离散数学Chapter 10：谓词逻辑

- **10.1 个体、谓词和量词**
  - **一、个体和谓词**
    - **个体，谓词，个体常元，个体变元，一元谓词，n元谓词，谓词常元，谓词变元**
      - 可以独立存在的客体称为个体。用来刻画个体的性质或关系的词称为谓词。
      - 在一个命题里表示思维对象的个体，可以是具体的，也可以是抽象的。表示具体或特定的个体称为个体常元。表示抽象的或泛指的（或者说取值不确定的）个体称为个体变元。
      - 刻画一个个体性质的词称为一元谓词；刻画n个个体之间关系的词称为n元谓词。
      - 个体常用带或不带下标的小写字母a，b，$...$，a_1，b_1，$...$等表示。
      - 谓词常用P，Q，R，A，B等大写字母来表示，也常用英文单词来表示，如GREAT：大于，BETWEEN：位于...之间，尤其是在程序设计和人工智能中。
      - 谓词也有谓词常元（有确定意义）和谓词变元（无确定意义）之分。以下仅讨论谓词常元。
    - **原子命题的谓词形式**
      - 一个由n个个体常元a_1，a_2，$...$，a_n和n元谓词G所组成的原子命题可表示为G(a_1，a_2，$...$，a_n)，并称为该原子命题的谓词形式。
    - **注:**
      - 在原子命题的谓词形式中个体常元a_1，a_2，$...$，a_n的排列次序是重要的。如例10.1 中若写成Q(c，b)，则表示“陈华比张亮高”。
      - 单独的一个n元谓词没有明确的含义，必须跟随在n个具体的个体后才有明确的含义，并且能分辩真假。
      - 以前所引入的命题联结词在这里仍然可以用来构成复合命题。
  - **二、命题函数**
    - **简单命题函数,n元命题函数,复合命题函数,命题函数**
      - 由一个谓词和若干个个体变元组成的表达式称为简单命题函数。
      - 由n元谓词P和n个个体变元x_1，x_2，$...$，x_n组成的命题函数表示为$P(x_1，x_2，...，x_n)$并称为n元命题函数。
      - 由一个或若干个简单命题函数以及命题联结词组成的命题函数称为复合命题函数。
      - 简单命题函数和复合命题函数统称为命题函数。
    - 注:
      - 命题可以视为0 元命题函数（含有0 个个体变元）。
      - 命题的谓词表示形式与命题函数是不同的：前者是一个命题,因而有真值；后者并不是一个命题，只有当其中所有的个体变元都分别代之以具体的个体即

个体常元后才表示一个命题。

- 例如 二元命题函数L(x，y) 表示“x 小于y”，那么L(2，3) 表示了一个真值为真的命题“2小于3”。而L(5，1) 则表示了一个真值为假的命题“5 小于1”。

