por sustitución, como en el ejemplo 3.
6. Aplique la regla de la cadena para derivar con respecto a t ambos miembros de la ecuación.
7. Sustituya la información dada en la ecuación resultante y determine la proporción desconocida.

Los ejemplos siguientes son otras ilustraciones de la estrategia.

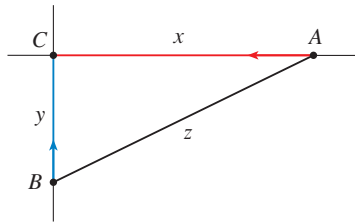


FIGURA 4

EJEMPLO 4 El automóvil A se dirige hacia el oeste a 50 millas/h y el vehículo B viaja hacia el norte a 60 millas/h. Ambos se dirigen hacia la intersección de los dos caminos. ¿Con que rapidez se aproximan los vehículos entre sí cuando el automóvil A está a 0.3 millas y el vehículo B está a 0.4 millas de la intersección?

SOLUCIÓN Dibuje la figura 4 donde C es la intersección de los caminos. En un tiempo dado t , sea x la distancia entre el automóvil A y C, sea y la distancia desde el automóvil B a C, y sea z la distancia entre los vehículos, donde x , y y z se miden en millas.

Sabe que $dx/dt = -50$ millas/h y $dy/dt = -60$ millas/h. Las derivadas son negativas porque x y y son decrecientes. Se pide calcular dz/dt . La ecuación que relaciona x , y y z la proporciona el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Al derivar ambos lados con respecto a t obtiene

$$\begin{aligned} 2z \frac{dz}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{z} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

Cuando $x = 0.3$ millas y $y = 0.4$ millas, el teorema de Pitágoras da $z = 0.5$ millas, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{0.5} [0.3(-50) + 0.4(-60)] \\ &= -78 \text{ millas/h} \end{aligned}$$

Los vehículos se aproximan entre sí a razón de 78 millas/h. □

EJEMPLO 5 Un hombre camina a lo largo de una trayectoria recta a una rapidez de 4 pies/s. Un faro está situado sobre el nivel de la tierra a 20 pies de la trayectoria y se mantiene enfocado hacia el hombre. ¿Con que rapidez el faro gira cuando el hombre está a 15 pies del punto sobre la trayectoria más cercana a la fuente de luz?

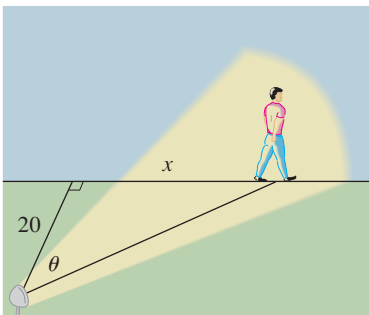


FIGURA 5

SOLUCIÓN Trace la figura 5 y haga que x sea la distancia desde el hombre hasta el punto sobre la trayectoria que esté más cercana al faro. Sea θ el ángulo entre el rayo desde el faro y la perpendicular a la trayectoria.

Sabe que $dx/dt = 4$ pies/s y se pide calcular $d\theta/dt$ cuando $x = 15$. La ecuación que relaciona x y θ se puede escribir a partir de la figura 5:

$$\frac{x}{20} = \tan \theta \quad x = 20 \tan \theta$$

Al derivar con respecto a t ambos miembros obtiene

$$\frac{dx}{dt} = 20 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

por lo que
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20} \cos^2 \theta \frac{dx}{dt} = \frac{1}{20} \cos^2 \theta (4) = \frac{1}{5} \cos^2 \theta$$

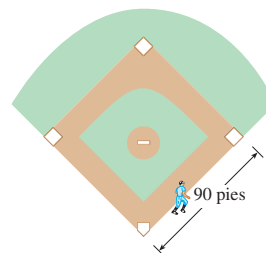
Cuando $x = 15$, la longitud del rayo es 25, por eso $\cos \theta = \frac{4}{5}$ y

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5} \right)^2 = \frac{16}{125} = 0.128$$

