Tarea 4.

Problema 1: $mL^2\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} - mgL\sin\theta + Tin$

a. Teniendo en cuenta que:

$x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $y = \theta$, $u = Tin$

$\dot{x}_1 = \dot{\theta}$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{mL^2}(-b\dot{\theta} - mgL\sin\theta + Tin)$

Reemplazando se obtiene:

- $\dot{x}_1 = x_2$
- $\dot{x}_2 = \frac{-b}{mL^2}x_2 - \frac{g}{L}\sin x_1 + \frac{1}{mL^2}u$

b. Como el modelo no se encuentra linealizado, se procede a linealizarlo:

$\dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_2 = 0$

$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow \frac{-b}{mL^2}x_2 - \frac{g}{L}\sin x_1 + \frac{1}{mL^2}u$

Como $x_2 = 0$, $u = 0$, se obtiene:

$0 = -\frac{g}{L}\sin x_1$

$\sin x_1 = 0 \rightarrow x^* = 0$

Por lo tanto $X_1^* = 0$, $X_2^* = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x_1) & -\frac{b}{mL^2} \end{bmatrix}_*$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{b}{mL^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}$$

Dado que $y = \theta$, $\rightarrow$ $y = X_1$, por lo tanto en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}$$

Finalmente las matrices A, B, C, D y el modelo linealizado quedan de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & \frac{-b}{mL^2} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}}_{B} [u]$$

$$[y] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} u$$

C. Función de transferencia:

Partimos de que

$$(SI - A) = \begin{bmatrix} S & -1 \\ -\frac{g}{L} & S + \frac{b}{mL^2} \end{bmatrix}$$

Para obtener $(SI-A)^{-1}$, se utilizo un script en matlab de donde se obtuvo:

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{msL^2+b}{mL^2s^2-gmL+bs} & \dfrac{L^2m}{mL^2s^2-gmL+bs} \\[2ex] \dfrac{gLm}{mL^2s^2-gmL+bs} & \dfrac{L^2ms}{mL^2s^2-gmL+bs} \end{bmatrix}$$

Así que finalmente para obtener la función de transferencia se efectua la siguiente operación

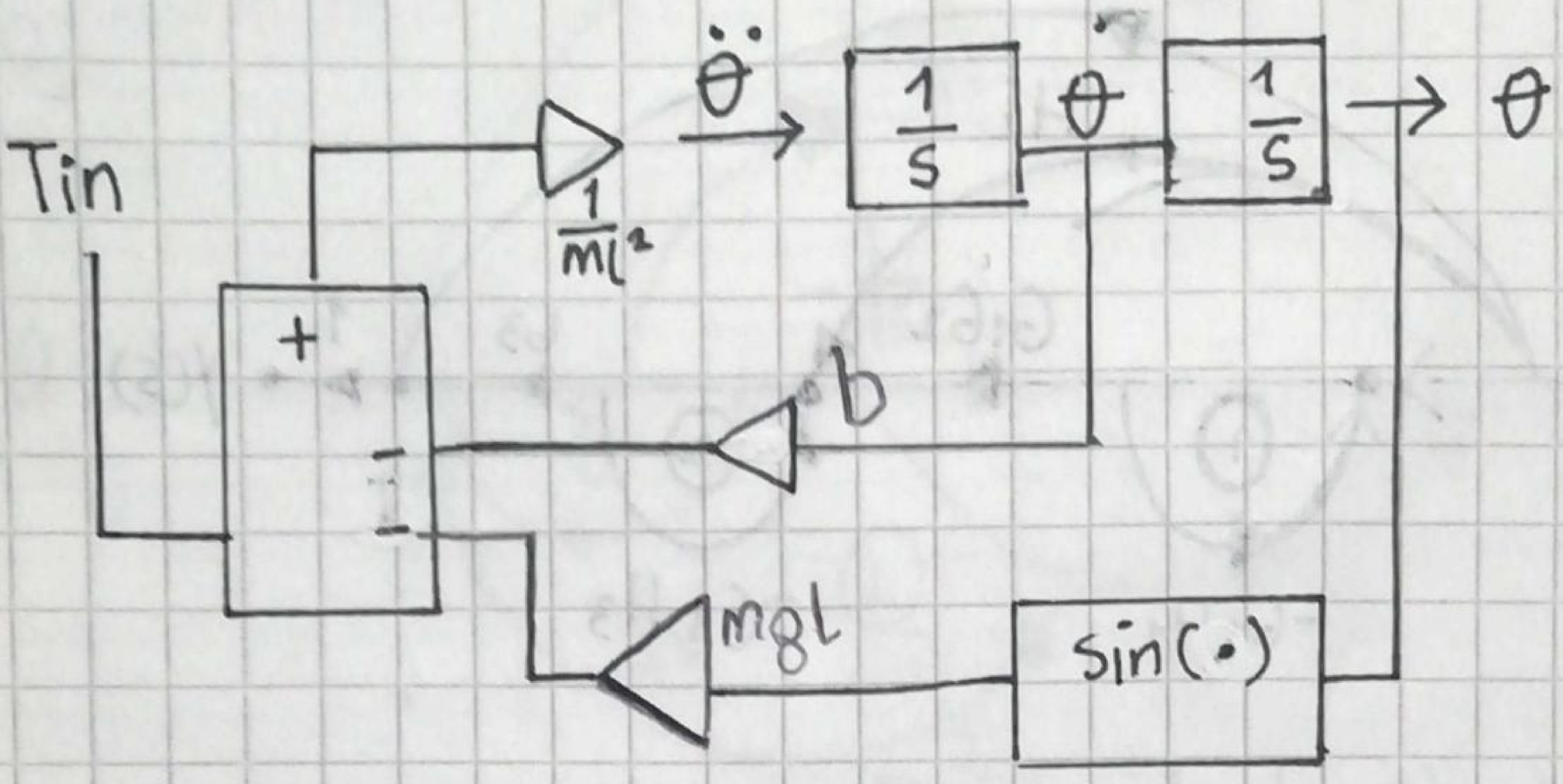
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C\,(sI-A)^{-1}B$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{mL^2s^2-gmL+bs}$$

