

Optionsbewertung mit Hilfe der Fourier-Cosinus Methode

Denis Kocaman

30. Januar 2026

1 Einleitung

In dieser Arbeit implementiere ich die COS-Methode basierend auf dem Standardwerk von [1]. Dies ist notwendig, da die charakteristische Funktion der Schlüssel zur Preisberechnung ist.

2 Theoretischer Hintergrund

Die charakteristische Funktion bildet die Basis für die Fourier-Inversion. Im Black-Scholes Modell ist sie definiert als der Erwartungswert des Log-Asset-Preises:

$$\phi(u) = \exp \left(iu \left(\ln(S_0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 T \right) \quad (1)$$

In Abbildung 1 sehen wir den Realteil dieser Funktion für das Black-Scholes Modell.

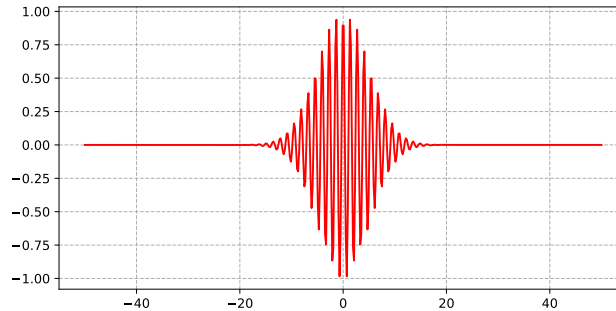


Figure 1: Visualisierung des Realteils der charakteristischen Funktion.

3 Mathematische Implementierung der COS-Methode

Der Kerngedanke der Methode ist die Approximation des Optionspreises durch eine Fourier-Cosinus-Reihe. Der Preis V ergibt sich aus der Summe:

$$V \approx e^{-rT} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \cdot V_k \quad (2)$$

Dabei sind F_k die Koeffizienten der charakteristischen Funktion und V_k die Payoff-Koeffizienten. Letztere werden für eine Call-Option analytisch durch die Funktionen χ_k und ψ_k bestimmt:

$$\chi_k(c, d) := \frac{1}{1 + \omega_k^2} [\cos(\omega_k(d - a))e^d - \cos(\omega_k(c - a))e^c + \omega_k \sin(\omega_k(d - a))e^d - \omega_k \sin(\omega_k(c - a))e^c] \quad (3)$$

$$\psi_k(c, d) := \begin{cases} d - c & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{\omega_k} [\sin(\omega_k(d - a)) - \sin(\omega_k(c - a))] & \text{für } k > 0 \end{cases} \quad (4)$$

Hierbei entspricht $\omega_k := \frac{k\pi}{b-a}$ der Frequenz der Cosinus-Wellen auf dem Integrationsintervall $[a, b]$.

References

- [1] Ali Hirsa. *Computational Methods in Finance*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, Fla., 2013.