

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften
School of Management and Law
Abteilung Banking, Finance, Insurance

Bachelor of Science in Betriebsökonomie
Disposition zur Bachelorarbeit

Bewertung von Optionen mit der Fourier-Cosinus Methode

vorgelegt von:

Denis Kocaman
Falkenstrasse 1a
9552 Bronschhofen
22578462

eingereicht bei:

Dr. Norbert Hilber
Fachstelle für Financial Data Science und Ökonometrie
Gertrudstrasse 8
8400 Winterthur

Ort, Datum:

Bronschhofen, 12. Februar 2026

I. Management Summary

Die meisten Optionspreisprobleme sind nicht analytisch lösbar und man muss auf approximative Methoden zurückgreifen, wie beispielsweise Monte-Carlo-Simulationen oder Finite-Differenzen-Verfahren. Diese sind jedoch je nach Kontrakttyp rechenintensiv und daher für Aufgaben wie Modellkalibrierung oder die Berechnung von Sensitivitäten (Greeks) weniger geeignet. Kennt man die charakteristische Funktion des der Option zugrunde liegenden Basiswerts, kann man mit Hilfe sogenannter Transformationsmethoden den Preis effizient bestimmen.

Die vorliegende Bachelorarbeit beschreibt und vergleicht zwei solche Transformationsmethoden: die schnelle Fourier-Transformation (FFT) nach Carr and Madan [1999] und die Fourier-Cosinus (COS) Methode nach Fang and Oosterlee [2009a]. Letztere wird in Python implementiert und zur Bewertung von sowohl pfad-unabhängigen (europäischen) als auch pfadabhängigen (z.B. Barrier-) Optionen eingesetzt. Als Modelle dienen das Black-Scholes-Modell sowie das Heston-Modell (stochastische Volatilität). Während für einfache Modelle bereits effiziente analytische Formeln existieren, soll aufgezeigt werden, dass die COS-Methode insbesondere bei rechenintensiven Modellen mit stochastischer Volatilität, für die oft nur semi-analytische Preisformeln vorliegen, einen signifikanten Effizienzvorteil bietet. Die Implementierung wird anschliessend auf Korrektheit und Konvergenz geprüft, indem die Ergebnisse mit bereitgestellten Referenzalgorithmen verglichen werden.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|---|--|---|
| 1 | Ausgangslage und Problemstellung | 1 |
| 2 | Zielsetzung und Forschungsfragen | 1 |
| 3 | Theoretischer und konzeptioneller Rahmen | 2 |
| 4 | Stand der Forschung | 2 |
| 5 | Methodisches Vorgehen | 3 |
| 6 | Erwarteter Erkenntnisgewinn | 3 |
| 7 | Deklaration zur Verwendung von Künstlicher Intelligenz | 3 |

1 Ausgangslage und Problemstellung

Die Bewertung derivativer Finanzinstrumente erfordert hocheffiziente numerische Verfahren. Während für das klassische Black-Scholes-Modell [Hull, 2022] sowie das Merton-Jump-Diffusion-Modell bereits geschlossene bzw. schnell auswertbare analytische Formeln existieren, entfaltet die Fourier-Cosinus (COS) Methode ihre eigentliche Relevanz bei komplexeren Modellen. Insbesondere bei Modellen mit stochastischer Volatilität existieren oft nur semi-analytische Preisformeln, deren direkte numerische Auswertung rechenintensiv ist. Die COS-Methode verspricht hier eine deutliche Beschleunigung bei gleichbleibender Präzision [Fang and Oosterlee, 2009a].

Klassische Ansätze wie Monte-Carlo-Simulationen oder Finite-Differenzen-Methoden sind zwar flexibel, aber rechenintensiv. Transformationsmethoden bieten hier eine attraktive Alternative: Kennt man die charakteristische Funktion des zugrunde liegenden Preisprozesses, kann der Optionspreis über eine Fourier-Inversion bestimmt werden. Carr and Madan [1999] zeigten dies erstmals mit der FFT-Methode. Fang and Oosterlee [2009a] entwickelten mit der COS-Methode einen Ansatz, der eine deutlich höhere Konvergenzgeschwindigkeit verspricht.

