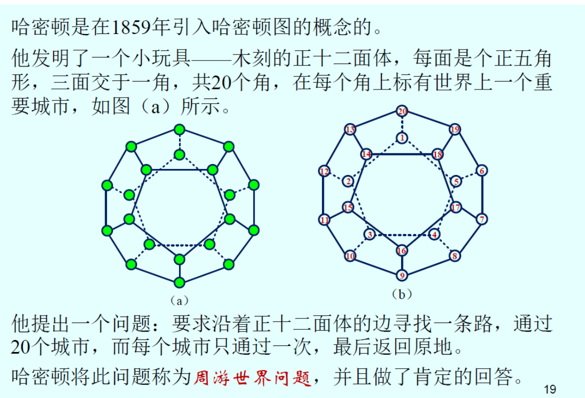
离散数学Chapter 8：特殊图

- **8.1欧拉图**
  - **一、欧拉图的基本概念**
    - **欧拉回路,欧拉图,欧拉路**
      - 通过图的每条**边**一次且仅一次的回路称为欧拉回路。存在欧拉回路的图，称为欧拉图。
      - 通过图的每条**边**一次且仅一次的开路称为欧拉路。
      - **注:**
        - 除了有孤立点的情形外，一个欧拉图是一个连通图。
        - 具有欧拉回路的连通图是可以一笔画出的图，即能从图中任一点出发一笔画出这个图且最后又回到出发点。
        - 具有欧拉路的连通图也是可以一笔画出的图，但必须从图中某一点出发，一笔画出这个图后，终止于图中的另外一点。
  - **二、欧拉图的判别**
    - **定理8.1**
      - 连通图G为欧拉图的充要条件是G的每一结点的度均为偶数。
      - **注:**
        - 此结论可推广到多重图。由此，哥尼斯堡七桥问题无解。
    - **定理8.2**
      - 连通图G具有一条连接结点u 到v 的欧拉路的充要条件是u 和v是G中**仅有的**具有奇数度的结点。
    - **推论8.1**
      - 一个弱连通的有向图具有欧拉回路的充要条件是该图的每一个结点的入度和出度相等。
      - 一个弱连通的有向图具有欧拉路的充要条件是该图除两个结点外每个结点的入度等于出度，对于这两个结点，一个结点的出度比入度多1，另一个结点的出度比入度少1。
  - **三、中国邮路问题**
    - **中国邮路问题**
      - **问题:**
        - 中国邮路问题是一个非常经典的图论问题：一个邮递员送信，要走完他负责投递的全部街道（所有街道都是双向通行的且每条街道可以经过不止一次），完成任务后回到邮局，应按怎样的路线走，他所走的路程才会最短呢?
      - **抽象成图论问题**

- 就是给定一个连通有权图（每条边的权值为该街道的长度），要在图中求一条回路，使得回路的总权值最小。
  - 如果连通图为欧拉图，则**只要求出图中的一条欧拉回路**即可。
  - 否则，邮递员要完成任务就必须在某些街道上重复走若干次。如果重复走一次，就加一条平行边，于是原来对应的图形就变成了多重图。只是要求加进的平行边的总权值最小就行了。
- 于是，原来的问题就转化为，在一个有奇度数结点的赋权连通图中，增加一些平行边，使得新图不含奇度数结点，并且增加的边的总权值最小。

- **解答**
  - 设图G中所有奇数度结点（图中奇数度结点的个数必为偶数）为 v_1， v_2， ...， v_{2h}，中国邮路问题的求解步骤如下。
    - i从1到h，引结点v_{2i-1}到v_{2i}的路P_i（因为图连通，所以路必定存在），并对Pi的每条边附加一条边使之成为重复边。
    - 检查图G的每条边，若添加的重复边数超过1，则除去其中偶数条，使得每条边至多有一条添加的边，此时每一个结点的度为偶数，得多重欧拉图G′。
    - 对图G′的每一简单回路（所有边互不相同的回路），检查其中重复边的权重之和是否超过无重复边的权重之和。
      - 如果超过，则把原来的重复边改为无重复边，把无重复边改为重复边。
      - 反复进行以上过程，直到都不超过为止，最后得到多重欧拉图H。
  - 图H的欧拉回路就是包含G中每条边至少一次的最小权值回路。