El faro gira con una rapidez de 0.128 rad/s. □

3.9 EJERCICIOS

1. Si V es el volumen de un cubo que mide por lado x y, además, el cubo se expande a medida que transcurre el tiempo, calcule dV/dt en términos de dx/dt .
2. (a) Si A es el área de un círculo cuyo radio es r y el círculo se amplía a medida que pasa el tiempo, determine dA/dt en términos de dr/dt .
(b) Suponga que el aceite se derrama de un depósito agrietado y que se extiende según un patrón circular. Si el radio del derrame de aceite se incrementa a una proporción constante de 1 m/s, ¿qué tan rápido se incrementa el área del derrame cuando el radio es de 30 m?
3. Cada lado de un cuadrado se incrementa a razón de 6 cm/s. ¿En qué proporción se incrementa el área del cuadrado cuando el área del cuadrado es de 16 cm²?
4. El largo de un rectángulo se incrementa a razón de 8 cm/s y el ancho en 3 cm/s. Cuando la longitud es 20 cm y el ancho es 10 cm, ¿qué tan rápido se incrementa el área del rectángulo?
5. Un tanque cilíndrico con 5 m de diámetro se está llenando con agua a razón de 3 cm³/min. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de agua?
6. El radio de una esfera se incrementa a razón de 4 mm/s. ¿Qué tan rápido se incrementa el volumen cuando el diámetro es de 80 mm?
7. Si $y = x^3 + 2x$ y $dx/dt = 5$, determine dy/dt cuando $x = 2$.
8. Si $x^2 + y^2 = 25$ y $dy/dt = 6$, determine dx/dt cuando $y = 4$.
9. Si $z^2 = x^2 + y^2$, $dx/dt = 2$, y $dy/dt = 3$, encuentre dz/dt cuando $x = 5$ y $y = 12$.
10. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $y = \sqrt{1 + x^3}$. Cuando alcanza el punto (2, 3), la coordenada y se incrementa a una rapidez de 4 cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la coordenada x del punto variable en ese instante?
11. Si V es el volumen de un cubo que mide por lado x y, además, el cubo se expande a medida que transcurre el tiempo, calcule dV/dt en términos de dx/dt .
12. Si una bola de nieve se funde de tal modo que el área superficial disminuye a razón de 1 cm²/min, calcule la rapidez a la cual disminuye el diámetro cuando éste es 10 cm.
13. Una lámpara está instalada en lo alto de un poste de 15 pies de altura. Un hombre de 6 pies de estatura se aleja caminando desde el poste con una rapidez de 5 pies/s a lo largo de una trayectoria rectilínea. ¿Qué tan rápido la punta de su sombra se desplaza cuando está a 40 pies del poste?
14. A mediodía, un barco A está a 150 km al oeste del barco B. El barco A navega hacia el este a 35 km/h y el barco B navega hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 4:00 PM?
15. Dos vehículos parten desde el mismo punto. Uno se dirige hacia el sur a 60 millas/h y el otro hacia el oeste a 25 millas/h. ¿En qué proporción se incrementa la distancia entre los vehículos dos horas después?
16. Una luminaria sobre el piso ilumina una pared a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de estatura camina desde la luminaria hacia el edificio a una rapidez de 1.6 m/s, ¿qué tan rápido disminuye la longitud de su sombra sobre el muro cuando está a 4 m del edificio?
17. Un hombre empieza a caminar hacia el norte a 4 pies/s desde el punto P . Cinco minutos más tarde, una mujer empieza a caminar hacia el sur a 5 pies/s desde un punto a 500 pies directo al este de P . ¿Con qué rapidez se están separando las personas 15 min después de que la mujer empezó a caminar?
18. Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 pies por lado. Un bateador golpea la pelota y corre hacia la primera base con una rapidez de 24 pies/s.
(a) ¿En qué proporción su distancia desde la segunda base decrece cuando está a medio camino de la primera base?
(b) ¿En qué proporción su distancia desde la tercera base se incrementa en el mismo momento?



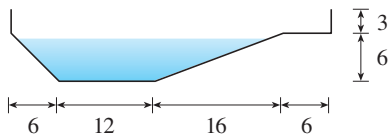
11-14

- (a) ¿Qué cantidades se proporcionan en el problema?
 - (b) ¿Qué se desconoce?
 - (c) Trace un diagrama de la situación en cualquier tiempo t .
 - (d) Plantee una ecuación que relacione las cantidades.
 - (e) Termine de resolver el problema.
11. Un avión que vuela horizontalmente a una altitud de 1 milla y a una rapidez de 500 millas/h pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la rapidez a la cual la distancia desde el

- 19.** La altitud de un triángulo se incrementa a razón de 1 cm/min mientras que el área del triángulo aumenta en una proporción de 2 cm²/min. ¿En qué proporción cambia la base del triángulo cuando la altitud es de 10 cm y el área es de 100 cm²?
- 20.** Una embarcación se jala hacia un muelle mediante una soga unida a la proa del bote y pasa por una polea que se encuentra instalada en el muelle a 1 m más arriba que la proa del bote. Si la soga se jala a una rapidez de 1 m/s, ¿qué tan rápido se aproxima al muelle cuando está a 8 m de éste?

