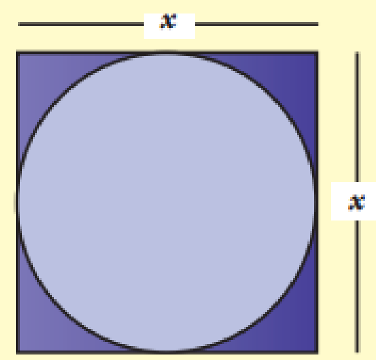
Resolución de desigualdades Cuadráticas o Racionales

¿Crees que podemos calcular, a cuánto equivale el área sombreada respecto del área del cuadrado en la figura? Comienza por algo que para ti es evidente: El área del cuadrado es mayor que el área del círculo.

Esto se expresa: $x^2 > \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}x^2$

¿Estás de acuerdo?



Desigualdades cuadráticas en una variable

¿Qué puedes decir de la desigualdad $x^2 > \frac{\pi}{4}x^2$?

De la desigualdad $x^2 > \frac{\pi}{4}x^2$, puedes concluir que si se multiplica el área del cuadrado por $\frac{\pi}{4}$, obtienes el área del círculo inscrito. Por lo tanto si haces la resta $x^2 - \frac{\pi}{4}x^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)x^2 > 0$, concluyes que al multiplicar el área del cuadrado por $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ se obtiene el área azul.

Si $x = 5$ entonces $x^2 = 25$; de manera que $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)(25)$ es aproximadamente $0.2146\,(25) = 5.365$.

Si se multiplica el área de cualquier cuadrado por 0.2146 se obtine el área que está afuera del círculo y que pertenece al área del cuadrado.

Notarás que el resultado que obtienes está fuertemente apoyado en una desigualdad cuya variable está elevada al cuadrado. Este tipo de desigualdad son las que desarrollarás en esta lección: son llamadas desigualdades cuadráticas en una variable. Como por ejemplo las siguientes: (recuerda que $x \in R$)

a) $x^2 - 8 \geq 0$

b) $2x^2 + 6x < 0$

c) $(x + 5)(x - 2) \leq 0$

d) $3x^2 + 13x + 4 >$

Resolver una desigualdad cuadrática significa hallar su conjunto solución. Se emplean las mismas propiedades de orden que utilizas en las desigualdades lineales.

Observa lo siguiente:

Para $x = 3,\ x^2 = 3^2 = 9 \geq 0$

Para $x = -4,\ x^2 = (-4)^2 = 16 \geq 0$

Para $x = 0,\ x^2 = (0)^2 = 0 \geq 0$

Cualquier número real elevado al cuadrado es mayor o igual a cero.

En general se tiene la siguiente propiedad.

Si $x \in R$ entonces $x^2 \in R$ y $x^2 \geq 0$

Ejemplo 1

Utiliza la propiedad anterior para encontrar el conjunto solución de las siguientes desigualdades.

a) $(x+1)^2 \geq 0$ **b)** $(x-2)^2 > 0$ **c)** $x^2 \leq 1$

Solución:

a) Si x es un número real, entonces $(x + 1)$ también lo es; por lo tanto $(x + 1)^2 \geq 0$. El conjunto que satisface la desigualdad son todos los números reales: $S = R$

b) Es el mismo caso que en el literal "**a)**", la única diferencia es que la desigualdad es estricta, por lo que si x es igual a 2, la desigualdad no se satisface:

$(2-2)^2 > 0$, es falsa; la solución es entonces $S = R - \{2\}$

c) $x^2 \leq 1$, es igual a expresar que x^2 es un número entero entre cero y uno: $0 \leq x^2 \leq 1$. Verifica valores para x en el intervalo anterior. Te darás cuenta que solo cumplen la desigualdad valores de x en el intervalo $[-1, 1]$. La solución es $S = [-1, 1]$

Solución de desigualdades cuadráticas

La forma general de una desigualdad cuadrática en una variable x, se expresa donde a, b y c son números reales con (las otras relaciones de orden: también se emplean).

La desigualdad $x^2 + 3x - 10 \geq 0$, es un ejemplo en donde $a = 1$, $b = 3$ y $c = -10$. Si falta alguna de los coeficientes b ó c se les llama desigualdades incompletas: $ax^2 + c \geq 0$ y $ax^2 + bx \geq 0$

Estas desigualdades se pueden abordar empleando un método de factorización, y las leyes de los signos:

- Si $AB > 0$ Entonces $A > 0$ y $B > 0$, ó bien, $A < 0$ y $B < 0$.
- Si $AB < 0$ Entonces $A > 0$ y $B < 0$, ó bien, $A < 0$ y $B > 0$.

