

# 离散数学Chapter 7: 图和树

## 7.1图的基本概念

### 一、图及其图解表示

#### 1. 图的定义

- 图, 结点, 顶点, 结点集, 边, 弧, 边集, 结点数和边数, 阶,  $n$ 阶图,  $(n, m)$ 图, 零图, 平凡图

- 一个图 $G$ 是一个有序二元组 $(V, E)$ , 记作 $G=(V, E)$

Graph, Vertex, Edge

- $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是一个非空的有限集合,  $V$ 中的元素称为 $G$ 的结点或顶点,  $V$ 称为图 $G$ 的结点集, 记作 $V(G)$ 。

- $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 是一个由 $V$ 中元素构成的对偶的集合,  $E$ 中的元素称为 $G$ 的边或弧,  $E$ 称为图 $G$ 的边集, 记作 $E(G)$ 。

可为空集

- $\# V(G)$ ,  $\# E(G)$ 分别称为图的结点数和边数。
- 图的结点数也称为图的阶,  $n$ 个结点的图称为 $n$ 阶图。
- 具有 $n$ 个结点和 $m$ 条边的图称为 $(n, m)$ 图。

- $(n, 0)$ 图称为零图。

- $(1, 0)$ 图称为平凡图。

- 无向边, 端点, 有向边, 起点 (始点), 终点, 端点, 关联边

- 图 $G=(V, E)$ 中,

- 若 $E$ 的元素 $e$ 为 $V$ 中两个元素 $u$ 和 $v$ 的非有序的对偶, 则称边 $e$ 为图 $G$ 的无向边, 记为 $e=\{u, v\}$ , 其中, 结点 $u$ 和 $v$ 称为无向边 $e$ 的端点;

- 若 $E$ 的元素 $e$ 为 $V$ 中两个元素 $u$ 和 $v$ 的有序的对偶, 则称边 $e$ 为图 $G$ 的有向边, 记为 $e=(u, v)$ , 其中, 结点 $u$ 和 $v$ 分别称为有向边 $e$ 的起点 (或始点) 和终点, 也称为有向边的端点。

- 以结点 $u$ 为端点的边称为结点 $u$ 的关联边。

图中结点与边的关联关系

- 注意:

- (1) 若结点 $u \neq v$ , 则 $\{u, v\}$ 和 $\{v, u\}$ 是同一条边, 而 $(u, v)$ 和 $(v, u)$ 是两条不同的边 (如果存在的话)。
- (2) 对无向边, 每个端点都可作为起点或终点。

- 自环, 自回路, 平行边, 重复边, 重数

- 图 $G=(V, E)$ 中,

- 端点相同的边 $\{u, u\}$ 或 $(u, u)$ 称为结点 $u$ 的自环或自回路。

- $E$ 中相同的边 $\{u, v\}$ 或 $(u, v)$ 称为平行边或重复边, 并称重复边的条数为该边的重数。

- **多重图, 简单图**

- 图 $G=(V, E)$ 中,
  - 含有平行边的图称为**多重图**。
  - 既不含自环又不含平行边的图称为**简单图**。

- **无向图, 无向简单图, 有向简单图, 混合图**

- 所有边都是无向边的图称为**无向图**, 所有边都是无向边的简单图称为**无向简单图**或**简单无向图**。
- 所有边都是有向边的图称为**有向图**, 所有边都是有向边的简单图称为**有向简单图**或**简单有向图**。
- 既含无向边又含有向边的图称为**混合图**。
- **注意:**
  - 用方向相反的两条有向边替换无向边, 可将混合图变为有向图, 所以, 本篇只讨论无向图和有向图。
  - 无向图与有向图统称为图, 但一般说到图常指无向图。
  - 在分析包含某种流向的结构时, 常用到有向图。

- **基础图, 基图, 底图, 定向图**

- 将有向图的各条有向边略去方向后所得到的无向图称为该有向图的**基础图**, 简称**基图**, 也称**底图**。
- 如果将无向图的各条边任意定一个方向后所得到的有向图称为该无向图的一个**定向图**。

- **赋权图, 有权图**

- 如果图 $G$ 的每条边都赋以一个实数作为该边的权, 则称图 $G$ 为**赋权图**或**有权图**。
- 有权图可定义为一个有序三元组 $(V, E, f)$ , 其中 $f$ 是一个定义在边集 $E$ 上的函数, 通过 $f$ 将权分配给各边。