- 个体变元在哪些范围取特定的值，对命题函数产生以下两方面极大影响：
  - 命题函数是否能成为一个命题；
  - 命题的真值是真还是假。

- **三、量词**
  - **量词，全称量词，存在量词**
    - 在命题中表示个体数量的词称为量词。
    - 对于自然语言中“对所有的”“每一个”“对任一个”“凡”“一切”等词用符号“∀”表示，称为全称量词。
    - 对于自然语言中“某个”“存在一些”“至少有一个”“对于一些”等词用符号“∃”表示，称为存在量词。
    - **注意**
      - ∀x 表示对个体域中的所有个体。
      - ∀xP(x) 表示对个体域中的所有个体都有属性P。
      - ∃x表示存在个体域里的个体。
      - ∃xP(x) 表示存在个体域里的个体具有性质P。
    - **例：**
      - 【例10.3】令D(x)： x是要死的，则命题“所有人都是要死的。”可表示为∀xD(x)，其中x 的个体域为全体人的集合。
      - 【例10.4】令I(x)：x是整数，则命题“有些有理数是整数。”可表示为∃xI(x)，其中x的个体域为有理数集合。
      - 自然语言中“恰好存在一个”等用符号“∃!”表示，“至多存在一个”等用符号“∃!!”表示。因这两个量词使用得比较少，这里不再论述。
  - 对命题函数前加∀x 或∃x 称为对个体变元x进行量化。
  - 命题函数一般不是命题，但可以通过对命题函数中的所有个体变元进行量化而得到命题。
  - ——由命题函数得到命题的另一方法（有别于对所有个体变元用个体常元代入的方法）。
  - 含有量词的命题的表达式形式及真值都与个体域有关。为简便起见，在后面的讨论中，除特殊说明外，均使用全总个体域。
  - 对个体变元的真正取值范围，用特性谓词（限定个体变元变化范围的谓词）加以限制。
    - 对全称量词，特性谓词常作为蕴含公式之前件加入；
    - 对存在量词，特性谓词常作为合取公式之合取项加入。
- **四、命题符号化**

- 将命题符号化的步骤如下：
  - 正确理解给定命题。必要时修改命题的叙述，使其中每一个原子命题、原子命题之间的关系能明显表达出来。
  - 把每一个原子命题分解成个体、谓词和量词；在全总个体域中讨论时，要给出特性谓词。
  - 找出恰当量词。注意特性谓词在全称量词后跟蕴含公式，在存在量词后跟合取公式。
  - 用恰当的命题联结词把给定命题表示出来。
- **10.2 谓词公式的基本概念**
  - **一、谓词公式的定义**
    - **原子谓词公式**
      - 由n元谓词P和n个个体变元x_1，x_2，...，x_n构成的简单命题函数P(x_1，x_2，...，x_n)称为谓词演算中的原子谓词公式。
      - **注:**
        - 原子谓词公式是不含联结词和量词的命题函数。
        - 当n= 0 时，P(x_1，x_2，...，x_n)为原子命题P。因此，一个原子命题或一个命题变元也是谓词演算中的原子谓词公式。
    - **谓词公式，合式公式，公式**
      - 谓词演算的谓词公式又称为合式公式，简称公式，由如下递归定义构成：
        - （1）原子谓词公式是谓词公式；
        - （2）如果A是谓词公式，则¬A也是谓词公式；
        - （3）如果A和B是谓词公式，则(A∨B)，(A∧B)，(A→B)，(A↔B) 也是谓词公式；
        - （4）如果A是谓词公式，x是A中的个体变元，则∀xA和∃xA也是谓词公式；
        - （5）只有由使用上述四条规则有限次而得到的才是谓词公式。
      - **注:**
        - 谓词公式是由原子谓词公式、命题联结词、量词以及圆括号按照上述规则组成的一个符号串。
        - 命题演算中的命题公式是谓词公式的一个特例。
  - **二、约束变元和自由变元**
    - **作用变元，指导变元，量词的辖域，作用域，约束出现，约束变元，自由变元，自由出现**
      - 谓词公式中出现在量词后面的个体变元称为该量词的作用变元或指导变元。
      - 每个量词后面的最短公式称为该量词的辖域或作用域，即量词起作用的区域。
      - 在量词辖域中指导变元的一切出现称为约束出现，约束出现的变元称为约束变元。