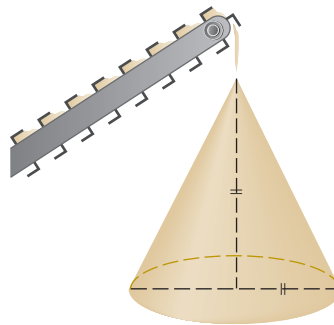


- 21.** A mediodía, el barco A está a 100 km al oeste del barco B. El barco A se dirige hacia el sur a 35 km/h y el barco B va hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido se modifica la distancia entre los barcos a las 4:00 PM?
- 22.** Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $y = \sqrt{x}$. Cuando pasa por el punto (4, 2), su coordenada x se incrementa en una proporción de 3 cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la distancia de la partícula al origen en ese instante?
- 23.** El agua sale de un depósito en forma de cono invertido a una relación de 10 000 cm³/min al mismo tiempo que se bombea agua al depósito a una proporción constante. El depósito mide 6 m de alto y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua se eleva a una relación de 20 cm/min cuando la altura del agua es de 2 m, calcule la proporción a la cual el agua está siendo bombeada hacia el tanque.
- 24.** Un canalón mide 10 pies de largo y sus extremos tienen la forma de un triángulo isósceles; el ancho del canalón es de 3 pies, lo que sería la base del triángulo, y la altura es de 1 pie. Si el canalón se llena con agua a razón de 12 pies cúbicos por minuto, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene una profundidad de 6 pulg?
- 25.** Un canal de agua mide 10 pies de largo y su sección transversal tiene la forma de un trapecio isósceles que tiene 30 cm de ancho en el fondo, 80 cm de ancho en la parte superior y mide 50 cm de alto. Si el canal se está llenando con agua a razón de 0.2 m³/min, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene 30 cm de profundidad?
- 26.** Una piscina mide 20 pies de ancho, 40 pies de largo y 3 pies en el extremo poco profundo, y tiene 9 pies de fondo en la parte más profunda. En la figura se ilustra una sección transversal de la piscina. Si ésta se llena a razón de 0.8 pies cúbicos/min, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando la altura del agua en el punto más profundo es de 5 pies?



- 27.** Se entrega grava por medio de una cinta transportadora a razón de 30 pies cúbicos por minuto; las dimensiones de sus fragmentos permiten formar una pila en forma de cono cuyo diámetro y

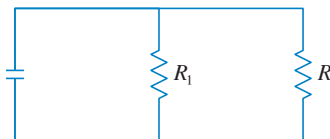
altura son siempre iguales. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de la pila cuando ésta mide 10 pies de alto?



- 28.** Un papalote que está a 100 pies por arriba de la superficie de la tierra se desplaza en forma horizontal a una rapidez de 8 pies/s. ¿En qué proporción disminuye el ángulo entre la cuerda y la horizontal cuando se han soltado 200 pies de cuerda?
- 29.** Dos lados de un triángulo miden 4 y 5 m, y el ángulo entre ellos se incrementa a razón de 0.06 rad/s. Calcule la proporción a la cual el área del triángulo se incrementa cuando el ángulo entre los lados de longitud constante es de $\pi/3$.
- 30.** ¿Con qué rapidez cambia el ángulo entre el muro y la escalera cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?
- 31.** La ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V cumplen la ecuación $PV = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es de 600 cm³, la presión es de 150 kPa y que la presión se incrementa una cantidad de 20 kPa/min. ¿En qué proporción disminuye el volumen en este instante?
- 32.** Cuando el aire se expande en forma adiabática, es decir, no gana ni pierde calor, su presión P y su volumen V se relacionan mediante la ecuación $PV^{1.4} = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es 400 cm³ y que la presión es 80 kPa y está disminuyendo en una cantidad de 10 kPa/min. ¿En qué proporción se incrementa el volumen en este instante?
- 33.** Si se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, como se ilustra en la figura, por lo tanto la resistencia total R , medida en ohms (Ω) es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

