

大学数学系列教材

# 微积分学

(第三版)

(下册)

华中科技大学数学系



高等教育出版社  
Higher Education Press

# 大学数学系列教材

华中科技大学数学系

微积分学（第三版）（上册）

》微积分学（第三版）（下册）

线性代数（第三版）

概率论与数理统计（第三版）

复变函数与积分变换（第三版）

数学物理方程与特殊函数（第二版）

ISBN 978-7-04-023880-8



9 787040 238808 >

定价 16.00 元

大学数学系列教材

# 微积分学

(第三版) (下册)

华中科技大学数学系



高等  
教育  
出版  
社

HIGHER EDUCATION PRESS

## 内容提要

本书是在高等教育出版社 2002 年出版的《微积分学(修订版)》(下册,华中科技大学数学系编)的基础上,广泛吸取校内外教师的意见后修订而成的。全书分上、下两册出版。下册主要内容有:矢量代数与空间解析几何,多元函数微分学,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,并且在书的最后提供了习题答案及人名与名词索引。

本着“通用、简明、便利、易读”的方针,本书对传统的微积分(即高等数学)课程的教学内容,采取精简、集中、类比、偏重、优化等一系列有效措施,设计成一个内容简明易懂、数学思想清晰、重点难点突出、注重应用能力培养的教学体系;实践证明这种处理方式能在有限的课时内提高教学效率,使学生能更快更好地理解与掌握微积分学知识。

本书适用于一般高等院校理工类各专业学生作为微积分学教材使用。

## 图书在版编目(CIP)数据

微积分学. 下册/华中科技大学数学系. —3 版.  
—北京:高等教育出版社, 2008. 6

ISBN 978-7-04-023880-8

I. 微… II. 华… III. 微积分—高等学校—  
教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 071672 号

策划编辑 宋瑞才 责任编辑 崔梅萍 封面设计 张志奇  
责任编辑 黄建英 版式设计 张岚 责任校对 金辉  
责任印制 宋克学

出版发行社	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
地址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总机	010-58581000	网上订购	<a href="http://www.landraco.com">http://www.landraco.com</a>
			<a href="http://www.landraco.com.cn">http://www.landraco.com.cn</a>
经印	销 刷	蓝色畅想图书发行有限公司 高等教育出版社印刷厂	畅想教育 <a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
开本	880×1230 1/32	版 次	1997 年 8 月第 1 版
印张	9.25	印 次	2008 年 6 月第 3 版
字数	260 000	定 价	2008 年 6 月第 1 次印刷 16.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究  
物料号 23880-00

# 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

反盗版举报传真：(010) 82086060

E-mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100120

购书请拨打电话：(010)58581118

# 目 录

第八章 矢量代数与空间解析几何	1
§ 8.1 空间直角坐标系	1
§ 8.2 矢量及其线性运算	4
8.2.1 矢量概念	4
8.2.2 矢量的线性运算	5
8.2.3 矢量的坐标	8
8.2.4 矢量的方向余弦	10
§ 8.3 矢量间的积	11
8.3.1 数量积	11
8.3.2 矢量积	13
8.3.3 混合积	16
§ 8.4 平面与直线	19
8.4.1 平面方程	19
8.4.2 直线方程	21
8.4.3 关于平面与直线的基本问题	23
§ 8.5 曲面与曲线	34
8.5.1 曲面	34
8.5.2 空间曲线	38
8.5.3 二次曲面	42
第九章 多元函数微分学	49
§ 9.1 多元函数	49
9.1.1 区域	49
9.1.2 多元函数的概念	52
9.1.3 极限与连续性	54
§ 9.2 偏导数与全微分	58

9.2.1	偏导数的定义与计算	58
9.2.2	高阶偏导数	62
9.2.3	全微分	63
9.2.4	复合函数微分法	67
9.2.5	隐函数微分法	72
§ 9.3	方向导数与梯度	80
9.3.1	方向导数	80
9.3.2	梯度	83
§ 9.4	微分学的几何应用	85
9.4.1	曲线的切线与法平面	85
9.4.2	曲面的切平面与法线	88
§ 9.5	极值	92
9.5.1	自由极值	92
9.5.2	条件极值	95
9.5.3	应用问题	99
9.5.4	Taylor 公式	102
<b>第十章 重积分</b>		<b>107</b>
§ 10.1	二重积分的定义与性质	107
10.1.1	体积问题与质量问题	107
10.1.2	二重积分的定义	108
10.1.3	二重积分的性质	110
§ 10.2	二重积分的计算	111
10.2.1	化为逐次积分	112
10.2.2	极坐标代换	117
* 10.2.3	一般变量代换	122
§ 10.3	三重积分	129
10.3.1	三重积分的定义	129
10.3.2	化为逐次积分	130
10.3.3	柱面坐标与球面坐标代换	135
§ 10.4	重积分的应用	142
10.4.1	几何应用	142
10.4.2	物理应用	147

