离散数学Chapter 9：命题逻辑

- **9.1 命题的基本概念**
  - **命题，真值，真（假）命题，二值逻辑**
    - 具有真假意义的陈述句称为一个命题。
    - 一个命题的真或假称为该命题的真值。
    - 常用1 或T 表示真，用0 或F 表示假。
    - 真值为1（0）的命题成为真（假）命题。
    - 由于命题只有真、假两个真值，故命题逻辑也称二值逻辑。
    - **注意：**
      - 命题是陈述句，感叹句、疑问句、祈使句等都不是命题
      - 作为命题的陈述句，其所表示的内容可以分辨真假，而且不是真就是假，不能不真也不假，也不能既真又假。
    - **注：**
      - 命题的真值是唯一确定的，其真值会因人、因时、因地而异。例如
        - 人有十指；
        - 日本的东京即将迎来2020年夏季奥林匹克运动会；
        - 现在是早上八点钟。
      - 一个陈述句本身是否能分辨真假，与能否现在知道它是真还是假是两回事。
      - 在数理逻辑中，不能去纠缠各种具体命题的真假问题，而是将命题当成一个抽象的、形式化的数学概念来处理，把命题定义成非真必假的陈述句。
      - 命题常用大写的拉丁字母 A、B、C、…或者带下标的大写的字母 A_1、A_2、A_3、…来表示，并称为命题标识符。
  - **原子命题，简单命题，复合命题，分子命题**
    - 若一个命题不能分解为更简单的命题，则称其为原子命题或简单命题，否则称为复合命题或分子命题。
    - 原子命题是命题逻辑研究的基本单位。
    - 复合命题的真值由其原子命题及复合的方式确定
- **9.2 命题联结词**

  命题联结词（简称**联结词**）是自然语言中有关连词的逻辑抽象，它们作用于命题时，和数学运算符号相当，所以又称为**逻辑运算符号**。
  - **〇、常用符号**
    - `$\land \lor \lnot \forall \exists \top \bot \vdash \vDash$`
    - $\land \lor \lnot \forall \exists \top \bot \vdash \vDash$
  - **一、否定联结词**
    - **真值表**

否命题 $\neg P$ 的真值可用下表表示。

P	$\neg P$
0	1
1	0

该表称为否命题 $\neg P$ 的**真值表**，其构造与集合的成员表类似。

- **否命题**
  - 设P是一个命题，利用“¬”和P组成的复合命题称为命题P的否命题，记作“¬P”（读作“非P”）。
  - **注意：**
    - 否定“¬”是一个一元运算，它的意义是“否定”被否定命题的全部，而不是一部分。
    - 自然语言中，诸如“并非”“永不”“绝不”等连词，尽管它们的含义并不完全相同，但除了否定外，没有其它的逻辑内容，因而都可用否定词¬来表示。
- **二、合取联结词∧**
  - **合取式复合命题**
    - 设P和Q是两个命题，由P、Q利用“∧”组成的复合命题，称为合取式复合命题，记作“P∧Q”（读作“P且Q”）。
    - 当且仅当命题P和Q的真值均为真时P∧Q的真值为真。
    - 真值表

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

    - **注意：**
      - “∧”具有对称性：P∧Q和Q∧P具有相同的真值。
      - “∧”是自然语言中“且”“而”“与”“和”“及”“同时”“不仅…而且…”“虽然…但是…”“既…又…”等连词的逻辑抽象，但不完全等同。
      - 有些汉语中的“与”、“和”字，实际上不是命题联结词。
        - 例如“张三与李四是一对好朋友。”中的“与”字，不具备将两个命题联接起来的功能，不是数理逻辑中的命题联结词。
- **三、析取联结词∨**
  - **析取式复合命题**
    - 由命题P和Q利用“∨”组成的复合命题，称为析取式复合命题，记作“P∨Q”（读作“P或Q”）。
    - 当且仅当P和Q至少有一个真值为真时P∨Q的真值为真。
    - “∨”为可兼或，允许命题P和Q同时为真。
    - 真值表如下

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

    - 从表中可以看出，命题联结词“∨”为可兼或，但自然语言中的“或”既可以是“可兼或”也可以是“不可兼或”。
  - **异或**
    - 设P，Q是两个命题，P异或Q是一个复合命题，记作P▿Q。
    - 异或是不可兼或
    - 其真值表如下。

P	Q	$P \bar{\vee} Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	**1**	**0**