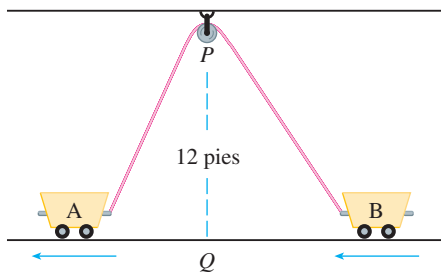
Si R_1 y R_2 se incrementan en proporción de 0.3 Ω /s y 0.2 Ω /s, respectivamente, ¿qué tan rápido cambia R cuando $R_1 = 80 \Omega$ y $R_2 = 100 \Omega$?



- 34.** El peso B del cerebro en función del peso del cuerpo W en los peces ha sido modelado mediante la función potencia $B = 0.007W^{2/3}$, donde B y W se dan en gramos. Un modelo

para el peso corporal en función de la longitud del cuerpo L en centímetros, es $W = 0.12L^{2.53}$. Si en 10 millones de años la longitud promedio de ciertas especies de peces evolucionaron desde 15 cm a 20 cm a una proporción constante, ¿qué tan rápido creció el cerebro de estas especies cuando la longitud promedio era de 18 cm?

35. Los lados de un triángulo tienen longitudes de 12 m y 15 m. El ángulo entre ellos se incrementa a razón de $2^\circ/\text{min}$. ¿Qué tan rápido se incrementa la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de 60° ?
36. Dos carros A y B están conectados por medio de una soga de 39 pies de longitud que pasa por una polea P (véase la figura). El punto O está en el suelo a 12 pies directamente abajo de P y entre los carros. El carro A es jalado a partir de O a una rapidez de 2 pies/s. ¿Qué tan rápido se mueve el carro B hacia O en el instante en que el carro A está a 5 pies de O ?



37. Se instala una cámara de televisión a 4000 pies de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. El ángulo de elevación de la cámara tiene que cambiar con la proporción correcta con el objeto de tener siempre a la vista al cohete. Asimismo, el mecanismo de enfoque de la cámara tiene que tomar en cuenta la distancia creciente de la cámara al cohete que se eleva. Suponga que el cohete se eleva verticalmente y que su rapidez es 600 pies/s cuando se ha elevado 3 000 pies.
- (a) ¿Qué tan rápido cambia la distancia de la cámara de televisión al cohete en ese momento?

(b) Si la cámara de televisión se mantiene dirigida hacia el cohete, ¿qué tan rápido cambia el ángulo de elevación de la cámara en ese momento?

38. Un faro se localiza en una pequeña isla a 3 km del punto más cercano P que se encuentra en una playa recta; la lámpara del faro da cuatro revoluciones por minuto. ¿Qué tan rápido se mueve el haz de luz a lo largo de la playa cuando está a 1 km de P ?
39. Un avión vuela horizontalmente en una altitud de 5 km y pasa directamente sobre un telescopio de seguimiento en la superficie de la tierra. Cuando el ángulo de elevación es $\pi/3$, este ángulo está disminuyendo en una proporción de $\pi/6$ rad/min. ¿En ese instante con qué rapidez está viajando el avión?
40. Una rueda de la fortuna de 10 m de radio está girando con una proporción de una revolución cada 2 minutos. ¿Qué tan rápido se está elevando un pasajero cuando su silla está a 16 m arriba del nivel de la superficie de la tierra?
41. Un avión que vuela con rapidez constante de 300 km/h pasa sobre una estación terrestre de radar a una altitud de 1 km y se eleva con un ángulo de 30° . ¿En qué proporción se incrementa la distancia del avión a la estación de radar un minuto más tarde?
42. Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 3 millas/h y la otra camina hacia el noreste a 2 millas/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las personas después de 15 minutos?
43. Un individuo corre por una pista circular de 100 m de radio a una rapidez constante de 7 m/s. Un amigo del corredor está parado a una distancia de 200 m del centro de la pista. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los amigos cuando la distancia entre ellos es de 200 m?
44. La manecilla de los minutos de un reloj mide 18 mm de largo y la manecilla de las horas mide 4 mm de largo. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las puntas de las manecillas cuando es la 1 de la tarde?

