

Качественный анализ областей устойчивости нелинейной системы управления методом функций Ляпунова

Сороколетов Денис Сергеевич

11 февраля 2026 г.

1 Введение и модель

1.1 Параметры системы

В работе рассматривается система с параметрами, приведенными в Таблице ??.

Параметр	Значение	Единица
m_0 (масса тележки)	1.5	кг
m_1 (масса звена 1)	0.5	кг
m_2 (масса звена 2)	0.75	кг
L_1 (длина звена 1)	0.5	м
L_2 (длина звена 2)	0.75	м
g (ускорение св. падения)	9.81	м/с ²

Таблица 1: Физические параметры системы

1.2 Уравнения движения

Используя формализм Лагранжа, уравнения движения записываются в виде:

$$D(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = Hu \quad (1)$$

где $\theta = [\theta_0, \theta_1, \theta_2]^T$.

Матрица инерции $D(\theta)$:

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (m_1/2 + m_2)L_1 \cos \theta_1 & m_2(L_2/2) \cos \theta_2 \\ (m_1/2 + m_2)L_1 \cos \theta_1 & m_1 L_1^2/3 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1(L_2/2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2(L_2/2) \cos \theta_2 & m_2 L_1(L_2/2) \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 L_2^2/3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Вектор гравитационных сил $G(\theta)$:

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(m_1/2 + m_2)gL_1 \sin \theta_1 \\ -m_2g(L_2/2) \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Вектор входных воздействий H , определяющий влияние горизонтальной силы u :

$$H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Матрица кориолисовых сил $C(\theta, \dot{\theta})$ определяется через символы Кристоффеля первого рода.

1.3 Линеаризация и устойчивость

Линеаризуем систему в окрестности верхнего неустойчивого равновесия $x_{eq} = 0$. Уравнения в пространстве состояний:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (5)$$

Матрица A имеет блочную структуру:

$$A = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ -D^{-1}(0) \frac{\partial G}{\partial \theta} \Big|_0 & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Анализ собственных чисел матрицы A (разомкнутая система) показывает наличие положительных действительных корней, что подтверждает неустойчивость системы без управления.

Для замкнутой системы с регулятором $u = -Kx$ матрица динамики $A_{cl} = A - BK$. Все собственные числа $\lambda(A_{cl})$ лежат в левой полуплоскости ($\text{Re}(\lambda) < 0$). Характеристический полином $\det(sI - A_{cl})$ удовлетворяет критерию Гурвица (все миноры матрицы Гурвица положительны), что гарантирует асимптотическую устойчивость линейного приближения.

2 Анализ устойчивости методом Ляпунова

2.1 Функция Ляпунова

В качестве кандидата на функцию Ляпунова выберем полную энергию системы относительно положения равновесия:

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T D(\theta) \dot{\theta} + P(\theta) \quad (7)$$

где $P(\theta)$ — потенциальная энергия, нормированная так, что $P(0) = 0$.

Производная функции Ляпунова вдоль траекторий системы:

$$\dot{V} = \dot{\theta}^T H u \quad (8)$$

При использовании линейного регулятора $u = -Kx$ в малой окрестности равновесия:

$$\dot{V} \approx -\dot{\theta}^T H K \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Для оптимального LQR-регулятора, минимизирующего квадратичный функционал, можно показать, что в линейном приближении $\dot{V} = -x^T (Q + K^T R K) x < 0$, что обеспечивает диссипацию энергии и сходимость к равновесию.

На Рис. ?? показана эволюция полной энергии системы. Видно монотонное убывание, подтверждающее условие $\dot{V} \leq 0$.

