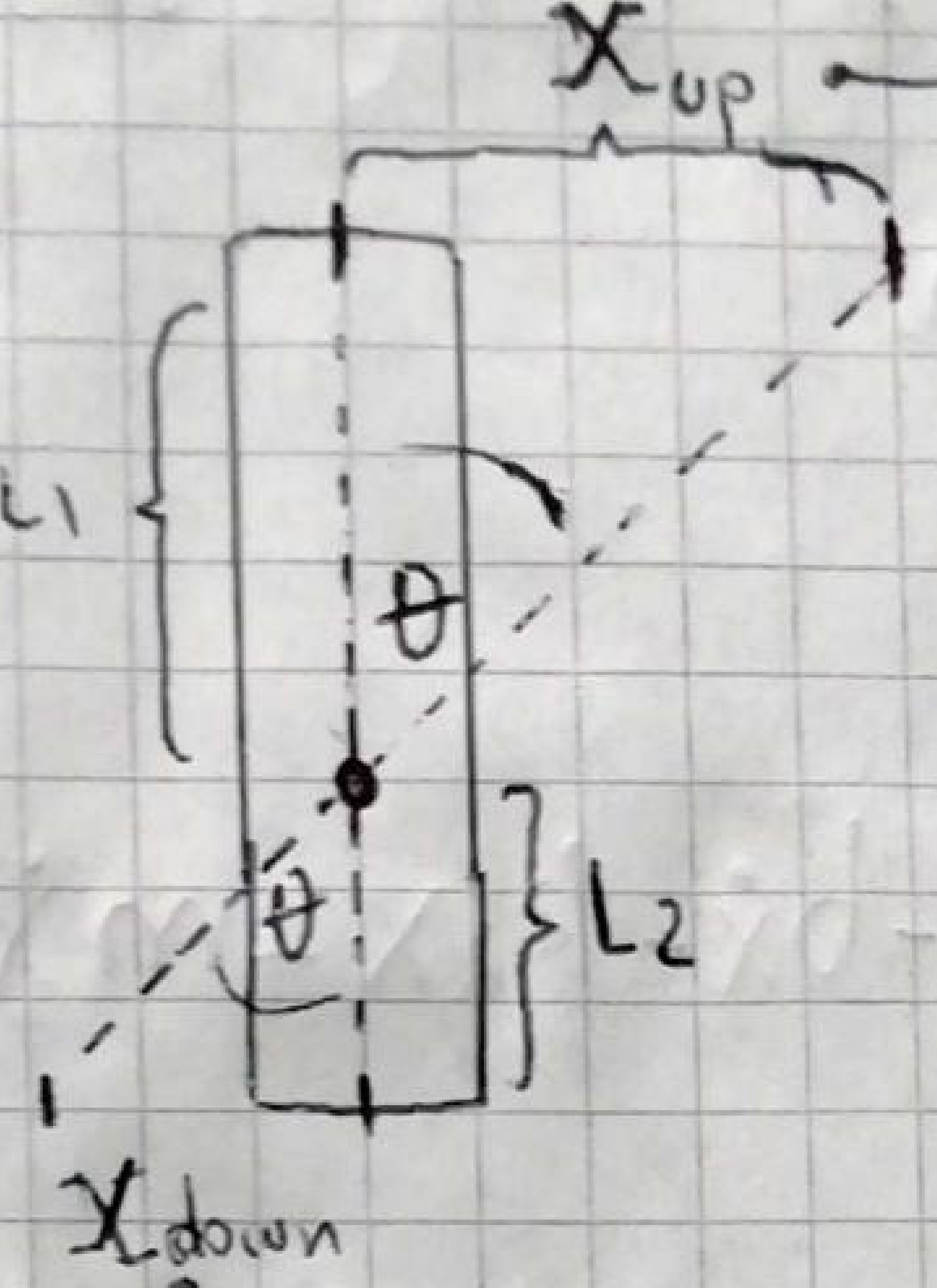
2.8) Es importante resaltar que el desplazamiento horizontal con las conexiones del resorte son $\underline{L_1 sen\theta}$, en la parte superior y $\underline{L_2 sen\theta}$, en la parte inferior, debido a:



