Pesquisa Operacional

Parte 2

Graduação em Engenharia de Produção

DEPROT / UFRGS

Prof. Flavio Fogliatto, *Ph.D.*

O Problema do Transporte

Descrição Geral de um problema de transporte:

1. Um conjunto de *m* pontos de fornecimento a partir dos quais um insumo é embarcado ou remetido.

   O ponto de fornecimento *i* pode fornecer no máximo s_i unidades.

2. Um conjunto de *n* pontos de demanda para os quais o insumo é remetido.

   O ponto de demanda *j* deve receber pelo menos d_j unidades do insumo.

Descrição Geral de um problema de transporte

3. Cada unidade produzida no ponto de fornecimento *i* e remetida ao ponto de demanda *j* incorre num custo de c_{ij}.

Formulação do Problema

Seja x_{ij} = nº de unidades despachadas do ponto de fornecimento *i* para o ponto de demanda *j*.

A formulação genérica do problema do transporte será:

$$Min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \quad (i = 1,\dots,m) \longrightarrow \text{Restrições de fornecimento}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j \quad (j = 1,\dots,n) \longrightarrow \text{Restrições de demanda}$$

$$x_{ij} \ge 0$$

Problema Balanceado

Um problema de transporte é considerado *balanceado* se:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Ou seja, o fornecimento supre toda a demanda.

Num problema balanceado, as restrições são todas <u>igualdades</u>.

Como balancear um problema de transporte quando a capacidade de fornecimento excede a demanda

Cria-se um ponto fictício de demanda. A demanda nesse ponto será igual ao excedente da capacidade.

Como balancear o problema quando a demanda é maior que a capacidade de fornecimento?

Neste caso, o problema não possui soluções viáveis.

Como alternativa, pode-se adicionar um ponto fictício de fornecimento. O custo de fornecimento daquele ponto será igual à penalização incorrida pelo não fornecimento do insumo.

O Tableau de Transporte

					Fornecimento
	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	s_1
	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	s_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	s_m
Demanda	d_1	d_2	$\cdots$	d_n	$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$

Exemplo

Dois reservatórios de água abastecem três cidades. Cada reservatório pode abastecer até 50 milhões de litros de água por dia. Cada cidade necessita receber 40 milhões de litros de água por dia.

Associado a cada milhão de litros de água não fornecido por dia existe uma multa. A multa na cidade 1 é de $20; na cidade 2 é de $18; na cidade 3 é de $23.

Os custos do transporte entre reservatórios e cidades vem dado ao lado...

	Cid.1	Cid.2	Cid.3
Reserv. 1	$7	$8	$8
Reserv. 2	$9	$7	$8

Tableau do Simplex

	Cid. 1	Cid. 2	Cid. 3	*Capacidade*
Res. 1	7	8	8	50
Res. 2	9	7	8	50
Res. Artif.	20	18	23	20
Demanda	40	40	40	

Prática:

A Açosul produz três tipos de aço em suas três plantas. O tempo necessário para fabricar 1 tonelada de aço (independente do tipo) e os custos de fabricação em cada planta vem dado abaixo. Semanalmente, 100 toneladas de cada tipo de aço devem ser produzidas. Cada planta opera 40 horas por semana. Escreva o problema (o objetivo é minimizar o custo de fabricação dos aços) e organize o problema no tableau do transporte.

	Custo			
	Aço 1	Aço 2	Aço 3	*Tempo (min)*
Planta 1	\$60	\$40	\$28	20
Planta 2	\$50	\$30	\$30	16
Planta 3	\$43	\$20	\$20	15

Método do Extremo Noroeste para Determinação da Solução Viável Inicial de um problema de Transporte

Inicie o método considerando a célula (1,1) do tableau. Faça com que x_{11} seja o maior valor possível.

Obviamente, $x_{11} = Min\,(d_1, s_1)$.

Se $x_{11} = s_1$, desconsidere as demais células na primeira linha do tableau, já que nenhuma outra variável básica virá desta linha. Atualize o valor de d_1 para $d_1 - s_1$.

Se $x_{11} = d_1$, desconsidere as demais células na primeira coluna do tableau, já que nenhuma outra variável básica virá desta coluna. Atualize o valor de s_1 para $s_1 - d_1$.

Método do Extremo Noroeste para Determinação da Solução Viável Inicial de um problema de Transporte

Se $x_{11} = s_1 = d_1$, desconsidere as demais células na primeira linha ou na primeira coluna do tableau (mas não ambas). Se você escolher desconsiderar a linha 1, mude d_1 para 0. Se você escolher desconsiderar a coluna 1, mude s_1 para 0.

Repita o procedimento, sempre escolhendo a célula posicionada no extremo noroeste do tableau (desde que ela não esteja em uma linha ou coluna eliminada anteriormente).

Ao cabo de $(m + n - 1)$ iterações chega-se a uma base viável inicial para o problema.

Exemplo

O método do extremo noroeste não utiliza os custos, omitidos nos tableaus abaixo:

5				~~5~~ 0
				10
				15
~~12~~ 7	8	4	6	

$x_{11} = Min\ \{12, 5\} = 5$

Exemplo

5				0
7				~~10~~ 3
				15
~~7~~ 0	8	4	6	

$x_{21} = Min\ \{10, 7\} = 7$

Exemplo

5				0
7	3			~~3~~ 0
				15
0	~~8~~ 5	4	6	

$x_{22} = Min\ \{8, 3\} = 3$

Exemplo

5				0
7	3			0
	5			~~15~~ 10
0	~~5~~ 0	4	6	

$x_{32} = Min\ \{15, 5\} = 5$

Exemplo

5				0
7	3			0
	5	4		~~10~~ 6
0	0	~~4~~ 0	6	

$x_{33} = \textit{Min}\ \{10, 4\} = 4$

Exemplo

Base Inicial Viável

5				0
7	3			0
	5	4	6	~~6~~ 0
0	0	4	~~6~~ 0	

$x_{34} = \textit{Min}\ \{6, 6\} = 6$

Prática:
Determine uma base inicial para o problema anterior.

