

Corrigé : Feuille de travaux dirigés 4

Solution Exercice 1

Dans cet exercice, $\mu_0, \sigma^2, \tau_0^2$ sont des « hyper-paramètres » et supposés connus à l'avance.

1. L'espace des paramètres est : $\Theta = \mathbb{R}$.

Pour déterminer la loi a posteriori, on utilise la formule de la distribution a posteriori : $\pi(\theta|X = x) = \frac{\pi(\theta)p_\theta(x)}{m^X(x)}$, où $m^X(x)$ est la marginale de X en x et joue uniquement le rôle d'un facteur de normalisation pour $\pi(\theta|x)$ (fonction de θ).

On « voit » alors que $\theta|x$ suit une loi gaussienne. Nous calculons donc sa densité à une constante multiplicative (une quantité ne dépendant pas de θ) près : Dans toute la suite, la notation $\pi(\theta|x) \propto g(\theta)$ signifie « $\exists \lambda > 0 : \forall \theta, \pi(\theta|x) = \lambda g(\theta)$ », où λ peut dépendre de x mais pas de θ . La constante λ est une constante de normalisation qui pourrait être calculée explicitement grâce au fait que $\int_{\theta} \pi(\theta|x) d\theta = 1$, mais dont on n'a pas besoin dans notre cas pour identifier la loi a posteriori.

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x) &\propto \pi(\theta)p_\theta(x) \\ &\propto e^{-\frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\tau_0^2}} e^{-\frac{(\theta-x)^2}{2\sigma^2}} \\ &\propto e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}\right)\theta^2 - 2\left(\frac{\mu_0}{\tau_0^2} + \frac{x}{\sigma^2}\right)\theta\right)} \\ &\propto e^{-\frac{1}{2}\frac{\tau_0^2 + \sigma^2}{\tau_0^2\sigma^2}\left(\theta^2 - 2\frac{\mu_0\sigma^2 + x\tau_0^2}{\tau_0^2 + \sigma^2}\theta\right)} \end{aligned}$$

On identifie l'espérance et la variance de la loi grâce à la relation de proportionnalité $e^{-\frac{(\theta-m)^2}{2v^2}} \propto e^{-\frac{1}{2v^2}(\theta^2 - 2m\theta)}$ et on obtient :

$$\theta|x \sim \mathcal{N}\left(\frac{\mu_0\sigma^2 + x\tau_0^2}{\tau_0^2 + \sigma^2}, \frac{\tau_0^2\sigma^2}{\tau_0^2 + \sigma^2}\right).$$

Si on désire faire tous les calculs (y compris celui de la marginale), on peut utiliser l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c}.$$

2. Puisque l'échantillon est *i.i.d.*, Y suit une loi produit. Le modèle bayésien pour Y est donc :

$$\begin{cases} \theta \sim \mathcal{N}(\mu_0, \tau_0^2), \\ Y|\theta \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)^{\otimes n}. \end{cases}$$

Pour déterminer la loi a posteriori, on utilise la formule de la distribution a posteriori : $\pi(\theta|y) = \frac{\pi(\theta)p_\theta(y)}{m^Y(y)}$, où m^Y est la marginale de Y . À une constante près cela

donne :

$$\begin{aligned}
 \pi(\theta|y) &\propto \pi(\theta)p_\theta(y) \\
 &\propto e^{-\frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\tau_0^2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (\theta-x_i)^2}{2\sigma^2}} \\
 &\propto e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\tau_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}\right)\theta^2-2\left(\frac{\mu_0}{\tau_0^2}+\frac{\sum_i x_i}{\sigma^2}\right)\theta\right)} \\
 &\propto e^{-\frac{1}{2}\frac{n\tau_0^2+\sigma^2}{\tau_0^2\sigma^2}\left(\theta^2-2\frac{\mu_0\sigma^2+\tau_0^2\sum_i x_i}{n\tau_0^2+\sigma^2}\theta\right)}
 \end{aligned}$$

On reconnaît une loi gaussienne :

$$\theta|y \sim \mathcal{N}\left(\frac{\mu_0\sigma^2 + \tau_0^2 \sum_i x_i}{n\tau_0^2 + \sigma^2}, \frac{\tau_0^2\sigma^2}{n\tau_0^2 + \sigma^2}\right).$$

