Feuille d'exercices - statistique bayésienne
2022

Exercice 1

On dispose d'une information a priori π sur le paramètre θ. On note π la loi a priori et $\boldsymbol{\theta} \sim \pi$ la variable aléatoire à valeurs dans $\Theta =]0, \infty[$ associée. On choisit pour π une loi Gamma, $\pi = \mathcal{G}amma(a, \lambda)$ avec $a > 0$, $\lambda > 0$ des quantités fixées par l'utilisateur en fonction de sa connaissance a priori sur $\boldsymbol{\theta}$. Soit $\pi(\cdot\,|x)$ la loi a posteriori sachant l'observation $X = x = (x_1, \ldots, x_n)$. Dans la suite, on notera $\pi(\theta)$ la densité de la loi a priori évaluée en $\theta \in \Theta$ et $\pi(\theta|x)$ la densité de la loi a posteriori, sachant l'observation $X = x \in \mathbb{R}^n$.

1. Donnez un choix de (a, λ) tel que $\mathbb{E}_\pi(\boldsymbol{\theta}) = 2$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\pi(\boldsymbol{\theta}) = 100$.

   Dans la suite on n'utilisera pas le résultat numérique ci-dessus, on donnera tous les résultats en fonction de a et λ sans plus de calcul.
2. Montrer que pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tel que $x_i > u$ pour $1 \leq i \leq n$, la loi a posteriori $\pi(\cdot\,|x)$ est une loi Gamma dont on précisera les paramètres en fonction de x, a, λ.
3. Pour x comme ci-dessus, quelle est l'espérance a posteriori $\mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}|x)$?
4. Soit $p \in]0, 1[$. Donner une borne inférieure de crédibilité $m(x)$ telle que

$$\pi\Big([m(x), \infty[\;\big|X = x\Big) = \mathbb{P}_\pi\Big(\boldsymbol{\theta} \geq m(x) \mid X = x\Big) = 1 - p,$$

   en fonction des quantiles d'une loi $\mathcal{G}amma(\beta, 1)$ (préciser β).

Exercice 2

La loi géométrique est couramment utilisée pour modéliser des temps d'attente dans un cadre discret. C'est la loi du premier succès dans un suite de tirages aléatoires selon une loi de Bernoulli de paramètre θ. Autrement dit, Si $(U_i)_{i\geq 1} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{B}er(\theta)$, $\theta \in]0, 1[$, alors $X = \min\{i \geq 1 : U_i = 1\}$ suit une loi géométrique de paramètre θ. On pourra utiliser les résultats suivants sur les distributions usuelles :

1. **Loi géométrique** : Une variable aléatoire X suit un loi géométrique de paramètre $\theta >\in]0,1[$, notée $\mathcal{G}(\theta)$, si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, avec

$$\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{P}_\theta(\{X = x\}) = \theta(1-\theta)^{x-1}$$

Son espérance et sa variance sont respectivement

$$\mathbb{E}_\theta(X) = \frac{1}{\theta} \quad ; \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(X) = \frac{1-\theta}{\theta^2}.$$

2. Une **loi Beta** de paramètres $a > 0$, $b > 0$, notée $\mathcal{B}eta(a,b)$ est une loi continue sur le segment $]0,1[$, de densité donnée par

$$f_{a,b}(x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(x) \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

Si $Z \sim \mathcal{B}eta(a,b)$, alors

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{a}{a+b}.$$

1. Par quelle mesure le modèle $\{\mathcal{G}(\theta), \theta \in]0,1[\}$ est-il dominé ? On note $p_\theta(\,\cdot\,)$ la densité de $\mathcal{G}(\theta)$ par rapport à cette mesure.
   - Donner l'expression de p_θ.
   - On considère maintenant un échantillon i.i.d. de taille n, $X = (X_1, \dots, X_n)$ où $X_i \sim \mathcal{G}(\theta)$. Donner l'expression de la log-vraisemblance $\log p_\theta^{\otimes n}(X)$.
2. **Maximum de vraisemblance :** Donner l'expression de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre θ, pour un échantillon de taille n. On note $\widehat{\theta}_{MV} = \widehat{\theta}_{MV}(X)$ cet estimateur.
3. **Risque quadratique :** On cherche maintenant à estimer le paramètre d'intérêt $g(\theta) = \mathbb{E}_\theta(X_1) = \frac{1}{\theta}$. On considère l'estimateur

$$\widehat{g}_n(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i.$$

Quel est son risque quadratique ? Est-ce un estimateur efficace de $g(\theta)$? On admettra que le modèle est régulier.

