ראיה חישובית גיאומטרית

שעורי בית #1.

מגיש - דקל מתן, 200686756.

בעיה 1:

תרגיל 6- צריך להראות שאלמנט שטח של פונקציה $z(x,y)$ הוא $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$.

נגדיר $V=(x,y,z(x,y))$, $V\in\mathbb{R}^3$ - בצורה פרמטרית של המשטח.

אלמנט שטח בצורה הפרמטרית של המשטח הוא:

$$\|V_x\times V_y\|_2=\left\|\begin{pmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\1&0&z_x\\0&1&z_y\end{pmatrix}\right\|_2=\|(-z_x,-z_y,1)\|_2$$

$$=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$$

כנדרש.

כעת, יש לחשב את משוואות EL עבור ~~אלמנט שטח~~ פונקציונל של אלמנט שטח: $\int da$.

$$\underset{\text{פונקציונל}}{L}=\int da=\iint_\Omega\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy=\iint_\Omega F(z,z_x,z_y)\,dx\,dy$$

נגדיר: $\tilde{z}=z+\varepsilon\eta$ ותנאי התחלה $\Omega=[(x_0,y_0),(x_1,y_1)]$

כאשר $z=z(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$

לכן:

$$\tilde{z}_x=z_x+\varepsilon\eta_x$$
$$\tilde{z}_y=z_y+\varepsilon\eta_y$$

מציאת אקסטרמום של הפונקציונל:

$$\frac{dL}{d\varepsilon}=\frac{d}{d\varepsilon}\iint_\Omega F(\tilde{z},\tilde{z}_x,\tilde{z}_y)\,dx\,dy=\iint_\Omega\frac{d}{d\varepsilon}F(\tilde{z},\tilde{z}_x,\tilde{z}_y)\,dx\,dy=$$

$$\overset{\text{כלל השרשרת}}{=}\iint_\Omega F_{\tilde{z}}\cdot\eta+F_{\tilde{z}_x}\eta_x+F_{\tilde{z}_y}\eta_y\,dx\,dy$$

$$\overset{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=}\iint_\Omega F_{\tilde{z}}\eta\,dx\,dy+\underbrace{\int_{y_0}^{y_1}\left[F_{\tilde{z}_x}\cdot\eta\right]_{x_0}^{x_1}dy}+\underbrace{\int_{x_0}^{x_1}\left[F_{\tilde{z}_y}\eta\right]_{y_0}^{y_1}dx}$$

$$-\iint_\Omega\left(\frac{d}{dx}F_{\tilde{z}_x}+\frac{d}{dy}F_{\tilde{z}_y}\right)\cdot\eta\,dx\,dy$$

* כמו בכיתה, נניח תנאי שפה $=0$ ונקבל:

$$\iint \eta\cdot\left[F_{\tilde z}-\left(\frac{d}{dx}F_{\tilde z_x}+\frac{d}{dy}F_{\tilde z_y}\right)\right]dx\,dy=0$$

והשוויון זה מתקיים לכל η, נקבל

$$F_{\tilde z}-\frac{d}{dx}F_{\tilde z_x}-\frac{d}{dy}F_{z_y}=0$$

משוואת EL עבור הפונקציונל הנתון.

נחזור למשוואות של גל (מינימום) השטח $F(z,z_x,z_y)=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$:

$$F_z=0 \qquad F_{z_x}=-\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \qquad F_{z_y}=-\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\left(\frac{\nabla z}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)=0$$

פתרונות מהמ׳ כה יתנו את האקסטרמום לשטח של משטח בצורה של הצגה הנ"ל.

<u>תרגיל 10</u> – בסימון $\bar{x}=(x_1,x_2\dots x_n)$: $\quad u(x_1,x_2\dots x_n;t)\triangleq u(\bar{x};t)$

הגרעין של משוואת החום הוא $K(\bar{x};t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\cdot e^{-\frac{\|\bar{x}\|_2^2}{4t}}$

$\boxed{u(\bar{x};t)=K(\bar{x};t)*u_0}$, כאשר u_0 - תנאי התחלה.

כי הוא פותר את משוואת החום:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(K(\bar{x};t)*u_0\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}K(\bar{x};t)\right)*u_0 \underset{\text{לפי משוואת החום}}{=} \left(\Delta K(\bar{x};t)\right)*u_0$$

$$=\Delta\left(K(\bar{x};t)*u_0\right)$$

בדיקת נכונות תנאי התחלה:

$\lim_{t\to 0} K(\bar{x};t)=\delta(\bar{x})$ // פונקציית דלתא של דירק.