d. El diagrama de bloques para el modelo

$$mL^2\dot{\theta} = -b\dot{\theta} - mgL\sin\theta + T_{in}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{mL^2}\left(-b\dot{\theta} - mgL\sin\theta + T_{in}\right)$$

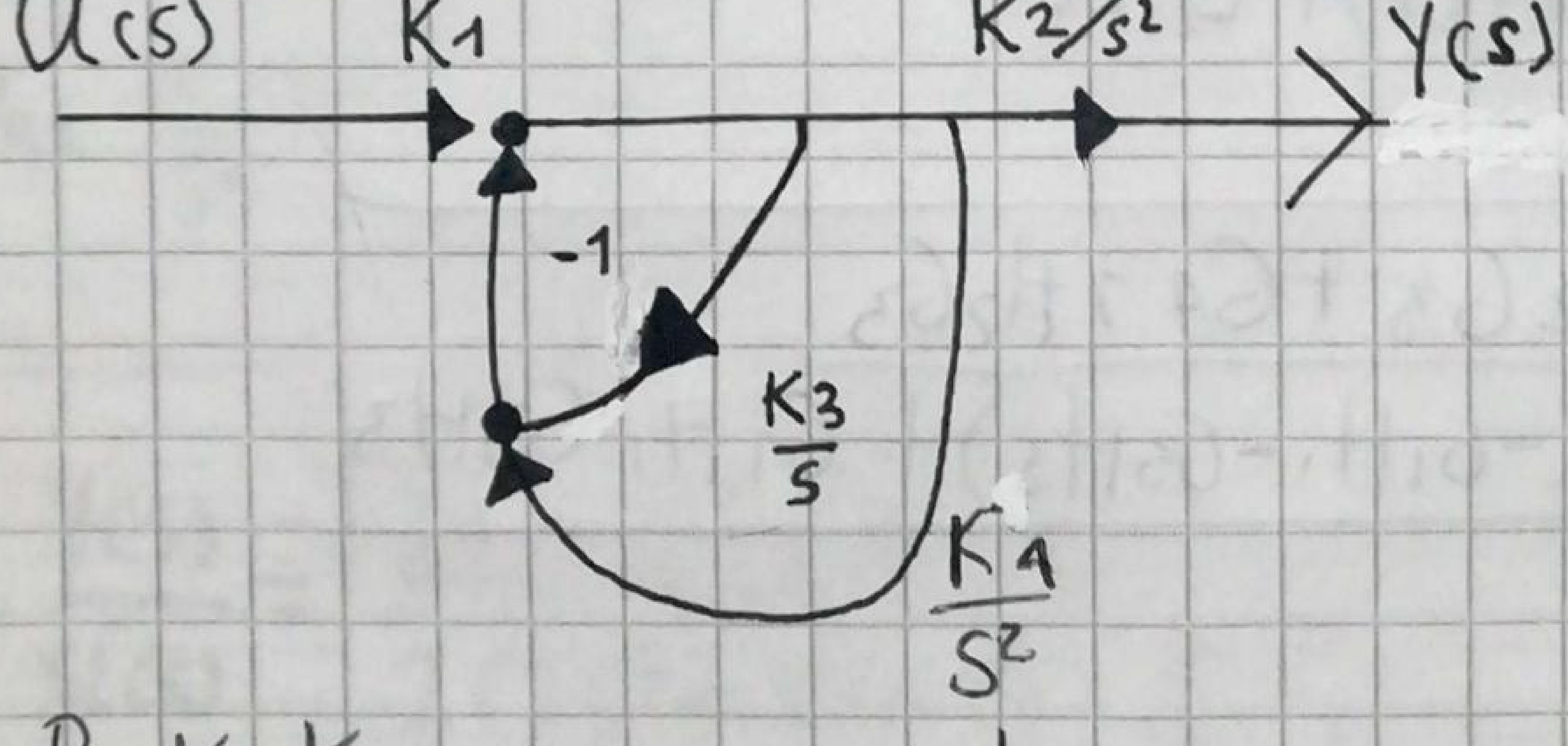


Problema 2:

Para obtener la función de transferencia de los diagramas se utilizo la formula de mason.