- **8.2哈密顿图**
  - **一、哈密顿图的基本概念**
    - **引入**

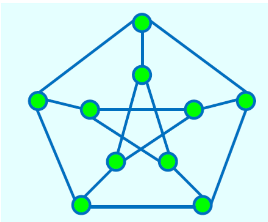


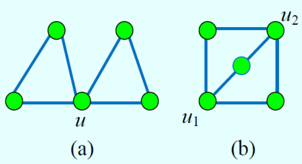
    - **哈密顿环，哈密顿图，哈密顿路**
      - 通过图G的每个**结点**一次且仅一次的环称为哈密顿环。具有哈密顿环的图称为哈密顿图。
      - 通过图G的每个结点一次且仅一次的开路称为哈密顿路。

- 注：
  - 哈密顿图是连通图。
    - 欧拉图不一定是连通图！
  - 到目前为止，还没有找到一个图成为哈密顿图的充分必要条件。
  - 假定本节中所讨论的图均是连通图

二、哈密顿图的判别

- **定理8.3**
  - 若连通图G=（V，E）是哈密顿图，则对于V的任意一个非空子集S，有W(G–S) ≤# S。
  - W(G–S) 表示从G中删除S（删除S中的各结点及相关联的边）后所剩图的分图数。# S表示S中的结点数。
  - 利用该定理可以判定一个图不是哈密顿图。
    - 例如：有割点的连通图不是哈密顿图。
  - **注**
    - 该定理给出的条件是哈密顿图的必要而非充分的条件。
    - 反例：Petersen 图

      
  - **推论8.2**
    - 若连通图G=（V，E)存在哈密顿路，则对于V的任意一个非空子集S，有W(G–S) ≤# S+ 1。
  - **例题：**

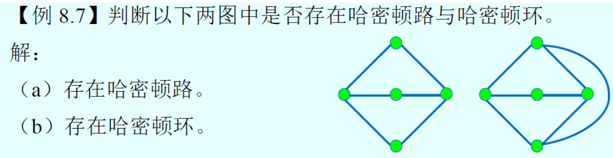
    【例 8.6】判断下列各图是否是哈密顿图。

    解：在图 (a) 中去掉结点 u 以后 $W(G-\{u\})=2$，

    在图 (b) 中去掉结点 u_1 和 u_2 以后，$W(G-\{u_1, u_2\})=3$，

    因此，这两个图都不是哈密顿图。
- **定理8.4**
  - 设G是具有n（n≥3）个结点的图，如果G中每对不相邻结点度数之和大于或等于n–1，则G中存在哈密顿路。
  - **注：**
    - 此定理只是充分条件，而不是充分必要条件。
- **定理8.5**

            - 设G是具有n（n≥3）个结点的图，如果G中每对不相邻结点度数之和大于或等于n，则G是哈密顿图。
        - **推论8.3**
            - 设G是具有n（n≥3）个结点的图，如果G中每个结点度数大于或等于n / 2，则G是哈密顿图。
        - **例题：**



