第一章 练习题

1.1（P23，9）为了培养想像力、洞察力和判断力，考察对象时除了从正面分析外，还常常需要从侧面或反面思考。试尽可能迅速地回答下面的问题：

(1) 某甲早上 8:00 从山下旅店出发，沿一条路径上山，下午 5:00 到达山顶并留宿。次日早 8:00 沿同一路径下山，下午 5:00 回到旅店。某乙说，甲必在两天中的同一时刻经过路径中的同一地点。为什么？

(2) 37 支球队进行冠军争夺赛，每轮比赛中出场的每两支球队中的胜者及轮空者进行下一轮，直至比赛结束。问共需进行多少轮比赛？如果是 n 支球队比赛呢？

(3) 甲、乙两站之间有电车相通，每隔 10min 甲、乙两站相互发一趟车，但发车时刻不一定相同。甲乙之间有一中间站丙，某人每天在随机的时刻到达丙站，并搭乘最先经过丙站的那趟车，结果发现100天中约有90天到达甲站，约有10天到达乙站。问开往甲乙两站的电车经过丙站的时刻表是如何安排的。

(4) 一男孩和一女孩分别在离家 2km和 1km且方向相反的两所学校上学，每天同时放学后分别以 4km/h 和 2km/h 的速度步行回家。一小狗以 6km/h 的速度由男孩处奔向女孩，又从女孩处奔向男孩，如此往返直至回到家中。问小狗奔波了多少路程？如果男孩和女孩上学时小狗也往返在他们之间，问当他们到达学校时小狗在何处？

1.2 模仿商人过河问题中的状态转移模型，做下面这个众所周知的智力游戏：

人带着狗、鸡、米过河，船除需要人划之外，至多能载狗、鸡、米三者之一，而当人不在场时狗要吃鸡、鸡要吃米。

试设计一个安全渡河方案，并使渡河次数尽量地少。

参考解答

第 1.2 题

将人、狗、鸡、米依次用四维向量中的四个分量表示：当一物在此岸时，相应分量记为 1，否则记为 0。如向量 (1, 0, 1, 0) 表示人和鸡在此岸，狗和米在彼岸。这些向量称为状态向量。

凡系统可以允许存在的状态称为可取状态。对本系统，可取状态向量为：

(1, 1, 1, 1)	(0, 0, 0, 0)
(1, 1, 1, 0)	(0, 0, 0, 1)
(1, 1, 0, 1)	(0, 0, 1, 0)
(1, 0, 1, 1)	(0, 1, 0, 0)
(1, 0, 1, 0)	(0, 1, 0, 1)

共 10 个，右边 5 个正好是左边 5 个的相反状态。

将船的依次运算也用向量表示：当一物在船上时，相应分量记为 1，否则记为 0。如向量 (1, 1, 0, 0) 表示人和狗在船上。这些向量称为运算向量。

本系统的运算向量为：

(1, 1, 0, 0)	(1, 0, 1, 0)
(1, 0, 0, 1)	(1, 0, 0, 0)

一次过河就是一个状态向量和一个运算向量的加法。在加法运算中，对每一分量采用二进制。

$(0+0=0, 1+0=0+1=1, 1+1=0)$

由于问题的要求，可取状态经过加法运算后仍是可取状态，这样的运算称为可取运算。

根据上述假设，人、狗、鸡、米过河问题转化为：从状态 (1, 1, 1, 1) 经过奇数次运算变为状态 (0, 0, 0, 0) 的系统转移过程。

做法如下：

$$(1,1,1,1)+\begin{cases}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(0,0,1,1) & \times\\(0,1,0,1)\\(0,1,1,0) & \times\\(0,1,1,1) & \times\end{cases}$$

（× 表示不可取状态）

$$
(0,1,0,1)+\begin{cases}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1,0,0,1) & \times\\(1,1,1,1) & \times\\(1,1,0,0) & \times\\(1,1,0,1)\end{cases}
$$

$$
(1,1,0,1)+\begin{cases}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cdots\cdots\\\cdots\cdots\\\cdots\cdots\\\cdots\cdots\end{cases}
$$