      - 在谓词公式中，除约束变元外所出现的个体变元都称为自由变元。自由变元的出现称为自由出现。
      - **注：**
        - 若$P(x_1, x_2, ..., x_n)$是n元命题函数，它有n个相互独立的自由变元，当对其中k个变元进行约束时，则变为一个n-k元命题函数。
        - 谓词公式中如果没有自由变元出现，则该公式就成为一个命题公式（含命题变元）或命题（不含命题变元）。
        - 谓词公式中量词辖域的求法：
          - 若量词后有括号，则在括号内的公式即为此量词的辖域；
          - 若量词后无括号，则量词后最短的公式为此量词的辖域。
      - **注：**
        - 有时一个变元在同一个公式中既有约束出现又有自由出现。
        - 为避免由此而产生混淆，可以对约束变元或自由变元进行更改，使得一个变元在一个公式中只呈一种形式出现。
  - **三、换名规则和代入规则**
    - 换名规则
      - 对约束变元进行换名，使得一个变元在一个公式中只呈一种形式出现。
        - 换名时，该变元在量词及其辖域中的所有出现均须同时更改，公式的其余部分不变。
        - 换名时，一定要更改为该量词辖域中没有出现过的符号，最好是公式中未出现过的符号。
    - 代入规则
      - 对于公式中的自由变元也允许更改，这种更改称为代入。
        - 代入时，须对该自由变元的所有自由出现同时进行代入；
        - 代入时，所选用的变元符号与原公式中所有变元的符号不能相同。
    - 下表列出了换名规则与代入规则的主要区别

	换名规则	代入规则
对象	约束变元	自由变元
范围	一个量词及其辖域内	整个公式
符号	辖域内出现的符号以外，最好与公式中的符号不同	整个公式中出现的符号以外

- **10.3 谓词公式的等值关系和蕴含关系**
  - **一、谓词公式的类型**

    一个谓词公式一般含有个体变元**和命题变元**，只有当公式中的自由变元用某个体域中确定的个体代入、命题变元用确定的命题代入后，原公式才变成为一个命题
    - **一组指派,赋值,解释**

- 一组代入到谓词公式中并使得谓词公式成为命题的确定的个体和命题称为公式的一组指派或赋值或解释。
- **注意：**
  - 对命题变元的指派为真值指派。对自由变元的指派为非真值指派。
- **永真公式,重言式,矛盾式,不可满足公式,可满足的公式**
  - 如果对于谓词公式G 的任一组指派，公式G的值总为真，则称G为永真公式或重言式，用1 表示。
  - 如果对于公式G的任一组指派，公式G的值总为假，则称G为永假公式或矛盾式或不可满足公式，用0 表示。
  - 如果至少存在着一组指派，使公式G的值为真，则称G为可满足的公式。

- **二、谓词公式间的等值与蕴含关系**
  - **等值（式），等价（式）**
    - 设A、B是两个公式，它们有共同的个体域D，若对于A和B的任意一组指派，两公式都具有相同的真值，则称在D上公式A和B等值或等价，记作A⇔B（称为等值式或等价式）。
  - **蕴含，蕴含式**
    - 设A、B是两个公式，它们有共同的个体域D，若在D上A→B⇔1，则称在D上A蕴含B，记作A⇒B（称为蕴含式）。
  - **注意：**
    - 当个体域是有限集时，原则上可以用真值表判断两公式是否有等值关系或有蕴含关系。
    - 当个体域是有限集合时，量词可以被消除掉。
      - 设个体域 $D=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$。
        - 包含有全称量词的谓词公式 $\forall x A(x)$ 表示 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 都有性质 A, 相当于 $A\left(a_1\right)$ 且 $A\left(a_2\right)$ 且 $\ldots$ 且 $A\left(a_n\right)$,
          - 因此$\forall x A(x) \Leftrightarrow A\left(a_1\right) \wedge A\left(a_2\right) \wedge \ldots \wedge A\left(a_n\right)$
          - 因为 $A\left(a_i\right)(i=1,2,\ldots,n)$ 中都没有个体变元, 也没有量词, 所以这一合取式实际上是命题演算中的命题公式。
        - 包含有存在量词的谓词公式 $\exists x A(x)$ 表示 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 至少有一个具有性质 A, 相当于 $A\left(a_1\right)$ 或 $A\left(a_2\right)$ 或 $\ldots$ 或 $A\left(a_n\right)$
          - 因此$\exists x A(x) \Leftrightarrow A\left(a_1\right) \vee A\left(a_2\right) \vee \ldots \vee A\left(a_n\right)$
          - 同样地, 这一析取式也是命题演算中的命题公式。
        - 在后面的学习中，不妨把∀xA(x)理解为命题逻辑中的合取式在谓词逻辑中的延伸，而∃xA(x)理解为命题逻辑中的析取式在谓词逻辑中的延伸，这将有助于我们理解和记忆谓词演算中的等值式和蕴含式。
      - 如果一个谓词公式中包含有多个量词，则可以从里到外用上述方法将量词逐个消去，从而使公式转换成命题演算中的命题公式。