【例 8.7】判断以下两图中是否存在哈密顿路与哈密顿环。

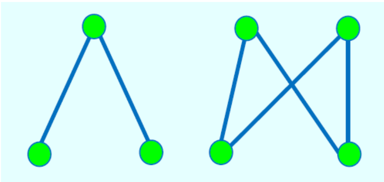
解：

（a）存在哈密顿路。

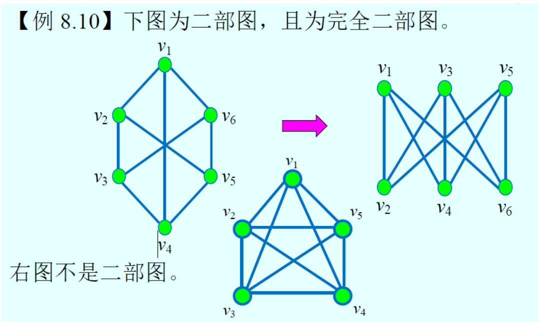
（b）存在哈密顿环。

- **三、流动售货员问题**
    - **引入**
        - 一个流动售货员，要从公司出发走销附近所有的城镇，然后返回公司所在地。假定每两个城镇（含公司所在地）都有公路且长度已知，那么他如何安排路线，使得旅行的总距离最小?
        - 用结点代表公司所在地和各城镇，用边代表相互之间的公路，并标出相应公路之长度。
        - 问题化为在一个完全有权图上找出一条经过每个结点一次且仅一次而且全程为最短的环（哈密顿环）。
    - **分析：**
        - 这一问题看似简单，实际上含有两个困难的问题：
            - 如何判定图G是否有Hamilton环；
            - 在已知图G有Hamilton环的情况下，如何求出一个权重最小的Hamilton环来。
        - 这两个问题目前尚未找到有效算法，甚至不知道这样的有效算法是否存在。事实上它们是NP-Complete问题（NP就是Non-deterministic Polynomial的问题，即多项式复杂程度的非确定性问题）。
        - 下面给出一个“最邻近方法”，它为解决此问题给出了一个较好的结果。
    - **最邻近方法**
        - （1）由任意选择的结点开始，找一个与起始结点最近的结点，形成一条边的初始路径，然后逐点扩充这条路。
        - （2）设x表示最新加到这条路上的结点，从不在路上的所有结点中间选一个与x最接近的结点，将连接x与这一结点的边加到这条路上。
        - 重复这一步，直到图中所有结点包含在路上。
        - （3）将连接起始点与最后加入的结点之间的边加到这条路上，就得到一个环。
        - 在所有这些环中找出全程为最短的环即得。
- **8.3二部图**
    - **一、二部图的基本概念**

- **二部图,偶图,互补结点子集,完全二部图,完全偶图**
  - 若一个图G的结点集V能划为两个子集V_1和V_2，使得G的每一条边{v_i，v_j}满足v_i∈V_1，v_j∈V_2，则称G是一个二部图（或偶图），V_1和V_2称为G的互补结点子集。此时可将G记作G=(V_1，V_2，E)。
  - 若V_1中任一结点与V_2中每一结点均相邻接，则称二部图为完全二部图（或完全偶图）。若#V_1=r，#V_2=t，则完全二部图G 记为$K_{r,t}$
  - **注:**
    - **二部图至少有两个结点**
    - 二部图不一定是连通图。例如

      
    - 除孤立结点外，树是二部图。

      偶数级结点，奇数级结点分别位于一个结点集中
    - 偶数个结点的环是二部图。
    - 二部图中的结点可用黑点和白点加以标注。
  - **例题:**

- 二、二部图的判别
  - **定理8.6**、
    - 图G为二部图当且仅当G的所有回路均为偶数长。
- 三、任务分配问题
  - **完全匹配，匹配**
    - 设G是具有互补结点子集V_1和V_2的二部图，其中V_1={v_1，v_2，…，v_q}，V_1对V_2的完备匹配简称匹配是G的一个子图，它由q条边{v_1，v_1'}，{v_2，v_2'}，…，{v_q，v_q'}组成，其中v_1'，v_2'，…，v_q'是V_2中q个不同的元素
    - 一个二部图存在V1对V2的匹配的必要条件是$\#V_1 \leq \#V_2$。
  - **任务分配问题:**
    - 有m个人和n件工作，每个人都只熟悉这n件工作中的某几件，每一件工作都需要一个人干，那么能不能将这n件工作都分配给熟悉它的人干呢（不能兼职）？
  - **定理8.7**

定理中的条件称为**相异性条件**。

- 设G是具有互补结点子集V_1和V_2 的二部图，则G中存在一个V_1对V_2 的匹配的充要条件是：V_1中每k个结点（k= 1，2，…，$\#V_1$）至少和V_2中k个结点相邻接

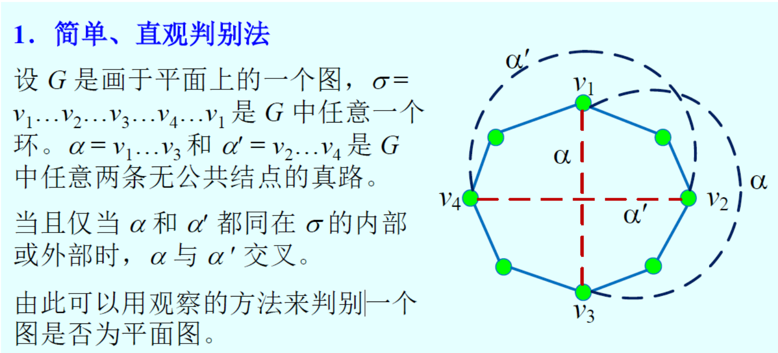
- **定理8.8**

定理中的条件称为**t 条件**。

- 设G是具有互补结点子集V1和V2 的二部图，则G中存在一个V1对V2 的匹配的充分条件是：存在某一正整数t，使
  - （1）对V1中的每个结点，至少有t条边与其关联,deg(u)≥t；
  - （2）对V2中的每个结点，至多有t条边与其关联,deg(v)≤t。
- **注：**
  - 要验证一个二部图满足相异性条件，必须考虑 k 的多种取值，当二部图的结点数较大时使用起来就不太方便了。
  - 在判断二部图是否存在匹配时，先检查 “t 条件”，如果不满足，再用 “相异性条件” 检查。