O Método Simplex para problemas de transporte

Decidindo qual variável não-básica deve entrar na base

- Precisamos calcular os valores correspondentes a linha *z* do tableau do simplex.
- O cálculo desses valores envolve determinar um menor circuito ou *loop* contendo algumas variáveis básicas e a variável não-básica em questão.
- Existe um *loop* único possível para cada variável não-básica.

Exemplo

					Capacidd
	[2] 10	[3] 10	[4]	[9]	20
	[14]	[12] 0	[5] 20	[1] 10	30
	[12]	[15]	[9]	[3] 40	40
Demanda	10	10	20	50	

Base inicial determinada pelo método do extremo noroeste.

Determine a variável não-básica a entrar na base

Calcule os valores correspondentes à linha z para cada variável não-básica:

[2] 10	[3] 10 +	[4]	[9] -17
[14]	[12] 0 -	[5] 20	[1] 10 +
[12]	[15]	[9]	[3] 40

(+1-12+3) = -8 (-8) - 9 = -17

Iniciando com x_{14}:

1. Determine um loop de var. básicas que contenha a var. não-básica.

2. Alterne sinais pos. e neg. nas var. bás. extremas.

3. Some os c_{ij} de acordo com os sinais.

4. Subtraia o coef. de custo da var. não-bás. em questão do resultado

Cálculo para x_{13}

[2] 10	[3] 10 +	[4] -8	[9] -17
[14]	[12] 0 -	[5] 20 +	[1] 10
[12]	[15]	[9]	[3] 40

(+5-12+3) = -4 (-4) - 4 = -8

Repetindo o cálculo p/ as demais var. não-básicas

[2] 10	[3] 10	[4] -8	[9] -17
[14] -3	[12] 0	[5] 20	[1] 10
[12] +1	[15] -1	[9] -2	[3] 40

Num problema de *minimização* a variável mais positiva entra na base.

Para verificar qual variável deve sair da base, determine um *loop* contendo a var. entrante e algumas variáveis básicas

(2) 10	(3) 10	(4) -8	(9) -17
(14) -3	(12) 0	(5) 20	(1) 10
(12) +1	(15) -1	(9) -2	(3) 40

A primeira célula básica do *loop* recebe um sinal positivo, a segunda um sinal negativo, e assim por diante...

Dentre as células positivas, selecione aquela de menor valor: esta é a var. que sairá da base.

+ (2) 10	- (3) 10	(4) -8	(9) -17
(14) -3	+ (12) 0	(5) 20	(1) 10 -
(12) +1	(15) -1	(9) -2	(3) 40 +

A variável entrante assumirá o valor da variável que sai da base.

Atualize o valor das demais células do *loop*: células com sinal + têm seu valor decrescido em θ; células com sinal -, têm seu valor acrescido de θ. A variável entrante entra na base com valor θ.

+ (2) 10	- (3) 10	(4)	(9)
(14)	+ (12)	(5) 20	(1) 10 -
(12) 0	(15)	(9)	(3) 40 +

Novo tableau

Nenhuma var. não-bás. com $z_{ij} - c_{ij} > 0 \Rightarrow$ *tableau ótimo!*

(2) 10	(3) 10	(4) -7	(9) -16
(14) -4	(12) -1	(5) 20	(1) 10
(12) 0	(15) -2	(9) -2	(3) 40

Prática:

• Resolva o problema proposto no Slide 9.
• Resolva o problema do aço.

O Problema do Transbordo

• ***Ponto de fornecimento*** - pode remeter insumos para outros pontos mas não pode receber.

• ***Ponto de demanda*** - pode receber insumos de outros pontos mas não pode remeter.

• ***Ponto de transbordo*** - remete e recebe insumos de outros pontos.

Exemplo

A BITCO monta PCs em Manaus (150 PCs/dia) e Assunción do Paraguai (200 PCs/dia) e remete para suas lojas em São Paulo e Recife, totalizando 130 PCs por loja.

Os PCs são remetidos via aérea. A BITCO suspeita que devido à promoções e uso de outras empresas aéreas, seja mais econômico usar Brasília e Curitiba como pontos de transbordo.

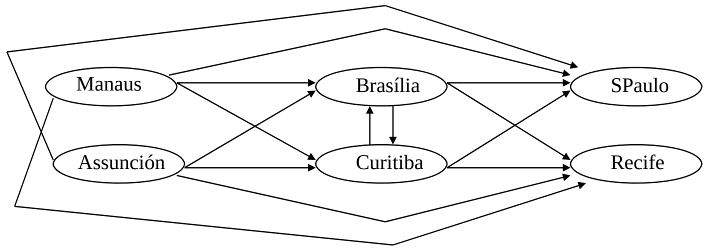
Os custos de transporte por PC vêm dados a seguir.

Custos

De/Para	Man	Ass	Bra	Cur	SP	Rec
Manaus	$0	-	$8	$13	$25	$28
Assuncion	-	$0	$15	$12	$26	$25
Brasilia	-	-	$0	$6	$16	$17
Curitiba	-	-	$6	$0	$14	$16
SPaulo	-	-	-	-	$0	-
Recife	-	-	-	-	-	$0

Exemplo

Deseja-se minimizar o custo do frete:



O problema do transbordo é resolvido como um problema balanceado de transportes

PASSO 1 - Balanceie o problema, se necessário.