- **邻接点, 邻接边, 孤立点, 孤立边**

- 图中关联于同一条边的两个结点称为是**邻接点**, 关联于同一结点的两条边称为是**邻接边**。  
图中结点与结点, 边与边的邻接关系
- 图中不与其他任何结点相邻接的结点称为是**孤立点**, 不与其他任何边相邻接的边称为是**孤立边**。
- **平凡图**是仅由一个孤立结点组成的图。
- **零图**是仅由孤立结点组成的图。

- **2. 图的表示方法**

- 集合表示法
  - 利用集合表示

【例 7.1】设集合  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ,  
 $E_1 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$ ,  
 $E_2 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$ ,  
 $E_3 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$ ,  
 $E_4 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_5, v_6)\}$ ,  
 $E_5 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_2\}\}$ ,  
 $(V, E_1)$  是一个无向简单图  
 $(V, E_2)$  是一个无向多重图  
 $(V, E_3)$  是一个有向简单图  
 $(V, E_4)$  是一个有向多重图  
 $(V, E_5)$  是一个混合图。

13

## 图解表示法

- 用平面上的一些小圆圈分别表示图的结点,
- 用连接相应两个结点  $u$  和  $v$  而 **不经过其它结点的带** (不带) 箭头的直线或曲线来表示图的有向边  $(u, v)$  (无向边  $\{u, v\}$ ),
- 绕结点  $u$  画一个带 (不带) 箭头的圆圈表示自环  $(u, u)$  ( $\{u, u\}$ )。
- 注意:**
  - 由于结点位置的选取和边的形状的任意性, 一个图可以有各种外形上看起来差别很大的图解。
  - 常将图的一个图解就看做是这个图。

## 矩阵表示法

- 用矩阵的方法也可以表示一个图。
- 在 7.2 节中专门讨论。

## 二、完全图与补图

### 无向完全图, 有向完全图, 竞赛图

- 在无向简单图中, 如果任意两个不同的结点都是邻接的, 则称该图是**无向完全图**。 **$n$ 个结点的完全图记作  $K_n$ 。**
- 在有向简单图中, 如果任意两个不同的结点之间均有两条方向相反的有向边, 则称该有向图为**有向完全图**。
- 在有向简单图中, 如果任意两个不同的结点之间有且仅有一条有向边, 则称该有向图为**竞赛图**。
- 注意:**
  - $n$ 阶无向完全图的边数  $m = n(n-1)/2$ 。
  - $n$ 阶有向竞赛图的边数  $m = n(n-1)/2$ 。
  - $n$ 阶有向完全图的边数  $m = n(n-1)$ 。

### 补图, 相对于完全图的补图

- 设  $G$  是一个简单图, 由  $G$  的所有结点和为了使  $G$  成为完全图所需添加的那些边组成的图, 称为  $G$  的相对于完全图的补图, 简称为  $G$  的补图, 一般用  $\overline{G}$  表示。

## 三、结点的度与握手定理

### 1. 结点的度

#### 结点的度, 出度, 入度

- 图中关联于结点  $v$  的边的总数称为该**结点的度**, 记作  $\deg(v)$ 。

degree

- 在有向图中，
  - 以 $v$ 为起点的有向边的条数称为结点 $v$ 的**出度**，记作 $\deg^+(v)$ 。
  - 以 $v$ 为终点的有向边的条数称为结点 $v$ 的**入度**，记作 $\deg^-(v)$ 。
  - 结点 $v$ 的度为 $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$ 。
- 约定：**
  - 无向图中的自环在其对应结点的度上增加2。
  - 有向图中的自环在其对应结点的度上增加一个入度和一个出度。

## • 2. 握手定理

### • 握手定理

- 设图 $G$ 具有结点集 $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ 和 $m$ 条边，则 $G$ 中所有结点的度之和为 $G$ 的边数的两倍，即
  - $$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m$$
- 任何图 $G$ 中，度为奇数的结点个数为偶数。