Pour étudier le comportement lorsque $n \rightarrow +\infty$, on réécrit l'espérance et la variance de la loi en introduisant la moyenne des x_i , $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$:

$$\theta|y \sim \mathcal{N}\left(\frac{\mu_0\sigma^2 + n\tau_0^2\bar{x}}{n\tau_0^2 + \sigma^2}, \frac{\tau_0^2\sigma^2}{n\tau_0^2 + \sigma^2}\right).$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\mathbb{E}(\theta|y) \sim \frac{n\tau_0^2\bar{x}}{n\tau_0^2} = \bar{x} \rightarrow \mathbb{E}(X_1|\theta) = \theta$ et $\text{Var}(\theta|y) \sim \frac{\tau_0^2\sigma^2}{n\tau_0^2} = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$.

Solution Exercice 2

1. L'espace des paramètres est : $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$.

Le modèle statistique est : $\mathcal{P} = \{\mathcal{B}(\theta), \theta \in \Theta\}$, où $\mathcal{B}(\theta)$ est une loi de Bernoulli de paramètre θ .

2. Ici on définit un modèle bayésien pour X :

$$\begin{cases} \theta \sim \pi, \\ X|\theta \sim \mathcal{B}(\theta). \end{cases}$$

De manière générale, on a :

$$\pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta)p_\theta(x)}{\pi(\theta_1)p_{\theta_1}(x) + \pi(\theta_2)p_{\theta_2}(x)} = \frac{\pi(\theta)\theta^x(1-\theta)^{1-x}}{\pi(\theta_1)\theta_1^x(1-\theta_1)^{1-x} + \pi(\theta_2)\theta_2^x(1-\theta_2)^{1-x}}.$$

Pour $\pi = \pi_1$ ($\pi_1(\theta_1) = \pi_2(\theta_2) = 0.5$), on obtient donc les valeurs $\pi_1(\theta|x)$:

θ/x	0	1
θ_1	$\frac{1-\theta_1}{1-\theta_1+1-\theta_2} = \frac{2}{3}$	$\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2} = \frac{1}{4}$
θ_2	$\frac{1-\theta_2}{1-\theta_1+1-\theta_2} = \frac{1}{3}$	$\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2} = \frac{3}{4}$

3. On a maintenant comme distribution a priori : $\pi_2(\theta_1) = 1/4$, $\pi_2(\theta_2) = 3/4$.

On obtient donc les valeurs $\pi_2(\theta|x)$:

θ/x	0	1
θ_1	$\frac{1 \times (1-\theta_1)}{1 \times (1-\theta_1) + 3 \times (1-\theta_2)} = \frac{2}{5}$	$\frac{1 \times \theta_1}{1 \times \theta_1 + 3 \times \theta_2} = \frac{1}{10}$
θ_2	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{10}$

4. La densité de la loi prédictive a posteriori est donnée par :

$$p(y) = \pi_2(\theta_1|x)p_{\theta_1}(y) + \pi_2(\theta_2|x)p_{\theta_2}(y).$$

Pour $x = 1$ on obtient : $p(0) = \frac{1}{10} \times (1 - 0.2) + \frac{9}{10} \times (1 - 0.6) = \frac{11}{25}$ et $p(1) = \frac{14}{25}$.

5. Pour $X = (X_1, \dots, X_n)$ échantillon *i.i.d.* :

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x) &= \frac{\pi(\theta)p_{\theta}(x)}{\pi(\theta_1)p_{\theta_1}(x) + \pi(\theta_2)p_{\theta_2}(x)} \\ &= \frac{\pi(\theta)\theta^{\sum_i x_i}(1-\theta)^{n-\sum_i x_i}}{\pi(\theta_1)\theta_1^{\sum_i x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_i x_i} + \pi(\theta_2)\theta_2^{\sum_i x_i}(1-\theta_2)^{n-\sum_i x_i}} \\ &= \frac{\pi(\theta)\theta^s(1-\theta)^{n-s}}{\pi(\theta_1)\theta_1^s(1-\theta_1)^{n-s} + \pi(\theta_2)\theta_2^s(1-\theta_2)^{n-s}}. \end{aligned}$$

Ainsi $\pi(\theta|x)$ ne dépend de x qu'à travers s .