Por exemplo:

Capacidade > Demanda

↓

Acrescente pto de demanda artificial → Capacidade = 0 ; Demanda = excedente capacidd.

↓

Cargas são remetidas p/ ponto artificial a custo zero.

Passo 2 - Construa o tableau do transporte

- Uma linha p/ cada ponto de fornecimento e transbordo.
- Uma coluna p/ cada ponto de demanda e transbordo.
- Cada ponto de fornecimento terá capacidade de fornecimento igual a sua capacidade original de fornecimento.
- Cada ponto de demanda terá demanda igual a sua demanda original.

Passo 2 - *Cont.*

- Seja *s* = capacidade total de fornecimento.
- Cada ponto de transbordo terá:

  ☑ capacidade = (capacidade do ponto original) + *s*

  ☑ demanda = (demanda do ponto original) + *s*

Passo 3 - Resolva o problema resultante como um problema de transporte

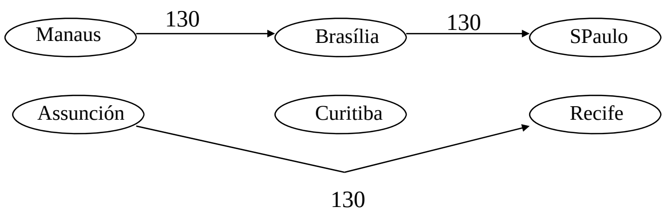
Ao interpretar a solução ótima:

- ☑ ignore remessas aos pontos artificiais;
- ☑ ignore remessas de um ponto para ele mesmo.

No exemplo

	Brasília	Curitiba	SPaulo	Recife	Artificial	*Capacidade*
Manaus	8	13	25	28	0	150
Assuncion	15	12	26	25	0	200
Brasília	0	6	16	17	0	350
Curitiba	6	0	14	16	0	350
Demanda	350	350	130	130	90	

Resultado



Prática

A GM produz carros em SP e POA e tem um depósito (transbordo) em Foz do Iguaçu; a companhia fornece carros para Assunción e Buenos Aires. O custo do frete de um carro entre os pontos de fabricação e venda vem dado abaixo:

De/Para	SP	POA	Foz	Ass	Bue
Spaulo	$0	$140	$100	$90	$225
POA	$145	$0	$111	$110	$119
Foz	$105	$115	$0	$113	$78
Assuncion	$89	$109	$121	$0	-
Buenos	$210	$117	$82	-	$0
	1100	2900		2400	1500

Demanda

Capacidade

Minimize os custos de transporte.

O Problema da Alocação

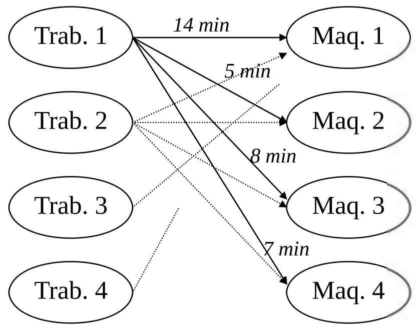
São problemas balanceados de transporte nos quais todas as demandas e todas as capacidades são iguais a 1.

As variáveis do problema são booleanas:

x_{ij} = 1; se o ponto de abastecimento *i* for utilizado para suprir a demanda no ponto de demanda *j*.

x_{ij} = 0; caso contrário.

Exemplo: Aloque trabalhos nas máquinas tal que tempo de setup seja mínimo



Tempo (min)

	Tr.1	Tr.2	Tr.3	Tr.4
Máq.1	14	5	8	7
Máq.2	2	12	6	5
Máq.3	7	8	3	9
Máq.4	2	4	6	10

Formulação

<u>Variáveis de decisão:</u>
x_{ij} = máquina *i* executando trabalho *j*; $i = 1,...,4$ e $j = 1,...,4$.

<u>Função objetivo:</u>

$$Min\ z = 14\,x_{11} + 5\,x_{12} + 8\,x_{13} + 7\,x_{14} + 2\,x_{21} + 12\,x_{22} + 6\,x_{23} + 5\,x_{24} + 7\,x_{31} + 8\,x_{32} + 3\,x_{33} + 9\,x_{34} + 2\,x_{41} + 4\,x_{42} + 6\,x_{43} + 10\,x_{44}$$

<u>Restrições de máquina</u>:

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 1$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 1$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} = 1$

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} = 1$

<u>Restrições de trabalho</u>:

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} = 1$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} = 1$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} = 1$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} = 1$

x_{ij} = 1 ou 0

Para resolver problemas de alocação, usaremos o *Algoritmo Húngaro*

Passo 1 - determine o elemento de custo mínimo em cada linha do tableau dos transportes. Construa um novo tableau subtraindo de cada custo o custo mínimo da linha correspondente. Determine então o custo mínimo em cada coluna. Construa um novo tableau subtraindo de cada custo o custo mínimo da coluna correspondente.

Passo 2 - determine o nº mínimo de linhas (horizontais e/ou verticais) necessárias para cobrir todos os zeros no tableau de custos reduzidos. Se forem necessárias *m* linhas, a resposta ótima é dada pelos zeros cobertos por linhas no tableau. Se menos de *m* linhas forem necessárias, siga para o passo 3.