Ejemplo 2

Encuentra al conjunto solución de las desigualdades siguientes:

a) $x^2 - 4 \leq 0$ **b)** $2x^2 + 6x > 0$

Solución:

a) $x^2 - 4 \leq 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) \leq 0$ Aplicando leyes de los signos tienes:

Caso 1: $(x-2) \geq 0$ y $(x + 2) \leq 0 \rightarrow (x \geq 2)$ y $(x \leq -2)$ no existe solución en este primer caso ya que no hay números reales que cumplen al mismo tiempo ser mayores o iguales que 2 y menores o iguales que -2. $S_1 = \Phi$

Caso 2: $(x - 2) \leq 0$ y $(x + 2) \geq 0 \rightarrow (x \leq 2)$ y $(x \geq -2)$ los números: $-2 \leq x \geq 2$ cumplen las desigualdades por lo tanto $S_2 = [-2, 2]$.

La solución es la unión de S_1 con S_2.

$S = \Phi \cup [-2, 2] = [-2, 2]$ (Nota: que es el mismo ejercicio de la actividad 1)

b) $2x^2 + 6x > 0 \rightarrow 2x(x + 3) > 0$ $x(x + 3) > 0$ (dividiendo entre 2)

Caso 1: $x > 0$ y $x + 3 > 0 \rightarrow x > 0$ y $x > -3$ El conjunto $S_1 =]0, +\infty[$ cumple con las desigualdades lineales.

Caso 2: $x < 0$ y $x + 3 < 0 \rightarrow x < 0$ y $x < -3$ el conjunto $S_2 =]-\infty, -3[$ cumple los requisitos; la solución total es $S =]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$ que también se puede escribir $S = R - [-3, 0]$. Solo los números que están entre $[-3, 0]$ no satisfacen la desigualdad.

Un método que de seguro te parecerá más práctico y con el que te sentirás más a gusto es el que se conoce como: Método del cuadro de variación. Requiere sin embargo que tú recuerdes un poco el factoreo y por supuesto que sigas aplicando las leyes de los signos.

A continuación unos ejemplos:

Ejemplo 3

Halla la solución de la desigualdad $3x^2 + 13x + 4 \leq 0$

1° Paso: factoriza el lado izquierdo.

$3x^2 + 13x + 4 \leq 0$

$(3x)^2 + 13(3x) + 12 \leq 0$ (multiplicando por 3)

$(3x + \quad)(3x + \quad) \leq 0$ $\left(\begin{array}{l}\text{dos números que sumados den } 13 \\ \text{y multiplicados den } 12\end{array}\right)$

$(3x + 12)(3x + 1) \leq 0$

$3(x + 4)(3x + 1) \leq 0$ (factor común 3)

$(x + 4)(3x + 1) \leq 0$ (dividiendo entre 3)

2° Paso: Plantea la igualdad $(x + 4)(3x + 1) = 0$, y halla las "raíces". (Raíces: valor de x, que hacen cero la ecuación). Ellas son:

$x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$

$3x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$

raíces: $\left\{-4, -\frac{1}{3}\right\}$

3° Paso: Representación de las raices en la recta real, para observar los tres intervalos que se forman.

4° Paso: Organiza un cuadro como el siguiente, que define tres intervalos.

$-\infty$ $\quad -5 \quad$ -4 $\quad -3 \quad$ $-\frac{1}{3}$ $\quad 1 \quad$ $+\infty$

$(x+4)$	−	0 +	+
$(3x+1)$	−	− 0	+
$(x+4)(3x+1)$	+	−	+

Se escribe cero en el lugar donde se ubica la raíz. En cada intervalo se marca el signo que toma la expresión algebraica respectiva que está escrita en la parte izquierda al evaluarla en un número que pertenece a cada intervalo(como los encerrados en círculos). El producto de los signos de las expresiones algebraicas en su respectivo intervalo se ubica en la última fila.

El producto $(x+4)(3x+1)$ es menor o igual que cero únicamente en el intervalo por $\left[-4, -\frac{1}{3}\right]$ lo tanto la solución de $3x^2 + 13x + 4 \leq 0$ es $\left[-4, -\frac{1}{3}\right]$

Si en la expresión $(x+4)(3x+1)$ sustituyes:

$x = -5$, se tiene $(-5 + 4)(3(-5) + 1) = (-1)(-14) > 0$; no cumple

$x = 1$, se tiene $(1 + 4)(3(1) + 1) = (5)(4) = 20 > 0$; no cumple

$x = -3$, se tiene $(-3 + 4)(3(-3) + 1) = (1)(-8) < 0$; si cumple

$x = -\frac{2}{3}$, se tiene $\left(-\frac{2}{3} + 4\right)\left(3\left(-\frac{2}{3}\right) + 1\right) = \left(\frac{10}{3}\right)(-1) = -\frac{10}{3} < 0$; si cumple

Actividad 2

Utiliza el cuadro de variación para resolver la siguiente desigualdad: $x^2 + 4x - 21 \geq 0$

a) Factoriza: $(x + \quad)(x - \quad) \geq 0$

b) Halla las raíces y escríbelas en el cuadro donde corresponda, escribiendo cero donde se ubica la raíz.

c) Completa el cuadro.