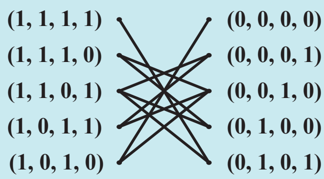
…………

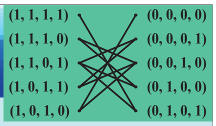
用此方法的优点在于使用计算机能求出所有的转移过程，并比较出最优者。当所有的转移过程都出现循环时，则问题无解。

可以看出，当状态向量维数增加，约束条件复杂时，用这种方法能方便求解。

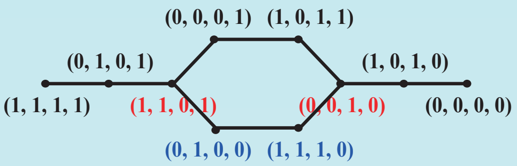
另外，此问题还可以用图论的方法求解。

将本系统的 10 个可取状态用 10 个点表示，当且仅当某个可取状态经过本系统的运算向量而仍为可取状态，就连一条线，从而构成一个图 G。





问题变为在图 G 中找一条从顶点 (1, 1, 1, 1) 到 (0, 0, 0, 0) 的路径，每条路径就是一个解。



由图可知，有二解，它们是等优的。

第二章 练习题

2.1 有一家庭，为了买房需要向银行贷款10万元，已知利率按月计算且为复利率，月利率为0.01，贷款期限为25年。问这个家庭每月平均要向银行还款多少？一共付给银行多少钱？如果25年后再开始还款，那时应还款多少？如果将贷款期限缩小到原来的1/5，其结果如何？

要求通过建立数学模型来回答问题。

2.2 包汤圆（饺子）

通常，1公斤面，1公斤馅，包100个汤圆（饺子）

今天，1公斤面不变，馅比 1公斤多了，问应包小一些的多包几个，还是包大一些的少包几个？

多包：皮小一些；少包：皮大一些。

2.3 现在的商品几乎都要经过包装才能出售，包装已成为影响商品销量的一个重要因素。某地清香牌洗衣粉500克装的每包3元，1000克装的每包5元，二者的单位重量的价格比是1.2 : 1，这是由于促销和降低了商品的成本决定的。如何解释这种现象？

参考解答

第 2.1 题

模型假设

(1) 25年内银行的利率保持不变；

(2) 25年内该家庭始终具有还款能力，且不提前还清贷款。

符号说明

M_0：贷款额；　　t：贷款期限

r：月利率　　n：贷款后的月数

M_n：第 n 个月末欠银行的钱数；

x：平均每月向银行还款的数目。

模型建立

由于 $M_0 = 100000$，则

$$M_n = M_{n-1}(1+r) - x,\quad n = 1, 2, \ldots, 300.$$

上式即为该家庭各月末欠银行钱数的数学模型。

模型求解

$$\begin{aligned} M_n &= M_0(1+r)^n \\ &\quad - x[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + (1+r) + 1] \\ &= M_0(1+r)^n - x[(1+r)^n - 1]/r \end{aligned}$$

x：平均每月向银行还款的数目。

当 $M_0 = 100000$，$n = 300$，$r = 0.01$ 时，取 $M_{300} = 0$ 为在25 年还清贷款，由上式得

$$0 = 100000 \times 1.01^{300} - x(1.01^{300} - 1)/0.01$$

解得 $x = 1053.22$(元)。

这样一共付给银行的钱数为：$300x = 315966$元。

如果一直等到25年后再开始还贷款，那么应还钱数为

$M_0(1+r)^{300} = 100000(1.01)^{300} \approx 1978846.63$元

表示当年仅借款 10 万元，25年后就变成了约 198 万元，增加购房成本近 188 万元，这个数目是非常惊人的。

如果贷款额10万元不变，而贷款期限改为5年，即为原来的1/5，5 年期按月复利率贷款，月利率为4.875‰ (2005年中国银行贷款利率)，$n = 1, 2, \ldots, 60$。$M_{60} = 0$，这时