    - P▿Q可表示为**(P∧¬Q) ∨(¬P∧Q)**。由于“▿”可用“∨”，“∧”和“¬”表示，故我们不把它当作基本联结词。
  - **注意:**
    - “∨”具有对称性：P∨Q和Q∨P具有相同的真值。
    - 从定义可以看出，联结词∨与自然语言中的“或”的意义也不全相同，因为自然语言中的“或”可表示“可兼或”，也可表示“不可兼或”。
    - 有一些汉语中的“或”字，实际上不是命题联结词。例如
      - 你仔细找一找，或能找到。
      - 他昨天做了二十或三十个引体向上。
      - 这个例子中的“或”字，只表示了所做引体向上的近似数目，不能用联结词“析取”表达。该例子是个原子命题。
    - 在自然语言中，通常是在具有某种关系的两语句之间使用析取“或”，但在命题逻辑中，并不要求这一点。
- **四、蕴含联结词**
  - **蕴含式复合命题，前件、假设、条件，后件或结论，条件联结词**
    - 由命题P和Q利用“→”组成的复合命题，称为蕴含式复合命题，记作“P→Q”（读作“如果P，则Q”）。
    - P称为前件、假设、条件，Q称为后件或结论。
    - 蕴含联结词也称条件联结词。
    - P→Q的真值依P和Q的真值而定：当P为真、Q为假时，P→Q为假，否则P→Q为真。

- 真值表如下

P	Q	$P\to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- **注:**
    - 复合命题“因为P，所以Q”“若P，则（必须）Q”“Q成立当P”“P成立仅当Q”“只要P就Q”“只有Q才P”“除非Q才P”“除非Q，否则非P”“P是Q的充分条件”“Q是P的必要条件”等都可以写成“P→Q”的形式。
    - “除非”表示唯一的条件，常跟“才”“否则”“不然”等合用，相当于“只有”“如果不”。
    - 在自然语言中，蕴含式复合命题的前提和结论间必含有某种因果关系，但在命题逻辑中可以允许两者之间无必然因果关系。

- **五、等值联结词**
    - **等值式复合命题，双条件联结词**
        - 由命题P和Q，利用“↔”组成的复合命题，称为等值式复合命题，记作“P↔Q”（读作“P当且仅当Q”）。
        - 等值联结词又称双条件联结词。
        - P↔Q的真值依P和Q的真值而定：当P和Q的真值相同时，P↔Q为真，否则为假。
        - 真值表如下

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

        - **注意:**
            - 等值联结词“↔”具有对称性，即P↔Q 和Q↔P 具有相同的真值。
            - “↔”相当于“等价”“相当于”“充要条件”“反之亦然”“反之”等。
            - 在自然语言中，有些类似于“只有…才…”“除非…才…”等形式的语句也需要用等值联结词将两个语句联接成复合命题，关键是要判断这两个语句是否具有充分必要性。
            - 例如设P：某人是仓库工作人员，Q：某人可以进入仓库，则命题“非本仓库工作人员一律不得入内。”可符号化为P↔Q。
            - “P↔Q”也不要求P和Q两个命题之间有任何联系。

- **六、命题联结词小结**
    - 对于上述五种联结词，应注意到:

- 复合命题的真值只取决于构成它的各原子命题的真值，
  - 与这些原子命题的内容、含义无关
  - 与联结词所连接的两原子命题之间是否有关系无关。
- 联结词是从自然语言中逻辑抽象出来的，仅它仅保留了逻辑内容，而把自然语言所表达的主观因素、心理因素及文学修辞等方面的因素全部撇开，所以联结词只表达了自然语句中的一种客观性质。
- 联结词都具有从已知命题得到新的命题的作用，从这个意义上讲，它们具有操作或运算的意义。由此可见，它们可以被看做是一、二元运算，或一、二元函数。
- 二元运算∧、∨、↔具有对称性，而→则不具有。

- **9.3 命题公式的基本概念**
  - **一、命题公式的概念**
    - **命题常元，命题变元,原子命题变元,真值指派**
      - 一个命题标识符P，如果表示一个确定的命题，即具有确定真值（真或假）的命题，则称P为命题常元。
      - 一个命题标识符P，如果只表示任意命题的位置标志，则称P为命题变元
      - **注意：**
        - 因为命题变元可以表示任意命题，所以它不能确定真值，**故命题变元不是命题**。和初等代数中字母的地位相当，命题变元是一个待定的命题。当命题变元表示原子命题时，该变元称为原子命题变元。
        - 当命题变元P用一个特定的命题代入时，P才能确定其真值，这时也称对P进行真值指派。
        - 为简单起见，对一个命题变元进行代入时直接以1 或0 为值代入，而不必代入具体的命题。
    - **命题公式,合式公式,公式**
      - 命题演算的命题公式，又称为合式公式，简称公式，是如下递归定义的
        - （1）单个命题常元或命题变元是命题公式；