Algoritmo Húngaro

Passo 3 - determine o menor elemento ≠ 0 dentre os elementos não cobertos por linhas no tableau; seja *k* o valor deste elemento. Subtraia *k* de cada elemento não-coberto do tableau e adicione *k* a cada elemento coberto por duas linhas no tableau. Volte ao passo 2.

Nota - somente problemas balanceados podem ser resolvidos pelo algoritmo húngaro. Se um problema for não balanceado, adicione pontos artificiais de demanda ou capacidade.

Exemplo... →

Exemplo

				Mínimo da linha
14	5	8	7	5
2	12	6	5	2
7	8	3	9	3
2	4	6	10	2

Novo tableau após subtração dos mínimos de linha

	9	0	3	2
	0	10	4	3
	4	5	0	6
	0	2	4	8
Mín. da coluna	0	0	0	2

Novo tableau após subtração dos mín. das colunas

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

3 linhas.
m = 4, logo procedemos c/ passo 3.

k = 1

Subtraindo e somando k nas devidas células...

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

Note que o mínimo das linhas e colunas é 0!

4 linhas. Como m = 4, temos uma solução ótima.

Como identificar a solução ótima

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

O único zero coberto na col. 3 é x_{33}. Logo, x_{33} = 1, e a col. 3 e linha 3 não podem mais ser usadas.

O único zero coberto na col. 2 é x_{12}. Logo, x_{12} = 1, e a col. 2 e linha 1 não podem mais ser usadas.

Sendo assim, x_{24} = 1, e a linha 2 não pode mais ser usada. Logo, x_{41} = 1.

Prática

Um treinador necessita formar um time de nadadoras para competir em uma prova olímpica de 400 metros medley. As nadadoras apresentam as seguintes médias de tempo em cada estilo:

	Tempo (s) /100 m			
Nadadora	Livre	Peito	Golfinho	Costas
1	54	54	51	53
2	51	57	52	52
3	50	53	54	56
4	56	54	55	53

Qual nadadora deve nadar qual estilo?

O PROBLEMA DUAL

- Todo o problema de programação linear possui um problema dual correspondente.
- Chamaremos o problema original de "***primal***" e o problema dual de "***dual***".

Primal	Dual
Max	Min
Min	Max

- Variáveis do problema primal $\rightarrow$ $z, x_1, x_2,\ldots,x_n$.
- Variáveis do problema dual $\rightarrow$ $w, y_1, y_2,\ldots,y_m$.

Escrevendo o *dual* de um problema de progr. linear

$$
\begin{aligned}
\textbf{Max } z = {} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
\textbf{s.a:}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{Min } w = {} & b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \\
\textbf{s.a:}\quad & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\
& a_{12}y_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\
& \vdots \\
& a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n
\end{aligned}
$$

EXEMPLO

Primal

$$
\begin{aligned}
\textbf{Max } z = {} & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\textbf{s.a:}\quad & 8x_1 + 6x_2 + 1x_3 \le 48 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20 \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
\textbf{Min } w = {} & 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 \\
\textbf{s.a:}\quad & 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 60 \\
& 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \ge 30 \\
& 1y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \ge 20 \\
& y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

A $i^{ésima}$ restrição do dual corresponde à $i^{ésima}$ variável do primal

Usando a tabela abaixo, pode-se achar o dual de qualquer primal:

	Min		Max	
Variáveis	≥0	↔	≤	*Restrições*
	≤0	↔	≥	
	Irrestr.	↔	=	
Restrições	≥	↔	≥0	*Variáveis*
	≤	↔	≤0	
	=	↔	Irrestr.	

OUTRO EXEMPLO

Primal

$$
\begin{aligned}
\textbf{Max } z = {} & 2x_1 + x_2 \\
\textbf{s.a:}\quad & 2x_1 + x_2 = 2 \\
& 2x_1 - x_2 \ge 3 \\
& x_1 - x_2 \le 1 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \text{ irrestr.}
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
\textbf{Min } w = {} & 2y_1 + 3y_2 + 1y_3 \\
\textbf{s.a:}\quad & 2y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2 \\
& y_1 - y_2 - y_3 = 1 \\
& y_1 \text{ irrestr.},\ y_2 \le 0,\ y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DO PROBLEMA DUAL

Considere o exemplo:

$$
\begin{aligned}
\textbf{Max } z = {} & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\textbf{s.a: } & 8x_1 + 6x_2 + 1x_3 \le 48 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20 \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Correspondente à modelagem matemática do seguinte problema:

Insumo	Escrivaninha	*Produto* Mesa	Cadeira	*Qtidd de Insumo*
Tábua	8	6	1	48
Acabamto	4	2	1.5	20
Carpintaria	2	1.5	0.5	8
Lucro Venda	\$60	\$30	\$20	

O DUAL DESTE PROBLEMA É:

$$
\begin{aligned}
\textbf{Min } w = {} & 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 \\
\textbf{s.a: } & 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 60 \quad \rightarrow \text{Escrivaninha} \\
& 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \ge 30 \quad \rightarrow \text{Mesa} \\
& 1y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \ge 20 \quad \rightarrow \text{Cadeira} \\
& y_1, \quad y_2, \quad y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

- Restrições associadas com escrivaninhas, mesas e cadeiras, respectiv.
- y_1 associado com tábuas; y_2 com acabam^{to}; y_3 com carpintaria.

Suponha uma situação onde exista escassez de insumos. Um outro fabricante de móveis deseja comprar os insumos disponíveis na fábrica de escrivaninhas, mesas e cadeiras.

A pergunta-chave é: qual o ágio máximo a ser cobrado pelos insumos?