$$0 = 100000 \times 1.004875^{60} - x(1.004875^{60} - 1)/0.004875$$

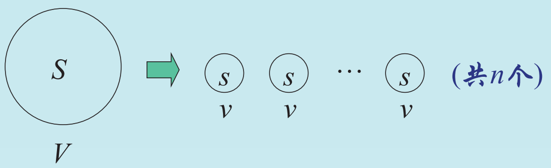
解得 $x = 1926.313$(元)。

这样一共付给银行的钱数为：$60x = 115578.78$元。

第 2.2 题

问题

圆面积为 S 的一个皮，包成体积为 V 的汤圆。若分成 n 个皮，每个圆面积为 s，包成体积为 v。



V 和 nv 哪个大?　　定性分析

V 比 nv 大或小多少?　　定量分析

假设　皮的厚度一样　　汤圆(饺子)的形状一样

建模　$S = ns$　(1)　　$k_1 = k'_1$ 及 $k_2 = k'_2$，因而 $k = k'$

R — 大皮的半径　$S = k_1 R^2,\ V = k_2 R^3 \Rightarrow V = kS^{3/2}$　(2)

r — 小皮的半径　$s = k'_1 r^2,\ v = k'_2 r^3 \Rightarrow v = k's^{3/2}$　(3)

$(1),(2),(3) \Rightarrow V = n^{3/2} v$

应用　$V = \sqrt{n}(nv) \geq nv$　　V 是 nv 的 $\sqrt{n}$ 倍

若 100 个汤圆（饺子）包 1 公斤馅，则 50 个汤圆(饺子)可以包$\sqrt{2} \approx 1.4$ 公斤馅

第 2.3 题

模型假设

(1) 商品的生产和包装的工作效率是固定不变的；

(2) 商品包装的成本包括包装的劳动力投入和包装材料的成本两部分构成；

(3) 商品包装的形状大小是相似的，不同大小包装所用的包装材料是相似的或者在价格上没有任何差异。

符号说明

a：生产一件该商品的成本；b：包装一件该商品的成本；w：每一件商品的货物量； c：包装的劳动力成本；d：包装材料的成本。

模型建立及求解

由假设 (1) 可认为商品的成本与商品的货物量成正比，即 $a = k_1 w$，其中 k_1 为正常数。

显然，包装的劳动力成本与产品的货物量成正比，即 $c = k_2 w$，其中 k_2 为正常数。

由假设 (3) 可知，包装材料的成本 d 与商品的表面积 s 成正比，又因为表面积与它的体积 v 有如下的关系：

$s = k_3 r^{2/3}$ (k_3 为正常数)

而商品的体积与所包装的货物量成正比。于是得出比例关系

$$c = k_3 w^{2/3},\quad b = c + d = k_2 w + k_3 w^{2/3}$$

每一件商品单位货物量的成本 $f(w)$ 为

$$f(w) = (a+b)/w = k_1 + k_2 + k_3 w^{-1/3}$$

其中 k_1、k_2、k_3 为正数。这就是包装重量为 w 时单位货物总成本的比例模型。

易知，$f(w)$ 是包装重量 w 的减函数，表明当包装增大时每件产品的单位货物量的成本将下降，这与购物所得到的经验是一致的。

模型分析

该模型没有给出具体结果，同时该模型也没有考虑到同一商品在不同包装下的每包的运费或者仓库管理费等，这些费用一般是不同的。

为了建立更加准确的模型，有必要把上述因素考虑在内，具体过程不再详述。

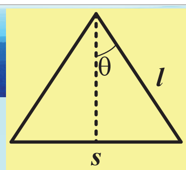
第三章 练习题

3.1 人走路时如何选择步长最省力？

每走一步产生重心垂直方向的上下移动消耗势能，腿的运动要消耗动能，消耗的总能量是这两部分能量之和，走路应当在单位时间消耗的总能量为最小时最省力。

3.2 人在雨中沿直线从一处向另一处行走，如果雨速为常数且方向不变，试建立模型讨论是否走得越快，淋雨量越少。

参考解答



第 3.1 题

模型假设

(1) 人体分为躯体和下肢两部分，躯体以匀速 v 前进，下肢看作长为 l 的刚体棒。

人每走一步，躯体重心移动的垂直距离为 $h = l(1-\cos\theta)$，其中 θ 为两脚着地时腿与垂直方向的夹角 (如图)。步长 $s = 2l\sin\theta$。于是，