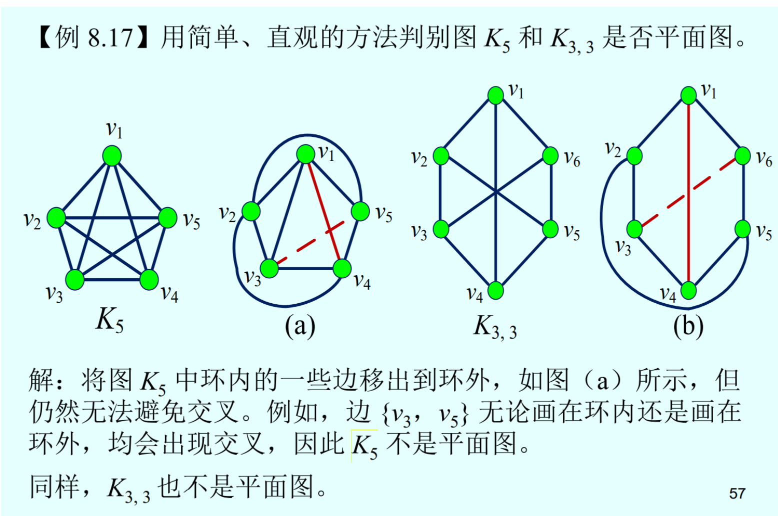
- **8.4平面图**
  - **一、平面图的基本概念**
    - **平面图，非平面图，平面嵌入**
      - 一个图G 若能画在平面上而它的边除在结点处外互不交叉，则称G为平面图，否则称G为非平面图。
      - 画出的没有边交叉的图解称为G的一个平面嵌入。
      - **注：**
        - 平面图不一定是连通图。
        - 平面图的任何子图是平面图。
        - 当且仅当图的每个分图都是平面图时，该图是平面图。
    - **面，面的边界，面的次数，度，有限面，内部面，无限面，外部面，相邻的，不相邻的**
      - G是一个连通平面图，图的边所包围的一个区域，其内部既不含图的结点也不含图的边，这样的区域称为G的一个面。包围该面的各边构成的回路称为这个面的边界。面的边界中所含的边数称为该面的次数或度。

        面的次数至少为3
      - 有界的区域称为有限面或内部面，否则称为无限面或外部面。
      - 每个平面图恰有一个无限面（不受边界约束）。
      - 若两个面的边界至少有一条公共边，则称这两个面是相邻的，否则称这两个面是不相邻的。
      - 显然，如果e不是割边，则它一定是某两个面的公共边界。
  - **二、平面图的判别**
    - **1．简单、直观判别法**



不是平面图

- **2．欧拉公式判别法**
  - **定理8.10**
    - 设G是一连通平面图，则有n – m + K = 2。其中n，m，K分别是图的结点数、边数和面数（包括无限面）。
  - **推论8.4**
    - 设G是一(n，m)的平面图，且有k个分图，则**n–m+ K= k+ 1**。
  - **定理8.11**
    - 设G是一(n，m) 的连通平面图，m≥2，则**m ≤ 3n – 6**
  - **推论8.5**
    - 设G是一(n，m) 的连通平面图，m≥2，若G是二部图，则**m≤2n –4**
  - **推论8.6**
    - 设G是一(n，m)的连通平面图，m≥2，则至少存在一个结点v，有**deg(v) ≤5**。
- **3．库拉托斯基定理判别法**
  - **在度为2 的结点内同构**
    - 如果两个图G1和G2是同构的，或者通过反复插入或删除度为2 的结点，它们能变成同构的图，则称G1和G2在度为2 的结点内同构。
  - **库拉托斯基定理**
    - 一个图是平面图的充要条件是它既不包含**在度为2 的结点内**与K_5同构的子图，也不包含**在度为2 的结点内**与$K_{3,3}$同构的子图。



是五阶完全图,每一顶点与其他所有顶点都有边.
是二部图.上下顶点分别为3.

以上内容整理于 幕布文档