3.10 APROXIMACIONES LINEALES Y DIFERENCIALES

Ya vio que una curva se encuentra muy cerca de su recta tangente cerca del punto de tangencia. De hecho, al realizar un acercamiento hacia el punto en la gráfica de una función derivable, advirtió que la gráfica se parece cada vez más a su recta tangente. (Véase la figura 2 en la sección 2.7.) Esta observación es la base de un método para hallar valores aproximados de funciones.

La idea es que puede resultar fácil calcular un valor $f(a)$ de una función, pero difícil (si no es que imposible) calcular valores cercanos de f . Por lo tanto, recurra a los valores calculados fácilmente de la función lineal L cuya gráfica es la recta tangente de f en $(a, f(a))$. (Véase la figura 1.)

En otras palabras, use la recta tangente en $(a, f(a))$ como una aproximación a la curva $y = f(x)$ cuando x está cerca de a . Una ecuación para la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

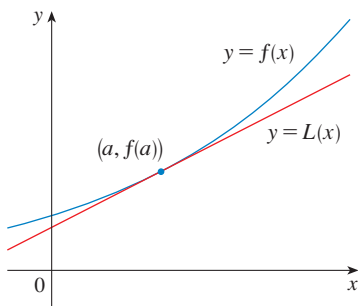
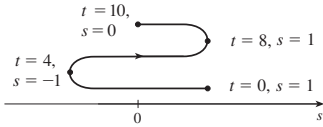


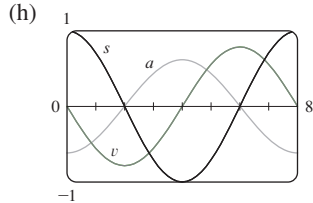
FIGURA 1

1

3. (a) $-\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ (b) $-\frac{1}{8}\pi\sqrt{2}$ pies/s (c) $t = 0, 4, 8$
 (d) $4 < t < 8$ (e) 4 pies
 (f)



- (g) $-\frac{1}{16}\pi^2 \cos(\pi t/4); \frac{1}{2}\pi^2\sqrt{2}$ pies/s²

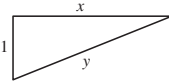


- (i) Acelera cuando $0 < t < 2$, $4 < t < 6$
 desacelera cuando $2 < t < 4$, $6 < t < 8$
 5. (a) Acelera cuando $0 < t < 1$ o $2 < t < 3$;
 desacelera cuando $1 < t < 2$
 (b) Acelera cuando $1 < t < 2$ o $3 < t < 4$;
 desacelera cuando $0 < t < 1$ o $2 < t < 3$
 7. $t = 4$ s
 (b) $t = 1.5$ s; la velocidad tiene un mínimo absoluto
 9. (a) 5.02 m/s (b) $\sqrt{17}$ m/s
 11. (a) 30 mm²/mm; la rapidez a la que el área crece con respecto a la longitud de un lado cuando x llega a 15 mm
 (b) $\Delta A \approx 2x \Delta x$
 13. (a) (i) 5π (ii) 4.5π (iii) 4.1π
 (b) 4π (c) $\Delta A \approx 2\pi x \Delta x$
 15. (a) 8π pies²/pies (b) 16π pies²/pies (c) 24π pies²/pies
 La rapidez aumenta cuando aumenta el radio.
 17. (a) 6 kg/m (b) 12kg/m (c) 18kg/m
 En el extremo derecho; en el extremo izquierdo
 19. (a) 4.75 A (b) 5 A; $t = \frac{2}{3}$ s
 21. (a) $dV/dP = -C/P^2$ (b) Al principio
 23. $400(3') \ln 3; \approx 6\,850$ bacterias/h
 25. (a) 16 millones/año; 78.5 millones/año
 (a) $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, donde $a \approx 0.00129371$,
 $b \approx -7.061422$, $c \approx 12\,822\,979$, $d \approx -7\,743\,770$
 (c) $P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$
 (d) 14.48 millones/año; 75.29 millones/año (menor)
 (e) 81.62 millones/año
 27. (a) 0.926 cm/s; 0.694 cm/s; 0
 (b) 0; -92.6 (cm/s)/cm; -185.2 (cm/s)/cm
 (c) En el centro; en el borde
 29. (a) $C'(x) = 12 - 0.2x + 0.0015x^2$
 (b) \$32/yarda; el costo de producir la 201ava yarda
 (c) \$32.20
 31. (a) $[xp'(x) - p(x)]/x^2$; el promedio de productividad aumenta cuando se suman nuevos trabajadores
 33. -0.2436 K/min
 35. (a) 0 y 0 (b) C = 0
 (c) (0, 0), (500, 50); es posible para que coexistan las especies.