单位时间走的步数为 $n = v/s = v/(2l\sin\theta)$，

单位时间内消耗的势能为

$$W_f = mgnh = mgv(1-\cos\theta)/(2\sin\theta) = mgv\tan(\theta/2)/2$$

其中 m 是躯体质量加两腿质量的一半。

(2) 单位时间腿运动消耗的动能为

$$W_s = m_1 v^2 n / 2 = m_1 v^3 / (4l\sin\theta)$$

其中 m_1 是两腿的质量。

模型建立与求解

单位时间消耗的总能量为

$$W = W_f + W_s = mgv\tan(\theta/2) / 2 + m_1 v^3 / (4l\sin\theta)$$

由 $W'(\theta) = 0$，求解得 $\cos\theta = 2mgl / (m_1 v^2 + 2mgl)$.

此式就是使走路最省力时，腿与垂直方向的夹角应满足的条件，步长 $s = 2l\sin\theta$。

根据一般人的体形和重量，可求得 $10° \le \theta \le 15°$，这是符合实际的。

第 3.2 题

模型假设

人身体的表面非常复杂，为了使问题简化，假设将人视为长方体，其前、侧、顶的面积之比为 $1 : b : c$，选择适当的直角坐标系，使人行走的速度为 $(u, 0, 0)$。

设雨的速度为 (v_x, v_y, v_z)，人行走的距离为 l，则行走时间为 l / u。

在上述假定下，由微积分中曲面积分的通量概念，显然单位时间内的淋雨量正比于

$$(|u - v_x|, |0 - v_y|, |0 - v_z|) \cdot (1, b, c)$$
$$= |u - v_x| + b|v_y| + c|v_z|.$$

从而总淋雨量正比于

$$R(u) = l\,(|u - v_x| + a) / u.$$

其中 $a = b|v_y| + c|v_z| > 0$.

于是，问题抽象为如下数学问题：

在已知 l, v_x, a 的条件下，求 $R(u)$ 的最小值。

模型建立

由于这个模型的特殊性，用图解法求解方便些，分下列几种情况讨论：

(1) 当 $v_x > 0$ 时，

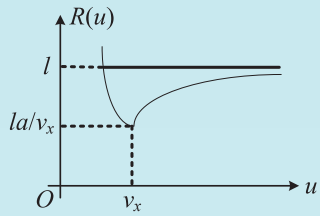
$$R(u) = \begin{cases} \dfrac{l}{u}((v_x - u) + a) = \dfrac{l(v_x + a)}{u} - l, & u < v_x \\ \dfrac{l}{u}((u - v_x) + a) = \dfrac{l(a - v_x)}{u} + l, & u > v_x \end{cases}$$

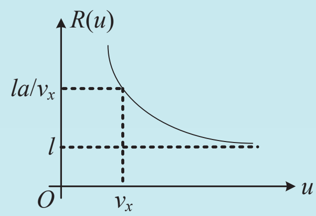
当 $v_x > a$ 时，$R(u) \sim u$ 的图形如下左图所示。

由图可知，当 $u = v_x$ 时，$R(u)$ 取最小值为 $R_{\min} = la / v_x$.

当 $v_x < a$ 时，$R(u) \sim u$ 的图形如下右图所示。

由图可知，当 u 尽可能大时，$R(u)$ 才会尽可能小（接近于 l）。



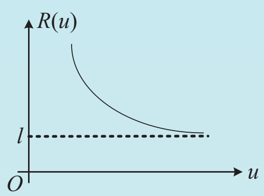


(2) 当 $v_x < 0$ 时，$R(u) = \dfrac{l}{u}(u + |v_x| + a) = \dfrac{l(a + |v_x|)}{u} + l$

无论 v_x 为何值，$R(u)$ 都无最小值。即只有当 u 尽可能大时，$R(u)$ 才会尽可能小。$R(u) \sim u$ 的图形如下。

(3) 当 $v_x = a$ 及 $v_x > 0$ 时，分别为前两式的特例。

综上所述，当 $v_x > a > 0$ 时，只要 $u = v_x$ 就可使前后不淋雨，从而总淋雨量最小，其他情况，都应使 u 尽可能大，才能使淋雨量尽可能小。这显然符合人们的生活常识。



