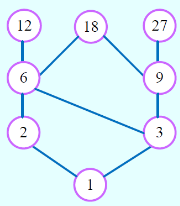
离散数学Chapter 6：格和布尔代数

- **6.1 格及其性质**
  - **一、格的偏序集定义**
    - 给定偏序集，≽为偏序≼的逆偏序，则$\forall l_1$，$l_2 \in L$，有
      - $l_1 \preccurlyeq l_2$当且仅当$l_2 \succcurlyeq l_1$
    - **最小上界,最大下界**

      GLB: Greatest Lower Bound // LUB: Least Upper Bound
      - 设l1和l2是偏序集 中的两个元素，
        - 元素a∈L，若满足a≼l1，a≼l2，则称a是l1 和l2 的下界。
          - 如果元素a是l1和l2的下界，且对任意的a′∈L，只要有a′也是l1和l2的下界便有a′≼a，则称a是l1和l2的最大下界，简记作a= glb(l1，l2)。
        - 元素b∈L，若满足l1≼b，l2≼b，则称b是l1和l2的上界。
          - 如果元素b是l1和l2的上界，且对任意的b′∈L，只要有b′也是l1和l2的上界便有b≼b′，则称b是l1和l2 的最小上界，简记作b= lub(l1，l2)。
      - 注意：从偏序集<L；≼>的次序图来看：
        - 元素l1和l2有最大下界：从结点l1和l2出发，经过向下的路径至少可以共同到达次序图的一个结点，这些结点中最上面的那一个就代表l1和l2的最大下界。
        - 元素l1和l2有最小上界：从结点l1和l2出发，经过向上的路径至少可以共同到达次序图的一个结点，这些结点中最下面的那一个就代表l1和l2的最小上界。
        - 例题：

          例如 设集合 $A = \{1，2，3，6，9，12，18，27\}$，“整除”关系是 A 上的偏序关系，其次序图如右，它们构成一个偏序集 <A；≼>。

          lub(2，3) = ？ lub(12，18) = ？ glb(12，18) = ？

          显然，$2 \preccurlyeq 6$，$3 \preccurlyeq 6$；$2 \preccurlyeq 12$，$3 \preccurlyeq 12$；$2 \preccurlyeq 18$，$3 \preccurlyeq 18$。

          由于 $6 \preccurlyeq 12$，$6 \preccurlyeq 18$，因此 lub(2，3) = 6。

          但 lub(12，18) 不存在（无上界）。

          $6 \preccurlyeq 12$，$6 \preccurlyeq 18$；$2 \preccurlyeq 12$，$2 \preccurlyeq 18$；$3 \preccurlyeq 12$，$3 \preccurlyeq 18$；$1 \preccurlyeq 12$，$1 \preccurlyeq 18$。因为 $1 \preccurlyeq 6$，$2 \preccurlyeq 6$，$3 \preccurlyeq 6$，所以 glb(12，18) = 6。

          因此，偏序集中并非任意两个元都有最小上界和最大下界存在。
        - **偏序集中并非任意两个元都有最小上界和最大下界存在**
    - **格**
      - 设<L；≼>是一个偏序集，**如果L 中任意两个元素l1，l2都存在着最小上界和最大下界**，分别记为lub(l1，l2) 和glb(l1，l2)，则称<L；≼>是格。
      - 设< L；∨，∧>是一个代数系统，∨和∧是L上的两个二元运算，如果这两个运算满足交换律、结合律和吸收律，则称< L；∨，∧>是格。
    - **并运算，交运算，由格<L；≼>导出的代数系统**