$X_{up} \longrightarrow sen\theta = \dfrac{X_{up}}{L_1}$

$X_{up} = sen\theta L_1 \rightarrow sen\theta \approx \theta$ (Para angulos pequeños)

$$\boxed{X_{up} = \theta L_1}$$

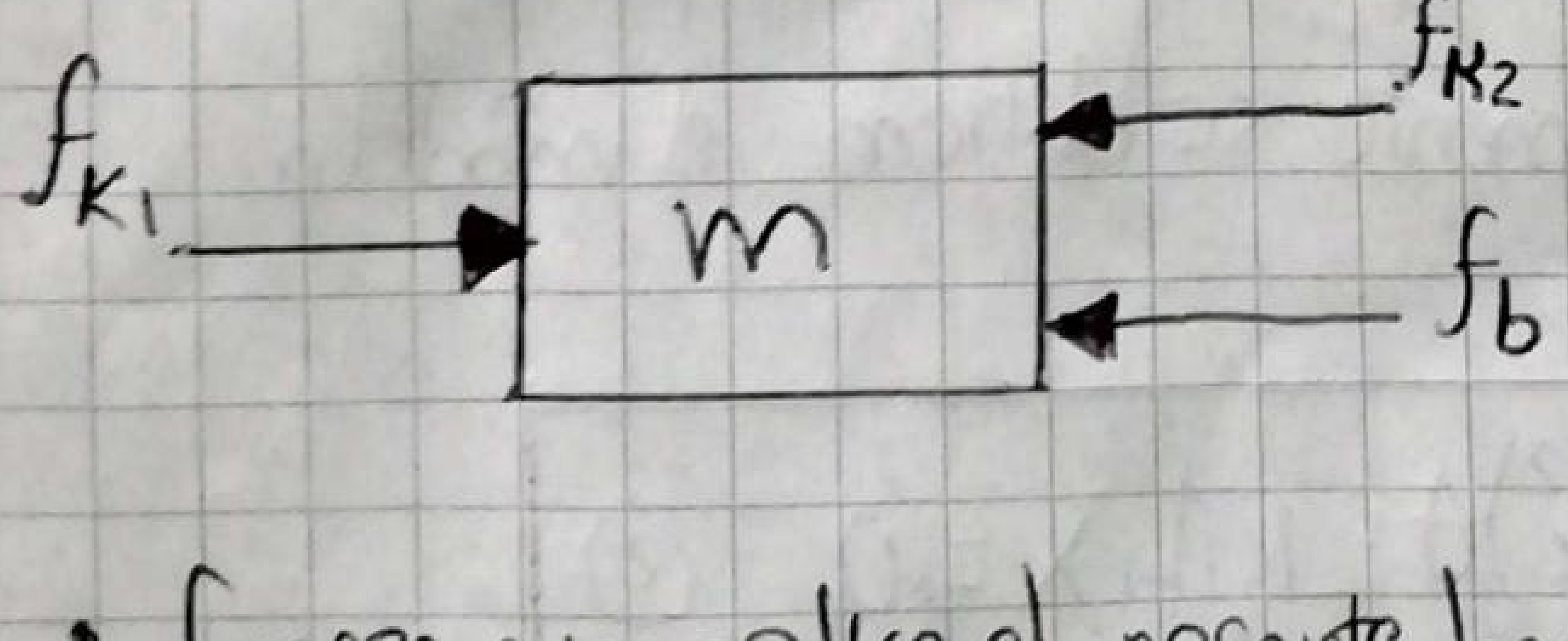
↳ Desplazamiento horizontal con el resorte en la parte superior

$sen\theta = \dfrac{X_{down}}{L_2} \rightsquigarrow \boxed{X_{down} = \theta L_2}$