### • 正则图

- 若无向**简单图**的所有结点都具有同一个度 $d$ ，则称该无向图 $G$ 为 **$d$ 次正则图**或 **$d$ 度正则图**。

## • 四、图的连通性

### • 1. 路

#### • 路,开路,简单路,基本路,真路,回路,简单回路,基本回路,环、圈

- 图 $G$ 中结点和边的序列 $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_l, e_l, v_{l+1}$ 称为结点 $v_1$ 到 $v_{l+1}$ 的一条长为 $l$ 的**路**，简单图中常用结点的序列 $v_1 v_2 \dots v_l v_{l+1}$ 来表示。其中 $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) 以 $v_i$ 和 $v_{i+1}$ 为端点（有向图中，边 $e_i$ 为以 $v_i$ 为起点、以 $v_{i+1}$ 为终点的有向边）。
- 若 $v_1 \neq v_{l+1}$ ，则称路 $v_1 v_2 \dots v_l v_{l+1}$ 为**开路**。
  - 在开路中，若所有**边**互不相同，则称该路为**简单路**，
  - 若所有**结点**互不相同（此时所有边也互不相同），则称该路为**基本路**或**真路**。
- 若 $v_1 = v_{l+1}$ ，则称路 $v_1 v_2 \dots v_l v_{l+1}$ 为**回路**。
  - 在回路中，若所有**边**互不相同，则称该路为**简单回路**
  - 若 $v_1, v_2, \dots, v_l$ 各不相同（此时所有边也互不相同），则称该回路为**基本回路**或**环、圈**。
- 注：**
  - 有向图的路、开路、回路、简单路、简单回路、真路、环常称为有向路、有向开路、有向回路、有向简单路、有向简单回路、有向真路、有向环。
  - 无向图中形如 $v_i v_j v_i$ 的回路（此时，两条边相同）不能称为环。

- 真路是简单路，简单路不一定是真路。环是简单回路，简单回路不一定是环。

## • 2. 可达、连通图

### • 可达的，可达结点，不可达的，连接的，连通的

- 图G中，若存在一条结点u到v的路，则称结点u到v是可达的，或者结点v是u的可达结点，否则称结点u到v是不可达的。
- 对于无向图，若结点u到v是可达的，则结点v到u也是可达的，即结点u和v相互可达，常称为结点u和v是连接的或连通的。
- 规定：任何结点到其自身总是可达的。
- 显然，
  - 在有向图中结点u到v可达，并不意味着v到u也可达；
  - 无向图结点之间的可达关系即连接关系是图的结点集上的等价关系。

### • 连通图，连通的，非连通图，分离图，非连通的

- 无向图G中，若任意两个结点可达，则称图G是连通图或是连通的；否则，称图G为非连通图、分离图或是非连通的。
- 注：
  - (1) 仅有一个孤立结点的平凡图是连通图。
  - (2) 连通图（平凡图除外）中结点的度大于0。

### • 弱连通，连通的，单向连通的，单侧连通的，强连通的。

- 有向图G中，
  - 如果G的基图是连通的，则称G是弱连通的或连通的；
  - 如果对任意的两个结点，至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称G是单向连通的或单侧连通的；
  - 如果对任意两个结点，两者之间是相互可达的，则称G是强连通的。
- 强连通图是单向连通图，单向连通图是弱连通图。反之不一定。
- 定理7.2 (判断是否连通)
  - 无向图G不连通当且仅当G的结点集V可以划分为子集V1和V2，使得G的任何边都不以V1的一个结点和V2的一个结点为端点。

## • 3. 短程和距离、竞赛图的真生成路及应用

### • 短程，距离

- 图G中，结点u可达v，则称u到v的路中最短的路为结点u到v的短程，短程的长度称为结点u到v的距离，用 $d(u, v)$ 表示。

distance

- 若结点u到v不可达，则 $d(u, v) = \infty$ 。
- 注：
  - 在无向图中，若结点u和v是连接的，则 $d(u, v) = d(v, u)$ 。

- 在有向图中，结点 $u$ 不一定可达 $v$ ，结点 $v$ 也不一定可达 $u$ ，即便结点 $u$ 可达 $v$ ， $v$ 也可达 $u$ ，但 $d(u, v)$ 与 $d(v, u)$ 不一定相等。

### • 定理7.3

- $n$ 阶图 $G$ 中结点 $u$ 到 $v$  ( $u \neq v$ ) 的短程是一条长度不大于 $n-1$ 的真路，其中 $n > 1$ 。

### • 注：

- 在 $n$ 阶图中，任意两个相连接的结点间的距离不超过 $n-1$ 。

### • 推论7.2

- 在 $n$ 阶图中，任一环的长度不大于 $n$ ，其中 $n > 2$ 。

### • 定理7.4

- 每个竞赛图 $G = (V, E)$ 都有一条真生成路，即存在一条通过 $G$ 的每个结点一次且仅一次的有向路。
- $n$ 阶竞赛图可用来表示 $n$ 个选手间循环赛的胜负状态（不考虑平局），其真生成路则给出了一个循环赛结果的选手排名。