第十一章	曲线积分与曲面积分	153
§ 11.1	第一型曲线积分	153
11.1.1	定义与性质	153
11.1.2	化为定积分	155
§ 11.2	第二型曲线积分	161
11.2.1	定义与性质	161
11.2.2	化为定积分	163
11.2.3	Green 公式	166
11.2.4	平面曲线积分与路径无关的条件	172
11.2.5	二元函数的全微分求积	176
11.2.6	全微分方程	180
§ 11.3	第一型曲面积分	185
11.3.1	定义与性质	185
11.3.2	化为二重积分	186
§ 11.4	第二型曲面积分	191
11.4.1	定义与性质	191
11.4.2	化为二重积分	194
§ 11.5	Gauss 公式与 Stokes 公式	199
11.5.1	散度与旋度	199
11.5.2	Gauss 公式	202
11.5.3	Stokes 公式	207
11.5.4	场论初步	210
第十二章	无穷级数	218
§ 12.1	数项级数	218
12.1.1	级数的概念与性质	218
12.1.2	正项级数	221
12.1.3	变号级数	227
§ 12.2	函数项级数	233
12.2.1	一致收敛性	233
12.2.2	和函数的分析性质	236
§ 12.3	幂级数	238

12.3.1 收敛区间与收敛半径	239
12.3.2 展开函数为幂级数	243
12.3.3 级数求和	249
§ 12.4 Fourier 级数	254
12.4.1 Fourier 级数及其收敛性	254
12.4.2 展开函数为 Fourier 级数	256
12.4.3 Fourier 级数的其他形式	261
<b>习题答案</b>	<b>270</b>
<b>人名索引</b>	<b>283</b>
<b>名词索引</b>	<b>284</b>

## 第八章

# 矢量代数与空间解析几何

本书上册所介绍的“一元函数微积分学”，是建立在平面解析几何的基础上。本书下册转向“多元函数微积分学”的讨论，为此，空间解析几何的知识是不可缺少的。鉴于矢量用于表达几何与分析概念都具有特殊的便利，而且已成为现代科学中的通用工具，本章着重介绍矢量代数的基本内容，并且将其应用于空间解析几何问题的研究。

### § 8.1 空间直角坐标系

空间解析几何的出发点，是建立空间中的点与三元有序数组之间的联系，这主要通过引进空间直角坐标系来实现。

在空间中取定点  $O$ ，过点  $O$  作三条相互垂直的数轴： $x$  轴（横轴）、 $y$  轴（纵轴）与  $z$  轴（竖轴），它们统称为坐标轴，称点  $O$  为坐标原点。规定  $x$  轴、 $y$  轴与  $z$  轴的正向构成右手系（当右手握拳的方向是从  $x$  轴的正向到  $y$  轴的正向时，右手大拇指的指向是  $z$  轴的正向），如图 8-1 所示。将这样的空间直角坐标系记作  $Oxyz$ 。

以下总假定已取定空间直角坐标系  $Oxyz$ 。

由  $x$  轴、 $y$  轴确定的平面称为  $xy$  坐标平面，简称  $xy$  平面； $yz$  平面与  $zx$  平面的意义仿此。三坐标平面两两相互垂直，且将空间分成八个部分，每个部分称为卦限。位于  $xy$  平面上的一、二、三、四象限上方（假定  $z$  轴朝上）的四个卦限依次称为 I、II、III、IV 卦限，与之相对的  $xy$

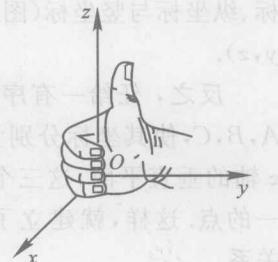


图 8-1

平面下方的四个卦限依次称为V、VI、VII、VIII卦限,如图8-2所示.