          > —0、1 是命题公式
        - （2）如果A是命题公式，则(¬A) 是命题公式；
        - （3）如果A和B是命题公式，则(A∨B)，(A∧B)，(A→B)，(A↔B) 也是命题公式；
        - （4）有限次地利用上述（1）～（3）而产生的符号串是命题公式。
        - 为简单起见，公式的最外层括号可以省去。
    - **n元命题公式,原子命题公式,原子公式**
      - 如果G 是含有n 个不同的命题变元P_1，P_2，...，P_n的命题公式，则称其为n元命题公式，记为G(P_1，P_2，...，P_n)，简记为G。
      - **注意：**
        - （1）并非由这三类符号所组成的每一符号串都为命题公式。

    - （2）原子命题变元是最简单的命题公式，称为原子命题公式，简称原子公式。
    - （3）含命题变元的命题公式是没有真值的，故不是命题。仅当在一个命题公式中的所有命题变元都用确定的命题代入时，才得到一个命题。这个命题公式的真值依赖于代换命题变元的那些命题的真值。
    - （4）从图论的观点看，每一个命题公式都可以用一棵“二元有序树”来表示，其中“分枝结点”与命题联结词对应，而“树叶结点”则对应于原子命题变元和**命题**常元。
- **二、命题符号化**
  - **命题的符号化,命题的翻译**
    - 将一个用文字叙述的命题写成由命题标识符、命题联结词和圆括号表示的命题公式的过程，称为命题的符号化，或称为命题的翻译。
    - 命题符号化的基本步骤如下：
      - 从命题中分析出各原子命题，将它们符号化；
      - 使用合适的命题联结词，把原子命题逐个联结起来，构成复合命题的符号化表示。
    - **注意：**
      - 命题符号化时，若包含多个命题联结词，则要注意优先次序。
        - 命题联结词的优先级由强到弱依次是：¬；∧，∨；→，↔。
        - 对于相同的联结词，规定先出现者先运算。
        - 对于同级的联结词，按从左到右的次序运算。
        - 按优先级书写，命题中可以省略一些不必要的符号。但为了确保命题的清晰性，提高可读性，应适当加上括号以避免混淆。括号中的运算为最优先级。
      - 命题符号化时，还要注意
        - 要善于确定简单命题，不要把一个概念硬拆成几个概念。
          - 例如“我和他是同学”是一个简单命题。
        - 要善于识别自然语言中的联结词（有时它们被省略）。
          - 例如“狗急跳墙”应理解为“狗只有急了才跳墙”。
        - 否定词的位置要放准确。
          - 例如设A：你是傻子，B：他是傻子，C：你会去自讨没趣，D：他会去自讨没趣，则命题“如果你和他不都是傻子，那么你们俩都不会去自讨没趣。”符号化为：
          - $\neg(A \wedge B) \to (\neg C \wedge \neg D)$
- **三、命题公式的解释与真值表**
  - 若把命题公式中的所有命题变元分别代以原子命题或复合命题，则该命题公式便是一个复合命题。因此对复合命题的研究可转化为对命题公式的研究
  - 今后**以命题公式为主要研究对象。**

- 真值指派,解释,真值表
  - 设P_1，P_2，...，P_n为出现在命题公式G中的所有命题变元，对P_1，P_2，...，P_n分别指定一个真值，称为对G的一组真值指派或一个解释。
  - 显然，含有n个命题变元的命题公式共有2^n组不同的真值指派，对于每一组真值指派，公式都有一个确定的真值。
  - 命题公式G在其所有可能的真值指派下所取真值的表称为G的真值表。
- 四、命题公式的类型
  - 重言式,永真公式

    A是重言式当且仅当
    - 设P_1，P_2，...，P_n为出现在命题公式G中所有命题变元，如果对于P_1，P_2，...，P_n的任何一组真值指派，G的真值恒为真，则称公式G为重言式或永真公式，常用“1”表示。
  - 矛盾式,永假公式

    A是矛盾式当且仅当
    - 如果对于P_1，P_2，...，P_n的任何一组真值指派，G的真值恒为假，则称公式F为矛盾式或永假公式，常用“0”表示。
  - 可满足的公式
    - 如果至少有一组真值指派使G的真值为真，则称公式G为可满足的公式
  - **注:**
    - 若公式G不是矛盾式，则G为可满足的公式。
    - 重言式是可满足的公式，反之不成立。
    - 公式G 为重言式当且仅当¬G 为矛盾式
  - **定理9.1**
    - 若A和B为重言式，则A∧B、A∨B、A→B、A↔B 仍是重言式。
- 9.4 命题公式的等值关系和蕴含关系
  - 一、命题公式的等值关系
    - 等值，等值关系式，等值式
      - 设A和B是两个命题公式，P_1，P_2，...，P_n是所有出现于A和B中的命题变元，如果对于P_1，P_2，...，P_n的任一组真值指派，A和B的真值都相同，则称公式A和B等值，记为A⇔B，称“A⇔B”为等值关系式，简称等值式。
      - **注:**
        - 符号“⇔”与“↔”的区别与联系。
          - “⇔”不是命题联结词，“A⇔B”不是公式，它表示公式A与B间有等值关系。
          - “↔”是命题联结词，“A↔B”是一个公式。
          - A⇔B的充要条件是A↔B是重言式。
        - 公式之间的等值关系是一个等价关系。