第四章 练习题

4.1 某河流边有两个化工厂，流经第一个化工厂的河水流量是每天 5 百万立方米，在两个工厂之间有一条流量为每天 2 百万立方米的支流（汇入河流）。第一个化工厂每天排放工业污水 2 万立方米，第二个化工厂每天排放工业污水 1.4 万立方米，从第一个化工厂排出的污水流到第二个化工厂之前，有 20% 可自然净化。根据环保要求，河流中工业污水的含量应不大于 0.2%。若这两个化工厂都各自处理一部分污水，第一个化工厂处理污水的成本是 0.1 元/m³，第二个化工厂处理污水的成本是 0.08 元/m³，问在满足环保要求的条件下，各化工厂应处理多少污水，才能使两厂总的处理污水费用最少。

4.2 一饲养场饲养实验用的动物。已知这些动物的生长对饲料中的蛋白质、矿物质和维生素这三种营养成分特别敏感，每个动物每天至少需要蛋白质70g、矿物质3g、维生素10mg。该场能买到五种饲料，各种饲料每千克的成本及所含营养成分如下表所示。请确定既能满足动物生长所需，又使总成本最低的饲料配方。

饲料(1 kg)	蛋白质(g)	矿物质(g)	维生素(mg)	成本(元)
A_1	0.30	0.10	0.05	0.2
A_2	2.00	0.05	0.10	0.7
A_3	1.00	0.02	0.02	0.4
A_4	0.60	0.20	0.20	0.3
A_5	1.80	0.05	0.08	0.5

4.3 某部门现有资金100万元，在今后五年内考虑对以下四个项目投资，已知

项目1：从第一到第四年每年年初需要投资，并于次年末收回本利112%；

项目2：第三年年初需要投资，到第五年末能收回本利118%，但规定最多投资额不超过40万元；

项目3：第二年年初需要投资，到第五年末能收回本利126%，但规定最多投资额不超过30万元；

项目4：五年内每年年初可购买公债，于当年末归还，并加利息5%。

确定投资方案，使收益最大。

要求：(1) 建立数学模型；(2) 写出LINDO程序代码；(3) 写出运行程序的求解报告（不做分析）。

参考解答

第4.1题

设 x_i 表示化工厂 i 每天处理的污水量(万立方米 / 天)，$i = 1, 2$.

在两化工厂之间，河水中污水含量不得超过 0.2%，则有

$$(2-x_1)/500 \le 2/1000，即 x_1 \ge 1.$$

河水流经化工厂 2 后，河水中的污水含量仍不得超过 0.2 %，则有

$$[0.8(2-x_1)+(1.4-x_2)]/700 \le 2/1000,$$

即 $$0.8x_1 + x_2 \ge 1.6$$

由于化工厂每天处理的污水量不会大于每天的排放量，故应有 $x_1 \le 2，x_2 \le 1.4$

记 z 表示两个化工厂处理污水的总费用，则有

$$z = 1000x_1 + 800x_2$$

因此，该问题的数学模型归结为一线性规划模型.

目标函数： $\text{Min } z = 1000x_1 + 800x_2$

约束条件：
$$x_1 \ge 1$$
$$0.8x_1 + x_2 \ge 1.6$$
$$x_1 \le 2，x_2 \le 1.4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

第4.2题

设每个动物每天食用的混合饲料中所含的第 i 种饲料 A_i 的数量 (即决策变量) 为 x_i (kg)，混合饲料的总成本为 y，则上述问题的目标函数为：

$$\text{Min } y = 0.2x_1 + 0.7x_2 + 0.4x_3 + 0.3x_4 + 0.5x_5$$

约束条件为：

$$0.3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0.6x_4 + 1.8x_5 \ge 70$$
$$0.1x_1 + 0.05x_2 + 0.02x_3 + 0.2x_4 + 0.05x_5 \ge 3$$
$$0.05x_1 + 0.1x_2 + 0.02x_3 + 0.2x_4 + 0.08x_5 \ge 10$$
$$x_i \ge 0，\quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