- 但当个体域中元素很多甚至为无限集时，这个方法就变得不实际甚至不可能了。因此，给出一些基本的永真公式，然后以它们为基础进行推导。

- **1．命题重言式的推广**
  - **定理10.1**
    - 对命题演算中的所有重言式，若将其中每一个命题变元分别用谓词公式代入，便可得到谓词演算中的永真公式。
    - 命题演算中的永真公式可以“移植”到谓词演算中来。即命题演算中的基本等值关系式在谓词演算中仍然成立。
    - 例如：
      - ¬(P∨Q) ↔¬P∧¬Q 是重言式，若用∀xP(x)，∃xQ(x) 分别代替P和Q，即可得到永真公式¬(∀xP(x) ∨∃xQ(x)) ↔(¬∀xP(x) ∧¬∃xQ(x))。
      - 又如 因为P→Q⇔¬P∨Q，所以A(x) → B(x， y) ⇔¬A(x) ∨B(x， y)是等值式。
      - 再如 因为P∧(P→Q) ⇒Q， 所以A(x) ∧ (A(x) → B(x)) ⇒ B(x)
- **2．量词间转化（量词否定）的等值式**
  - **定理10.2**

    改量词，否命题
    - 设A(x) 是任意一个含自由变元x的公式，则有
      - （1） ¬∀xA(x) ⇔∃x¬A(x)。
      - （2） ¬∃xA(x) ⇔∀x¬A(x)。
    - “否定一般规律”只需“举一反例”，而“否定存在个例”则要“逐一否定”。
    - 由这两个等值式可知：
      - 在谓词演算中只要有一个量词就够了；
      - 量词前面的否定符号可深入至量词辖域内，但与此同时必须将存在量词和全称量词作对换。
  - **3．量词辖域扩张与收缩的等值式**
    - **定理10.3**
      - 设A(x) 是任意一个含自由变元x的公式，B是任意一个不含有变元x的公式，则有
        - （1） ∀x(A(x) ∨B) ⇔∀xA(x) ∨B
        - （2） ∀x(A(x) ∧B) ⇔∀xA(x) ∧B
        - （3） ∃x(A(x) ∨B) ⇔∃xA(x) ∨B
        - （4） ∃x(A(x) ∧B) ⇔∃xA(x) ∧B
      - 当B中含有自由变元，且与量词的指导变元不同时，也有类似的等值式。例如：
        - ∀x(A(x) ∨B(y)) ⇔∀xA(x) ∨B(y)
    - **推论10.1**

- 设A(x) 是任意一个含自由变元x的公式，B是任意一个不含有变元x的公式，则有
  - （1） $\forall x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \to B$
  - （2） $\forall x(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \forall xA(x)$
  - （3） $\exists x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \to B$
  - （4） $\exists x(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \exists xA(x)$

- **4．量词分配等值式与蕴含式**
  - **定理10.4**
    - 设A(x) 和B(x) 为任意只含自由变元x的公式，则有
      - （1） $\forall x(A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \land \forall xB(x)$

        全称对合取可分配
      - （2） $\exists x(A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \lor \exists xB(x)$