↳ Desplazamiento horizontal con el resorte en la parte inferior

Dejando esto claro, proseguimos:

<u>Diagrama de Cuerpo Libre</u>



f_{K_2}: fuerza que aplica el resorte hacia el objeto(m), por 3ra ley de Newton

$$\boxed{f_{K_2} = K_2 X}$$

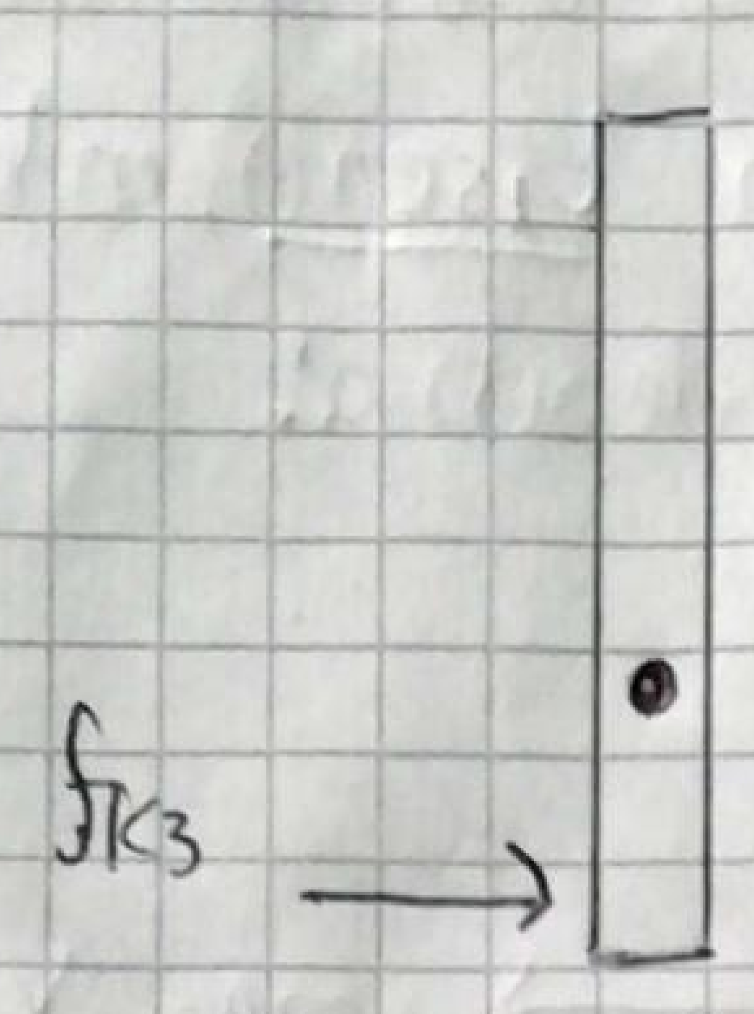
f_b: fuerza que aplica el amortiguador hacia el objeto(m), por 3ra ley de Newton

$$\boxed{f_b = b\dot{X}}$$

f_{K_1}: fuerza que aplica el resorte hacia el objeto(m), por 3ra ley de Newton. Como el resorte tiene un movimien libre a ambos lados, depende un despla zamiento relativo:

$$f_{K_1} = K_1(L_1\theta - X)$$

Diagrama de Cuerpo Libre (2)



f_{K_1}: Anteriormente ya descrita
$f_{K_1} = k(L_1\theta - x)$

f_{K_3}: fuerza del tercer resorte con un desplazamiento $L_2\theta$, por tanto

$$f_{K_3} = K_3 L_2 \theta$$

Aplicando segunda ley de Newton:

Sumatoria de fuerzas

$$+\rightarrow \sum F = k_1(L_1\theta - x) - b\dot{x} - k_2 x = m\ddot{x} \quad ①$$

