Решение типовых задач.

Пример 1. Провести полное исследование и построить график функции $y = f(x)$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[0;2]$.

$$y = 4(x-1)^3\sqrt{|x|}\,.$$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty;\infty)$.

2. Точки пересечения графика функции с осями координат.

Пересечение с осью Oy: при $x = 0$: $y = 0$.

Пересечение с осью Ox: $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$.

3. Асимптоты графика функции.

1) Вертикальные асимптоты.

Так как функция определена при всех $x \in (-\infty;\infty)$, то вертикальные асимптоты отсутствуют.

2) Горизонтальные асимптоты.

Для поиска горизонтальных асимптот, вычисляем пределы функции на бесконечности. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, то горизонтальных асимптот нет.

3) Для поиска наклонных асимптот, вычисляем предел отношения функции к независимой переменной (в случае существования наклонной асимптоты, это предел дает значение коэффициента наклона прямой):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4(x-1)^3\sqrt{|x|}}{x} = \infty\,.$$

Так как предел бесконечный, то наклонных асимптот нет.

4. Экстремумы функции и интервалы монотонности.

Вычисляем первую производную. Так как в выражении для функции используется модуль, ищем производную отдельно на двух участках: $x \in (-\infty;0]$ и $x \in [0;\infty)$.

$$y' = \begin{cases} -\dfrac{2(7x-1)(x-1)^2}{\sqrt{-x}}, & x \le 0, \\ \dfrac{2(7x-1)(x-1)^2}{\sqrt{x}}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Производная не существует при $x = 0$ и обращается в ноль в двух точках: $x = \frac{1}{7}$ и $x = 1$.

В точке $x = 0$ производная меняет знак с «+» на «–», следовательно, $x = 0$ — точка максимума; $f(0) = 0$.

В точке $x = \frac{1}{7}$ производная меняет знак с «–» на «+», следовательно, $x = \frac{1}{7}$ — точка минимума; $f\left(\dfrac{1}{7}\right) = -\dfrac{864}{343\sqrt{7}} \approx -0{,}952$.

В точке $x = 1$ функция знак не меняет, следовательно, $x = 1$ не является точкой экстремума.

Интервалы монотонности определяем по знакам производной. Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{1}{7}; \infty)$; убывает при $x \in (0; \frac{1}{7})$.

5. Интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Вычисляем вторую производную (отдельно на каждом из интервалов: $x \in (-\infty; 0]$ и $x \in [0; \infty)$).

$$y'' = \begin{cases} \dfrac{35x^3 - 45x^2 + 9x + 1}{\sqrt{(-x)^3}}, & x \le 0, \\ \dfrac{35x^3 - 45x^2 + 9x + 1}{\sqrt{x^3}}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Вторая производная не существует при $x = 0$.

Находим точки, в которых вторая производная обращается в ноль.

В соответствии с теоремой Безу, целым корнем уравнения $35x^3 - 45x^2 + 9x + 1 = 0$ может быть только $x = 1$. Проверка показывает, что это число действительно корнем является: $x_1 = 1$.

Делением многочлена $35x^3 - 45x^2 + 9x + 1 = 0$ на одночлен $x - 1$ получаем многочлен: $35x^2 - 10x - 1$.

Уравнение $35x^2 - 10x - 1 = 0$ имеет корни:

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{60}}{35} \approx -0{,}0785; \qquad x_3 = \frac{5 + \sqrt{60}}{35} \approx 0{,}364.$$

Итак, вторая производная обращается в ноль в трех точках: x_1, x_2, x_3.