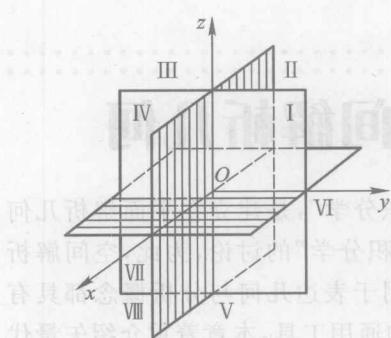


图 8-2

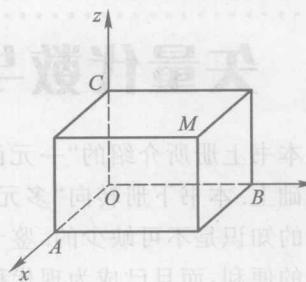


图 8-3

任给空间一点  $M$ ,过  $M$  作三个平面分别垂直于  $x$  轴、 $y$  轴与  $z$  轴,它们与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的交点依次为  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ,这三点在各坐标轴上的坐标分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$ .这样,点  $M$  唯一确定了一个三元有序数组  $(x, y, z)$ ,称之为点  $M$  在坐标系  $Oxyz$  中的坐标,依次称  $x, y, z$  为  $M$  的横坐标、纵坐标与竖坐标(图 8-3).将点  $M$  记为  $M(x, y, z)$ ,或简写为  $(x, y, z)$ .

反之,任给一有序数组  $(x, y, z)$ ,在  $x$  轴、 $y$  轴与  $z$  轴上分别取点  $A, B, C$ ,使其坐标分别为  $x, y, z$ ,然后通过  $A, B, C$  分别作  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的垂直平面,这三个平面的交点  $M$  就是以  $(x, y, z)$  为其坐标的唯一的点.这样,就建立了空间的点与三元有序数组之间的一一对应关系.

坐标面与坐标轴上的点,其坐标各有一定特征.例如, $xy$  平面上的点的坐标形如  $(x, y, 0)$ ;  $x$  轴上的点的坐标形如  $(x, 0, 0)$ .原点的坐标为  $(0, 0, 0)$ .

给定点  $M(x, y, z)$ ,点  $M$  关于  $xy$  平面的对称点为  $(x, y, -z)$ ;点  $M$  关于  $x$  轴的对称点为  $(x, -y, -z)$ ;点  $M$  关于原点的对称点为  $(-x, -y, -z)$ .点  $M$  在  $xy$  平面上的投影为点  $(x, y, 0)$ ;点  $M$  在  $x$

轴上的投影为点 $(x, 0, 0)$ (一点在一平面(直线)上的投影是由该点向该平面(直线)所引垂线之垂足). 其余情况类推.

给定两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , 以 $d$ 记此两点之间的距离, 即 $d = |M_1 M_2|$ , 现推出 $d$ 的计算公式. 过 $M_1, M_2$ 各作三个分别垂直于三坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 $M_1 M_2$ 为对角线的长方体(图 8-4). 分别对直角三角形 $M_1 A M_2$ 与 $M_1 B A$ 用勾股定理得

$$d^2 = |AM_2|^2 + |M_1 A|^2 = |AM_2|^2 + |M_1 B|^2 + |BA|^2.$$

因

$$|AM_2| = |x_2 - x_1|, |M_1 B| = |y_2 - y_1|, |BA| = |z_2 - z_1|,$$

故得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 与原点 $O(0, 0, 0)$ 之间的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2)$$

**例 1** 试证以点 $A(4, 1, 9), B(10, -1, 6)$ 与 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

**证** 依公式(1)有

$$|AB|^2 = (10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2 = 49;$$

$$|BC|^2 = (2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2 = 98;$$

$$|CA|^2 = (4-2)^2 + (1-4)^2 + (9-3)^2 = 49.$$

可见 $|AB| = |CA|$ ,  $|AB|^2 + |CA|^2 = |BC|^2$ , 这表明 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

**例 2** 在 $xy$ 平面上求一点 $M$ , 使 $M$ 与点 $A(1, 2, 1), B(2, 2, 0), C(1, 3, 0)$ 的距离相等.

**解** 设 $M$ 的坐标为 $(x, y, 0)$ , 则等式 $|MA| = |MB| = |MC|$ 相

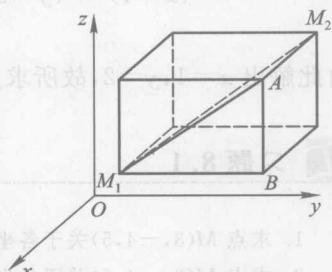


图 8-4

当于

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 = (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ = (x-1)^2 + (y-3)^2.$$

由此解出  $x=1, y=2$ , 故所求点为  $M(1, 2, 0)$ .



## 习题 8.1

1. 求点  $M(3, -4, 5)$  关于各坐标面的对称点的坐标.
2. 求点  $M(3, -4, 5)$  关于各坐标轴的对称点的坐标.
3. 求点  $A(4, -3, 5)$  到坐标原点及各坐标轴的距离.
4. 在  $z$  轴上求一点, 使它到点  $M(-4, 1, 7)$  和  $N(3, 5, -2)$  的距离相等.
5. 在  $yz$  面上求一点, 使它到点  $A(3, 1, 2), B(4, -2, -2)$  和  $C(0, 5, 1)$  的距离相等.