- 偏序集<L；≼>是格，对任意的l1，l2∈L，引入记号
  - $l_1 \vee l_2 = lub(l_1，l_2)$，$l_1 \wedge l_2 = glb(l_1，l_2)$
- 则∨和∧均是集合L上的二元运算，分别称为并运算和交运算，构成的代数系统<L；∨，∧>称为由格<L；≼>导出的代数系统。
- 注：
  - 这里出现的符号∨，∧只代表格中的运算，不再有其它的含义。
  - 交运算也称保交运算，并运算也称保联运算
- 如果<L；≼>是格，则<L；≽>也是格，且对任意的l1，l2，l3∈L，有以下关系式成立：
  - **十大关系式**
    - ≼
      - l1≼l1（6.1）
      - 若l1≼l2，l2≼l1，则l1= l2（6.2）
      - 若l1≼l2，l2≼l3，则l1≼l3（6.3）
      - l1∧l2≼l1，l1∧l2≼l2（6.4）
      - 若l3≼l1，l3≼l2，则l3≼l1∧l2（6.5）
    - ≽
      - l1≽l1（6.1′）
      - 若l1≽l2，l2≽l1，则l1=l2（6.2′）
      - 若l1≽l2，l2≽l3，则l1≽l3（6.3′）
      - l1∨l2≽l1，l1∨l2≽l2（6.4′）
      - l3≽l1，l3≽l2，则l3≽l1∨l2（6.5′）
- 注意：
  - 式（6.1）~（6.5）及式（6.1′）~（6.5′）这十个关系式代表了格的定义，是后面推理的基础。
  - 可以按照这些关系式所代表的意义来记忆，如关系式（6.4）说明最大下界的“下界”意义，关系式（6.5）说明最大下界的“最大”意义。
  - 由（6.4）和（6.4′），有$l_1 \wedge l_2 \preccurlyeq l_1 \vee l_2$。

- **二、格的性质**
  - **定理6.1**
    - 在格中，对任意的l_1，$l_2 \in L$，以下三式中若任意一式成立，那么其它两式也成立。
      - (1) $l_1 \vee l_2 = l_1$；
      - (2) $l_1 \wedge l_2 = l_2$；
      - (3) $l_2 \preccurlyeq l_1$
    - **定理表明**：在格的偏序关系的次序图中，如果两个不同的结点有边相连或通过可传递的第三边相连，则它们的并为连线上方的结点，而它们的交为连线

下方的结点，可简单记忆为**“并取大，交取小”**。

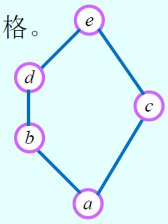
- **对偶命题，对偶**
  - 设<L；≼> 是格，P是包含格的元素和符号=、≼、≽、∧、∨的命题，将P中的≼、≽、∧和∨分别替换成≽、≼、∨和∧所得的命题称为P的对偶命题，简称对偶，记为P^D。
    - 注：若P^D是P的对偶，则P也是P^D的对偶，即互为对偶。
- **对偶原理**
  - 对于格 上的任一真命题P，其对偶P^D亦为格<L；≼>上的真命题。
- **定理 6.3**
  - 设<L；≼> 是格，则运算∨和∧满足交换律、结合律、吸收律和幂等律，即对任意的l1，l2，l3∈L，有
    - (1) $l_1 \vee l_2 = l_2 \vee l_1$，$l_1 \wedge l_2 = l_2 \wedge l_1$。
    - (2) $l_1 \vee (l_2 \vee l_3) = (l_1 \vee l_2) \vee l_3$，$l_1 \wedge (l_2 \wedge l_3) = (l_1 \wedge l_2) \wedge l_3$。
    - (3) $l_1 \vee (l_1 \wedge l_2) = l_1$，$l_1 \wedge (l_1 \vee l_2) = l_1$。
    - (4) $l_1 \vee l_1 = l_1$，$l_1 \wedge l_1 = l_1$
    - 即格导出的代数系统具有交换律、结合律、吸收律和幂等律
  - 注：
    - 由于有结合律，常将$l_1 \vee (l_2 \vee l_3)$，$(l_1 \vee l_2) \vee l_3$记为$l_1 \vee l_2 \vee l_3$；将$l_1 \wedge (l_2 \wedge l_3)$，$(l_1 \wedge l_2) \wedge l_3$记为$l_1 \wedge l_2 \wedge l_3$。
    - 利用归纳法可以证明，对于任意n个元素l_1，l_2，…，$l_n \in L$，结合律也是成立的，即不加括号的表达式
    - $l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_n$（简记为$\bigvee_{i=1}^{n} l_i$）和$l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$（简记为$\bigwedge_{i=1}^{n} l_i$）分别唯一地表示L中的一个元素。
- **格的保序性**
  - 设<L；≼>是格，对任意的l_1，l_2，l_3，$l_4 \in L$，有
    - (1) 若$l_2 \preccurlyeq l_3$，则$l_1 \vee l_2 \preccurlyeq l_1 \vee l_3$，$l_1 \wedge l_2 \preccurlyeq l_1 \wedge l_3$。
    - (2) 若$l_1 \preccurlyeq l_3$，$l_2 \preccurlyeq l_4$，则$l_1 \vee l_2 \preccurlyeq l_3 \vee l_4$，$l_1 \wedge l_2 \preccurlyeq l_3 \wedge l_4$。
- **定理 6.5**
  - 设<L；≼>是格，则对任意l_1，l_2，$l_3 \in L$，有
    - (1) $l_1 \vee (l_2 \wedge l_3) \preccurlyeq (l_1 \vee l_2) \wedge (l_1 \vee l_3)$。
    - (2) $l_1 \wedge (l_2 \vee l_3) \succcurlyeq (l_1 \wedge l_2) \vee (l_1 \wedge l_3)$。
    - 可简单记忆为“先并大，后并小”或“先并大，先交小”。
    - **在格<L；≼>中，运算∨和∧一般不满足分配律。**

