Optionsbewertung mit Hilfe der Fourier-Cosinus Methode

Denis Kocaman

30. Januar 2026

1 Einleitung

In dieser Arbeit implementiere ich die COS-Methode basierend auf dem Standardwerk von [1]. Dies ist notwendig, da die charakteristische Funktion der Schlüssel zur Preisberechnung ist.

2 Theoretischer Hintergrund

Die charakteristische Funktion bildet die Basis für die Fourier-Inversion. Im Black-Scholes Modell ist sie definiert als der Erwartungswert des Log-Asset-Preises:

$$\phi(u) = \exp\left(iu\left(\ln(S_0) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 T\right) \tag{1}$$

In Abbildung 1 sehen wir den Realteil dieser Funktion für das Black-Scholes Modell.

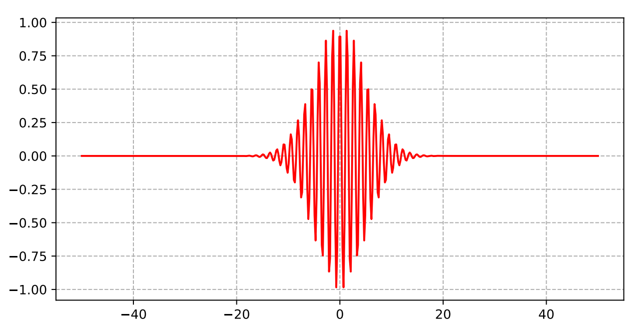

Figure 1: Visualisierung des Realteils der charakteristischen Funktion.

3 Mathematische Implementierung der COS-Methode

Der Kerngedanke der Methode ist die Approximation des Optionspreises durch eine Fourier-Cosinus-Reihe. Der Preis V ergibt sich aus der Summe:

$$V \approx e^{-rT} \sum_{k=0}^{N-1}{}' F_k \cdot V_k \tag{2}$$

Dabei sind F_k die Koeffizienten der charakteristischen Funktion und V_k die Payoff-Koeffizienten. Letztere werden für eine Call-Option analytisch durch die Funktionen χ_k und ψ_k bestimmt:

$$\chi_k(c,d) := \frac{1}{1+\omega_k^2}\left[\cos(\omega_k(d-a))e^d - \cos(\omega_k(c-a))e^c + \omega_k \sin(\omega_k(d-a))e^d - \omega_k \sin(\omega_k(c-a))e^c\right] \tag{3}$$

$$\psi_k(c,d) := \begin{cases} d-c & \text{für } k=0 \\ \frac{1}{\omega_k}\left[\sin(\omega_k(d-a)) - \sin(\omega_k(c-a))\right] & \text{für } k>0 \end{cases} \tag{4}$$

Hierbei entspricht $\omega_k := \frac{k\pi}{b-a}$ der Frequenz der Cosinus-Wellen auf dem Integrationsintervall $[a,b]$.

References

[1] Ali Hirsa. *Computational Methods in Finance*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, Fla., 2013.