## § 8.2 矢量及其线性运算

### 8.2.1 矢量概念

在物理学以及其他应用科学中有两类性质的量. 一类量只有大小没有方向, 如质量、距离、温度、角速度等; 另一类量既有大小又有方向, 如力、速度、位移、力矩等. 前一类量称为数量(也叫纯量或者标量); 后一类量称为矢量(也叫向量), 这种“有方向的量”广泛出现在各个领域, 其重要性并不亚于数量.

在数学上, 常用有向线段来表示矢量. 对空间中任意两点  $A, B$ , 称从起点  $A$  到终点  $B$  的有向线段为一个矢量, 记作  $\vec{AB}$ , 或记为单个黑体字母  $a$  (图 8-5). 箭头所指方向为矢量的方向; 称线段  $AB$  的长度为矢量  $\vec{AB}$  的模, 记作  $|\vec{AB}|$  或  $|a|$ ; 若矢量  $a$  的模为零, 则称  $a$  为零矢量(可认为零矢量的方向是任意的), 记作  $\mathbf{0}$ ; 若矢量  $a$  的模为 1, 则称其为

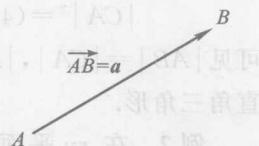


图 8-5

单位矢量；称矢量  $\overrightarrow{BA}$  为矢量  $\overrightarrow{AB}$  的负矢量，写作  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ .  
图 8-1

给定矢量  $a, b$ ，若  $a$  经平行移动后可与  $b$  重合（即起点与起点重合，终点与终点重合），则规定  $a=b$ . 在这个意义上，矢量并无固定的起点，因此称为自由矢量，有时为了讨论问题方便，需将矢量的起点固定，固定了起点的矢量称为固定矢量. 本书中所研究的矢量皆为自由矢量.

任给矢量  $a$ ，必有唯一点  $M$ ，使得  $a=\overrightarrow{OM}$  ( $O$  是坐标原点). 反之，任给空间中一点  $M$ ， $M$  确定唯一矢量  $\overrightarrow{OM}$ ，称为点  $M$  的矢径. 这样，通过点  $M$  与矢量  $\overrightarrow{OM}$  的对应，得到空间中点的全体与矢量的全体之间的一一对应. 这种对应对于矢量的研究与应用非常重要.

给定矢量  $a=\overrightarrow{OA}, b=\overrightarrow{OB}$ ，若  $O, A, B$  三点共线，则说矢量  $a$  与  $b$  共线（或平行），且当  $A, B$  在点  $O$  之同侧时，则说  $a$  与  $b$  同向；当  $A, B$  在点  $O$  之异侧时，则说  $a$  与  $b$  反向. 注意零矢量与任何矢量共线.

### 8.2.2 矢量的线性运算

#### 一、矢量的加法和减法

力或速度的合成是依“平行四边形法则”施行的，矢量的加法是这类合成的一种抽象.

**定义 1** 给定矢量  $a=\overrightarrow{OA}, b=\overrightarrow{OB}$ ，若  $a$  与  $b$  不共线，则以  $OA, OB$  为邻边作平行四边形  $OACB$ （图 8-6），称矢量  $c=\overrightarrow{OC}$  为矢量  $a, b$  的和，记作  $c=a+b$ . 若  $a$  与  $b$  共线且同向，则规定  $c=a+b$  是一个与  $a, b$  同向的矢量，且  $|c|=|a|+|b|$ ；若  $a$  与  $b$  共线但反向且  $|a|\geq|b|$ ，则规定  $c=a+b$  是一个与  $a$  同向的矢量且  $|c|=|a|-|b|$ .

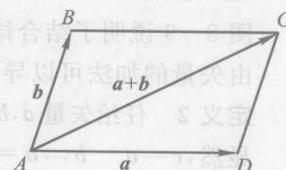


图 8-6

不难理解，如上定义的  $a+b$  与原点  $O$  的选择无关，这种求和法则称为平行四边形法则.