$\Rightarrow u_0=\delta(\bar{x})*u_0$ אכן מתקיים:

$\frac{\partial}{\partial t}u(\bar{x};t)=\Delta u(\bar{x};t)$ ועבור $t>0$

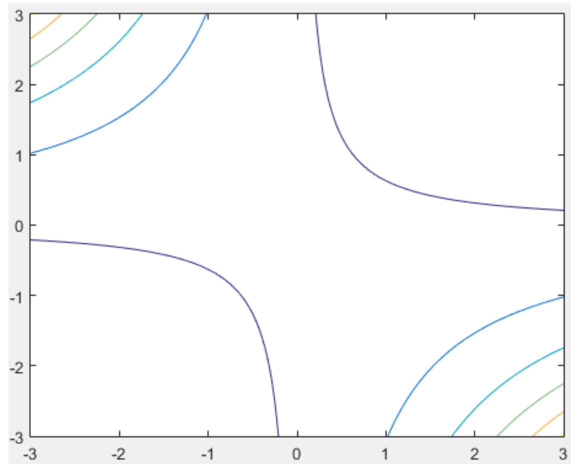
<u>תרגיל 11</u> – גרעין האיזוטרופי

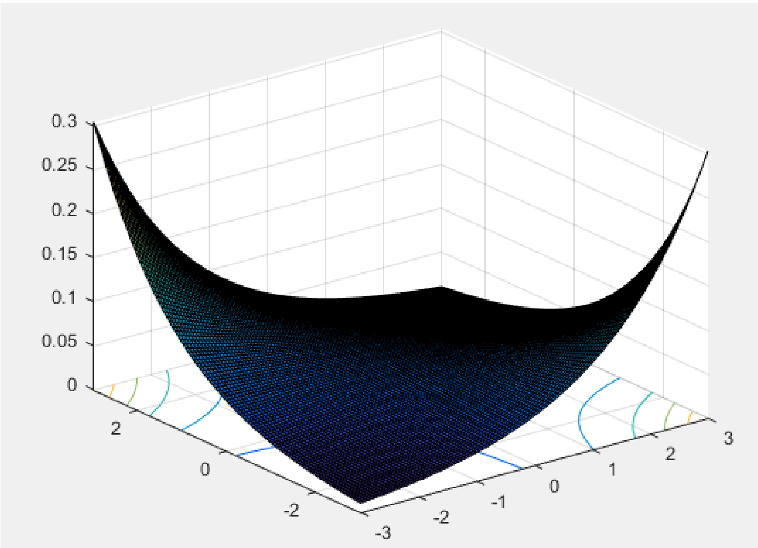
$$K(\bar{x};t)=\frac{1}{4\pi t\sqrt{\det(M)}}\cdot e^{-\frac{(\bar{x}^T M^{-1}\bar{x})}{4t}}$$

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}$$

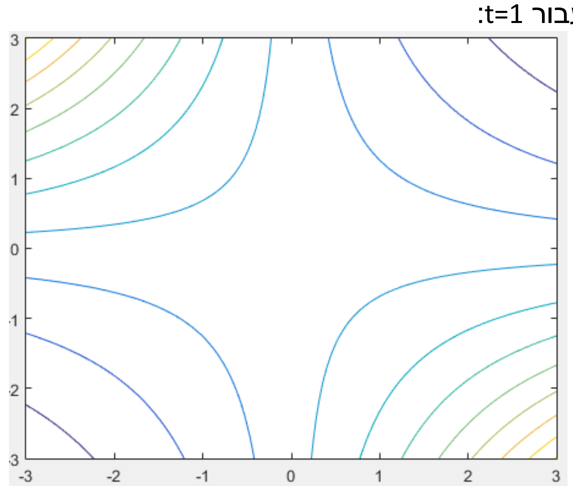
11 – תוצאות של קווי המתאר במטלאב עבור בחירה של $M = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

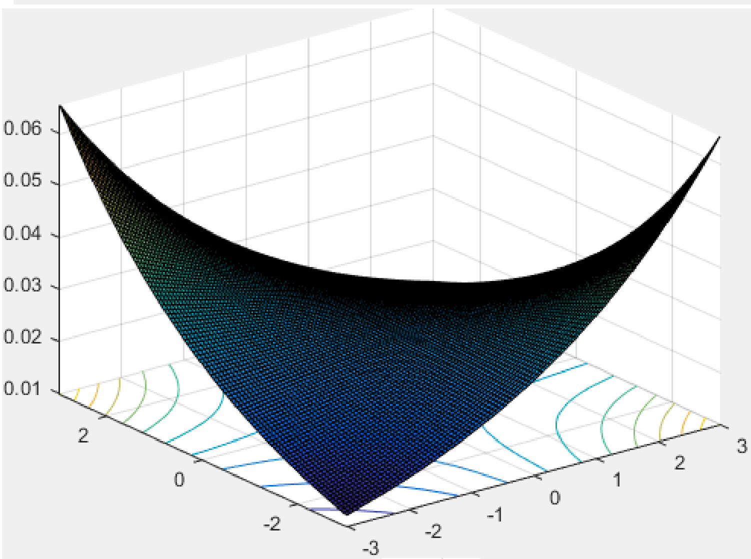
עבור t=0.5:



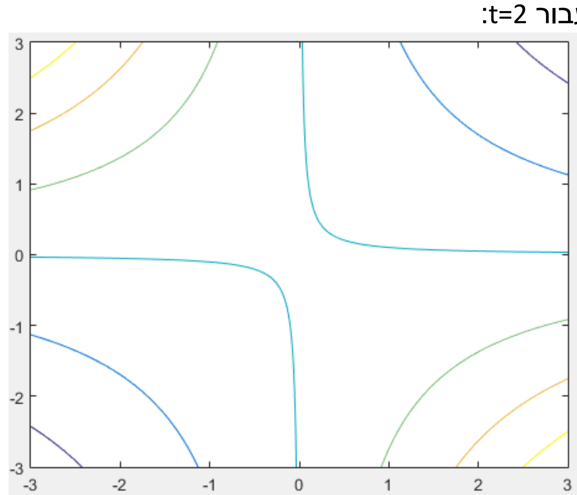


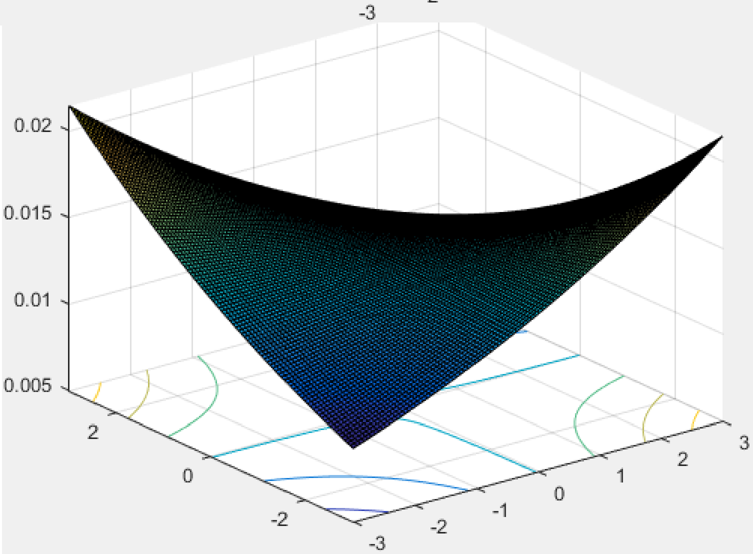
עבור t=1:





עבור t=2:





2 מינימיזציה של פונקציונלים

(א) סכור

$$L_1 = \int_0^1 \left[3(u')^2 + 2u + 2x\right] dx$$

גם תנאי שפה $u_0 = u_1 = 1$.

$$EL: \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{\partial L}{\partial u} \Rightarrow 6u'' = 2 \Rightarrow u'' = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{6}x^2 + ax + b$$

$u(0) = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$

$u(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} + a + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{6}}$

$$\Rightarrow \boxed{u(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 1}$$

(ב)

$$L_2 = \int_1^2 \frac{(u')^2}{x^3} dx \qquad u(1) = 0, \quad u(2) = 1$$

$$EL \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{2u'}{x^3}\right) = 0 \underset{\text{אינטגרציה}}{\Rightarrow} \frac{2u'}{x^3} = C_0 \Rightarrow u' = C_1 x^3$$

$$u = C_2 x^4 + C_3$$

$$\left.\begin{array}{l} u(1) = C_2 + C_3 = 0 \\ u(2) = 16C_2 + C_3 = 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} C_2 = \frac{1}{15} \\ C_3 = -\frac{1}{15} \end{array}$$

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{15}x^4 - \frac{1}{15}}$$

(ג)

$$L_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{2k}}} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - k^2(x+y)^2 \, dt$$

$x(0) = y(0) = 1$

$x\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2k}}\right) = y\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2k}}\right) = 4$

$\cancel{EL: F_{z(x,y)} - \frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}}$

$\cancel{\dot{x} = \frac{1}{2}z_x \quad \dot{y} = \frac{1}{2}z_y}$

אז נסמן $z(x,y) = (x+y)^2$

$\cancel{F = \frac{z_x + z_y}{2} - k^2 z^2}$

$$z_t = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = 2(x+y)(\dot{x} + \dot{y})$$

$$\Rightarrow (\dot{x} + \dot{y}) = \frac{1}{2(x+y)} \cdot z_t$$

$\cancel{EL(F) = 0 \Rightarrow -k^2 = 0}$

$$EL: \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial z_t} = \frac{\partial F}{\partial z} \qquad F = \frac{z_t}{2(x+y)} - k^2 z$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}K}} \dot{x}^2+\dot{y}^2-K^2(x+y)^2\,dt$$