- **三、格的代数系统定义**
  - **定理 6.6**

      - 设< L； ∨， ∧> 是一个代数系统，其中∨和∧都是二元运算且满足交换律、结合律和吸收律，则在L上必存在一偏序关系≼，使得< L； ≼> 是一个格。
    - **代数格**
      - 设< L； ∨， ∧> 是一个代数系统，∨和∧是L上的两个二元运算，如果这两个运算满足交换律、结合律和吸收律，则称< L； ∨， ∧> 是格。
    - **偏序格，代数格**
      - 格既可以看作是一个偏序集<L； ≼> （L中任意两个元素都存在最大下界和最小上界），一般称为偏序格，也可以看作是一个代数系统< L； ∨， ∧> （两个二元运算满足交换律、结合律和吸收律），一般称为代数格。
  - **四、子格**
    - **子格**
      - 设< L； ∨， ∧> 是格，如果< S； ∨， ∧> 是< L； ∨， ∧> 的子代数，则称< S； ∨， ∧> 是< L； ∨， ∧> 的子格。
      - 注意：
        - 子格也是一个格。因为当运算∨和∧限制在S上时，交换律、结合律和吸收律也是成立的。
          - $\forall a, b \in S(\subseteq L) \rightarrow a \vee b, a \wedge b \in S$
        - 格是其自身的一个子格。
  - **五、格的同态**
    - **定理6.7**
      - 设h 是从代数系统V1= <L1； ∨1， ∧1> 到代数系统V2= <L2； ∨2， ∧2> 的满同态，其中∨1， ∧1， ∨2， ∧2都是二元运算，若V1是格，则V2也是格。
      - 格的同态像是格
    - **定理6.8**
      - 设h 是从格<L1； ≼1> 到格<L2； ≼2> 的同态，则对任意的x， y∈L1，如果 $x \preccurlyeq_1 y$，则$h(x) \preccurlyeq_2 h(y)$。
    - **定理6.9**
      - 给定代数系统V1= <L1； $\vee_1$， $\wedge_1$>， V2= <L2； $\vee_2$， $\wedge_2$>，其中$\vee_1$， $\wedge_1$， $\vee_2$ ， $\wedge_2$都是二元运算，若V1和V2是格，则V1×V2 也是格。
- **6.2 分配格和有补格**
  - **一、分配格**
    - **1. 分配格的定义**
      - **分配格**
        - 设< L； ∨， ∧> 是一个格，若对任意的l1， l2， l3∈L，有
        - $l_1 \wedge (l_2 \vee l_3) = (l_1 \wedge l_2) \vee (l_1 \wedge l_3)$，
        - $l_1 \vee (l_2 \wedge l_3) = (l_1 \vee l_2) \wedge (l_1 \vee l_3)$，
        - 则称< L； ∨， ∧> 是分配格。