Definindo as variáveis do problema *dual*

- y_1 = ágio máximo cobrado por uma tábua de madeira;
- y_2 = ágio máximo cobrado por 1 hora de acabamento;
- y_3 = ágio máximo cobrado por 1 hora de carpintaria

O ágio total a ser cobrado por estes insumos corresponderá à função objetivo:

$$\text{Min } w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

- Note que a função objetivo busca minimizar o custo de compra: este é o ponto de vista <u>do comprador</u>.

O comprador deseja o menor preço, mas o preço deve ser atraente o suficiente para induzir o fabricante de escrivaninhas a vender seus insumos

<u>Assim</u>:

$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 60 \quad \rightarrow \textit{Restrição das escrivaninhas}$$

Ou seja, se comprarmos todos os insumos nas quantidades necessárias para produzir uma escrivaninha, o ágio a ser pago deve ser, no mínimo, o que o fabricante lucraria com a venda daquele produto.

<u>O mesmo ocorre com as outros produtos</u>:

$$
\begin{aligned}
6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 &\ge 30 \quad \rightarrow \textit{Restr. das mesas} \\
1y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 &\ge 20 \quad \rightarrow \textit{Restr. das cadeiras}
\end{aligned}
$$

Para determinarmos o menor ágio de compra dos insumos que mantenha a venda desses insumos interessantes para o fabricante, devemos resolver o problema dual

- As variáveis y_1, y_2, y_3 são normalmente denominadas ***preços-sombra*** dos insumos.

- Por definição, o preço-sombra da $i^{ésima}$ restrição corresponde à melhoria no valor z da função objetivo ocasionada pelo incremento de uma unidade no lado direito da restrição [ou seja, de b_i para $(b_i + 1)$].

PRÁTICA:

Determine o dual do seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned}
\text{Max } z &= x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.: } & 3x_1 + x_2 \le 6 \\
& 2x_1 + x_2 = 5 \\
& x_1, \quad x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Como ler a solução ótima do dual a partir da linha 0 (ou linha *z*) do tableau ótimo do primal
Caso* 1 - *Primal* = *Max

Para resolver o problema abaixo:

$$\begin{aligned}
\textbf{Max } z = \ & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\
\textbf{s.a: } \ & 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 15 \longrightarrow \text{Adicionar var. folga } f_1 \\
& 2x_2 - x_3 \ge 5 \longrightarrow \text{Adicionar var. excesso } e_2 \text{ e art. } a_2 \\
& 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 10 \longrightarrow \text{Adicionar var. artificial } a_3 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

- A base inicial será formada por $B = \{ f_1, a_2, a_3\}$.
- Usaremos o Método do M-Grande para solucionar este problema.
- O tableau ótimo vem dado a seguir...

Tableau Ótimo

	x_1	x_2	x_3	f_1	e_2	a_2	a_3	RHS
z	0	0	0	$^{51}/_{23}$	$^{58}/_{23}$	$M-^{58}/_{23}$	$M+^{9}/_{23}$	$^{565}/_{23}$
x_3	0	0	1	$^{4}/_{23}$	$^{5}/_{23}$	$^{-5}/_{23}$	$^{-2}/_{23}$	$^{15}/_{23}$
x_2	0	1	0	$^{2}/_{23}$	$^{-9}/_{23}$	$^{9}/_{23}$	$^{-1}/_{23}$	$^{65}/_{23}$
x_1	1	0	0	$^{9}/_{23}$	$^{17}/_{23}$	$^{-17}/_{23}$	$^{7}/_{23}$	$^{120}/_{23}$

Regras para identificação da solução ótima dual na linha 0 (ou *z*) do tableau ótimo do primal (*Max*)

Valor ótimo da var. dual y_i qdo restrição i é do tipo $\leq$ ⟶ Coeficiente de f_i na linha 0 do tableau ótimo

Valor ótimo da var. dual y_i qdo restrição i é do tipo $\geq$ ⟶ -(Coeficiente de e_i) na linha 0 do tableau ótimo

Valor ótimo da var. dual y_i qdo restrição i é do tipo = ⟶ (Coeficiente de a_i na linha 0 do tableau ótimo) - M

No tableau ótimo do exemplo anterior:

					y_1	$-y_2$		y_3-M	
	z	x_1	x_2	x_3	f_1	e_2	a_2	a_3	RHS
z	1	0	0	0	$^{51}/_{23}$	$^{58}/_{23}$	M-$^{58}/_{23}$	M+$^{9}/_{23}$	$^{565}/_{23}$
x_3	0	0	0	1	$^{4}/_{23}$	$^{5}/_{23}$	$^{-5}/_{23}$	$^{-2}/_{23}$	$^{15}/_{23}$
x_2	0	0	1	0	$^{2}/_{23}$	$^{-9}/_{23}$	$^{9}/_{23}$	$^{-1}/_{23}$	$^{65}/_{23}$
x_1	0	1	0	0	$^{9}/_{23}$	$^{17}/_{23}$	$^{-17}/_{23}$	$^{7}/_{23}$	$^{120}/_{23}$

Ou seja, o problema dual possui a seguinte solução ótima:

$$y_1 = {}^{51}/_{23}; \quad y_2 = {}^{-58}/_{23}; \quad y_3 = {}^{9}/_{23}$$

Conferindo o resultado na função objetivo do problema dual

$$\text{Min } w = 15y_1 + 5y_2 + 10y_3$$

$$y_1 = {}^{51}/_{23}; \quad y_2 = {}^{-58}/_{23}; \quad y_3 = {}^{9}/_{23}$$

$$w = {}^{565}/_{23}$$

Regras para identificação da solução ótima dual na linha 0 (ou *z*) do tableau ótimo do primal (*Min*)