Sumatoria de Torques

$$+\circlearrowright \sum T = \underbrace{-k_1(L_1\theta - x)L_1}_{*} \underbrace{- K_3 L_2 \theta L_2}_{**} = J\ddot{\theta} \quad ②$$

- Como el torque es $T =$ fuerza $\times$ brazo, se tiene:

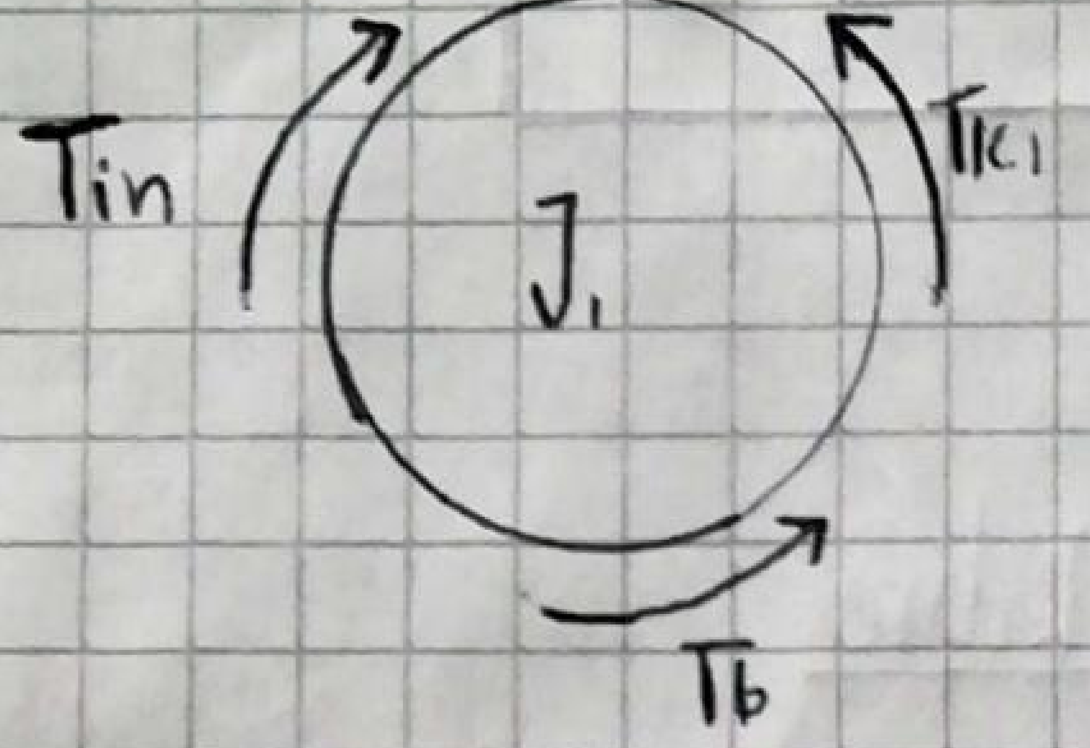
$$* \quad \underbrace{k_1(L_1\theta - x)}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{L_1}_{\text{Brazo}} \quad \Big| \quad ** \quad \underbrace{K_3 L_2 \theta}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{L_2}_{\text{Brazo}}$$

Organizando las ecuaciones finalmente se obtiene el modelo matematico:

$$\boxed{\begin{aligned} &J\ddot{\theta} + (k_1L_1^2 + k_3L_2^2)\theta - k_1L_1x = 0 \quad ② \\ &m\ddot{x} + b\dot{x} + (k_1 + k_2)x - k_1L_1\theta = 0 \quad ① \end{aligned}}$$