- 自反性：对任意公式A，有$A \Leftrightarrow A$。
- 对称性：对任意公式A、B，若$A \Leftrightarrow B$，则$B \Leftrightarrow A$。
- 可传递性：对任意公式A、B、C，若$A \Leftrightarrow B$，$B \Leftrightarrow C$，则$A \Leftrightarrow C$。
- 当A是重言式时，$A \Leftrightarrow 1$；当A是矛盾式时，$A \Leftrightarrow 0$。

- **二、基本的等值式**
  - **命题定律**
    - **交换律**
      - $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
      - $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
    - **结合律**
      - $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
      - $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
    - **分配律**
      - $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
      - $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
    - **同一律**
      - $P \vee 0 \Leftrightarrow P$
      - $P \wedge 1 \Leftrightarrow P$
    - **互补律/排中律**
      - $P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$
    - **互补律/矛盾律**
      - $P \wedge \neg P \Leftrightarrow 0$
    - **双重否定律/对合律**
      - $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
    - **幂等律**
      - $P \vee P \Leftrightarrow P$
      - $P \wedge P \Leftrightarrow P$
    - **零一律**
      - $P \vee 1 \Leftrightarrow 1$
      - $P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
    - **吸收律**
      - $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$
      - $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
    - **德·摩根律**
      - $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
      - $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

- **蕴含等值式**
  - **P→Q⇔¬P∨Q**
- **假言易位/逆否律**
  - **P→Q⇔¬Q→¬P**
- **等值等值式**
  - **P↔Q⇔(P∧Q) ∨(¬P∧¬Q)**
  - **P↔Q⇔(P→Q) ∧(Q→P)**
- **前提合并式**
  - **P→(Q→R)⇔(P∧Q)→R**
- **等值否定等值式**
  - **¬(P↔Q) ⇔P↔¬Q**
- **蕴含否定等值式**
  - **¬(P→Q) ⇔P∧¬Q**

- **注意：**
  - 命题逻辑中的前19 个基本的等值式可与集合论中的19 个基本定律对应起来，可对照记忆：
    - 将P，Q理解为全集U的子集合
    - ¬换成'；∨换成∪；∧换成∩；1 换成U；0 换成Φ
    - 后面的基本的等值式是命题逻辑所特有的。
  - 根据E11和E13，五个基本联结词都可以用¬、∧和∨这三个联结词表示。
    - 特别，由于P∧Q⇔¬(¬P∨¬Q)，P∨Q⇔¬(¬P∧¬Q)
    - 故{¬，∨}和{¬，∧}都是功能完备的。
  - 考虑所有命题公式的集合S，代数系统 是一个布尔代数，称为命题代数。

三、等值式的判定

判定A⇔B，有两种方法：**真值表方法，命题演算方法。**

1．真值表方法

构造公式A↔B的真值表，依其标记的列是否全为1来判定。

- 用真值表方法证明P→Q⇔¬P∨Q

解：令 A 为 $P\to Q$，B 为 $\neg P\vee Q$，构造 A，B 以及 $A\leftrightarrow B$ 的真值表如下。

P	Q	$\neg P$	$\neg P\vee Q\,(B)$	$P\to Q\,(A)$	$A\leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	**1**
0	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	0	**1**
1	1	0	1	1	**1**