【例 6.9】对任意的集合 A，$< 2^A;\ \cup,\ \cap >$ 是一个分配格。

【例 6.10】图中给出的格（称为**五角格**）不是分配格。



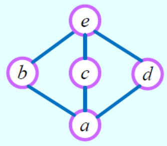
因为

$$b = b \vee (d \wedge c) \neq (b \vee d) \wedge (b \vee c) = d$$

$$d = d \wedge (b \vee c) \neq (d \wedge b) \vee (d \wedge c) = b$$

所以运算不满足分配律。

【例 6.11】图中给出的格（称为**钻石格**） 不是分配格。



因为 $b \wedge (c \vee d) = b \wedge e = b$，

而 $(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a$，

所以 $b \wedge (c \vee d) \neq (b \wedge c) \vee (b \wedge d)$。

- **2．分配格的判别**
  - **定理6.10**
    - 在格< L； ∨， ∧> 中，如果交运算对并运算是可分配的，则并运算对交运算也是可分配的；如果并运算对交运算是可分配的，则交运算对并运算也是可分配的。

如果 $< L;\ \vee,\ \wedge >$ 是分配格，则对任意的 l，a_1，a_2，…，$a_n \in L$，有

$$l \vee (\bigwedge_{i=1}^{n} a_i) = \bigwedge_{i=1}^{n} (l \vee a_i)$$

$$l \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} a_i) = \bigvee_{i=1}^{n} (l \wedge a_i)$$

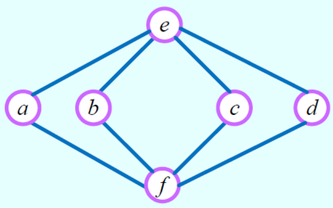
更一般地，对任意的 l_1，l_2，…，l_m，a_1，a_2，…，$a_n \in L$，有

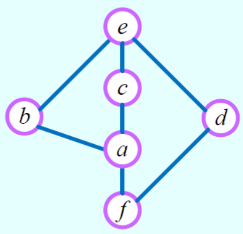
$$(\bigwedge_{i=1}^{m} l_i) \vee (\bigwedge_{j=1}^{n} a_j) = \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} (l_i \vee a_j)$$

$$(\bigvee_{i=1}^{m} l_i) \wedge (\bigvee_{j=1}^{n} a_j) = \bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} (l_i \wedge a_j)$$

  - **定理6.11**
    - 格为分配格的充分必要条件是，格中不存在与钻石格或五角格同构的子格。

例如 下图给出的格都不是分配格。





  - **推论6.2**
    - 任何小于5 个元素的格均为分配格。
  - **链**
    - 设<L；≼>是一个偏序集，若对任意的l_1，l_2∈L，或者$l_1 \preccurlyeq l_2$或者$l_2 \preccurlyeq l_1$，即l_1，l_2可比，则称<L；≼> 是一个链。
    - 此时的偏序称为全序或线序。

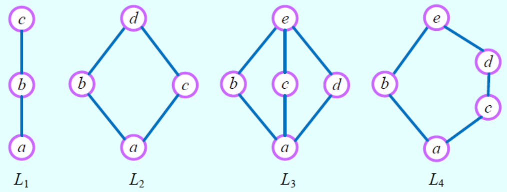
- 每一个链<L；≼> 都是一个分配格。
- **定理6.12**
  - 设l_1，l_2，l_3是分配格< L；∨，∧> 中的任意三个元素，那么当且仅当$l_1 \vee l_2 = l_1 \vee l_3$，$l_1 \wedge l_2 = l_1 \wedge l_3$时，有$l_2 = l_3$。
  - 注：对于非分配格，定理6.12 不成立。可用于反证一个格不是分配格。