Valor ótimo da var. dual y_i qdo restrição i é do tipo $\leq$ ⟶ Coeficiente de f_i na linha 0 do tableau ótimo

Valor ótimo da var. dual y_i qdo restrição i é do tipo $\geq$ ⟶ -(Coeficiente de e_i) na linha 0 do tableau ótimo

Valor ótimo da var. dual y_i qdo restrição i é do tipo = ⟶ (Coeficiente de a_i na linha 0 do tableau ótimo) + M

PRÁTICA:

Considere o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z &= -2x_1 - 1x_2 + x_3 \\
\text{s.t.: } & x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\
& x_2 + x_3 \geq 2 \\
& x_1 + x_3 = 1 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Determine o dual deste problema;

(b) O problema, acrescido de variáveis de folga, excesso e variáveis artificiais é resolvido via Simplex. O problema no formato padrão e a linha 0 do tableau ótimo vêm dados abaixo. Determine a solução ótima para o dual deste problema.

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z &= -2x_1 - 1x_2 + x_3 \\
\text{s.t.: } & x_1 + x_2 + x_3 + f_1 = 3 \\
& x_2 + x_3 - e_2 + a_2 = 2 \\
& x_1 + x_3 + a_3 = 1 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ f_1,\ e_2,\ a_2,\ a_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Linha 0 do tableau ótimo

	z	x_1	x_2	x_3	f_1	e_2	a_2	a_3	RHS
Z	1	4	0	0	0	1	$M - 1$	$M + 2$	0

Modelos de Redes

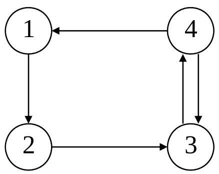
Definições básicas:

Grafos ou Redes —*Defnido por*→ *Nós* (ou vértices) / *Arcos*

<u>Arco</u> - par ordenado de vértices; representa uma possível direção de movimento entre vértices

(j, k) = arco representando o movimento do nó j (nó inicial) para o nó k (nó final).

Exemplo de Rede



Nós = {1, 2, 3, 4}

Arcos = {(1,2), (2,3), (3,4)
(4,3), (4,1)}

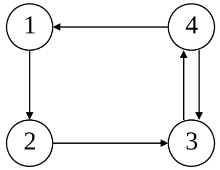
Correntes, Trilhas e Circuitos

CORRENTE = sequência de arcos tal que cada arco apresenta exatamente um vértice em comum com o arco anterior.

TRILHA = sequência de arcos tal que o nó terminal de cada arco é idêntico ao nó inicial do arco seguinte.

CIRCUITO = trilha finita em que o nó terminal coincide com o nó inicial.

No exemplo...



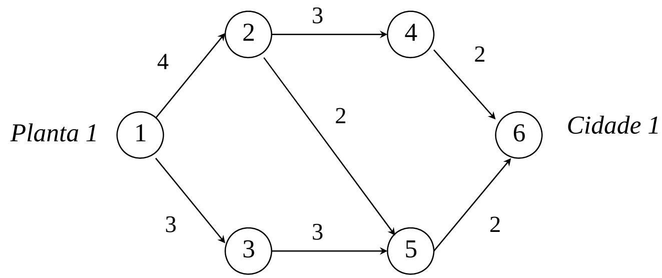
Ex. de corrente = (1,2) - (2,3) - (4,3)

Ex. de trilha = (1,2) - (2,3) - (3,4)

Ex. de circuito = (1,2) - (2,3) - (3,4) - (4,1)

Problemas de determinação da trilha mais curta entre dois nós
Exemplo 1

- Desejamos remeter energia elétrica da planta 1 à cidade 1.
- A rede abaixo apresenta as distâncias entre pares de pontos conectados (incluindo subestações).
- Desejamos determinar a trilha mais curta entre a planta e a cidade.



Problemas de determinação da trilha mais curta entre dois nós
Exemplo 2

Eu comprei um carro novo por $12000. Os custos de manutenção e o valor na troca do carro em um determinado ano dependem da idade do carro no começo daquele ano.

Idade do Carro (anos)	*Custo anual de manutenção*
0	2000
1	4000
2	5000
3	9000
4	12000

Idade do Carro (anos)	*Valor na troca*
1	7000
2	6000
3	2000
4	1000
5	0

Exemplo 2

- O preço do carro novo em qualquer instante no tempo será $12000.

- Meu objetivo é minimizar o custo líquido:

(custo de compra) + (custos manutenção) - (valor recebido na troca)

durante os próximos cinco anos.

- Formule este problema como um problema de determinação da trilha mais curta.

Solução

- O problema terá 6 nós (i = 1, 2, …, 6).

- Arco (i, j) = comprar o carro novo no início do ano i e mantê-lo até o início do ano j.

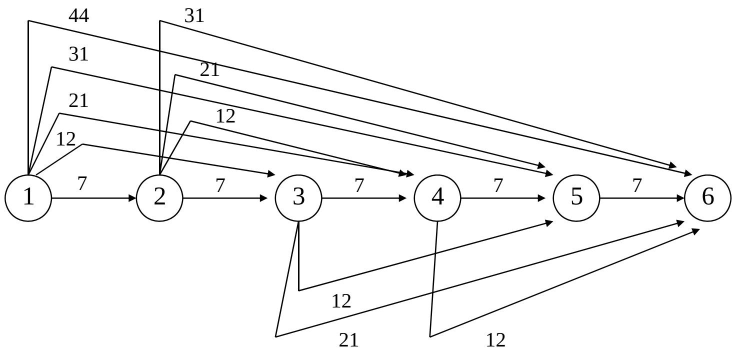
- Custo c_{ij} = (custo de manutenção incorrido durante os anos i, i+1,…,j-1)
  +
  (custo de compra do carro no início do ano i)
  -
  (valor do carro na troca no início do ano j)

Solução

c_{12} = 2 + 12 - 7 = 7
c_{13} = 2 + 4 + 12 - 6 = 12
c_{14} = 2 + 4 + 5 + 12 - 2 = 21
c_{15} = 2 + 4 + 5 + 9 + 12 - 1 = 31
c_{16} = 2 + 4 + 5 + 9 + 12 + 12 - 0 = 44

e assim por diante...