由于公式 $A\leftrightarrow B$ 所标记的列全为 1，因此 $A\Leftrightarrow B$。

57

2．等值演算方法

等值演算是指利用已知的一些等值式，根据置换规则、代入规则以及等值关系的可传递性等推导出另外一些等值式的过程。

- **定理9.2（代入规则）**
  - 对于**重言式（矛盾式）**中的任一命题变元出现的每一处均用同一命题公式代入，得到的仍是**重言式（矛盾式）。**
  - 例如$(P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P)$是重言式，若用公式$A\wedge B$代换命题变元P，则得到的公式$((A\wedge B)\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg(A\wedge B))$仍是重言式。
  - **注:**
    - 因为$A\Leftrightarrow B$的充分必要条件是$A\leftrightarrow B$是重言式，所以若对等值式中的任一命题变元出现的每一处均用同一命题公式代入，则得到的仍是等值式。
    - 基本等值关系式中命题变元P，Q，R可为命题公式。
- 子公式
  - 设C是命题公式A的一部分（即C是公式A中连续的几个符号），且C本身也是一个命题公式，则称C为公式A的子公式。
  - 例如 设公式A为$(\neg P\vee Q)\to((P\to Q)\vee(R\wedge\neg S))$，则$\neg P\vee Q$，$P\to Q$，$(P\to Q)\vee(R\wedge\neg S)$等均是A的子公式，
  - 但$\neg P\vee$，$P\to$，$\to Q$等均不是A的子公式。
- **定理9.3（置换规则）**
  - 设C是公式A的子公式且$C\Leftrightarrow D$。如果将公式A中的子公式C置换成公式D之后得到的公式是B，则有$A\Leftrightarrow B$。
  - **注:** 代入规则和置换规则的区别如下:
    - 代入规则只能对永真式适用，置换规则可对任何公式适用。
    - 代入是对命题变元而言，置换可对命题公式实行。
    - 代入必须处处代入，置换可部分置换也可全部置换
- 定理9.4
  - （1）若$A\vee B\Leftrightarrow C\vee B$，$A\wedge B\Leftrightarrow C\wedge B$，则$A\Leftrightarrow C$。
  - （2）若$A\vee B\Leftrightarrow C\vee B$，$A\vee\neg B\Leftrightarrow C\vee\neg B$，则$A\Leftrightarrow C$。
  - （3）若$A\wedge B\Leftrightarrow C\wedge B$，$A\wedge\neg B\Leftrightarrow C\wedge\neg B$，则$A\Leftrightarrow C$。

四、命题公式的蕴含关系

- **A蕴含B，蕴含关系式，蕴含式。**
  - 设A，B是两个命题公式，若公式$A\to B$是重言式，即$A\to B\Leftrightarrow 1$，则称A蕴含B，记作$A\Rightarrow B$，称“$A\Rightarrow B$”为蕴含关系式，简称蕴含式。
  - **注:**
    - 符号“$\Rightarrow$”和“$\to$”的区别和联系（同符号“$\Leftrightarrow$”与“$\leftrightarrow$”的区别和联系类似）
      - “$\Rightarrow$”不是命题联结词，“$A\Rightarrow B$”不是公式，它表示公式A与B之间存在蕴含关系。
      - “$\to$”是命题联结词，“$A\to B$”是一个公式。
      - $A\Rightarrow B$的充要条件是$A\to B$是重言式。

- 公式之间的蕴含关系是一个偏序关系
  - 自反性：对任意的公式A，A⇒A。
  - 反对称性：对任意的公式A，B，若A⇒B，B⇒A，则A⇔B。
  - 传递性：对任意的公式A，B，C，若A⇒B，B⇒C，则A⇒C。
- **定理9.5**
  - 设A，B是两个命题公式，则A⇔B当且仅当A⇒B且B⇒A。
- **定理9.6**
  - 设A，B，C是命题公式，若A⇒B且A⇒C，则A⇒B∧C
- **定理9.7**
  - 设A，B，C是命题公式，若A⇒C且B⇒C，则A ∨ B ⇒ C
- **定理9.8**

  逆否命题
  - 设A，B 是命题公式，则A⇒B 的充要条件是¬B⇒¬A。
- **定理9.9**
  - 设A，B 是命题公式，若A⇒B 且A 是重言式，则B 一定也是重言式。

- **五、基本的蕴含式**
  - **化简式**

    P真Q真则P、Q其一一定
    - **P∧Q⇒P**
    - **P∧Q⇒Q**
  - **附加式**

    P真可推知P或Q真
    - **P⇒P∨Q**
    - **Q⇒P∨Q**
  - **附加式变形**

    P假（Q真），P→Q一定真
    - **¬P⇒P→Q**
    - **Q⇒P→Q**
  - **化简式变形**

    P→Q为假，P一定真，Q一定假
    - **¬(P→Q) ⇒P**
    - **¬(P→Q) ⇒¬Q**
  - **假言推理**

    P真并且P箭头Q真，则Q一定真

        - **P∧(P→Q)⇒Q**
    - **拒取式**

      Q假，P→Q为真，则P一定假

        - **¬Q∧(P→Q)⇒¬P**
    - **析取三段论**
        - **¬P∧(P∨Q)⇒Q**
    - **蕴含三段论**
        - **(P→Q)∧(Q→R)⇒P→R**
    - **等值三段论**
        - **(P↔Q)∧(Q↔R)⇒P↔R**
    - **前后件附加（析取）**
        - **P→Q⇒(P∨R)→(Q∨R)**
    - **前后件附加（合取）**
        - **P→Q⇒(P∧R)→(Q∧R)**
- **六、蕴含式的判定**
    - **1.真值表法**
        - 证明
            - （1）I16：((P∨Q) ∧(P→R) ∧(Q→R))⇒R析取构造二难
            - （2）I17：(P∧Q) ∧(P→R) ∧(Q→R)⇒R合取构造二难
            - 真值表