第五章 练习题

5.1 某地从上午开始下雪，均匀地下着一直持续到天黑。从正午开始，一个扫雪队沿着公路清除前面的积雪，他们在前两个小时清扫了两公里长的路面，但是在其后的两小时内只清扫了一公里长的路面。如果扫雪队在相等的时间里扫除的雪量相等，试问雪是在什么时候开始下的呢？

5.2 距 c 处有一艘走私船正以匀速 a 沿直线行驶，缉私舰立即以最大的速度 b 追赶，若用雷达进行跟踪，保持船的瞬时速度方向始终指向走私船，建立缉私舰追逐路线和追上时间的数学模型。

5.3 在一种溶液中，化学物质 A 分解而形成 B，其速度与未转换的 A 的浓度成比例。转换 A 的一半用了 20 分钟，把 B 的浓度 y 表示为时间 t 的函数，并作出图形。

参考解答

第5.1题

问题的分析

从已知条件看，显然扫雪队前进的速度是随着时间的推移越来越慢的，即前进的速度 v 可以看作是时刻 t 的函数 $v=v(t)$。

由积分的物理意义可知，对做变速运动的物体来说，运动的路程可以表示为速度的积分，因而只要确定了扫雪队前进的速度，根据已知条件通过积分是不难建立模型确定下雪时间的。

模型建立及求解

假设扫雪队开始工作前已经下了 t_0 个小时的雪，每小时降雪的厚度为 h 厘米，扫雪队每小时清除的雪量为 C（单位：厘米·公里），则单位时间清除的雪量 C 与午后 t 小时积雪的厚度 $h(t+t_0)$ 之比所表示的就是 t 时刻扫雪队前进的速度，即

$$v(t)=\frac{C}{h(t+t_0)}$$

于是，由"前两个小时清扫了两公里长的路面"可得

$$\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^2\frac{C}{h(t+t_0)}\mathrm{d}t=2$$

即 $\dfrac{C}{h}\ln\dfrac{2+t_0}{t_0}=2$

而由"后两个小时只清扫了一公里长的路面"又可得

$$\int_2^4 v(t)\mathrm{d}t=\int_2^4\frac{C}{h(t+t_0)}\mathrm{d}t=1$$

即 $\dfrac{C}{h}\ln\dfrac{4+t_0}{2+t_0}=1$

联立得 $\ln\dfrac{2+t_0}{t_0}=2\ln\dfrac{4+t_0}{2+t_0}$ 即 $\dfrac{2+t_0}{t_0}=\dfrac{(4+t_0)^2}{(2+t_0)^2}$

解得 $t_0=-1\pm\sqrt{5}$

即得 $t_0=-1+\sqrt{5}\approx 1$小时14分10秒

从而开始下雪的时间大约是上午10时45分50秒。

第5.2题

模型假设

选取走私船逃跑的方向为 y 轴方向，缉私舰在 $(c,0)$ 位置时发现走私船在 $(0,0)$ 处。

显然，缉私舰、走私船的大小比它们运动的范围小得多，可视为两个质点。

模型建立及求解

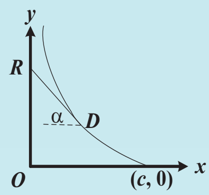
设在缉私舰发现走私船时算起的时间为 t，走私船到达 $R=(0,at)$ 点，缉私舰到 $D=(x,y)$（如图）。

因直线 DR 与路线相切，由几何关系得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha=\frac{y-at}{x}$$

或

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=-at$$



为消去 t，将上式对 x 求导，得到

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-a\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

代入 $ds/dt = b$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{b}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

这里有负号是因为 s 随 x 的减小而增大。

由此得到追击的微分方程

$$\begin{cases} x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=k\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \\ y(c)=0,\ y'(c)=0 \end{cases}$$

其中 $k=a/b$。上式不显含 y，令 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=p$，则上式化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=k\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两端积分并利用初始条件：$x=c$ 时 $p=0$，得到

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\ln(x/c)^k$$

从而

$$\begin{cases} p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{x}{c}\right)^k-\left(\dfrac{c}{x}\right)^k\right) \\ y(c)=0 \end{cases}$$