Dennoch bleibt in der Praxis die Frage offen, wie sich beide Methoden hinsichtlich Genauigkeit, Rechenzeit und numerischer Stabilität konkret unterscheiden und unter welchen Bedingungen die COS-Methode ihre theoretischen Vorteile tatsächlich ausspielen kann.

2 Zielsetzung und Forschungsfragen

Ziel dieser Arbeit ist es, die Fourier-Cosinus (COS) Methode zur Optionsbewertung in Python zu implementieren, ihre Genauigkeit und Effizienz systematisch zu untersuchen und mit der FFT-Methode zu vergleichen. Dabei wird die COS-Methode sowohl im Black-Scholes-Modell als auch in einem alternativen Modell (z. B. einem Sprungmodell) angewendet.

Die zentrale Forschungsfrage lautet:

“Wie schneidet die COS-Methode im Vergleich zur FFT-Methode hinsichtlich Konvergenzgeschwindigkeit, Genauigkeit und Rechenzeit bei der Bewertung europäischer Optionen ab?”

Zur Konkretisierung werden folgende Unterfragen untersucht:

- Wie lässt sich die COS-Methode mathematisch herleiten und welche Rolle spielt die charakteristische Funktion dabei?
- Ab welcher Anzahl an Summanden N erreicht die COS-Methode eine hinreichende Genauigkeit im Vergleich zur analytischen Black-Scholes-Lösung?

- Wie verhält sich die COS-Methode im Vergleich zur FFT-Methode bei unterschiedlichen Modellen und Parameterkonfigurationen?
- Welchen Einfluss hat die Wahl des Abschneideintervalls L auf die numerische Stabilität der Ergebnisse?
- Wie lässt sich die COS-Methode mathematisch auf pfadabhängige Optionen erweitern und welche Anpassungen sind für die numerische Stabilität notwendig?
- Bietet die COS-Methode bei Modellen mit stochastischer Volatilität einen messbaren Performance-Vorteil gegenüber der numerischen Integration herkömmlicher semi-analytischer Preisformeln?

3 Theoretischer und konzeptioneller Rahmen

Der theoretische Rahmen basiert auf dem Konzept der risikoneutralen Bewertung, bei dem der Optionspreis als diskontierter Erwartungswert des Payoffs unter dem risikoneutralen Mass dargestellt wird. Da die Dichtefunktion des Log-Preises in vielen Modellen keine geschlossene Form besitzt, die charakteristische Funktion $\phi(u)$ hingegen bekannt ist, bieten Transformationsmethoden einen eleganten Weg zur Preisberechnung.

Die COS-Methode, wie von Fang and Oosterlee [2009a] eingeführt, approximiert die Dichtefunktion durch eine Fourier-Cosinus-Reihenentwicklung auf einem endlichen Intervall $[a, b]$. Die Koeffizienten der Reihe werden direkt aus der charakteristischen Funktion $\phi(u)$ abgeleitet. Im Vergleich dazu wertet die FFT-Methode nach Carr and Madan [1999] das Fourier-Integral numerisch aus, wobei ein Dämpfungsfaktor eingeführt werden muss.

Ergänzend wird auf das Werk von Oosterlee and Grzelak [2020] zurückgegriffen, das eine umfassende Darstellung numerischer Methoden in der Finanzwirtschaft mit Python-Implementierungen bereitstellt.

4 Stand der Forschung

Die wissenschaftliche Grundlage der Transformationsmethoden in der Optionsbewertung wurde durch Carr and Madan [1999] mit der Einführung der FFT-Methode gelegt. Dieser Ansatz ermöglichte erstmals die effiziente Berechnung von Optionspreisen für eine breite Klasse von Modellen, bei denen die charakteristische Funktion bekannt ist.

Fang and Oosterlee [2009a] zeigten, dass die COS-Methode für glatte Dichtefunktionen eine exponentielle Konvergenzrate besitzt und damit die FFT-Methode in vielen Fällen an Effizienz übertrifft. In einer weiterführenden Arbeit erweiterten Fang and

Oosterlee [2009b] die Methode auf Optionen mit vorzeitiger Ausübung und diskreten Barrieren.