由矢量求和的平行四边形法则，我们容易得到矢量求和的三角形法则：

将矢量  $a, b$  首尾相接，则由起点到终点的矢量  $c=\overrightarrow{OC}$  为矢量  $a, b$

的和(图 8-7),即  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ ,量矢量的加法运算律是平行四边形法则;量矢量的单重性(即点与点合重合)合重合律是平行四边形法则;量矢量的单重性(即点与点合重合)合重合律是平行四边形法则;量矢量的单重性(即点与点合重合)合重合律是平行四边形法则;量矢量的单重性(即点与点合重合)合重合律是平行四边形法则;

进一步,三角形法则可推广为如下的矢量求和的多边形法则(图 8-8):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \cdots + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} \quad (1)$$

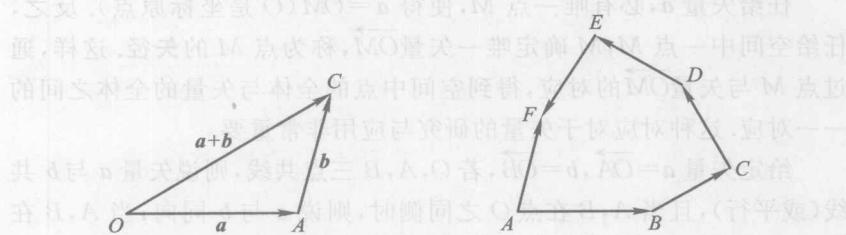


图 8-7

图 8-8

容易验证,矢量加法满足如下性质:

(i) 交换律:  $a + b = b + a$ .

(ii) 结合律:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

(iii)  $a + \mathbf{0} = a, a + (-a) = \mathbf{0}$ .

图 8-9 说明了结合律的正确性.

由矢量的加法可以导出矢量的减法:

**定义 2** 任给矢量  $a, b$ , 定义  $a - b = a + (-b)$ , 称  $a - b$  为  $a$  与  $b$  之差.

显然,  $c = a - b \Leftrightarrow a = b + c$ , 由此得出  $a - b$  的几何意义(如图 8-10 所示).

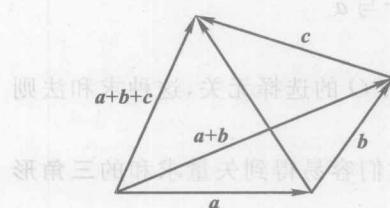


图 8-9

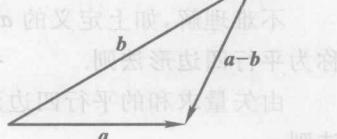


图 8-10

## 二、矢量的数乘

**定义 3** 给定数量  $\lambda$  与矢量  $a$ , 定义  $\lambda$  与  $a$  的乘积为一矢量, 记作  $\lambda a$ , 其模为  $|\lambda| |a|$ ; 当  $\lambda > 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  同向; 当  $\lambda < 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  反向; 当  $\lambda = 0$  时,  $\lambda a = \mathbf{0}$ .

以上定义的运算称为矢量的数乘. 矢量的加法、减法以及数乘运算合称为矢量的线性运算.

容易验证, 矢量数乘满足如下性质:

(iv) 结合律:  $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a)$ .

(v) 分配律:  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ ;  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ .

(vi)  $1a = a$ ;  $(-1)a = -a$ ;  $0a = \mathbf{0}$ .

分配律  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$  的正确性可由图 8-11 看出.

任给非零矢量  $a$ , 记  $a^0$  (或  $e_a$ ) 为与  $a$  同向的单位矢量, 显然有

$$a = |a|a^0 \quad \text{或} \quad a^0 = a/|a|. \quad (2)$$

公式  $a = |a|a^0$  的意义很重要, 因为它同时表示了矢量  $a$  的两个要素: 模和方向.

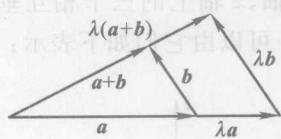


图 8-11

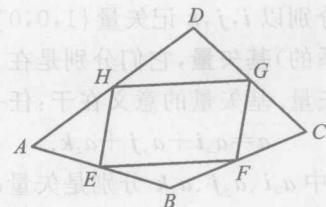


图 8-12

矢量的线性运算可用来解某些几何问题, 试看一个简单例子.

**例 1** 设  $ABCD$  是一空间四边形, 四边中点依次为  $E, F, G, H$  (图 8-12), 证明四边形  $EFGH$  为平行四边形.

**证** 为了证明边  $EF$  与  $HG$  平行且相等, 这相当于证  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ . 由定义 3 及题设条件有

$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

于是

同理  $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ , 因此  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ , 同理可证  $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ . 所以四边形  $EFGH$  为平行四边形.

### 8.2.3 矢量的坐标

前面已经指出, 在空间坐标系  $Oxyz$  中, 每个矢量  $a$  均有唯一确定的点  $M$  与之对应, 使得  $a = \overrightarrow{OM}$ . 为了更好地描写矢量, 我们将点的坐标规定为矢量的坐标. 准确说来就是:

**定义 4** 任给点  $M(x, y, z)$ , 设  $a = \overrightarrow{OM}$ , 则称  $x, y, z$  为矢量  $a$  (对给定坐标系) 的坐标, 记作  $a = \{x, y, z\}$ .