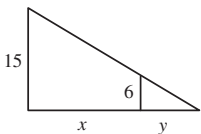
EJERCICIOS 3.8 ■ PÁGINA 239

1. Alrededor de 235
 3. (a) $100(4.2)'$ (b) $\approx 7\,409$ (c) $\approx 10,632$ bacterias/h
 (d) $(\ln 100)/(\ln 4.2) \approx 3.2$ h
 5. (a) 1 508 millones, 1 871 millones (b) 2 161 millones
 (c) 3 972 millones; guerras en la primera mitad del siglo, mayor esperanza de vida en la segunda mitad
 7. (a) $Ce^{-0.0005t}$ (b) $-2\,000 \ln 0.9 \approx 211$ s
 9. (a) $100 \times 2^{-t/30}$ mg (b) ≈ 9.92 mg (c) ≈ 199.3 años
 11. $\approx 2\,500$ años 13. (a) $\approx 137^\circ\text{F}$ (b) ≈ 116 min
 15. (a) 13.3°C (b) ≈ 67.74 min
 17. (a) ≈ 64.5 kPa (b) ≈ 39.9 kPa
 19. (a) (i) \$3 828.84 (ii) \$3 840.25 (iii) \$3 850.08
 (iv) \$3 851.61 (v) \$3 852.01 (vi) \$3 852.08
 (b) $dA/dt = 0.05A$, $A(0) = 3\,000$

EJERCICIOS 3.9 ■ PÁGINA 245

1. $dV/dt = 3x^2 dx/dt$ 3. 48 cm²/s 5. $3/(25\pi)$ m/min
 7. 70 9. $\pm \frac{46}{13}$
 11. (a) La altitud del avión es 1 milla y su velocidad es 500 mi/h.
 (b) La rapidez a la que está creciendo la distancia del avión a la estación cuando el avión está a 2 millas de la estación.
 (c)  (d) $y^2 = x^2 + 1$
 (e) $250\sqrt{3}$ mi/h

13. (a) La altura del poste (15 pies), la estatura del hombre (6 pies), y la rapidez del hombre (5 pies/s)
 (b) La rapidez a la que se mueve la punta de la sombra del hombre cuando él está a 40 pies del poste

- (c)  (d) $\frac{15}{6} = \frac{x+y}{y}$ (e) $\frac{25}{3}$ pies/s

15. 65 mi/h 17. $837/\sqrt{8\,674} \approx 8.99$ pies/s
 19. -1.6 cm/min 21. $\frac{720}{13} \approx 55.4$ km/h
 23. $(10,000 + 800,000\pi/9) \approx 2.89 \times 10^5$ cm³/min
 25. $\frac{10}{3}$ cm/min 27. $6/(5\pi) \approx 0.38$ pies/min 29. 0.3 m²/s
 31. 80 cm³/min 33. $\frac{107}{810} \approx 0.132$ Ω/s 35. 0.396 m/min
 37. (a) 360 pies/s (b) 0.096 rad/s 39. $\frac{10}{9}\pi$ km/min
 41. $1\,650/\sqrt{31} \approx 296$ km/h 43. $\frac{7}{4}\sqrt{5} \approx 6.78$ m/s

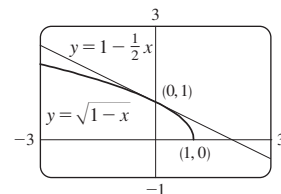
EJERCICIOS 3.10 ■ PÁGINA 252

1. $L(x) = -10x - 6$ 3. $L(x) = -x + \pi/2$

5. $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$;

$$\sqrt{0.9} \approx 0.95,$$

$$\sqrt{0.99} \approx 0.995$$



7. $-1.204 < x < 0.706$ 9. $-0.045 < x < 0.055$

11. (a) $dy = 2x(x \cos 2x + \sin 2x) dx$ (b) $dy = \frac{t}{1+t^2} dt$