## • 五、图的同构

### • 同构

- 设 $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个无向图（有向图），若存在双射函数 $h: V_1 \rightarrow V_2$ ，使得对任意的 $u, v \in V_1$ ,  $\{u, v\} \in E_1$  ( $(u, v) \in E_1$ ) 当且仅当 $\{h(u), h(v)\} \in E_2$  ( $(h(u), h(v)) \in E_2$ )，则称 $G_2$ 同构于 $G_1$ 。

### • 注：

- 定义说明，如果两图的结点和边能建立一一对应关系，且点和边的关联关系也能保持一一对应关系，则这两个图同构。
- 若图 $G_2$ 同构于 $G_1$ ，则 $G_1$ 也同构于 $G_2$ ，简称 $G_1$ 和 $G_2$ 同构。
- 图之间的同构关系是等价关系，具有自反性、对称性和传递性。
- 同构的两图除了结点的标记可能不一样外，其它是完全相同的，一图成立的结论对同构于它的图也成立。

### • 判定方法：

- 目前，判断两个图的同构还只能从定义进行判断，是一个非常困难的问题。若不满足下面的必要条件之一，则可以断定它们不同构：
  - 具有相同的结点个数。
  - 具有相同的边数。
  - 如果不是简单图，则还要求对应边的重数也相同。
  - 度数相同的结点数相同。

## • 六、子图与分图

- 子图，母图， $G_1$ 包含 $G_2$ ，真子图，生成子图，支撑子图， $G_1$ 的由结点集 $V_2$ 导出的子图，导出子图

- 设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个图，

- 若  $V_2 \subseteq V_1$ ,  $E_2 \subseteq E_1$ , 则称  $G_2$  是  $G_1$  的**子图**,  $G_1$  是  $G_2$  的**母图**, 或称  $G_1$  **包含**  $G_2$ , 记作  $G_2 \subseteq G_1$ ;
- 若  $G_2 \subseteq G_1$  但  $G_2 \neq G_1$  (即  $V_2 \subset V_1$  或  $E_2 \subset E_1$ ), 则称  $G_2$  是  $G_1$  的**真子图**, 记作  $G_2 \subset G_1$ ;
- 若  $V_2 = V_1$ ,  $E_2 \subseteq E_1$ , 则称  $G_2$  是  $G_1$  的**生成子图**或**支撑子图**。
- 若  $V_2 \subseteq V_1$ , 且  $E_2$  为  $E_1$  中两个端点均在结点子集  $V_2$  中的所有边的集合, 即  $E_2 = \{e \mid e \in E_1, \text{且} e \text{ 的两个端点均在 } V_2 \text{ 中}\}$  则称  $G_2$  是  $G_1$  的由结点集  $V_2$  导出的子图, 简称  $G_2$  是  $G_1$  的**导出子图**。

#### • 图G的子图的其他定义

- 图的两种操作:
  - **删边**: 删去图中某一条边, 但仍保留这条边的两个端点。
  - **删结点**: 删去图中某一结点以及与这个结点关联的所有边。
- 在图G中删去一些边和结点后所得的图称为图G的**子图**。
- 在图G中至少删去一条边或一个结点后所得的图称为图G的**真子图**。
- 由图G删去一些边后所得的子图称为图G的**生成子图**。
- 由于在图G中删去一条边时仍保留边的两个端点, 所以图G的生成子图必然含有图G的所有结点。
- 保留图G的所有结点的子图称为图G的**生成子图**。

#### • 分图

- 设H是无向图G的子图, 如果H满足以下条件, 则称H是G的**分图**。
  - H是连通的;
  - 对G的任意子图  $G'$ , 若  $H \subset G' \subseteq G$ , 则  $G'$  不是连通的。
- **注意**
  - 若H是G的分图, 则H是G的连通子图, 同时除H中的结点和边外, G中的任何结点或任意的边加到H后都不是连通的。
  - 若图G是连通图, 则G只有一个分图。
  - 与“关系”的联系

■ 用第二章“关系”的概念解释分图的概念如下:

给定图  $G = (V, E)$ , 其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。定义  $V$  上的个二元关系  $R$

当且仅当  $v_i$  到  $v_j$  有路连接时,  $v_i R v_j$

则图G中结点之间的连接关系  $R$  是  $V$  上的一个等价关系。

该等价关系将结点集  $V$  分成若干个分划块 (即  $V$  的若干个非空子集)  $V_1, V_2, \dots, V_T$ , 使得任意两个结点  $v_i$  和  $v_j$ , 当且仅当属于同一个分划块  $V_h$  时,  $v_i$  与  $v_j$  相连接。