$P\ Q\ R$	$P\vee Q$	$P\to R$	$Q\to R$	$(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to R)$	G
0 0 0	0	1	1	0	1
0 0 1	0	1	1	0	1
0 1 0	1	1	0	0	1
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	1	0	1	0	1
1 0 1	1	1	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0	1
1 1 1	1	1	1	1	1

    - **2.等值演算法**

【例 9.22】证明 I_9：$P\wedge(P\to Q)\Rightarrow Q$

证明：$(P\wedge(P\to Q))\to Q$

$\Leftrightarrow \neg(P\wedge(\neg P\vee Q))\vee Q$ 　　E_{11}

$\Leftrightarrow (\neg P\vee\neg(\neg P\vee Q))\vee Q$ 　　E_{10}'

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\vee\neg(\neg P\vee Q)$ 　　E_1，E_2

$\Leftrightarrow 1$ 　　代入规则，E_5

因此 $P\wedge(P\to Q)\Rightarrow Q$。

    - **3.假定前件A为真**

要判定 $A \to B$ 是否为重言式，由联结词 “$\to$” 的真值表可知，只需判定真值表中第三行的情况（A 为真 B 为假）是否发生。

假定前件 A 为真，若能说明后件 B 也为真，则公式 $A \to B$ 是重言式，因而 $A \Rightarrow B$；否则，该蕴含关系不成立。

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

【例 9.23】证明 I_{10}：$\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$。

证明：令 $\neg Q \wedge (P \to Q)$ 为真，

则 $\neg Q$ 为真，且 $P \to Q$ 为真。

于是 Q 为假，因而 P 也为假。

由此 $\neg P$ 为真。

故蕴含式 I_{10} 成立。

- **4.后件B为假**

【例 9.24】证明蕴含式 $(P \to Q) \wedge (R \to S) \Rightarrow (P \wedge R) \to (Q \wedge S)$。

证明：令 $(P \wedge R) \to (Q \wedge S)$ 为假，则 $P \wedge R$ 为真，$Q \wedge S$ 为假。

于是 P 和 R 均为真，而 Q 和 S 至少有一个为假。

由此可知 $P \to Q$ 与 $R \to S$ 中至少有一个为假。

因此 $(P \to Q) \wedge (R \to S)$ 为假。

故上述蕴含式成立。

注： *一般在 B 中含有蕴含联结词时，考虑利用此方法。*

假定后件 B 为假，若能说明前件 A 为假，则 A ⇒ B；否则 A ⇒ B 不成立。

- **七、命题公式的对偶**
  - **对偶式**
    - 在仅含有¬、∧和∨这三种联结词的公式A中，若用∨代换∧，用∧代换∨，用0代换1，用1 代换0，则所得的公式称为A的对偶式，记为A^D。
    - 显然，A和A^D互为对偶。
      - 例如公式((P∨¬Q) ∧R) ∨(S∧P) 与((P∧¬Q) ∨R) ∧(S∨P)互为对偶。
    - 注：含有蕴含或等值联结词的公式，不能按定义9.17 直接求其对偶公式。但可以先将公式进行等值转换为仅含有¬、∧和∨这三种联结词的公式，然后按照定义求其对偶公式。
      - 例如因P→Q ⇔¬P∨Q，故公式P→Q的对偶为¬P∧Q。
  - **定理9.10**
    - 设A和AD互为对偶式，P1，P2，…，Pn是其命题变元，则**¬A(P1，P2，…，Pn) ⇔A^D(¬P1，¬P2，…，¬Pn)**
    - 即 A 的否定式可用其对偶式及其命题变元的否定来等值表示。
  - **定理9.11（对偶原理）**
    - 设A和B是两个仅含有¬、∧和∨这三种联结词的公式，P1，P2，…，Pn是其命题变元。
    - （1）若A⇒B，则$B^D \Rightarrow A^D$。
    - （2）若A⇔B，则$A^D \Leftrightarrow B^D$。
  - **对偶原理十分有用，利用它可以从已知的重言式、等值式和蕴含式推导出新的重言式、等值式和蕴含式。**
- **9.5 命题公式的范式**
  - **〇、引言**