`

Approche bayésienne : En l'absence d'information a priori sur θ, on se donne un prior π uniforme sur l'intervalle $]0,1[$. Noter que π est alors une loi $\mathcal{B}eta(1,1)$. Dans la suite on note $\boldsymbol{\theta}$ la variable aléatoire associée à π.

4. Montrer que pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i > 0$, la loi a posteriori $\pi(\,\cdot\,|x)$ est une loi $\mathcal{B}eta$ dont on précisera les paramètres.
5. Quelle est l'espérance a posteriori de $\boldsymbol{\theta}$, sachant les observations $X = x = (x_1, \dots, x_n)$? On note $\widehat{\theta}_{EP}$ cet estimateur.
6. Soit $\theta_0 \in]0,1[$ le 'vrai' paramètre, c'est-à-dire tel que $X_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{G}(\theta_0)$, $i = 1, \dots, n$. Monter que les estimateurs $\widehat{\theta}_{MV}$ et $\widehat{\theta}_{EP}$ convergent presque sûrement vers θ_0 lorsque $n \to \infty$.

Exercice 3 (modèle gaussien)

On considère le modèle bayésien suivant sur $\mathcal{X} = \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} X|\theta \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2) \\ \boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\mu_0, \tau_0^2) \end{cases}$$

où σ^2, μ_0 et τ_0^2 sont des constantes supposées connues.

1. Quel est l'espace des paramètres ? Donnez la loi a posteriori $\pi(\theta|x)$.
2. On considère maintenant un échantillon i.i.d. $Y = (X_1, \ldots, X_n)$, où $X_i \sim X$. Quelle est le modèle pour Y ? Donnez la loi a posteriori $\pi(\theta|y)$. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$?

Exercice 4 (mélange d'opinions)

Une expérience aléatoire a deux résultats possibles (succès ou échec). On note X la variable aléatoire valant 1 en cas de succès, 0 en cas d'échec. X est supposée suivre une loi de Bernoulli de paramètre θ inconnu. On considère seulement deux valeurs possibles pour θ : $\theta \in \{\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.6\}$.

1. Écrire le modèle statistique, détailler l'espace des paramètres.
2. Le premier expert accorde une confiance égale en les deux possibilités pour θ. Autrement dit, son prior est $\pi_1(\theta_1) = \pi_1(\theta_2) = 0.5$. Donnez la loi a posteriori $(\pi_1(\theta_i|x = 1))_{i=1,2}$ et $\pi_1(\theta_i|x = 0)_{i=1,2}$.
3. Même question pour un deuxième expert qui croit a priori plus à la seconde alternative : son prior est $\pi_2(\theta_1) = 1/4$, $\pi_2(\theta_2) = 3/4$.
4. La loi *predictive a posteriori* (sachant l'observation $X = x$) est par définition, la loi sur $\mathcal{X}$ dont la densité par rapport à la mesure de référence est donnée par

$$p(y) = \int_\Theta p(y|\theta)\pi(\mathrm{d}\theta|x),$$

   où $\pi(\cdot|x)$ est la loi a posteriori. Quelle est cette prédictive a posteriori pour le prior π_2, lorsque $x = 1$?

On observe maintenant un échantillon *i.i.d.* $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

5. Montrer que les lois a posteriori $\pi(\theta|x)$ ne dépendent que de $s = \sum_{j=1}^n x_j$.
6. On suppose que $s = n/2$. Écrire la loi a posteriori $\pi_2(\theta|x)$ $(x \in \{0,1\}^n, \sum_i x_i = s, \theta \in \{\theta_1, \theta_2\})$ pour l'a priori π_2. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$? Même question pour l'a priori π_1. Plus généralement, le comportement lorsque n tend vers l'infini dépend-il de l'a priori ?

Exercice 5 (calcul a posteriori)

On considère un modèle bayésien sur $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, où la loi de X sachant $\theta \in \Theta = \mathbb{R}^+$ a pour densité $p_\theta(x) = 2x/\theta^2 \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$.