2.16) Asumimos que $\theta_1 > \theta_2$, $\dot{\theta}_1 > 0$ y $\theta_2 > 0$

Diagrama de Cuerpo Libre



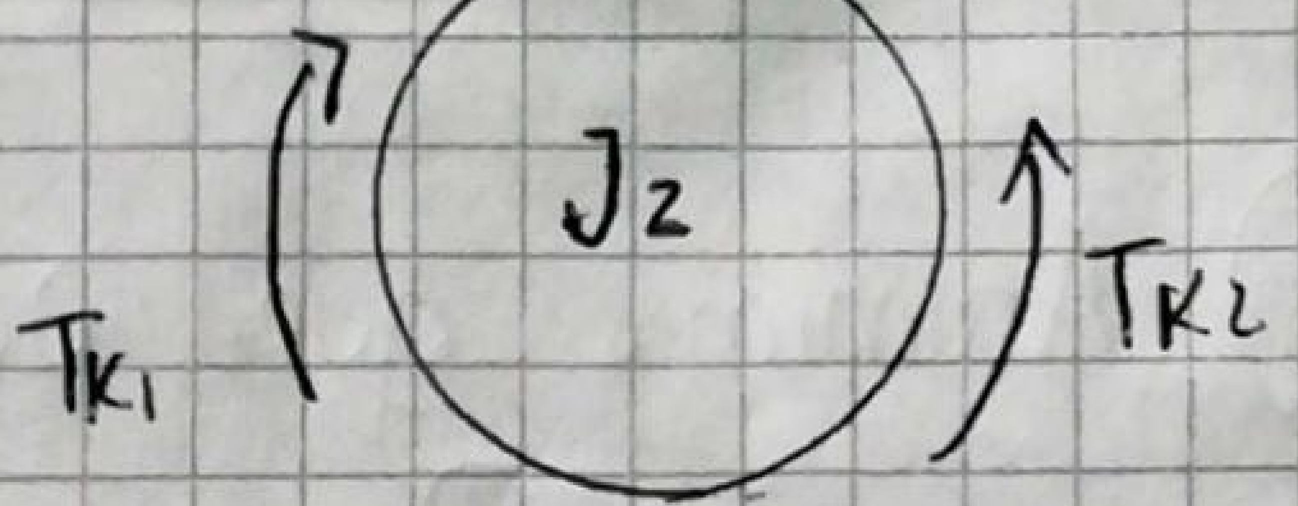
- T_{in}: Torque de entrada
- T_{k_1}: Torque que se genera por la rotación de la barra 1 y que se opone al movimiento.

Dado que a ambos lados de la barra tiene un movimiento "libre", se obtiene

$$\boxed{T_{k_1} = k_1(\theta_1 - \theta_2)}$$

- T_b: Torque que se genera por la fricción viscosa, que se opone al movimiento

$$\boxed{T_b = b\dot{\theta}_1}$$



- T_{k_1}: Torque que se genera por la rotación de la barra 1

$$\boxed{T_{k_1} = k_1(\theta_1 - \theta_2)}$$

T_{k_2}: Torque que se genera por la rotación de la barra 2, que se opone a T_{k_1}. Como uno de los lados es fijo, se obtiene

$$\boxed{T_{k_2} = k_2\theta_2}$$

Aplicando segunda Ley de Newton

Disco J_1: $\circlearrowleft{+}\ \sum T = T_{in} - b\dot{\theta}_1 - k_1(\theta_1 - \theta_2) = J_1\ddot{\theta}_1$ (1)

Disco J_2: $\circlearrowleft{+}\ \sum T = k_1(\theta_1 - \theta_2) - k_2\theta_2 = J_2\ddot{\theta}_2$ (2)