Rede



Algoritmo de Dijkstra

- Todas as distâncias diretas entre dois nós da rede são conhecidas e não-negativas.

- Todos os nós da rede recebem um rótulo *permanente* ou *temporário*.

- Um rótulo *temporário* representa o limite superior da menor distância entre o nó 1 e aquele nó.

- Um rótulo *permanente* corresponde à menor distância entre o nó 1 e aquele nó.

Passos do Algoritmo

Passo Inicial:

• O nó inicial recebe um rótulo permanente com valor zero.

• Todos os demais nós têm rótulos temporários com valor igual à distância direta entre o nó inicial e o nó em questão.

• Nós com rótulos temporários e não conectados diretamente com o nó inicial recebem valor $\propto$.

• Selecione, dentre os nós c/ rótulo temporário, aquele que apresentar o menor valor; esse nó passará a ter rótulo permanente.

• Em caso de empate, escolha aleatoriamente um dos nós de menor valor.

Passo 1

• Seja *k* o nó mais recente cujo rótulo foi transformado em permanente. Considere os demais nós (com rótulos temporários).

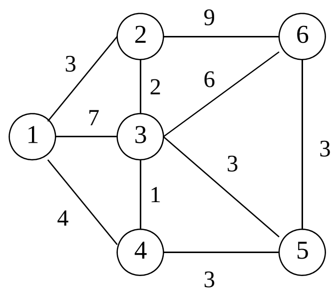
• Compare o valor de cada nó temporário com a soma (valor do nó + distância direta entre o nó *k* e o nó em questão). O mínimo entre esses valores será o novo valor do nó em questão.

Passo 2

•Selecione o nó com menor valor dentre aqueles com rótulo temporário; transforme seu rótulo em permanente.

• Se o nó escolhido acima for o nó final, pare. Caso contrário, retorne ao passo 1.

Exemplo



• Todos os arcos são $\longleftrightarrow$

• Deseja-se encontrar a trilha mais curta entre os nós 1 e 6.

Comece fazendo com que o nó 1 tenha um rótulo permanente = 0

Todos os demais nós recebem rótulos provisórios iguais a distância direta entre o nó em questão e o nó 1.

Assim:

** indica rótulo permanente.*

$L\ (0) = [0^*,\ 3,\ 7,\ 4,\ \propto,\ \propto]$

O menor dos rótulos temporários vira permanente (nó 2).

- A menor distância entre nós 1 e 2 é = 3.

- Os novos rótulos são:

$L\ (0) = [0^*,\ 3^*,\ 7,\ 4,\ \propto,\ \propto]$

Para todos os demais nós (j = 3,4,5,6), calcule o número dado pela soma do valor no nó 2 (=3) e a distância direta entre o nó 2 e o nó j em questão

- Compare o número obtido com o rótulo temporário do nó j; o menor dentre esses valores passa a ser o novo rótulo temporário de j.

- Para $j = 3 \rightarrow min\ (3+2, 7) = 5$
- Para $j = 4 \rightarrow min\ (3+\propto, 4) = 4$
- Para $j = 5 \rightarrow min\ (3+\propto, \propto) = \propto$
- Para $j = 6 \rightarrow min\ (3+9, \propto) = 12$

- Os novos rótulos são:

$L\ (2) = [0^*,\ 3^*,\ 5,\ 4,\ \propto,\ 12]$

O menor dos rótulos temporários vira permanente (nó 4).

- A menor distância entre nós 1 e 4 é = 4.

- Os novos rótulos são:

$L\ (2) = [0^*,\ 3^*,\ 5,\ 4^*,\ \propto,\ 12]$

Para todos os demais nós (j = 3,5,6), calcule o número dado pela soma do valor no nó 4 (=4) e a distância direta entre o nó 4 e o nó j em questão

- Compare o número obtido com o rótulo temporário do nó j; o menor dentre esses valores passa a ser o novo rótulo temporário de j.

- Para $j = 3 \rightarrow$ *min* (4+1, 5) = 5
- Para $j = 5 \rightarrow$ *min* (4+3, ∞) = 7
- Para $j = 6 \rightarrow$ *min* (4+∞, 12) = 12

- Os novos rótulos são:

L (3) = [0*, 3*, 5, 4*, 7, 12]

O menor dos rótulos temporários vira permanente (nó 3).

- A menor distância entre nós 1 e 3 é = 5.
- Os novos rótulos são:

L (3) = [0*, 3*, 5*, 4*, 7, 12]

Para todos os demais nós (j = 5,6), calcule o número dado pela soma do valor no nó 3 (=5) e a distância direta entre o nó 3 e o nó j em questão

- Compare o número obtido com o rótulo temporário do nó j; o menor dentre esses valores passa a ser o novo rótulo temporário de j.