    - 判断一个命题公式是否为重言式，或者矛盾式，或者可满足的公式，这样的问题称为一个判定问题。
    - 在命题逻辑中，对于含有有限个命题变元的命题公式来说，用真值表的方法，总可以在有限的步骤内确定它的真值。因而判定问题总是有解的。
    - 但当命题公式中含有的命题变元较多时，真值表的方法并不理想。
    - 为此，本节将给出命题公式的一种标准形式即范式，并利用范式对命题公式的类型进行判定。
- **一、析取范式和合取范式**
    - **质合取式,原子合取式,质析取式,原子析取式**
        - 一个由有限个命题变元或命题变元的否定所组成的合取式称为质合取式或原子合取式。
        - 一个由有限个命题变元或命题变元的否定所组成的析取式称为质析取式或原子析取式。
    - **定理9.12**
        - （1）一个质合取式为永假式的充分必要条件是它同时包含某个命题变元及其否定。
        - （2）一个质析取式为永真式的充分必要条件是它同时包含某个命题变元及其否定。
    - **析取范式,析取项,合取范式,合取项**
        - 有限个质合取式的析取式称为析取范式，即具有形为$A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$（$n \geq 1$）的公式，其中Ai（1≤i≤n）是质合取式，称为该范式的一个析取项。
        - 有限个质析取式的合取式称为合取范式，即具有形为$A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$（$n \geq 1$）的公式，其中Ai（1≤i≤n）是质析取式，称为该范式的一个合取项。
        - **例如**
            - P∨(P∧Q) ∨R∨(¬P∧¬Q∧R) 是一析取范式。
            - R ∨ (P ∧ ¬Q) ∨ (¬P ∧ Q ∧ P)也是一析取范式。
            - ¬P ∧ (P ∨ Q) ∧ R ∧ (P ∨ ¬Q ∨ R)是一合取范式。
            - (¬P ∨ R ∨ Q) ∧ (P ∨ Q) ∧ (P ∨ ¬P)也是一合取范式。
            - P ∨ (¬R ∨ Q)与¬(P∨Q) 既不是析取范式也不是合取范式。但它们的等值公式P∨¬R∨Q与¬P∧¬Q既是析取范式也是合取范式。
        - **定理9.13**
            - 任一命题公式都存在着与它等值的析取范式和合取范式。
        - **注:**
            - 一个公式的析取范式（合取范式）不唯一，但之间等值。
        - **例题:**
            - 求G1：¬(P∨Q) ↔(P∧Q) 的合取范式、析取范式。

解：$G_1 \Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)) \wedge ((P \wedge Q) \rightarrow \neg(P \vee Q))$　E_{14}

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(P \vee Q))$　E_{11}，E_6

$\Leftrightarrow (P \vee (Q \vee (P \wedge Q))) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$　E_2，E_{10}'，E_{10}

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg Q)$　E_9，E_3'

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge ((\neg P \vee \neg P) \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \vee \neg Q))$　E_1，E_2

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$（合取范式）　E_7，E_7'

$\Leftrightarrow (P \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \vee (Q \wedge (\neg P \vee \neg Q))$　E_3

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge \neg Q)$（析取范式）

E_3，E_1

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$（化简后的析取范式）　E_5'，E_4

- 求G2：(P∧(Q→R)) →S的合取范式和析取范式。

解：$G_2 \Leftrightarrow \neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S$　E_{11}

$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg(\neg Q \vee R) \vee S$　E_{10}'

$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee S$（析取范式）　E_{10}，E_6

$G_2 \Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee S$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee S) \vee (Q \wedge \neg R)$　E_1，E_2

$\Leftrightarrow (\neg P \vee S \vee Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)$（合取范式）　E_3'

另外由　$G_2 \Leftrightarrow (\neg P \vee S \vee Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)) \vee (S \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R))$

$\vee (Q \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R))$　E_3

$\Leftrightarrow \neg P \vee S \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge S) \vee (Q \wedge \neg R)$

（析取范式）　E_9'，E_3

- **定理9.14**
  - （1）公式A为永真式当且仅当A的合取范式中每个质析取式至少包含一个命题变元及其否定。
  - （2）公式A为永假式当且仅当A的析取范式中每个质合取式至少包含一个命题变元及其否定。

- **二、主析取范式和主合取范式**
  - **最小项，最大项**

    一个命题变元只出现一次
    - 设有命题变元P_1，P_2，$\ldots$，P_n，
      - 形如$\bigwedge_{i=1}^{n} P_i^*$的命题公式称为是由命题变元$P_1$，$P_2$，$\ldots$，$P_n$所产生的最小项，
      - 形如$\bigvee_{i=1}^{n} P_i^*$的命题公式称为是由命题变元P_1，P_2，$\ldots$，P_n所产生的最大项。
      - 其中Pi* 为Pi 或为¬Pi（i= 1，2，…，n）。
      - **例如**
        - $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$，$\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ 是由P_1，P_2，P_3 产生的最小项。
        - $P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3$ 是由P_1，P_2，P_3 产生的一个最大项
    - **注：**
      - 由命题变元P_1，P_2，$\ldots$，P_n产生的不同最小项（最大项）共有2^n个。