- **二、有补格**
  - **1．有界格**
    - **全上界，全下界**
      - 如果格<L；≼>中存在一个元素a，对任何元素l∈L，均有l≼a （a≼l），则称a 为格的全上界（全下界）。
      - **一个格若有全上界（全下界），则是唯一的。**
      - 通常将全上界记为“1”，而将全下界记为“0”。
    - **有界格**
      - 既有全下界又有全上界的格称为有界格。
      - 在有界格 中，对任意的l ∈L，有
      - （1） 0 ≼l，l≼1。
      - （2） l ∨1 = 1，l∨0 =l，l∧1 = l，l∧0 = 0。
      - 注：在有界格的次序图中，必有唯一一个称为“1”的结点位于图的最上层，也必有唯一一个称为“0”的结点位于图的最下层，并且从任一其它结点出发经过向上的路径都可以到达结点1，而从任一其它结点出发经过向下的路径都可以到达结点0。
    - **定理6.14**
      - 每个有限格都是有界格。
      - 对于无限格L 来说，有些是有界格，有些不是有界格。
        - 例如
          - （1）格<Z；≤> 既无全下界，又无全上界，不是有界格。
          - （2）格 <N；≤>有全下界0，但没有全上界，也不是有界格。
          - （3）在格$< 2^U ; \subseteq >$中，无论U 是什么样的集合，均有全下界Φ和全上界U，因此是有界格。
  - **2．补元素**
    - **补元素**
      - 设< L；∨，∧> 是一个有界格，a∈L，若存在元素b∈L，使得a∨b= 1，a∧b= 0，则称b是a的补元素。
      - 若b是a的补元素，则a也是b的补元素。因此a和b互为补元素。
      - 在任一有界格中，0 和1 互为补元素。
      - 例子表明，在有界格中，
        - 并非每一个元素都有补元素。

- 若某元素有补元素，则其补元素不一定唯一。

- **3．有补格**
  - **有补格**
    - 设< L；∨，∧> 是一个有界格，如果L中每一个元素都有补元素，则称< L；∨，∧> 是有补格。

【例 6.17】考虑下图所示的四个格。



L_1中的a与c互为补元，其中a，c分别为全下界和全上界，b没有补元。L_1不是有补格。

L_2中的a与d互为补元，其中a，d分别为全下界和全上界，b与c也互为补元。L_2是有补格。

L_3中的a与e互为补元，其中a，e分别为全下界和全上界，b的补元是c和d，c的补元是b和d，d的补元是b和c。L_3是有补格。

L_4中的a与e互为补元，其中a，e分别为全下界和全上界，b的补元是c和d，c的补元是b，d的补元是b。L_4是有补格。

- **三、有补分配格**
  - **有补分配格，布尔格**
    - 既是有补格又是分配格的格称为有补分配格，也称为布尔格。
    - **性质**：
      - 在有补分配格< L；∨，∧> 中，任一元素的补元素是唯一的。
        - 记l的补元素为l'或$\bar{l}$。
      - （对合律）在有补分配格< L；∨，∧> 中，对每一个l∈L，有(l')'= l。
      - （德· 摩根定律）在有补分配格< L；∨，∧> 中，对于任意的l_1，l_2∈L，有
        - （1）$(l_1 \vee l_2)' = l_1' \wedge l_2'$；
        - （2）$(l_1 \wedge l_2)' = l_1' \vee l_2'$。
      - 在有补分配格< L；∨，∧> 中，对任意的l_1，l_2∈L，$l_1 \preccurlyeq l_2$当且仅当$l_2' \preccurlyeq l_1'$当且仅当$l_1 \wedge l_2' = 0$当且仅当$l_1' \vee l_2 = 1$

- **6.3 布尔代数**
  - **一、布尔代数的基本概念**
    - **布尔代数**
      - 如果一个格是有补分配格，则称其为布尔代数。一般记作< B；∨，∧，'>，其中'为求补运算（一元运算）。
      - 设< B；∨，∧，'> 是一个代数系统，∨和∧是B上的二元运算，'是一元运算，若这些运算满足交换律、分配律、同一律和互补律，则称< B；∨，∧，'> 是布尔代数。
      - 布尔代数< B；∨，∧，'> 具有如下基本性质：对于B中任意元素x，y，z，有