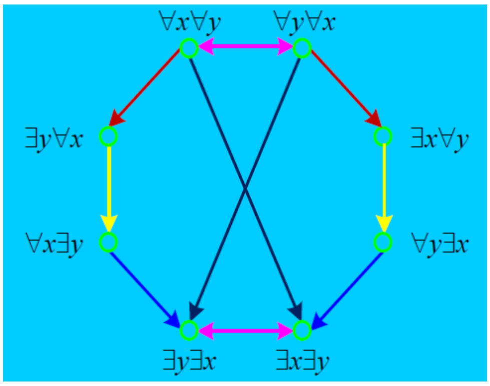
        存在对析取可分配
      - （3） $\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \land \exists xB(x)$

        先合取再存在小
      - （4） $\forall xA(x) \lor \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \lor B(x))$

        先析取再全称大
- **5．量词与联结词的关系**
  - **定理10.5**
    - 设A(x) 和B(x) 为任意只含自由变元x的公式，则有
      - （1） $\exists xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x))$
      - （2） $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \to \forall xB(x)$
      - （3） $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \to \exists xB(x)$
      - （4） $\exists x(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \to \exists xB(x)$
      - （5） $\forall x(A(x) \leftrightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \leftrightarrow \forall xB(x)$
- **6．两个量词间的排列次序**

  相同量词间的次序可以任意调动，不同量词间的次序不能随意调动。
  - **定理10.6**
    - 设A(x，y)为任意只含自由变元x，y的公式，则有
      - （1） $\forall x\forall yA(x, y) \Leftrightarrow \forall y\forall xA(x, y)$。
      - （2） $\exists x\exists yA(x, y) \Leftrightarrow \exists y\exists xA(x, y)$。
      - （3） $\forall x\forall yA(x, y) \Rightarrow \exists y\forall xA(x, y)$。
      - （4） $\forall y\forall xA(x, y) \Rightarrow \exists x\forall yA(x, y)$。
      - （5） $\forall x\exists yA(x, y) \Rightarrow \exists y\exists xA(x, y)$。
      - （6） $\forall y\exists xA(x, y) \Rightarrow \exists x\exists yA(x, y)$。
      - （7） $\exists y\forall xA(x, y) \Rightarrow \forall x\exists yA(x, y)$。
      - （8） $\exists x\forall yA(x, y) \Rightarrow \forall y\exists xA(x, y)$。

- 这八个关系式中量词间的排列次序可以图形表示如下。



- 或者

$$
\begin{array}{ccc}
\forall x\forall yA(x,y) & \Leftrightarrow & \forall y\forall xA(x,y) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\exists x\forall yA(x,y) & & \exists y\forall xA(x,y) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\forall y\exists xA(x,y) & & \forall x\exists yA(x,y) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\exists x\exists yA(x,y) & \Leftrightarrow & \exists y\exists xA(x,y)
\end{array}
$$

- 三、谓词公式的对偶
  - 对偶关系
    - 设A 是不含联结词"→"及"↔"的谓词公式，则在其中以联结词∧，∨分别代换∨，∧，以量词∀，∃分别代换∃，∀，以常量0，1 分别代换1，0后所得到的公式称为A的对偶公式，记作A^D。
    - 例如
      - 公式∀y∃x(P(x，y) ∧Q(x，y)) ∨1 的对偶公式为∃y∀x(P(x，y) ∨Q(x，y)) ∧0
  - **定理10.7**（对偶原理）
    - 设A，B是两个不含联结词"→"和"↔"的谓词公式，
      - （1）若A⇒B，则$B^D \Rightarrow A^D$。
      - （2）若A⇔B，则$A^D \Leftrightarrow B^D$。
    - 对偶原理可用于帮助记忆定理10.2~10.6中的各等值式和蕴含式。
- 10.4 谓词公式的范式
  - 一、前束范式
    - 前束范式，母式，尾部
      - 一个谓词公式, 如果它的所有量词均非否定地出现 在公式的最前面, 且它们的辖域一直延伸到公式的末尾, 则称 这种形式的公式为前束范式。记为 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kM$
      - 其中, $Q_i \in \{\forall, \exists\}(1 \leq i \leq k)$, M 为不含量词的谓词公式。
      - 称 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_k$ 为首标, 称 M 为母式或尾部。
      - 例如