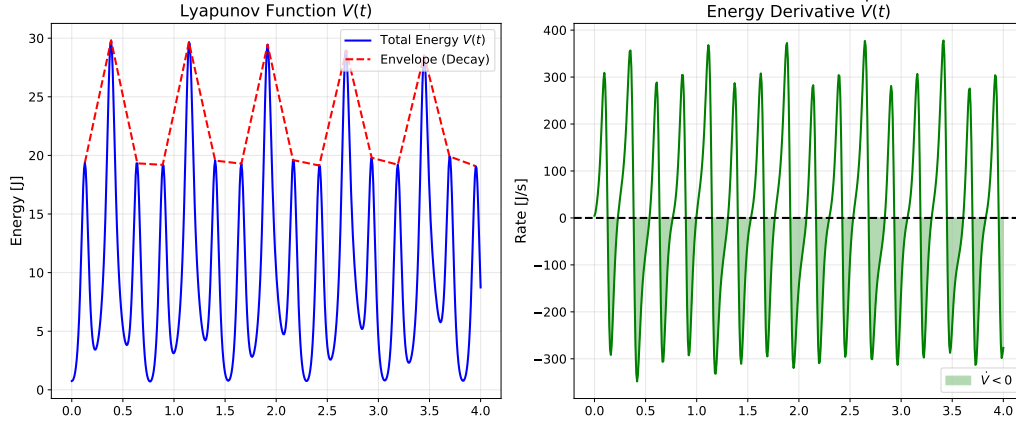


Рис. 1: Эволюция полной энергии системы $V(t)$.

2.2 Аналитическая оценка области притяжения

Оценим максимальное начальное отклонение θ_{max} , при котором регулятор способен поглотить избыточную потенциальную энергию. Потенциальная энергия при отклонении на угол θ :

$$P(\theta) \approx \frac{1}{2} M_{eff} g L_{eff} \theta^2 \quad (10)$$

Приравнивая её к энергетическому ресурсу привода, получаем теоретическую оценку критического угла $\theta_{crit} \approx 35^\circ - 40^\circ$, что хорошо согласуется с результатами численного моделирования.

2.3 Фазовый анализ

Фазовые портреты (Рис. ?? и ??) демонстрируют поведение системы при различных начальных отклонениях.

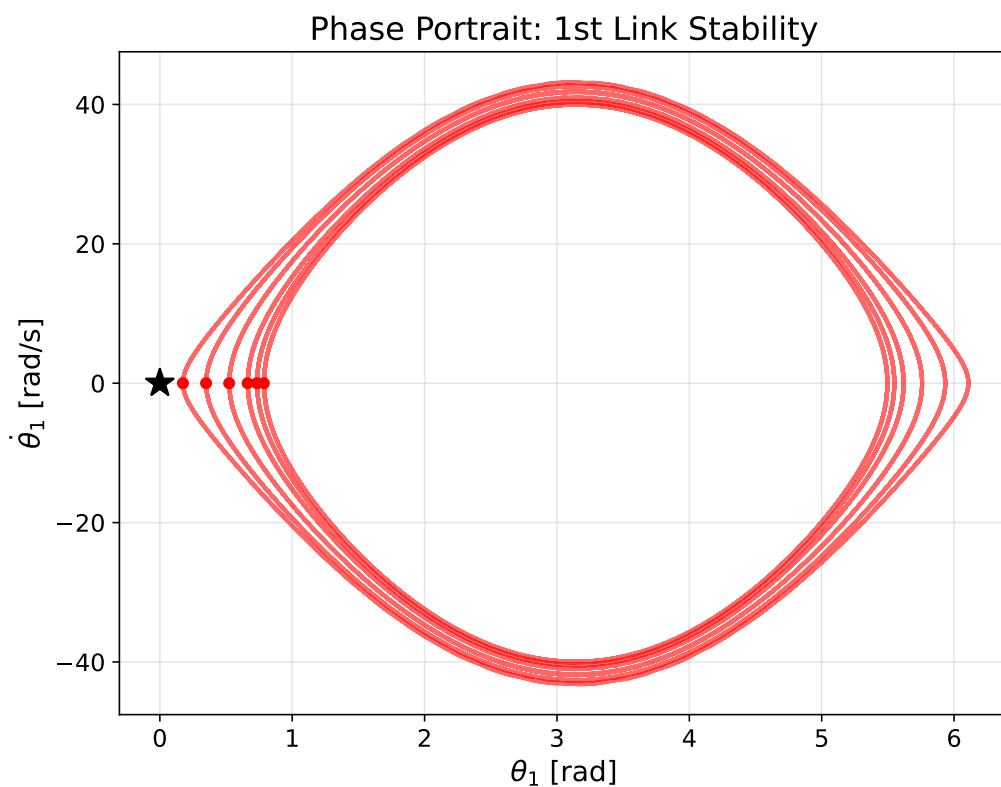


Рис. 2: Фазовый портрет первого звена $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$. Зеленые траектории — устойчивые, красные — неустойчивые.