于是, 等价类中各结点以及与这些结点相关联的边构成G的一个分图。

有多少个等价类, 便有多少个分图。

#### • 割点, 割边, 桥



- 无向图G中，如果删去结点u后图的分图数增加，则称结点u是G的割点；如果删去边e后图的分图数增加，则称边e是G的割边或桥。

#### • 定理7.5

- 无向图G中边 $\{v_i, v_j\}$ 为割边的充要条件是边 $\{v_i, v_j\}$ 不在G的任何环上出现。

#### • 弱（单向、强）分图

- 设H是有向图G的子图，如果H满足以下条件，则称H是G的弱（单向、强）分图。
  - (1) H是弱（单向、强）连通的；
  - (2) 对G的任意子图G'，若 $G' \neq H$ ，且 $H \subseteq G' \subseteq G$ ，则G'不是弱（单向、强）连通的。
- 注意
  - (1) 无向图的连通及有向图的弱连通、强连通都是图的结点集上的等价关系。
  - (2) 有向图的单向连通不是图的结点集上的等价关系。

### • 七、图的运算

#### • 7.2 图的矩阵表示

本节开始，如无特别声明，主要讨论简单图。

##### • 一、图的关联矩阵

##### • 关联矩阵

- 定义：

**定义 7.24** 设无向图  $G = (V, E)$ ，其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ， $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ，称  $n \times m$  矩阵  $M = (m_{ij})$  为 G 的关联矩阵，其中  $(i, j)$  项元素为

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } v_i \text{ 与 } e_j \text{ 关联} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$$

对于有向图，其关联矩阵  $(i, j)$  项元素为

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{若 } v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ 1, & \text{若 } v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的始点} \\ -1, & \text{若 } v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$$

- 有向图的关联矩阵M具有如下性质

- (1)  $\sum_{j=1}^m m_{ij} = 0, j = 1, 2, \dots, m$ ，因而  $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} = 0$ ，即M中所有元素之和为0。
- (2) M中-1的个数等于+1的个数，都等于边数。
- (3) M的第i行中，1的个数为 $\deg^+(v_i)$ ，-1的个数为 $\deg^-(v_i)$ 。

##### • 二、图的邻接矩阵

##### • 邻接矩阵

- 定义：



**定义 7.25** 设无向图  $G = (V, E)$ , 其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 称  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  为  $G$  的邻接矩阵, 其中  $(i, j)$  项元素为

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

对于有向图, 其邻接矩阵的  $(i, j)$  项元素为

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

• **图的邻接矩阵具有如下性质:**

- 无向图的邻接矩阵是主对角线元素均为零的对称0-1矩阵。
  - 反之, 若给定任何主对角线元素均为零的对称0-1矩阵A, 则可以唯一地作一个无向图G, 以A为邻接矩阵。
  - 有向图的邻接矩阵与无向图的类似, 只是其邻接矩阵不一定对称。
- 零图的邻接矩阵为一个零矩阵, 反之亦然。
- 任意图的邻接矩阵依赖于V中各元素的给定次序。
  - 对于V中元素不同的给定次序, 可以得到同一个图的不同邻接矩阵。
  - 图G的任何一个邻接矩阵都可以由G的另一个邻接矩阵通过变换某些行和相应的列而得到。
- 合同变换
- 今后选取给定图的任何一个邻接矩阵作为该图的邻接矩阵。
- 如果两个图有这样的邻接矩阵, 其中的一个可通过另一个变换某些行和相应的列而得到, 则这两个图是同构的。
- 无向图G的邻接矩阵A的第i行 (或第i列) 出现的1的个数即为结点 $v_i$ 的度。
  - 有向图G的邻接矩阵A的第i行出现的1的个数为结点 $v_i$ 的出度
  - 第i列出现的1的个数为结点 $v_i$ 的入度。
- 图G的邻接矩阵A的 $(i, j)$ 项元素 $a_{ij}$ 给出了从 $v_i$ 到 $v_j$ 的长度为1的路的总数。

• **定理 7.6**

- 设G是具有结点集 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 和邻接矩阵A的无向图, 则矩阵 $A^l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) 的 $(i, j)$ 项元素 $a_{ij}^{(l)}$ 是图G中连接结点 $v_i$ 到 $v_j$ 的长度为l的路的总数
- 利用无向图的邻接矩阵, 可以
  - 判断G中结点 $v_i$ 与 $v_j$  ( $i \neq j$ ) 是否相连接。
  - 计算结点 $v_i$ 与 $v_j$  ( $i \neq j$ ) 之间的距离

• **三、图的连接矩阵**

• **连接矩阵, 可达矩阵**

- 定义:

**定义 7.26** 设无向图  $G = (V, E)$ , 其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 称  $n$  阶方阵  $C = (c_{ij})$  为图  $G$  的 **连接矩阵**, 其中  $(i, j)$  项元素为

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{结点 } v_i \text{ 和 } v_j \text{ 连接} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

对于有向图  $G$ ,  $n$  阶方阵  $P = (p_{ij})$  称为  $G$  的 **可达矩阵**, 其中

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{结点 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 可达} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

- 当且仅当连接矩阵的所有元素均为1时, 图  $G$  是连通的。
- 由图  $G$  的邻接矩阵  $A$  构造连接矩阵  $C$ :

- 方法一:

- 由  $A$  计算  $A^2, A^3, \dots, A^{n-1}$
- 计算  $B = A^0 + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$
- 将  $B$  中非零元素改为 1, 所得到的矩阵即为连接矩阵  $C$

- 方法二:

将邻接矩阵  $A$  看作是布尔矩阵, 矩阵的乘法运算和加法运算中, 元素之间的加法与乘法采用布尔运算 (参看第 2.3 节)

- 由  $A$  计算  $A^{(2)}, A^{(3)}, \dots, A^{(n-1)}$
- 计算  $C = A^0 \vee A \vee A^{(2)} \vee \dots \vee A^{(n-1)}$
- $C$  便是所要求的连接矩阵

## 7.3 树

### 一、树的基本概念

#### • 无向树, 树, 树叶, 树林

- 不包含环的连通图称为**无向树**, 简称**树**, 树中度为1的结点常称为**树叶**。不包含环的图 (即每个分图都是树的图) 称为**树林**。

### 二、树的基本性质

#### • 定理7.7

- 设  $T$  是一棵树,  $v_i$  和  $v_j$  是  $T$  中任意两个不同的结点, 则  $v_i$  和  $v_j$  由唯一的一条真路相连接。若  $v_i$  和  $v_j$  不相邻接, 那么当给  $T$  添加一条边  $\{v_i, v_j\}$  后形成的图恰有一个环。
- 注意: 若  $v_i$  和  $v_j$  相邻接, 则连接  $v_i$  和  $v_j$  的真路是边  $\{v_i, v_j\}$ , 此时给  $T$  添加一条边  $\{v_i, v_j\}$  后得到的是一个多重图, 其中回路  $v_i v_j v_i$  也是环

#### • 定理7.8

- 若  $T$  是一  $(n, m)$  树, 则  $m = n - 1$ 。
- 树中如果有边, 一定是割边

#### • 推论7.3

- 若  $T$  是由  $r$  棵树构成的一  $(n, m)$  树林, 则  $m = n - r$ 。

#### • 定理7.9

- 具有两个或更多结点的树至少有两片树叶。

#### • 定理7.10

- 给定 $(n, m)$ 图 $T$ ，以下关于树的定义是等价的：
  - (1) 无环的连通图。
  - (2) 无环且 $m = n - 1$ 。
  - (3) 连通且 $m = n - 1$ 。
  - (4) 无环，但增加一条新边后得到一个且仅一个环。
  - (5) 连通，但删去任何一个边后不连通。
  - (6) 每一对结点之间有一条且仅一条真路。

### • 三、最小生成树

#### • 1. 生成树

##### • 生成树

- 若连通图 $G$ 的生成子图 $T$ 是一棵树，则称 $T$ 为 $G$ 的生成树，记为 $T_G$ 。
- 注：
  - 任何连通图存在生成树，且其生成树一般不是唯一的。

#### • 2. 构造连通图的生成树的方法

##### • 破坏法

一个连通图 $G$ 和它的生成树的差别在于前者可能有环，而后者不包含任何环。

- (1) 令 $G$ 为 $G_1$ ，置 $i = 1$ ；
- (2) 若 $G_i$ 无环，则 $T_G = G_i$ ；
- 否则，在 $G_i$ 中找出一个环 $\sigma_i$ ，去掉环 $\sigma_i$ 中的任一条边 $e_i$ ，令剩余的图为 $G_{i+1}$ ；
- (3)  $i$ 增加1，并返回到第(2)步。
- 注意：破坏时不要破坏图的连通性。

##### • 避环法

- (1) 选取 $G$ 的任一条边 $e_1$ ，令 $E_1 = \{e_1\}$ ， $G_1 = (V, E_1)$ ，置 $i = 1$ ；
- (2) 若已选好 $E_i = \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ ，从 $E - E_i$ 中选一条边 $e_{i+1}$ 使 $E_i \cup \{e_{i+1}\}$ 不含有环。
  - 若满足上述条件的 $e_{i+1}$ 不存在，则 $G_i = (V, E_i)$ 就是生成树 $T_G$ 。否则令 $G_{i+1} = (V, E_{i+1})$ ，其中 $E_{i+1} = E_i \cup \{e_{i+1}\}$ ；
- (3)  $i$ 增加1，并返回到第(2)步