$$P = \frac{1}{\Delta}\sum P_k \Delta_k \quad \Big| \quad \Delta = 1 - \sum L_n + \sum_{m,q} L_m L_q$$

a.)



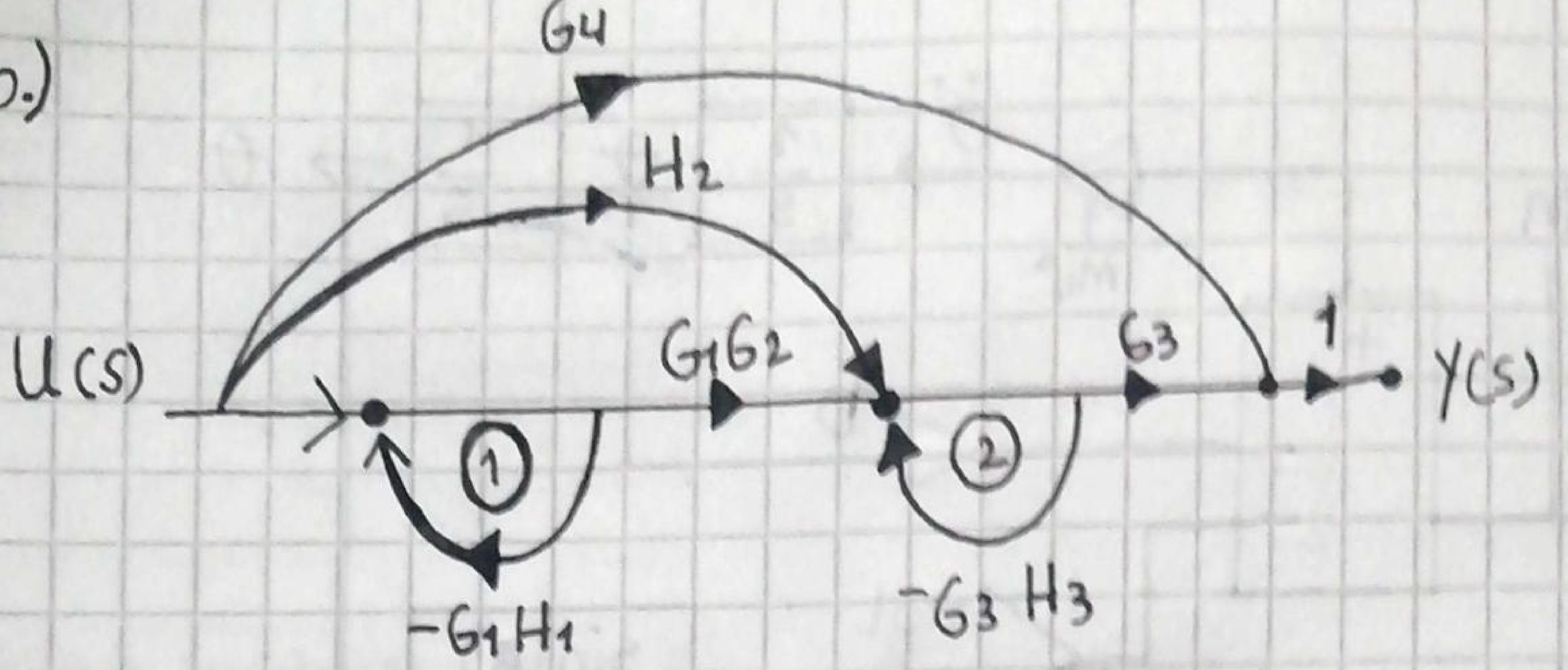
$P = \frac{K_1 K_2}{s^2}$

$L_1 = -\frac{K_3}{s}$ $\quad L_2 = -\frac{K_4}{s^2}$

$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P}{1-(L_1+L_2)}$

$$\boxed{G(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2 + K_3 s - K_4}}$$

b.)