6. On pose $\alpha = \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{\theta_1(1-\theta_1)} = \frac{3}{2}$. Alors :

$$\pi(\theta_1|x) = \frac{\pi(\theta_1)}{\pi(\theta_1) + \alpha^{n/2}\pi(\theta_2)}$$

et

$$\pi(\theta_2|x) = \frac{\pi(\theta_2)}{\alpha^{-n/2}\pi(\theta_1) + \pi(\theta_2)}.$$

D'où, quand $n \rightarrow +\infty$, $\pi(\theta_1|x) \rightarrow 0$ et $\pi(\theta_2|x) \rightarrow 1$, indépendamment de la distribution a priori de θ . La loi conditionnelle a posteriori tend à privilégier le θ le plus proche de 0.5 (en effet $\theta_2 = 0.6 \approx 0.5$ et $\theta_1 = 0.2 \neq 0.5$).

Solution Exercice 3

1. On détermine la distribution a posteriori par la formule $\pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta)p_{\theta}(x)}{m^X(x)}$, où m^X est la marginale de X . Ici $\pi(\theta) = \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} m^X(x) &= \int_{\mathbb{R}^+} \pi(\theta)p_{\theta}(x) d\theta \\ &= \int_0^1 p_{\theta}(x) d\theta \\ &= \int_x^1 \frac{2x}{\theta^2} d\theta \\ &= \left[\frac{-2x}{\theta} \right]_x^1 \\ &= 2(1-x) \end{aligned} \quad \text{si } x > 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

D'où : $\pi(\theta|x) = \frac{x}{1-x} \frac{1}{\theta^2}$ pour $\theta \in [x, 1]$ et $x > 0$, et 0 sinon.

2. De la même manière pour $\pi(\theta) = 3\theta^2 \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$: $m^X(x) = \int_x^1 3\theta^2 \frac{2x}{\theta^2} d\theta = 6x(1-x)$ (pour $x > 0$ et 0 sinon) et $\pi(\theta|x) = \frac{1}{1-x}$ pour $\theta \in [x, 1]$ et $x > 0$, et 0 sinon.
3. L'espérance a posteriori est donnée par :

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}|x) = \int_{\Theta} \theta \pi(d\theta|x) = \int_{\mathbb{R}^+} \theta \pi(\theta|x) d\theta.$$

Elle est systématiquement nulle pour $x \leq 0$. Dans la suite on suppose donc que $x > 0$.

Dans le premier cas ($\pi(\theta|x) = \frac{x}{1-x} \frac{1}{\theta^2} \mathbb{1}_{[x,1]}(\theta)$) : $\mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}|x) = \int_x^1 \theta \frac{x}{1-x} \frac{1}{\theta^2} d\theta = -\frac{x \log(x)}{1-x}$.

Dans le second cas ($\pi(\theta|x) = \frac{1}{1-x} \mathbb{1}_{[x,1]}(\theta)$) : $\mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}|x) = \int_x^1 \frac{\theta}{1-x} d\theta = \frac{1}{2}(1+x)$.

4. Dans cette question, on dispose d'un échantillon *i.i.d.* $X = (X_1, \dots, X_n)$. X suit une loi produit. Ainsi, pour $\pi(\theta) = \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$, la marginale de X est donnée par :

$$\begin{aligned} m^X(x) &= \int_{\mathbb{R}^+} \pi(\theta) p_{\theta}(x) d\theta \\ &= \int_0^1 p_{\theta}(x) d\theta \\ &= \int_{x_0}^1 \frac{2^n \prod_i x_i}{\theta^{2n}} d\theta && (x_0 = \max_i x_i) \\ &= \left[-\frac{2^n \prod_i x_i}{(2n-1)\theta^{2n-1}} \right]_{x_0}^1 \\ &= \frac{2^n \prod_i x_i}{2n-1} \left(\frac{1}{x_0^{2n-1}} - 1 \right). \end{aligned}$$

En conséquence, la densité a posteriori est obtenue par la formule suivante :

$$\pi(\theta|x) = \frac{1}{m^X(x)} \frac{2^n \prod_i x_i}{\theta^{2n}} = \frac{2n-1}{\theta^{2n}} \frac{x_0^{2n-1}}{1-x_0^{2n-1}}$$

pour $\theta \in [x_0, 1]$ et 0 sinon.