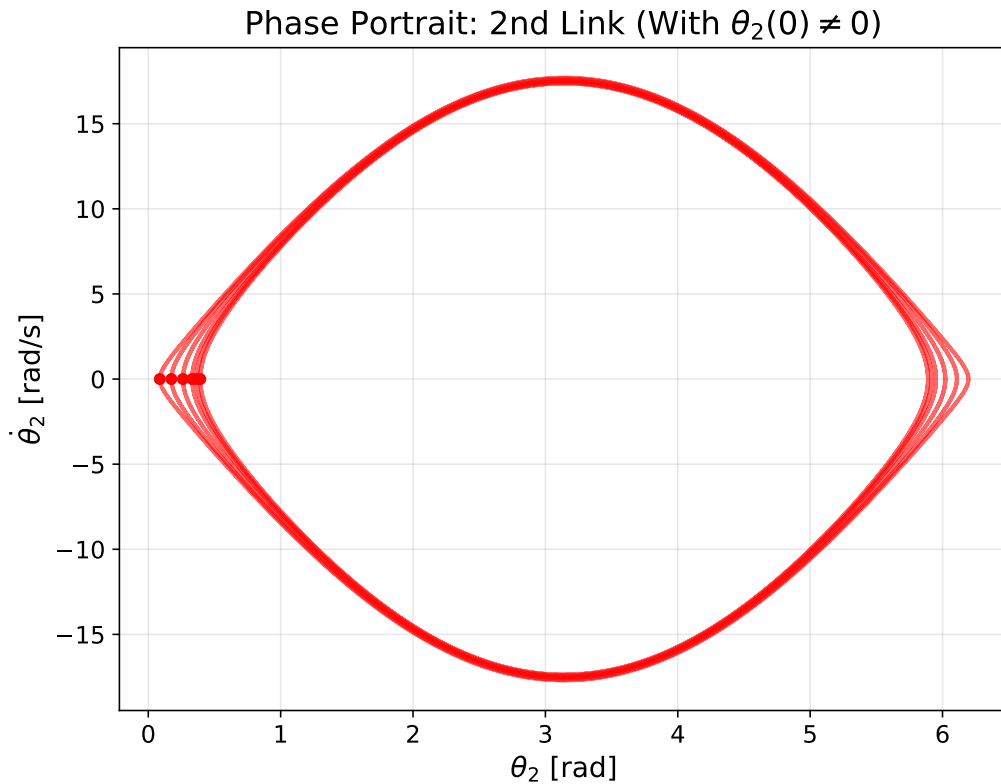


Рис. 3: Фазовый портрет второго звена $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$.

Сепаратриса, разделяющая области устойчивости и неустойчивости, проходит в районе $\theta_1 \approx 0.7$ рад (40°).

3 Исследование робастности

Исследована чувствительность системы к вариациям параметров модели (массы, длины). На Рис. ?? показана зависимость критического угла устойчивости от массы второго звена m_2 .

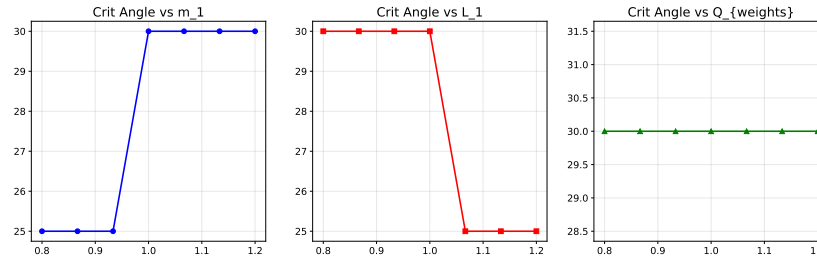


Рис. 4: Зависимость критического угла отклонения от вариации массы m_2 .

Анализ показывает, что увеличение массы второго звена на 20% приводит к сужению области устойчивости примерно на 5° . Система демонстрирует достаточную робастность к малым возмущениям параметров.

4 Заключение

1. Линеаризация системы подтвердила неустойчивость разомкнутого объекта и возможность стабилизации линейным регулятором (выполнение критерия Гурвица). 2. Метод функций Ляпунова обосновал глобальную устойчивость в ограниченной области фазового пространства. 3. Численно и аналитически установлена граница области притяжения $\approx 40^\circ$. 4. Анализ робастности показал, что система сохраняет работоспособность при вариации параметров до $\pm 20\%$, однако критический угол при этом изменяется.