##### • 注意：

- 用破坏法和避环法得到的连通图的生成树一般不唯一！
- 若 $G$ 是一 $(n, m)$ 连通图，其生成树 $T_G$ 为 $(n, n-1)$ 图。
- $G$ 中去掉 $m - n + 1$ 条边可以得到 $T_G$ ，该数称为 $G$ 的环秩。
  - $G$ 的环秩是为了“弄破” $G$ 的所有环而必须由 $G$ 中删去的边的最小数目。

- $G$ 的每一条不属于 $T_G$ 的边称为 $T_G$ 的弦。

- 共有 $m - n + 1$ 条弦。

- $T_G$ 中的边称为 $T_G$ 的枝。

### • 3. 最小生成树

#### • 权, 最小生成树

- 设 $G=(V, E, f)$ 是一连通有权图,  $T$ 是 $G$ 的一棵生成树,  $T$ 的边集用 $E(T)$ 表示,  $T$ 的各边权值之和 $W(T) = \sum_{e \in E(T)} f(e)$ 称为 $T$ 的权。

- $G$ 的所有生成树中权最小的生成树称为 $G$ 的**最小生成树**。

### • 4. 构造连通有权图的最小生成树

#### • 实际背景

- 城市之间通信线路的铺设、水渠的布置、交通线的规划等都是

#### • 图的最小生成树的问题。

#### • 构造方法

- 破坏法 (又称Prim 算法)
  - 避环法 (又称Kruskal 算法)。

#### • 注意:

- 与构造生成树不同的是, 在破坏法中每次去掉环中权最大的边, 在避环法中每次取出权最小的边。

## • 7.4 有向树

### • 一、有向树的基本概念

#### • 有向树, 根树, 树根, 终点或树叶, 分枝结点, 内点

- 一个有向图, 若其基图是一棵树, 则称为**有向树**。
- 一棵**有向树**, 若它只有一个结点的入度为0, 而其它所有结点的入度为1, 则称为**根树**, 其中入度为0的结点称为**树根**, 出度为0的结点称为**终点或树叶**, 出度不为零的结点称为**分枝结点** (包括树根) 或**内点** (不包括树根)。

- 注: 每棵有向树至少有一个结点。一个孤立点也是一棵有向树。

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{入度为0} \rightarrow \text{树根} \\ \text{入度为1} \left\{ \begin{array}{l} \text{出度为0} \rightarrow \text{树叶} \\ \text{出度大于0} \rightarrow \text{分枝结点} \end{array} \right. \end{array} \right.$

- 在根树中, 对任一结点 $v \in V$ , 必存在唯一的一条从根 $v_0$ 到 $v$ 的真路。

- 根树的树根可以到达根树的任意节点

#### • 级

- 称从 $v_0$ 到结点 $v$ 的距离为结点 $v$ 的级。

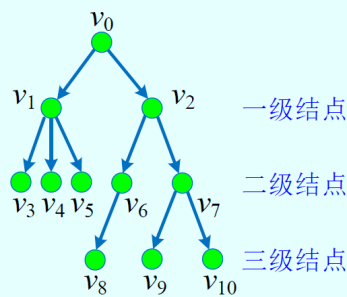
根的级是 0。

由于根  $v_0$  的入度为 0，因此若有边与  $v_0$  相关联，则这些边都以  $v_0$  为始点，这些边的终点称为一级结点。

如果还有边与一级结点相关联，则这些边必以一级结点为始点，而它们的终点称为二级结点。

.....

因此，根树的图解如右图所示。



101

## • 父亲,儿子,兄弟,祖先,子孙,后裔,真祖先,真子孙,真后裔

- 若  $(a, b)$  是一条边，则称  $a$  是  $b$  的**父亲**， $b$  是  $a$  的**儿子**。
  - 同一结点的儿子称为**兄弟**。
- 若  $a$  到  $b$  可达，则称  $a$  是  $b$  的**祖先**， $b$  是  $a$  的**子孙或后裔**，如果还有  $a \neq b$ ，那么称  $a$  是  $b$  的一个**真祖先**， $b$  是  $a$  的一个**真子孙或真后裔**。