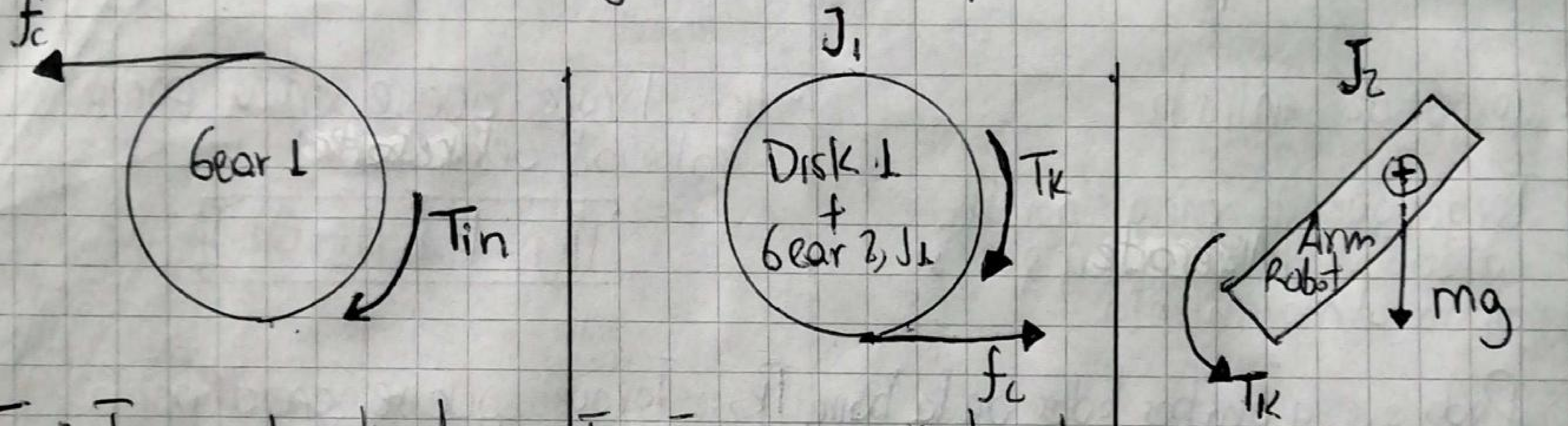
Scanned by TapScanner

Organizando las ecuaciones finalmente se obtiene el modelo matematico

$$\boxed{\begin{aligned} &J_1\ddot{\theta}_1 + b\dot{\theta}_1 + k_1(\theta_1-\theta_2) = T_{in} \quad (1) \\ &J_2\ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2-\theta_1) + k_2\theta_2 = 0 \quad (2) \end{aligned}}$$

2.25) Asumimos que $\theta_1 > \theta_2$

Diagrama de Cuerpo Libre



T_{in}: Torque de entrada que es entregado por el motor

f_c: Fuerza de contacto al interactuar con el engranaje 2. Por tercera ley de Newton

T_K: Torque generado al rotar el eje flexible y como en ambos puntos de apoyo esta libre, se tiene:

$$\boxed{T_K = k(\theta_1-\theta_2)}$$

f_c: Fuerza de contacto al interactuar con el engranaje 1. Por tercera ley de Newton

mg: El peso del cuerpo

T_K: Torque generado al rotar el eje flexible y como en ambos puntos de apoyo esta libre, se tiene

$$\boxed{T_K = k(\theta_1-\theta_2)}$$

Sumatoria de Torques.

⇒ Gear 1 $\circlearrowleft + \;\sum T = T_{in} - f_c r_1 = J_{gear1}\ddot{\theta}_{gear1}$ #

Como $J_{gear1} = 0$, ya que es despreciable. Se tiene

$$\circlearrowleft + \;\sum T = T_{in} - \underbrace{f_c r_1}_{*} = 0$$

* Torque = fuerza * Brazo = $f_c \cdot r_1$, donde r_1 es el radio del engranaje 1