	$-\infty$		$+\infty$
$(x+\quad)$			
$(x-\quad)$			
$(x+\quad)(x-\quad)$			

d) Especifica la solución.

Otras desigualdades no lineales

Algunas desigualdades tales como $x^3 > 4x$, $x^4 - x > 0$ son llamadas desigualdades polinomiales no cuadráticas.

Otras como $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 0$, ó $\dfrac{x+4}{x-2} \leq 1$, se llaman desigualdades racionales.

La técnica del cuadro de variación es igualmente útil para resolver este tipo de desigualdades.

Ejemplo 4

Resuelve la siguiente desigualdad aplicando el método del cuadro de variación $x^3 > 4x$.

Solución:

Factoriza el lado izquierdo $x^3 - 4x > 0 \rightarrow x(x^2 - 4) > 0$ factor común x.

$x(x-2)(x+2) > 0$ (Diferencia de cuadrados). Plantea la ecuación para hallar las raíces $x(x-2)(x+2) > 0$; los valores que hacen cero la ecuación: $x = 0$, $x = -2$, $x = +2$. Elabora el cuadro.

	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x(x-2)(x+2)$	$-$		$+$		$-$		$+$

La solución viene dada por la unión de todos aquellos intervalos, cuyo producto de signos es positivo. $S = \left]-2, 0\right[\cup \left]2, +\infty\right[$ no incluye los límites de los intervalos porque la desigualdad es estricta.

Ejemplo 5

Resuelve la siguiente inecuación racional: $\dfrac{2x+4}{x-2} \leq 1$

Solución:

Es muy bueno observar desde ya, que $x = 2$ no puede formar parte del conjunto solución, debido a que produce una división por cero y la división por cero no está definida en el conjunto de los números reales. Para iniciar la factorización realiza;

$\dfrac{2x+4}{x-2} - 1 \leq 0$ El lado izquierdo debe quedar como una expresión racional y en el lado derecho solo debe aparecer el cero. $\dfrac{(2x+4)-(x-2)}{x-2} \leq 0$; suma de fracciones. $\dfrac{x+6}{x-2} \leq 0$; simplificando términos semejantes.

Se consideran raíces los números que hacen cero, el numerador y el denominador: $x = -6$ y $x = 2$. El análisis del cuadro requiere que tú recuerdes las "leyes de los signos para la división":

	$-\infty$ — -6	-6 — 2	2 — $+\infty$
$(x+6)$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x+6}{x-2}$	$+$	$-$	$+$

Punto de apoyo

$$\left(\frac{+}{+}=+\right);\ \left(\frac{-}{-}=+\right);\quad \left(\frac{+}{-}=-\right);\ \left(\frac{-}{+}=-\right)$$

La solución está dada por el intervalo cuya división de signos es negativa.
$S = [\,-6, 2\,[$ ¿Por qué no se incluye el número 2 ?

Resumen

En esta lección has aprendido a resolver desigualdades cuadráticas empleando, fundamentalmente, el cuadro de variación. Para su correcta aplicación debes seguir los pasos que se te han sugerido:

Factoriza → Halla las raíces → Elabora el cuadro → Emplea las leyes de los signos → Identifica la solución

Has analizado también algunas desigualdades polinomiales (de grado mayor que 2) y las desigualdades racionales; concluyendo que el método del cuadro de variación es igualmente aplicable.

Práctica de Habilidades

REUELVE LAS SIGUIENTES DESIGULADADES

NIVEL BÁSICO

1. $x^2 - 3x + 54 < 0$
2. $x^2 + 13x - 14 > 0$
3. $m^2 + 16m - 192 \le 0$
4. $9 + 18y - 16y^2 < 0$
5. $4x^2 + 8x - 12 \ge 0$
6. $-x^2 - x + 2 > 0$
7. $22x^2 - 7x - 2 \ge 0$
8. $6x^2 - 73x + 12 < 0$
9. $200c^2 + 80c + 8 \ge 0$
   $x\,(x-7) > 8$
10. $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 \le 0$
11. $x < x^2 + 2x + 1$
12. $\left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{3} + 1\right) > 0$
13. $\left(\frac{2x}{x-5}\right)^2 + 2\left(\frac{2x}{x-5}\right) - 3 \le 0$

MATEMÁTICA: CIENCIA DE DESCUBRIMIENTO

Thomas Harriot

Thomas Harriot. (Oxford, 1560 – Londres, 2 de julio de 1621) fue un astrónomo, matemático, etnógrafo y traductor inglés. Fue el creador de varios símbolos y notaciones empleados en álgebra usados hasta ahora, como los símbolos > (mayor que) y < (menor que) Qué te parece si le pones pensamiento a lo siguiente: ¿Las potencias conservan el orden?
¿Si a < b, es $a^2 < b^2$? ¿Si a < b, es $a^3 < b^3$? Verifica con números, tanto positivos como negativos y trata de ver si es posible ir generando una regla de comportamiento. ¿Si a < b, es $a^n < b^n$? Es un reto. Pero tú puedes descubrir y analizar.