    - 不同的最小项（最大项）之间不等值。
    - 最小项是质合取式，但不可能为永假式。
    - 最大项是质析取式，但不可能为永真式。
- **主析取范式，主合取范式，空**
  - 由不同最小项所组成的析取式称为主析取范式。
  - 由不同最大项所组成的合取式称为主合取范式。
  - 如果一个主析取范式不包含任何最小项，则称该主析取范式为“空”；如果一个主合取范式不包含任何最大项，则称该主合取范式为“空”。
  - **例如**
    - $(\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3)$是一个主析取范式。
    - $(P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3)$是一个主合取范式
  - 求解步骤：**等值代换，真值表**
- **最小项的编码表示**
  - (1) 对于每一个最小项 $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} P_i^*$，有且仅有真值表中的一行使其真值为 1，该行就是 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 所标记的各列分别为 $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ 的行。其中$\delta_i = \begin{cases} 1, & P_i^* \text{ 为 } P_i \\ 0, & P_i^* \text{ 为 } \neg P_i \end{cases}$
  - 此时若规定命题变元的次序为 $P_1, P_2, \ldots, P_n$，则最小项可编码表示为 $m_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}$。
  - 对于任一给定的公式 G，作出它的真值表，根据它在真值表中值 为 1 的个数和 1 所在的行，可作出一个与 G 等值且由这些不同 最小项的析取所构成的公式，即**主析取范式**。
  - 该公式中不同最小项的个数等于 G 在真值表中 1 的个数，而这 些最小项在真值表中值为 1 的行分别对应着 G 的真值为 1 的不 同的行。
- **最大项的编码表示**
  - (2) 对于每一个最大项 $\bigvee\limits_{i=1}^{n} P_i^*$，有且仅有真值表中的一行使其真值为 0，该行就是 $P_1, P_2, \ldots, P_n$所标记的各列分别为$\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_n'$ 的行。其中$\delta_i' = \begin{cases} 1, & P_i^* \text{ 为 } \neg P_i \\ 0, & P_i^* \text{ 为 } P_i \end{cases}$
  - 此时若规定命题变元的次序为 $P_1, P_2, \ldots, P_n$，则最大项可编码表示为 $M_{\delta_1'\delta_2'\cdots\delta_n'}$。
  - 对于任一给定的公式 G，作出它的真值表，根据它在真值表中 取值为 0 的个数和 0 所在的行，可作出一个与 G 等值且由这些 不同最大项的合取所构成的公式，即**主合取范式**。

- 这些不同最大项的个数等于 G 在真值表中 0 的个数，而这些最 大项在真值表中值为 0 的行分别对应着 G 的真值为 0 的不同的 行。
- **定理9.15**
  - 任一公式都有与之等值的主析取范式和主合取范式。
- **推论9.2**
  - 两命题公式等值当且仅当它们有相同的主析取范式和主合取范式
- **例题：**
  - 求公式G：((P∨Q) →(Q∧R)) →(P∧¬R) 的主析取范式和主合取范式。
  - 解：构造公式G的真值表如下

P Q R	$\neg R$	$P\vee Q$	$Q\wedge R$	$(P\vee Q)\to(Q\wedge R)$	$P\wedge\neg R$	G
0 0 0	1	0	0	1	0	0
0 0 1	0	0	0	1	0	0
0 1 0	1	1	0	0	0	1
0 1 1	0	1	1	1	0	0
1 0 0	1	1	0	0	1	1
1 0 1	0	1	0	0	0	1
1 1 0	1	1	0	0	1	1
1 1 1	0	1	1	1	0	0

  - （1）由G 取值为1 的行得主析取范式为（次序为P， Q， R）：
    - $m_{010} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{110}$
    - 或 $m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6$
    - 或 $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$
  - （2）由G取值为0 的行得主合取范式为：
    - $M_{000} \wedge M_{001} \wedge M_{011} \wedge M_{111}$
    - 或$M_0 \wedge M_1 \wedge M_3 \wedge M_7$
    - 或$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$
  - 另解:
    - 由 (1) , G 的主析取范式为 $m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6$, 故 $\neg G$ 的主析 取范式为$m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7$
    - 因此 G 的主合取范式为$\neg\left(m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7\right)$, 即 $M_0 \wedge M_1 \wedge M_3 \wedge M_7$