    - （1）交换律：$x \vee y = y \vee x$，$x \wedge y = y \wedge x$
    - （2）结合律：
        - $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
        - $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
    - （3）幂等律：$x \vee x = x$，$x \wedge x = x$
    - （4）吸收律：$x \vee (x \wedge y) = x$，$x \wedge (x \vee y) = x$
    - （5）分配律：
        - $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
        - $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
    - （6）同一律：$x \vee 0 = x$，$x \wedge 1 = x$
    - （7）零一律：$x \vee 1 = 1$，$x \wedge 0 = 0$
    - （8）互补律：$x \vee x' = 1$，$x \wedge x' = 0$
    - （9）对合律：$(x')' = x$
    - （10）德·摩根定律：
        - $(x \vee y)' = x' \wedge y'$
        - $(x \wedge y)' = x' \vee y'$
- **注意：**
    - 以上十条性质均可由交换律、分配律、同一律和互补律这四条基本定律导出（课后练习）。
    - 这四条基本定律中每一条都包含了互为对偶的两个关系式，即将一个关系式中的 $\vee$，$\wedge$，0，1 分别改为 $\wedge$，$\vee$，1，0，则可得到另一个关系式。
    - 布尔代数的任一由这些基本关系式所导出的关系式的对偶，亦可由这些基本关系式的对偶导出。
    - **单位元，零元**
        - 对运算 $\vee$： 0 是单位元，1 是零元；
        - 对运算 $\wedge$： 1 是单位元，0是零元。
        - 单位元和零元都唯一。
- **代数系统的格：**
    - **布尔代数**
        - 设 $\langle B; \vee, \wedge, ' \rangle$ 是一个代数系统，$\vee$和$\wedge$是B上的二元运算，$'$是一元运算，若这些运算满足交换律、分配律、同一律和互补律，则称 $\langle B; \vee, \wedge, ' \rangle$ 是布尔代数。
    - **子布尔代数**
        - 设 $\langle B; \vee, \wedge, ' \rangle$ 是一个布尔代数，$\langle S; \vee, \wedge, ' \rangle$ 是 $\langle B; \vee, \wedge, ' \rangle$ 的子代数，则称 $\langle S; \vee, \wedge, ' \rangle$ 为 $\langle B; \vee, \wedge, ' \rangle$ 的子布尔代数。
    - **注：**
        - 布尔代数的子代数也是一个布尔代数。

- 布尔代数是其自身的一个子布尔代数。

- **定理6.19**
  - 设h是从代数系统V1=<L1; ∨1, ∧1, '1>到代数系统V2=<L2; ∨2, ∧2, '2>的满同态，其中∨1, ∧1, ∨2, ∧2都是二元运算，'1, '2都是一元运算，若V1是布尔代数，则V2也是布尔代数。

  > 满同态传递运算性质

- **推论6.3**
  - 布尔代数的同态像是布尔代数。
- **定理6.20**
  - 给定代数系统V1=<L1; ∨1, ∧1, '1>和V2=<L2; ∨2, ∧2, '2>，其中∨1, ∧1, ∨2, ∧2都是二元运算，'1, '2都是一元运算，若V1和V2是布尔代数，则V1×V2也是布尔代数。

- **二、布尔代数的性质**
  - **元素a盖住b**
    - 设a，b是格<L; ≼>中的两个元素，如果b≼a且b≠a（记为b<a），以及格中无其它别的元素c，使得b<c和c<a（记为b<c<a），则称元素a盖住b。
    - 若a为原子，则不存在元素c∈L，使得0 <c<a。
    - 从关系≼的次序图上看，从全下界结点0出发经过一条边就能够到达的结点就是原子。
    - **格中的原子不一定唯一。**
    - **定理6.21**
      - 若格中有原子a，b，且a≠b，则必有a∧b= 0。
    - **定理6.22**
      - 对于布尔代数，原子具有如下性质：
        - （1）元素a是原子当且仅当0 <a，且对任意的x∈B，有x∧a= a或x∧a= 0。
        - （2）若元素a是原子，则对任意的x，y∈B，a≼x∨y当且仅当a≼x或a≼y。
        - （3）若元素a，b是原子，则有a= b或a∧b= 0。
        - （4）对有限布尔代数中任意非零元素b，总有一个原子a，使得a≼b。
        - （5）对有限布尔代数中任意元素b，设$A(b) = \{x|x \in B，x是原子且x \preccurlyeq b\} = \{a_1，a_2，\ldots，a_m\}$，则b= a1∨a2∨… ∨am且表达式唯一。
    - **定理6.23**
      - 设<B; ∨, ∧, '>是有限布尔代数，S是其所有原子的集合，则<B; ∨, ∧, '>和$< 2^S；\cup，\cap，\;>$同构，这里将集合的补运算记为~以示区别。

- **推论6.4**
  - 任何有限布尔代数的域的基数必定等于2^n，其中n 是该布尔代数中所有原子的个数。
- **推论6.5**
  - 任何等势的有限布尔代数都是同构的。