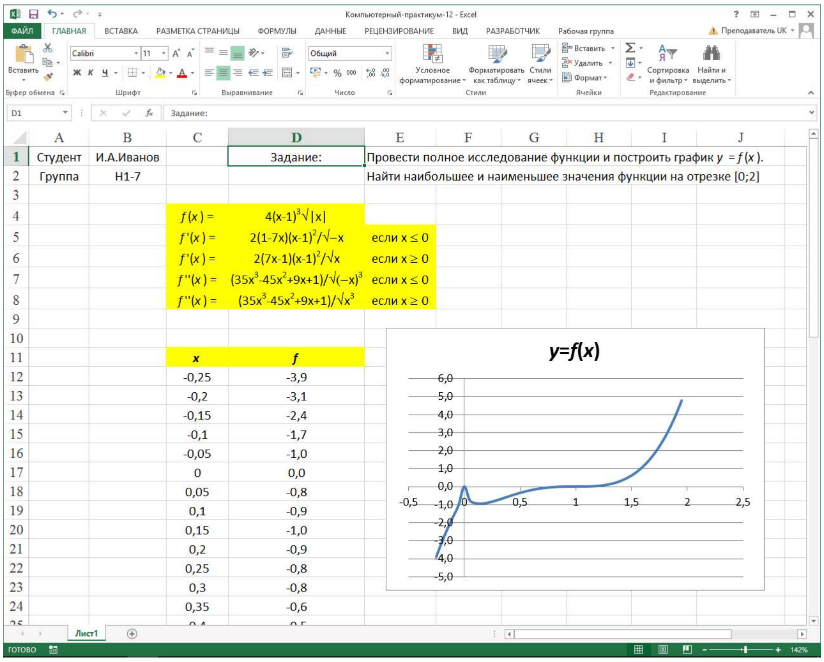
В точке $x = 0$ вторая производная не меняет знак, следовательно, эта точка не является точкой перегиба.

В точках x_1, x_2, x_3 вторая производная меняет знак, следовательно, все эти точки являются точками перегиба.

$$f(x_1) = 0; \qquad f(x_2) \approx -1{,}405; \qquad f(x_3) = -0{,}620.$$

Интервалы выпуклости определяем по знакам второй производной. Функция выпукла вверх при $x \in (-\infty;\ -0{,}0785) \cup (0{,}364;\ 1)$; выпукла вниз при $x \in (-0{,}0785;\ 0) \cup (0;\ 364) \cup (1;\ \infty)$.

График:



Найдем наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[0;2]$.

Производная функции не существует в точке $x = 0$ и обращается в ноль в точках $x = \frac{1}{7}$ и $x = 1$. Эти точки принадлежат отрезку $[0;2]$.

Находим значения функции в точках, где производная не существует или обращается в ноль, а также на концах отрезка.

$$f(0)=0;\quad f\left(\frac{1}{7}\right)=-\frac{1080}{343\sqrt{7}}\approx-1{,}190;\quad f(1)=0;\quad f(2)=5\sqrt{2}.$$

Среди полученных значений находим наименьшее и наибольшее значения:

$$f_{\min}=f\left(\frac{1}{7}\right)=-\frac{1080}{343\sqrt{7}}\approx-1{,}190;\qquad f_{\max}=f(2)=5\sqrt{2}.$$

Пример 2. Провести полное исследование и построить график функции $y=f(x)$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-\frac{1}{2};\frac{3}{4}]$.

$$y=\frac{x^2}{x^2-1}.$$

1. Область определения функции: $x\neq\pm1$.

2. Точки пересечения графика функции с осями координат. Общие свойства функции.

Пересечение с осью Ox, Oy: при $x=0$: $y=0$.

Функция четная.

3. Асимптоты графика функции.

1) Вертикальные асимптоты.

Так как функция определена не при всех x, то возможны вертикальные асимптоты: $\lim\limits_{x\to-1\pm0}\frac{x^2}{x^2-1}=\mp\infty$; $\lim\limits_{x\to1\pm0}\frac{x^2}{x^2-1}=\pm\infty$; Значит существуют 2 вертикальные асимптоты: *x=1* и *x=-1*.

2) Горизонтальные асимптоты.

Для поиска горизонтальных асимптот, вычисляем пределы функции на бесконечности. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, то имеется горизонтальная асимптота *y=1*.

3) Для поиска наклонных асимптот, вычисляем предел отношения функции к независимой переменной (в случае существования наклонной асимптоты, это предел дает значение коэффициента наклона прямой):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0.$$

Так как предел равен 0, то наклонная асимптота переходит в уже найденную горизонтальную.

4. Экстремумы функции и интервалы монотонности.

Вычисляем первую производную.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\left(x^2-1\right)-x^2\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2-1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3-2x-2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2},$$

Производная не существует в двух точках: $x=\pm 1$ и обращается в ноль при $x=0$.

В точке $x=0$ производная меняет знак с «+» на «–», следовательно, $x=0$ — точка максимума; $f(0)=0$.

Интервалы монотонности определяем по знакам производной. Функция возрастает при $x\in\left(-\infty;-1\right)\cup(-1;0)$; убывает при $x\in\left(0;1\right)\cup(1;\infty)$.

5. Интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Вычисляем вторую производную.

$$f''(x)=\left(\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=-\frac{(2x)'\left(x^2-1\right)^2-2x\left(x^2-1\right)^{2'}}{\left(x^2-1\right)^4}=-\frac{2\left(x^2-1\right)^2-4x\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

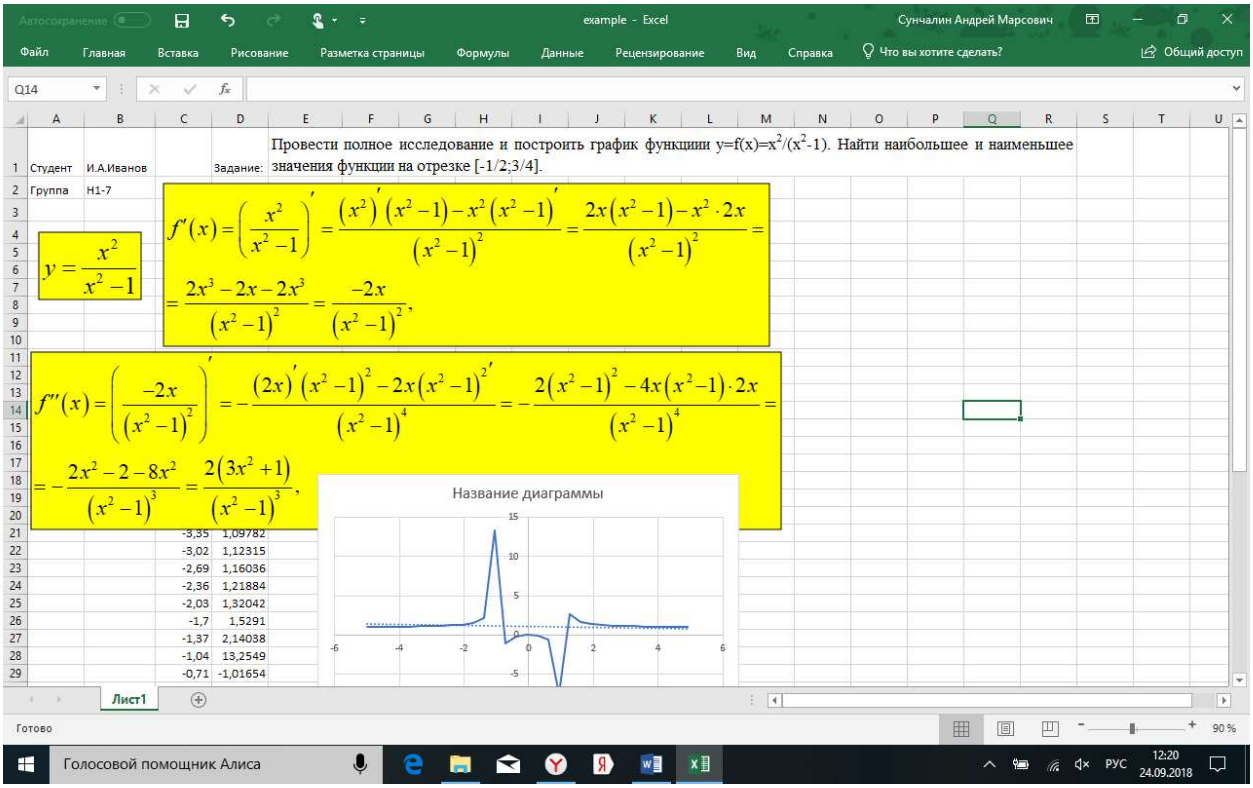
$$=-\frac{2x^2-2-8x^2}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{2\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3},$$

Вторая производная не существует при $x=\pm 1$.

Нет точек, в которых вторая производная обращается в ноль.

Интервалы выпуклости определяем по знакам второй производной. Функция выпукла вверх при $x\in(-1;\ 1)$; выпукла вниз при $x\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ \infty)$

График:



Найдем наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[-\frac{1}{2};\frac{3}{4}]$.

Производная функции обращается в ноль в точке $x=0$. Эта точка принадлежат отрезку $[-\frac{1}{2};\frac{3}{4}]$.

Находим значения функции в точках, где производная не существует или обращается в ноль, а также на концах отрезка.

$$f(0)=0;\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1/4}{1/4-1}=-\frac{1}{3}\approx 0,33;\quad f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{9/16}{9/16-1}=-\frac{9}{7}\approx -1,286.$$

Среди полученных значений находим наименьшее и наибольшее значения:

$$f_{\min}=f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{9}{7}\approx -1,286;\qquad f_{\max}=f(0)=0.$$