## • $v$ 为根的子树, $v$ 的子树

- 设  $v$  是根树  $T$  的分枝结点，
  - 由结点  $v$  和它的所有子孙构成的结点集  $V_1$  以及从  $v$  出发的所有有向路中的边构成的边集  $E_1$  组成的  $T$  的子图  $T_1 = (V_1, E_1)$  称为  $T$  的**以  $v$  为根的子树**
  - 以  $v$  的儿子为根的子树称为  **$v$  的子树**。

## • 二、二元树及其周游

### • $m$ 元树或 $m$ 叉树, 完全 $m$ 元树, 二元树, 完全二元树, 满二元树

- 在根树中，若每一结点的出度都小于或等于**正整数  $m$** ，则称这棵树为 **$m$  元树或  $m$  叉树**。
- 若每个结点的出度恰好为  $m$  或零，则称这棵树为**完全  $m$  元树**。
- 当  $m=2$  时，分别称其为**二元树和完全二元树**。
- 若完全二元树的所有树叶结点在同一级别则称它为**满二元树**。

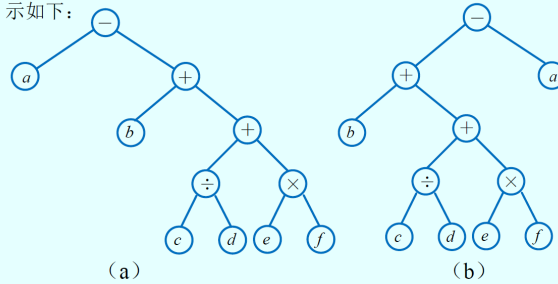
### • 有序树, 左子树, 右子树

- 若在根树中规定了每一级上结点的次序，则称这样的根树为**有序树**。
- 在二元有序树中，每个结点  $v$  至多有 2 棵子树，分别称为  $v$  的**左子树**和**右子树**。
  - 在图解时，左子树和右子树分别画在  $v$  的左下方和右下方。
  - 利用二元有序树可以表示算术表达式：
    - 运算符放在分枝结点上，数字或变量放在树叶结点上。
    - 被减数和被除数放在左子树的树叶上。
    - 例题：

【例 7.33】用二元有序树表示算术表达式

$$a - (b + ((c / d) + (e \times f))) \text{ 和 } (b + ((c / d) + (e \times f))) - a。$$

解：这两个算术表达式可分别用图 (a) 和图 (b) 的二元有序树表示如下：



### 三、周游二元树

#### 周游二元树

- 所谓**周游二元树**，是指按照某种次序去访问二元有序树的每一个结点，使得每一个结点恰好被访问一次。

##### 先根周游

- 访问根；
- 在根的左子树（若存在）上执行先根周游；
- 在根的右子树（若存在）上执行先根周游。

##### 中根周游

- 在根的左子树（若存在）上执行中根周游；
- 访问根；
- 在根的右子树（若存在）上执行中根周游。

##### 后根周游

- 在根的左子树（若存在）上执行后根周游；
- 在根的右子树（若存在）上执行后根周游；
- 访问根。

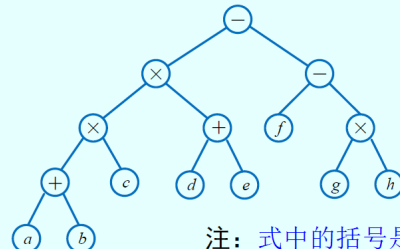
#### 例题:

【例 7.34】（1）用二元有序树表示算术表达式

$$((a + b) \times c) \times (d + e) - (f - (g \times h))$$

（2）用三种方法周游此树，写出周游结果。

解：（1）



（2）

注：式中的括号是人为加上去的。

先根周游： $-(\times(\times(+ab)(c))(+de))-(f)(\times gh))$

中根周游： $((a + b) \times c) \times (d + e) - (f - (g \times h))$

后根周游： $((a b +) c \times) (d e +) \times) (f (g h \times) -) -$

### 四、有向树中的一些数量关系

- 有向树和无向树一样，满足关系式  $m = n - 1$ （所有结点入度的和）。这里的  $n$  和  $m$  分别为有向树的结点数和边数。

- **定理**

- 设 $T$ 是一棵完全 $m$ 元树，树叶结点数为 $n_0$ ，分枝结点数为 $t$ ，则 $(m-1)t = n_0 - 1$ 。
- 设 $T$ 是一棵二元树， $n_0$ 表示树叶结点数， $n_2$ 表示出度为2的结点数，则 $n_0 = n_2 + 1$ 。
- 完全二元树有奇数个结点。

以上内容整理于 [幕布文档](#)