要继续求 y 是 x 的怎样一个函数，必须进一步确定 k。

(1) 若 $a<b$，从而 $k<1$，积分上式得

$$y=\frac{c}{2}\left(\frac{1}{1+k}\left(\frac{x}{c}\right)^{1+k}-\frac{1}{1-k}\left(\frac{x}{c}\right)^{1-k}\right)+\frac{ck}{1-k^2}$$

当 $x=0$ 时 $\quad y=\dfrac{ck}{1-k^2}=\dfrac{abc}{b^2-a^2}$

即走私船被缉私舰捕捉前所跑过的距离为 $\dfrac{abc}{b^2-a^2}$

所用的时间是

$$t=\frac{y}{a}=\frac{bc}{b^2-a^2}$$

(2) 若 $a=b$，即 $k=1$，积分可得

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-c^2}{2c}-c\ln\frac{x}{c}\right)$$

显然，x 不能取零值，即缉私舰不可能追上走私船。

(3) 若 $a>b$，即 $k>1$，显然，也不可能追上。

第5.3题

模型假设

- 1 mol A 分解后产生 n mol B
- 溶液的体积在反应过程中不变

模型建立

由假设知，A 的消耗速度与 A 的浓度成正比，故有下方程成立

$$x'(t)=-kx$$

其中 k 为比例系数

设反应开始时 $t=0$，A 的浓度为 x_0．由题中条件知，当 $t=20$(分)时，A 的浓度为 $x(20)=x_0/2$.

解初值问题

$$x'(t)=-kx,\ x(0)=x_0$$

得

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{-kt}$$

它应满足

$$x(20)=x_0\mathrm{e}^{-k\times 20}=x_0/2$$

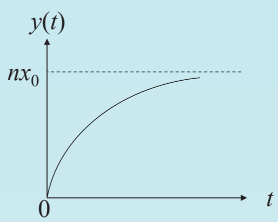
$$\Rightarrow k=\ln 2/20$$

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{-(\ln 2/20)t}$$

由于 B 的浓度为 A 的浓度的减少量的 n 倍，故有

$$y(t)=n[x_0-x_0\mathrm{e}^{-(\ln 2/20)t}]=nx_0[1-\mathrm{e}^{-(\ln 2/20)t}]$$

作图



$y(t)=nx_0[1-\mathrm{e}^{-(\ln 2/20)t}]$

第六章 练习题

6.1 用红、绿、蓝三种颜色将 $1\times n$ 棋盘上的方格着色，对于 $n=1,2,\ldots$，令 $h(n)$ 等于没有两个相邻方格都着红色这种着色的个数，建立关于 $h(n)$ 的差分方程，并求 $h(n)$ 的表达式。

参考解答

显然，$h(1)=3$（R, G, B）

$h(2)=8$（RG, RB, GR, GG, GB, BR, BG, BB）

当 $n\geq 3$ 时，

- 若棋盘的第一个方格着绿色或蓝色，则棋盘上余下的方格可按 $h(n-1)$ 种方式完成着色；
- 若棋盘的第一个方格着红色，则第二方格要着绿色或蓝色，余下的方格可按 $h(n-2)$ 种方式完成着色。

于是得差分方程

$$h(n)=2h(n-1)+2h(n-2)\quad (n=3,4,\ldots)$$

$h(n)=2h(n-1)+2h(n-2)\ \ (n=3,4,\ldots)$

特征方程为 $x^2-2x-2=0.$

特征根为 $x_1=1+\sqrt{3},\quad x_2=1-\sqrt{3}$

则一般解为 $h(n)=c_1(1+\sqrt{3})^n+c_2(1-\sqrt{3})^n\quad (n=1,2,\ldots)$

利用条件 $h(1)=3$，$h(2)=8$，求参数 c_1, c_2，即由

$$\begin{cases} c_1(1+\sqrt{3})+c_2(1-\sqrt{3})=3 \\ c_1(1+\sqrt{3})^2+c_2(1-\sqrt{3})^2=8 \end{cases}$$

解得

$$c_1=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},\quad c_2=\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

故

$$h(n)=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n\quad (n=1,2,\ldots)$$