$x(0)=y(0)=1$

$x\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}K}\right)=y\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}K}\right)=4$

$$EL:\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot{x}=-K^2(x+y)\\ \ddot{y}=-K^2(x+y)\end{cases}$$

$x(t)=\sin(\sqrt{2}Kt)+a_1x+a_2$

$y(t)=\sin(\sqrt{2}Kt)+b_1y+b_2$

$\ddot{x}=-2K^2\sin(\sqrt{2}Kt)=-K^2(x+y)$

$\ddot{y}=-2K^2\sin(\sqrt{2}Kt)=-K^2(x+y)$

$$\begin{cases}x(0)=\sin(0)+a_1+a_2=1\\ y(0)=\sin(0)+b_1+b_2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}K}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+4a_1+a_2=4\\ y\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}K}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+4b_1+b_2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4a_1+a_2=3\\ 4b_1+b_2=3\end{cases}$$

$\begin{matrix}3a_1=2\\ 3b_1=2\end{matrix} \Rightarrow a_1=b_1=\frac{2}{3} \Rightarrow a_2=b_2=\frac{1}{3}$

סופי:

$$\boxed{\begin{matrix}x(t)=\sin(\sqrt{2}Kt)+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\\ y(t)=\sin(\sqrt{2}Kt)+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}\end{matrix}}$$

בעיה $\boxed{3}$: מציאת EL עבור הפונקציונל הבא:

$$L = \int F(x,u,u_x,u_{xx})\,dx$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int F(x,\hat{u},\hat{u}_x,\hat{u}_{xx})\,dx = \int \frac{d}{d\varepsilon} F(x,\hat{u},\hat{u}_x,\hat{u}_{xx})\,dx \qquad \hat{u} = u + \varepsilon\eta$$

$$= \int F_{\hat{u}}\cdot\eta + F_{\hat{u}_x}\eta_x + F_{\hat{u}_{xx}}\cdot\eta_{xx}\,dx \qquad \varepsilon = 0 \Rightarrow \begin{array}{l}\hat{u}=u\\ \hat{u}_x=u_x\\ \hat{u}_{xx}=u_{xx}\end{array}$$

$$= \int F_{\hat{u}}\cdot\eta\,dx + F_{\hat{u}_x}\eta\Big|_{x_0}^{x_1} - \int \frac{d}{dx}(F_{\hat{u}_x})\eta\,dx$$

$$+ F_{\hat{u}_{xx}}\eta_x\Big|_{x_0}^{x_1} - \int \frac{d}{dx}(F_{\hat{u}_{xx}})\eta_x\,dx$$

$$= \int F_{\hat{u}}\cdot\eta\,dx + F_{\hat{u}_x}\eta\Big|_{x_0}^{x_1} - \int \frac{d}{dx}(F_{\hat{u}_x})\eta\,dx$$

$$+ F_{\hat{u}_{xx}}\eta_x\Big|_{x_0}^{x_1} - \frac{d}{dx}(F_{\hat{u}_{xx}})\eta\Big|_{x_0}^{x_1} + \int \frac{d^2}{dx^2}(F_{\hat{u}_{xx}})\cdot\eta\,dx$$

מתנאי השפה - האינטגרלים בין x_0,x_1 יוצא 0.

$$= \int\left(F_u - \frac{d}{dx}F_{u_x} + \frac{d^2}{dx^2}F_{u_{xx}}\right)\eta = 0 \quad \Leftarrow \text{לכל } \eta\text{!}$$

לכן

$$\boxed{F_u - \frac{d}{dx}F_{u_x} + \frac{d^2}{dx^2}F_{u_{xx}} = 0}$$

ש

בונוס:

$$\text{discomfort} = \int_0^T (V')^2\,dt = \int_0^T (t,V,V')\,dt$$

$$EL:\ \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial V'} = \frac{\partial F}{\partial V} \Rightarrow 2\ddot{V} = 0 \quad \ddot{V} = 0 \Rightarrow V(t) = at + b$$

$$(\text{מרחק})\ U(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + bt + c$$

נמצא את הפרמטרים:

$V(0) = b = V_0$

$V(T) = aT + V_0 = V_f \Leftarrow$ רוצים למצוא את V_f

$U(0) = c = 0$

$U(T) = \frac{1}{2}aT^2 + V_0T = D \Rightarrow a = \frac{2(D - V_0T)}{T^2} \Rightarrow V_f = \begin{cases} \frac{2(D-V_0T)}{T} + V_0 & T \neq 0 \end{cases}$