1. Donnez la loi a posteriori lorsque l' a priori a pour densité $\pi(\theta) = \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. Même question lorsque $\pi(\theta) = 3\theta^2 \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$.
3. Quelle est l'espérance a posteriori $\mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}|X = x)$ dans chaque cas ?
4. On considère un échantillon i.i.d. $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Donnez la loi a posteriori $\pi(\theta|x)$ lorsque $\pi(\theta) = \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$.

=========== Les exercices suivants n'ont pas de corrigé écrit

Exercice 6

Nous considérons une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité $\mathcal{B}(n, p)$. Nous nous plaçons dans un contexte bayésien.

1 Déterminer la loi de probabilité a priori non informative de Jeffreys de p, $\pi_1(p)$. Calculer les estimateurs bayésiens de p correspondant au maximum et à la moyenne de la loi de probabilité de p sachant que $X = x$ (loi a posteriori).

2 Nous considérons une nouvelle loi de probabilité a priori $\pi_2(p) = 1$ (loi uniforme sur $[0, 1]$). Calculer les nouveaux estimateurs bayésiens de p correspondant au maximum et à la moyenne de la loi a posteriori.

Exercice 7

Nous considérons une variable aléatoire réelle X suivant une loi de probabilité $\mathcal{P}_X(\theta)$. Nous supposons que le paramètre θ suit quant à lui une loi de probabilité a priori $\mathcal{P}_\theta$. Nous souhaitons estimer θ et nous considérons la fonction de perte suivante :

$$L(\theta, a) = \begin{cases} k_2(\theta - a) & \text{si } \theta > a \\ k_1(a - \theta) & \text{sinon} \end{cases} .$$

Montrer que l'estimateur de Bayes de θ associé à la fonction perte $L(.,.)$ est le fractile d'ordre $\dfrac{k_2}{k_1 + k_2}$ de la loi de probabilité de θ sachant que $X = x$, $\mathcal{P}_{\theta|X=x}$.

Rappelons que x est un fractile d'ordre k d'une loi de probabilité $\mathcal{P}_X$ si $\mathbb{P}(X < x) = k$.

Exercice 8

Nous considérons une variable aléatoire réelle X suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Nous supposons que le paramètre θ suit quant à lui une loi de probabilité a priori $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ où σ^2 est un paramètre inconnu et fixé. Nous souhaitons estimer θ et nous considérons la fonction de perte quadratique suivante :

$$L_1(\theta, a) = (\theta - a)^2 .$$

1 Déterminer l'estimateur de Bayes de θ associé à la fonction de perte $L_1(.,.)$.

2 Déterminer l'estimateur de Bayes de θ associé à la fonction de perte quadratique pondérée suivante :

$$L_2(\theta, a) = \exp\left\{\frac{3\theta^2}{4}\right\}(\theta - a)^2 .$$

Exercice 9

On considère le modèle suivant: $X_1, ..., X_n$ sont n variables indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(\mu_i, 1)$. On suppose que

$$\pi(\mu_1, ..., \mu_n|\xi, \tau) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(\mu_i; \xi, \tau^2),$$

où $\varphi(x; \xi, \tau^2)$ désigne la densité d'une loi normale d'espérance ξ et de variance τ^2.

1. Si la densité des hyperparamètres (ξ, τ) par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$g(\xi, \tau) = \frac{1}{\tau}\mathbb{I}_{\tau>0},$$

montrer que le loi a posteriori $\pi(\mu_1, ..., \mu_n|X_1, ..., X_n)$ n'est pas définie.

2. Si

$$g(\xi, \tau) \propto 1$$

Calculer $\pi(\xi, \tau|X)$ et en déduire que la loi a posteriori de $(\mu_1, ..., \mu_n)$ est définie.

3. On veut tester l'hypothèse :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n$$

contre son complémentaire.

On pose $\rho_0 > 0$ la probabilité a priori de H_0 et on met sur l'alternative la densité à priori

$$\pi(\mu_1, ..., \mu_n|\xi, \tau) = (1 - \rho_0) \prod_{i=1}^{n} \varphi(\mu_i; \xi, \tau^2),$$

Calculer le facteur de Bayes en fonction de ξ et τ^2.

4. Si on considère comme loi a priori pour les hyparamètres :

$$\pi(\xi, \tau) \propto 1,$$

Proposer une méthode numérique de construction de la région à plus haute densité a posteriori pour $(\mu_1, ..., \mu_n)$, ainsi qu'une méthode basée sur l'approche empirique.