为了方便起见, 对任给矢量  $a$ , 有时将定义 4 中的  $x, y, z$  分别记成  $a_x, a_y, a_z$ . 于是有坐标表示式

$$a = \{a_x, a_y, a_z\}. \quad (3)$$

分别以  $i, j, k$  记矢量  $\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}$ , 并称之为(给定坐标系的)基矢量, 它们分别是在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上的三个相互垂直的单位矢量. 基矢量的意义在于: 任一矢量  $a$  可以由它们如下表示:

$$a = a_x i + a_y j + a_z k. \quad (4)$$

式(4)中  $a_x i, a_y j, a_z k$  分别是矢量  $a$  在  $x, y, z$  轴上的分矢量, 图 8-13 说明了式(4)的几何意义.

利用分解式(4)及矢量线性运算的性质(i)~(vi), 容易得出矢量线性运算的以下坐标表示式:

$$a \pm b = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\},$$

$$\lambda a = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}. \quad (5)$$

公式(5)表明, 矢量的线性运算归结为其坐标的相应运算.

**例 2** 给定点  $A(x_1, y_1, z_1)$  与  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 求矢量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标.

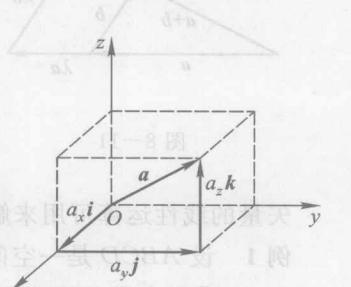


图 8-13

解 首先注意  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ , 然后用公式(5)得

$$\vec{AB} = \{x_2, y_2, z_2\} - \{x_1, y_1, z_1\} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

例 3 设  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$

为已知两点, 线段  $AB$  上的点  $C$  将  $AB$  分成有定比  $AC/CB = \lambda (\lambda \neq -1)$  的两段, 求点  $C$  的坐标.

解 由定义 4, 只需求矢量  $\vec{OC}$  的坐标.

因为  $\vec{AC}$  与  $\vec{CB}$  在一直线上 (图 8-14), 所以

由题设有

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= \lambda \vec{CB}, \\ \vec{AB} &= \vec{AC} + \vec{CB} = \lambda \vec{CB} + \vec{CB} = (1+\lambda) \vec{CB}.\end{aligned}$$

另一方面,  $\vec{OC} = \vec{OB} - \vec{CB}$ , 于是

$$\begin{aligned}\vec{OC} &= \vec{OB} - \frac{1}{1+\lambda} \vec{AB} \\ &= \{x_2, y_2, z_2\} - \left\{ \frac{x_2 - x_1}{1+\lambda}, \frac{y_2 - y_1}{1+\lambda}, \frac{z_2 - z_1}{1+\lambda} \right\} \\ &= \left\{ \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \right\},\end{aligned}$$

所以点  $C$  的坐标为  $(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda})$ , 这就是定比分点

公式.

利用数乘与矢量的坐标, 可对“共线”这一几何关系给出一种代数刻画.

定理 1 设  $a, b$  是两个非零矢量, 则  $a$  与  $b$  共线  $\Leftrightarrow$  存在实数  $\lambda$  使

$$a = \lambda b \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

证 若  $a$  与  $b$  共线, 则  $a^{\circ} = \pm b^{\circ}$  (同向时取正号, 反向时取负号), 于是由式(2)有

$$a = |a| a^{\circ} = \pm |a| b^{\circ} = \pm (|a| / |b|) b = \lambda b,$$

其中  $\lambda = \pm (|a| / |b|)$ . 反之, 若  $a = \lambda b$ , 则直接由定义 3 看出  $a$  与  $b$  共线. 其次, 借助于公式(5)易见  $a = \lambda b \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$ .  $\square$

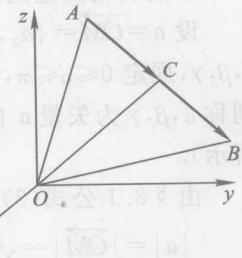


图 8-14

### 8.2.4 矢量的方向余弦

下面利用矢量的坐标来表示矢量的模与方向.

设  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM} = \{a_x, a_y, a_z\}$ , 矢量  $\mathbf{a}$  与三坐标轴正向的夹角分别设为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 规定  $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \gamma \leq \pi$ , 则称  $\alpha, \beta, \gamma$  为矢量  $\mathbf{a}$  的方向角(图 8-15 所示).