            - （1）∀x∃y∀z(P(x) →Q(y)∧R(x，z))
            - （2）∃x∀y∀z((P(x，y)∧(¬Q(x))) →(R(y，z)∨(¬Q(x))))
            - （3）P(x，y，z)
            - 都是前束范式。
            - 而公式∀xP(x)→∃yQ(y)则不是前束范式。
        - **定理10.8**
            - 任一谓词公式都可以化为与之等值的前束范式。
        - **注:**
            - 在求给定谓词公式的前束范式时，由于进行等值演算时顺序不同以及约束变元换名与否都可以演算下去，对量词左移的次序没有机械地规定，对于母式也没有进一步的要求，因此**一个公式的前束范式可以不唯一。**
            - 由于在谓词逻辑中的判定问题无解，因此前束范式并不像命题逻辑中的范式那样能解决判定问题。前束范式只是使公式的形式比较整齐规范，为判定工作提供一些方便。
    - **二、前束合取范式与前束析取范式**
        - **前束合取范式,前束析取范式**
            - 设谓词公式 A 是一前束范式,
                - 若 A 的母式具有形式:$(A_{11} \vee A_{12} \vee cdots \vee A_{1n_1}) \wedge \cdots \wedge (A_{m1} \vee A_{m2} \vee \cdots \vee A_{mn_m})$其中 A_{ij} 是原子谓词公式或其否定,则称 A 是前束合取范式;
                - 若 A 的母式具有形式:$(A_{11} \wedge A_{12} \wedge \cdots \wedge A_{1n_1}) \vee \cdots \vee (A_{m1} \wedge A_{m2} \wedge \cdots \wedge A_{mn_m})$其中 A_{ij} 是原子谓词公式或其否定，则称 A 是前束析取范式。
                - **例如**
                    - ∀x∃y∀z((P(x，y)∨¬R(x，z))∧(¬Q(y，z)∨¬P(x，y)))是前束合取范式;
                    - ∃x∀z∀y(S(x，z)∨(¬P(x，y)∧Q(y，z)))是前束析取范式。
                - **定理10.9**
                    - 每个谓词公式A均可以变换为与它等值的前束合取范式和前束析取范式。
- **10.5 谓词演算的推理理论**

  在谓词演算中,推理的形式结构仍为若 是永真式,则称**由前提，可逻辑地推出结论**,其中 均为谓词公式。
    - **一、推理规则**
        - **1．US （Universal Specification，全称特定化）规则**
            - **∀xG(x) ⇒G(y),其中G(y) 是将G(x) 中的x处处代之以y而得。**
                - 意义：如果个体域的所有个体x都具有性质G，则个体域中的任一个体y也必具有性质G。——全称量词可以删除

- 推广应用：∀xG(x) ⇒G(c)，其中c为个体域中的任意一个确定的个体，即个体常元。
- US 规则成立的**条件**是：
  - （1）y是个体域中任意的一个个体；
  - （2）x在G(x) 中自由出现，y在G(x) 中不约束出现。
    - 关于（2）的反例：
      - 设A(x) = ∃y(x> y)，其中个体域是R，则∀xA(x) = ∀x∃y(x>y) 是一真值为真的命题。
      - 若应用US 规则，则得到A(y) = ∃y(y> y)，这是一真值为假的命题。
      - 错误的原因在于y在A(x) 中是约束出现的。

- **2．ES （Existential Specification，存在特定化）规则**
  - **∃xG(x) ⇒G(c),其中c是指定个体域中某个个体。**
    - 意义：如果个体域中存在个体x具有性质G，则个体域中必有某一个个体c具有性质G。
    - ES 规则成立的条件是：
      - （1）c是使G(c) 为真的指定个体域中的某个个体，非任意；
      - （2）c不曾在G(x) 中出现过，在具体的推理过程中还要求c不在以前的步骤中出现过；
      - （3）G(x) 中除x外无其它自由变元出现