$P_1 = G_1 G_2 G_3$

$P_2 = G_4$

$P_3 = H_2 G_3$

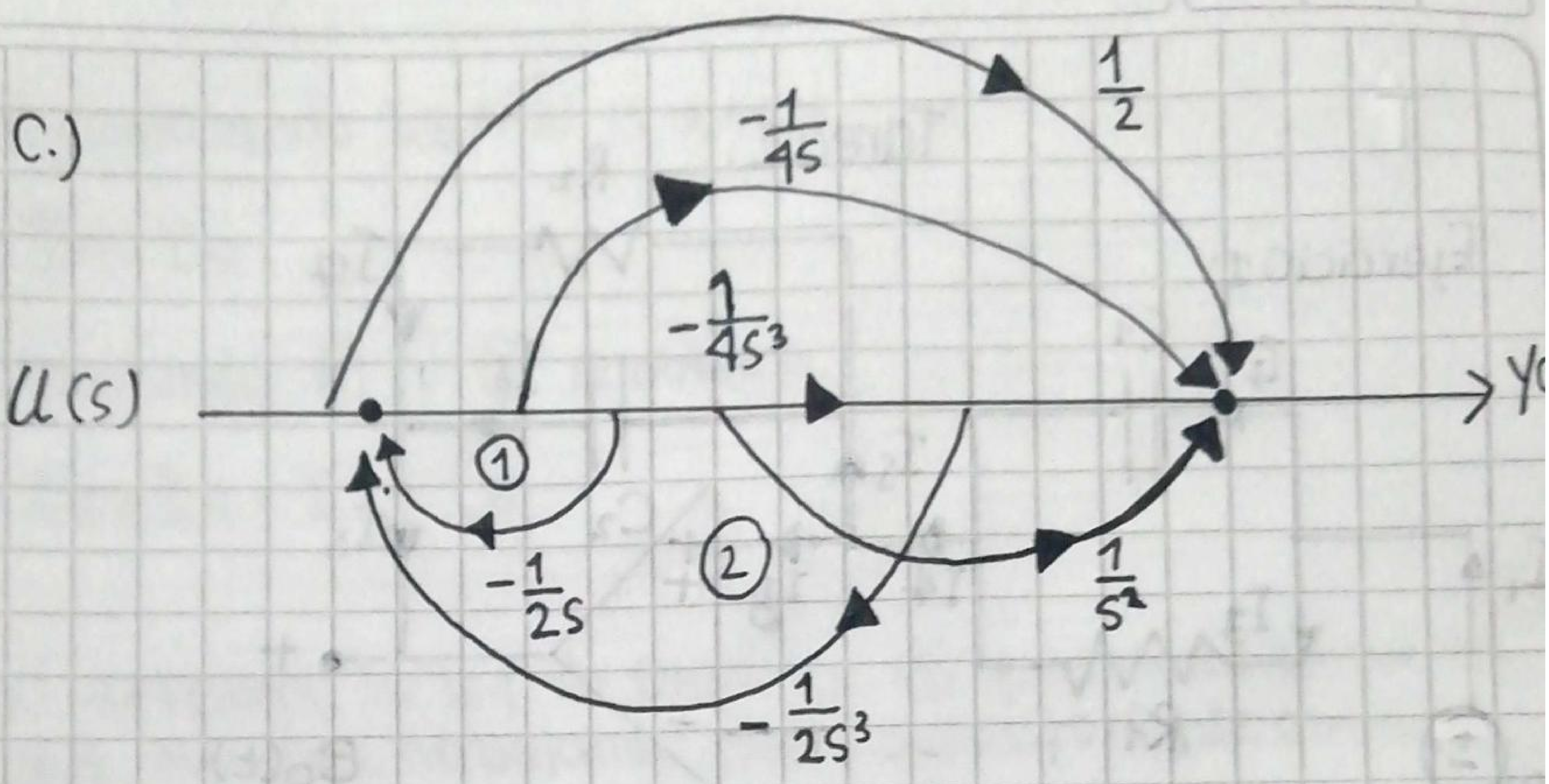
$L_1 = -G_1 H_1$

$L_2 = -G_3 H_3$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{1 - (L_1 + L_2) + L_1 \cdot L_2}$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_4 + H_2 G_3}{1 - (-G_1 H_1 - G_3 H_3) + G_1 H_1 G_3 H_3}}$$

C.)



$P_1 = \frac{1}{2}$

$P_2 = -\frac{1}{4s^3}$

$P_3 = -\frac{1}{4s}$

$P_4 = \frac{1}{s^2}$

$L_1 = -\frac{1}{2s}$

$L_2 = -\frac{1}{2s^3}$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^3 - s^2 + 4s - 1}{2(2s^3 + s^2 + 1)}}$$