Hirsa [2013] widmet in seinem Standardwerk zur computergestützten Finanzmathematik ein Kapitel der Implementierung von Fourier-Methoden und behandelt dabei sowohl die FFT als auch die COS-Methode. Seydel [2009] bietet eine fundierte Einführung in numerische Werkzeuge der Computational Finance, die als methodische Grundlage herangezogen wird.

5 Methodisches Vorgehen

Die Arbeit ist als quantitative Simulationsstudie konzipiert und gliedert sich in folgende Schritte:

1. **Theoretische Grundlegung:** Darstellung der risikoneutralen Bewertung, der charakteristischen Funktionen sowie mathematische Herleitung der FFT- und der COS-Methode auf Basis der Originalliteratur von Fang and Oosterlee [2009a] und Carr and Madan [1999].
2. **Implementierung in Python:** Entwicklung eines Programms zur Preisberechnung einer **pfad-unabhängigen (europäischen)** sowie einer **pfadabhängigen (z. B. Barrier-Option)** mittels der COS-Methode. Die Implementierung erfolgt unter Verwendung von Standard-Bibliotheken (`NumPy`, `SciPy`, `Matplotlib`).
3. **Numerische Experimente:** Systematische Konvergenzanalyse (Variation von $N = 4, 8, 16, 32, \dots$), Sensitivitätsanalyse bezüglich des Parameters L sowie Vergleich der Rechenzeiten zwischen COS- und FFT-Methode.
4. **Modellvergleich:** Anwendung der Methode auf das Black-Scholes-Modell sowie das **Heston-Modell** (stochastische Volatilität), um die Korrektheit und den Effizienzvorteil in Modellen ohne einfache geschlossene Formeln zu validieren.

6 Erwarteter Erkenntnisgewinn

Die Arbeit soll einen Beitrag zur praktischen Einordnung der COS-Methode im Vergleich zur etablierten FFT-Methode leisten. Es wird erwartet, dass die Simulationen die theoretisch postulierte überlegene Konvergenzgeschwindigkeit der COS-Methode bestätigen. Darüber hinaus sollen konkrete Empfehlungen für die Wahl der numerischen Parameter (N , L) in Abhängigkeit vom verwendeten Modell und der Marktsituation (Moneyness, Volatilität, Laufzeit) abgeleitet werden.

7 Deklaration zur Verwendung von Künstlicher Intelligenz

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wurden generative KI-Tools (insbesondere Gemini von Google) unterstützend eingesetzt. Die Verwendung erfolgte gemäß den Richtlinien der ZHAW zur sprachlichen Optimierung, Strukturfindung und zur kognitiven Anregung beim Brainstorming. Die inhaltliche und mathematische Verantwortung liegt vollumfänglich beim Autor.

Literatur

- Peter Carr and Dilip Madan. Option valuation using the fast Fourier transform. *The Journal of Computational Finance*, 2(4):61–73, 1999. ISSN 14601559. doi: 10.21314/JCF.1999.043.
- F. Fang and C. W. Oosterlee. A Novel Pricing Method for European Options Based on Fourier-Cosine Series Expansions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(2): 826–848, January 2009a. ISSN 1064-8275, 1095-7197. doi: 10.1137/080718061.
- F. Fang and C. W. Oosterlee. Pricing early-exercise and discrete barrier options by fourier-cosine series expansions. *Numerische Mathematik*, 114(1):27–62, November 2009b. ISSN 0029-599X, 0945-3245. doi: 10.1007/s00211-009-0252-4.
- Ali Hirsa. *Computational Methods in Finance*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, Fla., 2013. ISBN 978-1-4398-2957-8.
- John Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson4060 1 Online-Ressource (880 Seiten), Harlow, England, eleventh edition, global edition edition, 2022. ISBN 978-1-292-41065-4 978-1-292-41062-3.
- Cornelis Willebrordus Oosterlee and Lech A. Grzelak. *Mathematical Modeling and Computation in Finance: With Exercises and Python and Matlab Computer Codes*. World Scientific, New Jersey London Singapore Beijing Shanghai Hong Kong Taipei Chennai Tokyo, 2020. ISBN 978-1-78634-794-7 978-1-78634-805-0.
- Rüdiger Seydel. *Tools for Computational Finance*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009. ISBN 978-3-540-92928-4 978-3-540-92929-1. doi: 10.1007/978-3-540-92929-1.