Matematično modeliranje 2014/2015

1 Posplošeni inverz

Posplošeni inverz matrike A je matrika G, za katero velja $AGA = A$. Algoritem? Poiscemo podmatrikomatriko A $r \times r$, kjer je $r = rang(A)$, podmatriko obrnemo in jo tako vstavimo v transponirano $A * 0$.

1.1 Moore-Penroseov inverz A^+

To je takšna matrika $A^+ \subset \mathbb{R}^{n\times m}$, da velja:

1. $AA^+A = A$
2. $A^+AA^+ = A^+$
3. $(A^+A)^T = A^+A$ - A^+A je simetricna
4. $(AA^+)^T = AA^+$ - AA^+ je simetricna

Lastnosti:

- obstaja en sam tak inverz
- $(A^+)^+ = A$
- če je A obrnljiva, potem $A^+ = A^{-1}$
- če je A^TA obrnljiva, potem $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$
- če je AA^T obrnljiva, potem $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$

1.2 SVD razcep singularnih vrednosti

Za $B \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ morda obstaja diagonalna matrika D, za katero velja

$$B = PDP^{-1}$$

SVD razcep pa naredi

$$A = U\Sigma V^T,$$

kjer je Σ matrika s singularnimi vrednostmi v diagonali $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. Postopek za pridobivanje Moore-Penroseovega inverza je sledeč:

1. izracunaj $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ in vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v A^TA
2. izracunaj $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ in vektorje $u_1, u_2, \ldots, u_m$ v AA^T
3. Σ je $m \times n$ matrika, v diagonali so $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_{\min(n,m)}}$
4. $V = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$
5. $U = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$
6. $A^+ = V\Sigma^+U^T$

2 Markovske verige

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ je zaporedje slucajnih spremenljivk, ki so lahko odvisne. Zaloge vrednosti so enake in koncne $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$. Verjetnost dogodka je odvisna sam od prejsnjega dogodka.

$$P(X_{n+1} = s_j | X_1, \ldots, X_n) = P(X_{n+1} = s_j | X_n)$$

Predstavimo z matriko prehodov stanj. Stanje je lahko **prehodno** (obstaja verjetnost, da se v to stanje nikoli vec ne vrnemo), **povratno** (z verjetnostjo 1 to stanje obiscemo neskoncnokrat), **ekvivalentno** (ce iz enega stanja pridemo v drugega in nazaj v nekem stevilu korakov - tako se tvorijo ekvivalencni razredi, kjer so vsa stanja istega tipa), **absorbirajoce** (ko pridemo v to stanje, v njem ostanemo za vedno).

2.1 Absorbirajoca MV

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

To konvergira k

$$lim_{n \to \infty} P^n = \begin{bmatrix} 0 & NR \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

V desnem zgornjem delu matrike se pojavijo verjetnosti prehoda v doloceno absorbirajoce stanje. N nam pove pricakovano stevilo obiskov stanj pred prehodom v absorbirajoce stanje.

$$N = (I - Q)^{-1}$$

Pricakovano stevilo korakov pred prehodom v absorbirajoce stanje nam pove vektor Ne, kjer je e vektor enic.

Limitna porazdelitev: ce je 1 edina lastna vrednost P, ki je po absolutni vrednosti enaka 1, je limita porazdelitve $P^T - I$.

3 Parametrizirane krivulje

Tangenta:

$$y - y(t_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0))$$

Dolzina loka (dolzino $\dot{r}$ pogosto najlazje dobimo s kvadriranjem, npr $\|\dot{\vec{r}}\|^2 = a^2 + b^2$, ce je $r = (a, b)$):

$$l = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}\| dt$$

Naravni parameter s je dolzina loka od $t = 0$ do $t = s$. Ploscina poljubne krivulje:

$$P = \frac{1}{2} \int_a^b |x\dot{y} - y\dot{x}| dt$$

Ploscina med krivuljo in osjo x:

$$P = \int_a^b y(t)\dot{x}(t) dt$$

3.1 Polarni koordinatni sistem

$$x = r\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\phi)$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = \arctan\frac{y}{x}$$

4 Linearna aproksimacija

Linearna aproksimacija v tocki $\vec{a}$:

$$L_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}) + J(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$$

J je Jacobijeva matrika:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Vrstice v Jacobijevi matriki so gradienti funkcij.

5 Diferencialne enacbe

5.1 DE 1. reda

$$y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$$

1. resimo homogeni del $y'(x) + p(x)y(x) = 0$
2. variacija konstante (odvajamo homogeno resitev)
3. y in y' vstavimo v homogeni del resitve
4. resimo za zacetni pogoj in dobimo splosno resitev

$$y(x, c) = y_h(x, c) + y_p(x)$$

5.2 Eulerjeva metoda

$$y' = f(t, y)$$
$$y_0 = y(t_0)$$
$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$
$$i = 1, \ldots, n-1$$

5.3 Sistem DE 1. reda

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$$

Ce je $f(t) = 0$, je sistem homogen. Ce je A diagonalna matrike, je splosna resitev $x_i = C_i e^{\lambda_i t}$. Ce ima A realne lastne vrednosti in bazo iz lastnih vektorjev $P^{-1}AP = D$, $P = [\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}]$ za $\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$ dobimo sistem $\dot{\vec{y}} = D\vec{y}$, resitev pa je $\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}\vec{v_n}$. Za kompleksne l.v. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ in $\vec{v_{1,2}} = \vec{u} \pm i\vec{w}$ je $\vec{x}(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t}(\vec{u} + i\vec{w}) + C_2 e^{(\alpha+i\beta)t}(\vec{u} + i\vec{w}) = e^{\alpha t}\cos\beta t(C_1\vec{u} - C_2\vec{w}) - e^{\alpha t}\sin\beta t(C_1\vec{u} + C_2\vec{w})$

Vrsta tocke:

- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ tockast izvor
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ sedlo
- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ tockast ponor