Feuille de travaux dirigés 4 : Modélisation bayésienne

Exercice 1 (Modèle gaussien)**:**
On considère le modèle bayésien suivant sur $\mathcal{X} = \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} X|\theta \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2) \\ \boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\mu_0, \tau_0^2) \end{cases}$$

où σ^2, μ_0 et τ_0^2 sont des constantes supposées connues.

1. Quel est l'espace des paramètres ? Donnez la loi a posteriori $\pi(\theta|x)$.
2. On considère maintenant un échantillon i.i.d. $Y = (X_1, \dots, X_n)$, où $X_i \sim X$. Quelle est le modèle pour Y ? Donnez la loi a posteriori $\pi(\theta|y)$. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$?

Exercice 2 (Mélange d'opinions)**:**
Une expérience aléatoire a deux résultats possibles (succès ou échec). On note X la variable aléatoire valant 1 en cas de succès, 0 en cas d'échec. X est supposée suivre une loi de Bernoulli de paramètre θ inconnu. On considère seulement deux valeurs possibles pour θ : $\theta \in \{\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.6\}$.

1. Écrire le modèle statistique, détailler l'espace des paramètres.
2. Le premier expert accorde une confiance égale en les deux possibilités pour θ. Autrement dit, son prior est $\pi_1(\theta_1) = \pi_1(\theta_2) = 0.5$. Donnez la loi a posteriori $(\pi_1(\theta_i|x = 1))_{i=1,2}$ et $\pi_1(\theta_i|x = 0)_{i=1,2}$.
3. Même question pour un deuxième expert qui croit a priori plus à la seconde alternative : son prior est $\pi_2(\theta_1) = 1/4$, $\pi_2(\theta_2) = 3/4$.
4. La loi *predictive a posteriori* (sachant l'observation $X = x$) est par définition, la loi sur $\mathcal{X}$ dont la densité par rapport à la mesure de référence est donnée par

$$p(y) = \int_\Theta p(y|\theta)\pi(\mathrm{d}\theta|x),$$

où $\pi(\,\cdot\,|x)$ est la loi a posteriori. Quelle est cette prédictive a posteriori pour le prior π_2, lorsque $x = 1$?

On observe maintenant un échantillon *i.i.d.* $X = (X_1, \dots, X_n)$.

5. Montrer que les lois a posteriori $\pi(\theta|x)$ ne dépendent que de $s = \sum_{j=1}^n x_j$.
6. On suppose que $s = n/2$. Écrire la loi a posteriori $\pi_2(\theta|x)$ ($x \in \{0, 1\}^n, \sum_i x_i = s, \theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$) pour l'a priori π_2. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$? Même question pour l'a priori π_1. Plus généralement, le comportement lorsque n tend vers l'infini dépend-il de l'a priori ?

.

Exercice 3 (Lois a posteriori)**:**
On considère un modèle bayésien sur $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, où la loi de X sachant $\theta \in \Theta = \mathbb{R}^+$ a pour densité $p_\theta(x) = 2x/\theta^2 \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$.

1. Donnez la loi a posteriori lorsque l' a priori a pour densité $\pi(\theta) = \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. Même question lorsque $\pi(\theta) = 3\theta^2 \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$.
3. Quelle est l'espérance a posteriori $\mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}|X = x)$ dans chaque cas ?
4. On considère un échantillon i.i.d. $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Donnez la loi a posteriori $\pi(\theta|x)$ lorsque $\pi(\theta) = \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$.