Si despejamos f_c, tenemos que

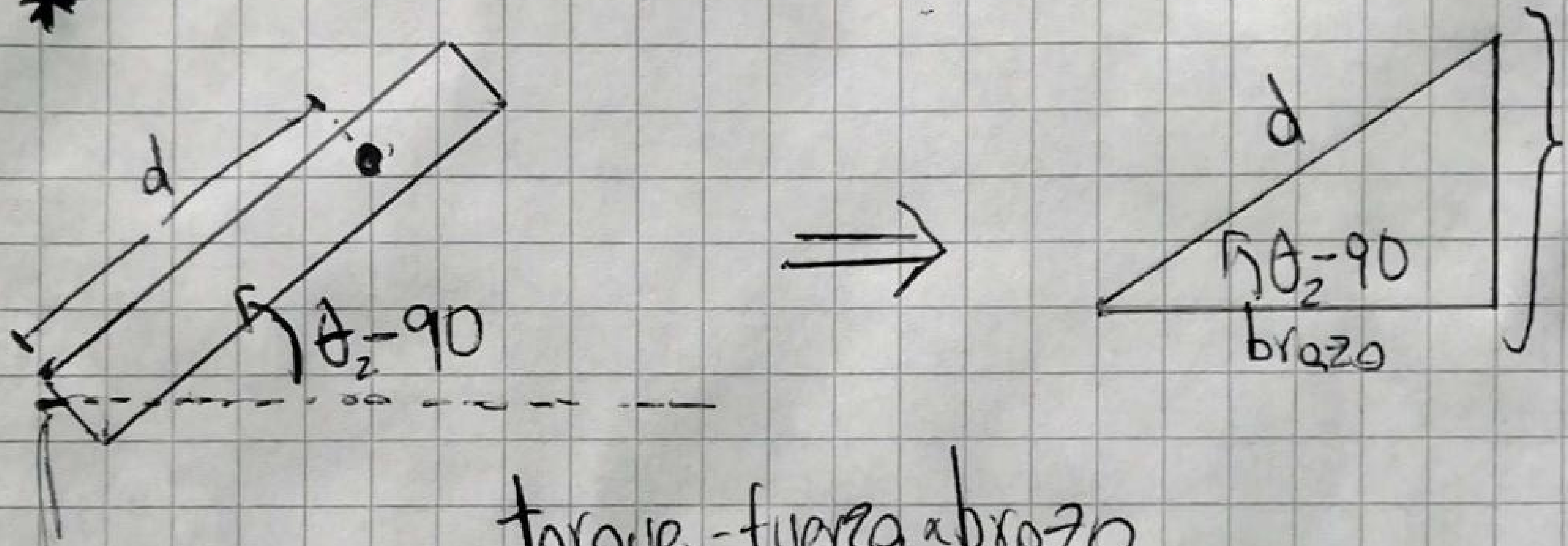
$$\boxed{f_c = \frac{1}{r_1} T_{in}} \quad (1)$$

Ya se explicó anteriormente.

$$\Rightarrow \text{Gear } 2 + \text{Disk } J_1: \quad \circlearrowleft + \; \Sigma T = k(\theta_1 - \theta_2) - f_c r_2 = J_1 \ddot{\theta}_1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \text{Brazo del Robot}: \quad \circlearrowleft + \; \Sigma T = \underbrace{mgd\cos(\theta_2 - 90^\circ)}_{*} - k(\theta_1 - \theta_2) = J_2 \ddot{\theta}_2 \quad (3)$$

*



$$\cos(\theta_2 - 90) = \frac{brazo}{d}$$

$$brazo = d\cos(\theta_2 - 90)$$

torque = fuerza x brazo

torque = $mgd\cos(\theta - 90)$

En las ecuaciones anteriores (2) , sustituimos f_c por la ecuacion (1) y reemplazamos la relación de transmision $N = \frac{r_2}{r_1}$ obteniendo:

$$(2) \quad k(\theta_1 - \theta_2) - \frac{r_2}{r_1} T_{in} = J_1 \ddot{\theta}_1$$

$$\Rightarrow k(\theta_1 - \theta_2) - N T_{in} = J_1 \ddot{\theta}_1$$

Organizando las ecuaciones finalmente se obtiene el modelo matematico

$$\boxed{\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 - k(\theta_1 - \theta_2) &= N T_{in} \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + k(\theta_1 - \theta_2) &= mgd\cos(\theta_2 - 90^\circ) \end{aligned}}$$