由 § 8.1 公式(2)得矢量  $\mathbf{a}$  的模为

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (6)$$

因为矢量的坐标就是矢量在坐标轴上的投影, 所以

$$\begin{aligned} a_x &= |\mathbf{a}| \cos \alpha, \quad a_y = |\mathbf{a}| \cos \beta, \\ a_z &= |\mathbf{a}| \cos \gamma \end{aligned}$$

于是得到:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} \quad (7)$$

以及与单位矢量  $\mathbf{a}^0$  的关系式

$$\mathbf{a}^0 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}| = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} \quad (8)$$

和性质:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (9)$$

我们称  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为矢量  $\mathbf{a}$  的方向余弦.

称任一组与  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  成比例的数  $l, m, n$  为矢量  $\mathbf{a}$  的方向数. 由定理 1,  $l, m, n$  是  $\mathbf{a}$  的方向数  $\Leftrightarrow$  矢量  $\{l, m, n\}$  非零且与  $\mathbf{a}$  共线.

**例 4** 给定点  $A(2, 1, 1), B(1, 3, 0)$ , 求  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  的模、方向余弦与  $\mathbf{a}^0$ .

解 首先, 如同例 2 一样得出

$$\mathbf{a} = \{1-2, 3-1, 0-1\} = \{-1, 2, -1\}.$$

然后分别用公式(6), (7), (8)算得

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6};$$

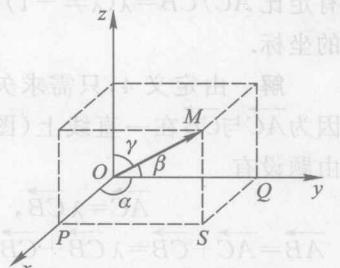


图 8-15

$$\mathbf{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \{-1, 2, -1\};$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{6}}, \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

## 习题 8.2

1. 设  $M$  是平行四边形  $ABCD$  两对角线的交点, 用  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  和  $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$  表示矢量  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$ .
2. 给定点  $M_1(1, -3, 3), M_2(4, 2, -1)$ , 求  $|\overrightarrow{M_1M_2}|, \overrightarrow{M_1M_2}$  的方向余弦及与  $\overrightarrow{M_1M_2}$  同方向的单位矢量.
3. 已知矢量  $\mathbf{a}$  与  $x$  轴、 $y$  轴正向的夹角分别为  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ , 且  $|\mathbf{a}| = 6$ , 求矢量  $\mathbf{a}$ .
4. 设  $\overrightarrow{M_1M_2} = 8\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ , 点  $M_1$  的坐标为  $(2, -1, 7)$ , 求点  $M_2$  的坐标.
5. 求各坐标平面分点  $A(2, -1, 7)$  和  $B(4, 5, -2)$  之间的线段之比, 并求其分点的坐标.
6. 给定  $\mathbf{F}_1 = \{1, 2, 3\}, \mathbf{F}_2 = \{-2, 3, -4\}, \mathbf{F}_3 = \{3, -4, 5\}$ . 三力同时作用于一点, 求合力的大小和方向余弦.

## § 8.3 矢量间的积

任给矢量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$ , 可定义数量积  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  与矢量积  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , 二者源于不同的物理问题. 本节给出这两种乘积的定义和运算性质, 推导出在坐标系中  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  与  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  的计算公式. 下面以  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  记矢量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  之间的夹角, 约定  $0 \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq \pi$ . 若  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  或  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , 则可认为  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  是任意的.

### 8.3.1 数量积

力学中有如下熟知的事实: 若物体在常力  $\mathbf{F}$  作用下从点  $A$  移动到点  $B$ , 则力  $\mathbf{F}$  所作的功  $W$  为:

$$W = |\mathbf{F}| |\overrightarrow{AB}| \cos \theta. \quad (1)$$

其中  $\theta$  为  $\vec{F}$  与  $\vec{AB}$  的夹角(见图 8-16). 类似于(1)的算式还出现于许多其他科学问题中,因此抽象成如下一般概念.

**定义 1** 任给矢量  $a, b$ , 称  $|a||b|\cos\langle a, b \rangle$  为矢量  $a$  与  $b$  的数量积(也称为内积或点积),记作  $a \cdot b$ ,即

$$a \cdot b = |a||b|\cos\langle a, b \rangle. \quad (2)$$

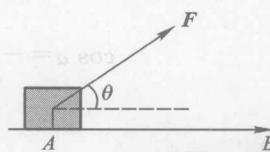


图 8-16

利用定义 1,现在可将式(1)缩写为  $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ .

利用式(2),不难验证数量积有如下性质:

(i) 交换律:  $a \cdot b = b \cdot a$ .

(ii) 结合律:  $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = (\lambda b) \cdot a$ .