- Para $j = 5 \rightarrow$ *min* (5+3, 7) = 7
- Para $j = 6 \rightarrow$ *min* (5+6, 12) = 11

- Os novos rótulos são:

L (4) = [0*, 3*, 5*, 4*, 7, 11]

O menor dos rótulos temporários vira permanente (nó 5).

- A menor distância entre nós 1 e 5 é = 7.
- Os novos rótulos são:

L (4) = [0*, 3*, 5*, 4*, 7*, 11]

Para todos os demais nós (j =6), calcule o número dado pela soma do valor no nó 5 (=7) e a distância direta entre o nó 5 e o nó j em questão

- Compare o número obtido com o rótulo temporário do nó j; o menor dentre esses valores passa a ser o novo rótulo temporário de j.

- Para j = 6 $\rightarrow$ *min* (7+3, 11) = 10

- Os novos rótulos são:

L (4) = [0*, 3*, 5*, 4*, 7*, 10]

O menor dos rótulos temporários vira permanente (nó 6).

- A menor distância entre nós 1 e 6 é = 10.

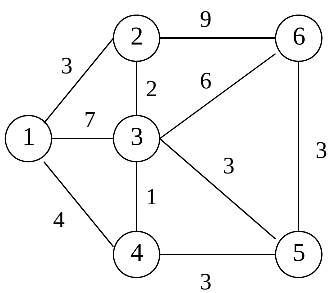
- Os novos rótulos são:

L (5) = [0*, 3*, 5*, 4*, 7*, 10*]

- O algoritmo termina e a menor trilha entre 1 e 6 pode ser determinada.

Determinando a trilha mais curta

- Comece do nó de destino (6). Calcule a diferença entre o rótulo permanente do nó 6 e os demais nós diretamente ligados a ele.



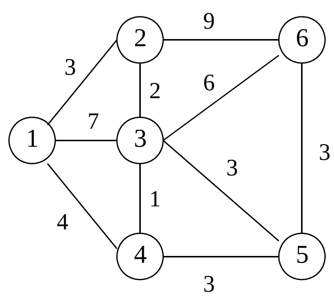
L (5) = [0*, 3*, 5*, 4*, 7*, 10*]

Nós 2,3 e 5 estão diretamente ligados a 6.

Assim:

- (6$\rightarrow$5): 10 - 7 = 3
- (6$\rightarrow$3): 10 - 5 = 4
- (6$\rightarrow$2): 10 - 3 = 7

Se a diferença (6$\rightarrow$$j$) for igual ao comprimento real do arco (j, 6), escolha j como ponto intermediário

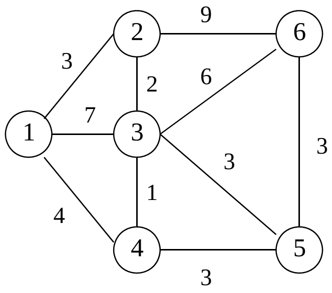


Diferenças / Arcos:

- (6$\rightarrow$5) = 3 / (5,6) = 3
- (6$\rightarrow$3) = 4 / (3,6) = 6
- (6$\rightarrow$2) = 7 / (2,6) = 9

Assim, o primeiro nó intermediário no caminho entre 6 e 1 é o nó 5.

Repita o procedimento para o nó 5



Nós 3 e 4 estão diretamente ligados a 5.

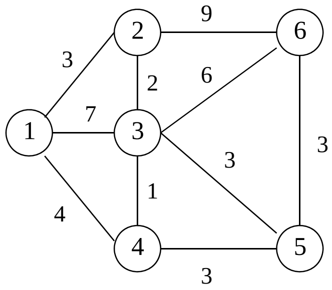
L (5) = [0*, 3*, 5*, 4*, 7*, 10*]

Diferenças:

• (5→4): 7 - 4 = 3

• (5→3): 7 - 5 = 3

Se a diferença (5→*j*) for igual ao comprimento real do arco (*j*, 5), escolha *j* como ponto intermediário



Diferenças / Arcos:

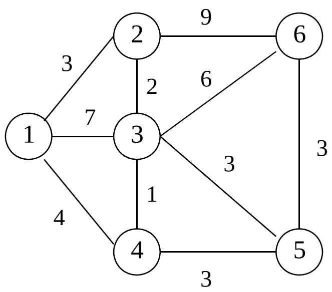
• (5→4) = 3 / (4,5) = 3

• (5→3) = 2 / (3,5) = 3

Assim, o segundo nó intermediário no caminho entre 6 e 1 é o nó 4.

Caminho parcial: 6 → 5 → 4

Repita o procedimento para o nó 4



Nós 3 e 1 estão diretamente ligados a 4.

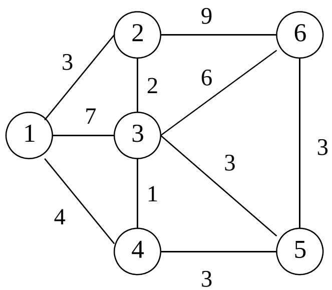
L (5) = [0*, 3*, 5*, 4*, 7*, 10*]

Diferenças:

• (4→3): 4 - 5 = -1

• (4→1): 4 - 0 = 4

Se a diferença (4→*j*) for igual ao comprimento real do arco (*j*, 4), escolha *j* como ponto intermediário



Diferenças / Arcos:

• (4→3) = -1 / (3,4) = 1

• (4→1) = 4 / (1,4) = 4

Como o nó 1 é o nó de destino, determinamos a trilha mais curta entre os nós 1 e 6.

Trilha Mais Curta: 6 → 5 → 4 → 1

Prática

Use o algoritmo de Dijkstra para resolver os problemas nos slides 79 e 84.