        > 如果G(x) 中有其它自由变元出现，且x 是随着其它自由变元的值而变，那么就不存在唯一的c 使得G(c)对自由变元的任意值都是成立的。这时，就不能应用ES 规则。

        - 关于（3）的反例：
        - 设G(x) 为(x= y)，其中个体域是R，若使用ES 规则，则得c= y，即存在一实数c，它等于任意实数y。
        - 结论显然不成立，这是因为在∃x(x= y) 中有自由变元y。
    - 如果∃xP(x) 和∃xQ(x) 都真，则对于某个c和某个d，可以断定P(c) ∧Q(d) 必真，但不能断定P(c) ∧Q(c) 为真。
      - 例如：设个体域是Z，P(x)：x是偶数，Q(x)：x是奇数，显然P(2) 和Q(3) 都为真，P(2) ∧Q(3) 也为真，但P(2) ∧Q(2) 为假。

- **3．UG（Universal Generalization，全称一般化）规则**
  - **G(y) ⇒∀xG(x),其中G(x) 是将G(y) 中的y处处代之以x而得。**
    - 意义：如果个体域中任意一个个体y都具有性质G，则个体域中所有的个体x都具有性质G。
    - UG 规则成立的条件是：
      - （1）y在G(y) 中自由出现，且y取任何值时G(y) 均为真；
      - （2）取代y的x不能在G(y) 中约束出现。

            - 例如设个体域为R，则对任意的实数y，$G(y)=\exists x(x<y)$ 是真值为真的命题。但$\forall xG(x)=\forall x\exists x(x<x)$ 是真值为假的命题，出错的原因在于x在G(y) 中约束出现了。
        - **注：**
            - 在使用US 规则引出自由变元y之后，不能让由使用ES 规则而引入的新变元在G(y) 中自由出现。如果有这种情况，就不能使用UG 规则。
            - 因为ES 规则引入的新变元是表面的自由变元，G(x) 不是对新变元的一切值都可证明，所以G(x) 不能全称量化，否则就会与“量词序列$\forall x\exists y$不可交换”的事实产生矛盾。后面的例10.30将说明这一点。
- **4．EG（Existential Generalization，存在一般化）规则**
    - **$G(c)\Rightarrow\exists xG(x)$,其中c是指定个体域中某个个体。**
        - 意义：如果个体域中有某一个个体c具有性质G，则个体域中存在着具有性质G的个体。
        - 推广应用：$G(y)\Rightarrow\exists xG(x)$，其中x在G(y)中自由出现
        - EG 规则成立的条件是：
            - （1）c是个体域中使G为真的某个确定的个体，非任意；
            - （2）代替c的x不能已在G(c) 中出现。
                - 例如设个体域为R，并取$G(3)=\exists x(x<3)$，则G(3) 是真值为真的命题。由于x已在G(3) 中出现，因此若用x替换3则得到$\exists x\exists x(x<x)$ 是真值为假的命题。出错原因是违背了条件（2）。
- **推理规则小结：**
    - 添加和删去量词时，该量词必须是公式的最左边的量词，且此量词的前边无任何符号，它的辖域作用到公式末尾。例如：
        - $\forall x(M(x)\to\exists yF(x,y))\Rightarrow M(c)\to\exists yF(c,y)$
        - $\forall x(M(x)\to\exists yF(x,y))\not\Rightarrow\forall x(M(x)\to F(x,c))$
    - US 规则和ES 规则主要用于推导过程中删除量词，一旦删除了量词，就可像命题演算一样完成推导过程，从而获得想要的结论。
        - 如有两个含有存在量词的公式$\exists xP(x)$ 和$\exists xQ(x)$，当用ES 规则删除量词时，不能选用同一个个体常元符号来取代两个公式中的变元，而应用不同的个体常元符号来取代它们。
        - 在推导过程中，如既要使用US 规则又要使用ES 规则删除公式中的量词，而且选用的个体是同一个符号，则必须先使用ES 规则再使用US 规则。
    - UG规则和EG规则主要用于使结论呈量化形式。
        - 如果一个变元使用ES 规则删除了量词，则对该变元添加量词时只能使用EG 规则，而不能使用UG 规则；
        - 如果使用US 规则删除了量词，则对该变元添加量词时可使用EG 规则和UG 规则。

- 使用ES规则而产生的变元不能保留在结论中，因它是暂时的假设，在推导结束之前必须使用EG规则使之成为约束变元。
- 在使用以上4 个规则时，要严格按照限制条件去使用，并从整体上考虑个体变元和个体常元符号的选择，否则会犯错误。
- 例如：在添加量词时，所选用的x不能在公式A(c) 或A(y) 中以任何约束出现。
- 这4 个规则可形象地称为：“脱帽”、“戴帽”规则：
  - 对全称量词“脱帽容易戴帽难”

    （必须保证y的任意性）
  - 对存在量词“戴帽容易脱帽难”

    （必须保证c是特定的，不得带有任何任意的因素）

二、推理规则的应用

- 和命题逻辑相比，在谓词逻辑里使用推理规则进行推理演算同样是方便的。
- 推理演算过程：
  - 将以自然语句表示的推理问题引入谓词公式形式化；
  - 若不能直接使用基本的推理公式就消去量词；
  - 在无量词下使用规则和公式进行推理；
  - 引入量词以求得结论。
- **【例10.24】**证明苏格拉底的三段论。

【例 10.24】证明苏格拉底的三段论。

解：令 $M(x)$：x 是人，$D(x)$：x 是要死的，c：苏格拉底。

苏格拉底三段论可表示为：

$$\forall x(\ M(x) \to D(x)\ ) \wedge M(c) \ \Rightarrow\ D(c)$$

推证过程如下：

(1) $M(c)$	前提
(2) $\forall x(\ M(x) \to D(x)\ )$	前提
(3)* $M(c) \to D(c)$	(2)；US 规则
(4) $D(c)$	(1)，(3)；假言推理

* 由于 y 取个体域中任意个体均可，为了与步骤 (1) 一致，故取 c。注意先后顺序！

- **【例10.25】**证明∀x(C(x) →W(x) ∧R(x)) ∧∃x(C(x) ∧Q(x)) ⇒∃x(Q(x) ∧R(x))。

证明：推证过程如下：

(1) $\forall x(\ C(x) \to W(x) \wedge R(x)\ )$	前提	(1) 与 (2) 可换
(2) $\exists x(\ C(x) \wedge Q(x)\ )$	前提	
(3) $C(a) \wedge Q(a)$	(2)；ES 规则	(3) 和 (4) 不能换
(4) $C(a) \to W(a) \wedge R(a)$	(1)；US 规则	
(5) $C(a)$	(3)；化简式	
(6) $W(a) \wedge R(a)$	(4)，(5)；假言推理	
(7) $Q(a)$	(3)；化简式	
(8) $R(a)$	(6)；化简式	
(9) $Q(a) \wedge R(a)$	(7)，(8)；合取引入	
(10) $\exists x(\ Q(x) \wedge R(x)\ )$	(9)；EG 规则	

- **【例10.26】**证明∀x(P(x) ∨Q(x)) ⇒¬(∀xP(x)) →∃xQ(x)。

证明：推证过程如下：

(1)	$\neg(\forall x P(x))$	附加前提
(2)	$\exists x(\neg P(x))$	(1)；量词间转化等值式
(3)	$\neg P(c)$	(2)；ES 规则
(4)	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	前提
(5)	$P(c) \vee Q(c)$	(4)；US 规则
(6)	$Q(c)$	(3)，(5)；析取三段论
(7)	$\exists x Q(x)$	(6)；EG 规则
(8)	$\neg(\forall x P(x)) \rightarrow \exists x Q(x)$	(1)，(7)；CP 规则