(iii) 分配律:  $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

(iv)  $a^2 = |a|^2$  (通常记  $a^2 = a \cdot a$ ).

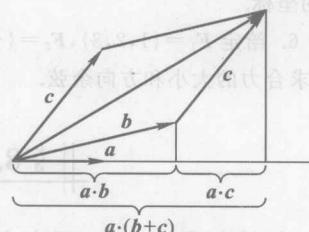
(v)  $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$ , 即  $a$  与  $b$  垂直(约定零矢量与任何矢量垂直).

图 8-17 说明了分配律的正确性,

其中已假定  $|a|=1$ (这并不失一般性,否则用  $\lambda a^\circ$  代替  $a, \lambda=\pm|a|, a=0$  的情况不必验证).

由性质(iv)和(v)得出

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1,$$



利用式(3)、性质(i)~(iii)以及上节公式(4),容易得到数量积的如下坐标公式:

$$(a \cdot b) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (4)$$

若  $a \cdot b \neq 0$ , 则由式(2)有  $\cos\langle a, b \rangle = (a \cdot b) / |a||b|$ ;由此结合式(4)得出

$$\cos\langle a, b \rangle = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (5)$$

公式(5)常用来计算矢量间的夹角.

(1) **例 1** 给定点  $A(1,1,1), B(2,2,1)$  与  $C(2,1,2)$ ,求  $\theta = \angle BAC$ .

解 因为  $\vec{AB} = \{1, 1, 0\}$ ,  $\vec{AC} = \{1, 0, 1\}$ , 于是由公式(5)有

$$\cos \theta = \frac{1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1}{\sqrt{(1^2 + 1^2 + 0^2)(1^2 + 0^2 + 1^2)}} = \frac{1}{2},$$

因此  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

例 2 设  $\mathbf{u} = 3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ ,  $|\mathbf{a}| = 2$ ,  $|\mathbf{b}| = 3$ ,  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$ , 求以  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  为相邻边的平行四边形的周长  $l$ .

解 显然周长  $l = 2(|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)$ . 依性质(i)~(iv) 有

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|^2 &= (3\mathbf{a} - 4\mathbf{b})^2 = 9\mathbf{a}^2 - 24\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 16\mathbf{b}^2 \\ &= 9 \times 4 - 24 \times 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} + 16 \times 9 = 108, \end{aligned}$$

故得  $|\mathbf{u}| = 6\sqrt{3}$ . 类似地算出  $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{13}$ . 于是  $l = 12\sqrt{3} + 4\sqrt{13}$ .

例 3 设在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BCA = \theta$ ,  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$ ,  $|AB| = c$ , 证明

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \quad (\text{余弦定理}).$$

证 因为  $a = |\vec{BC}|$ ,  $b = |\vec{AC}|$ ,  $c = |\vec{AB}|$ , 所以

$$\begin{aligned} c^2 &= \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (\vec{CB} - \vec{CA})^2 \\ &= |\vec{CB}|^2 + |\vec{CA}|^2 - 2\vec{CB} \cdot \vec{CA} \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta. \end{aligned}$$

### 8.3.2 矢量积

考虑如下力学问题: 设一物体以角速度  $\omega$  绕  $\mathbf{u}$  轴逆时针方向旋转, 要求物体上一点  $M$  的线速度  $\mathbf{v}$  (图 8-18).

首先, 我们来定义角速度矢量  $\boldsymbol{\omega}$ :  $|\boldsymbol{\omega}| = \omega$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  的方向用右手法则确定(当右手握拳的方向是点  $M$  的旋转方向, 则右手大拇指的指向是  $\boldsymbol{\omega}$  的方向). 在  $\mathbf{u}$  轴上取一点  $O$ , 作矢量  $\vec{OM}$ , 则  $\mathbf{v}$  的大小  $|\mathbf{v}| = \omega |\mathbf{AM}| = |\boldsymbol{\omega}| |\vec{OM}| \sin \theta$ , 其中  $\theta = \langle \boldsymbol{\omega}, \vec{OM} \rangle$ , 又  $\mathbf{v}$  同时垂直于  $\boldsymbol{\omega}$  与  $\vec{OM}$ , 且  $\boldsymbol{\omega}$ 、 $\vec{OM}$ 、 $\mathbf{v}$  构成右手系(当右手握拳的方向是从  $\boldsymbol{\omega}$  的方向到  $\vec{OM}$  的方向时, 右手大拇指的指向是  $\mathbf{v}$  的方向). 这样, 矢量  $\mathbf{v}$  完全由矢量  $\boldsymbol{\omega}$ 、 $\vec{OM}$  决定. 由两个已知矢量构成第三个矢量的如上方法具有普遍意义. 因此有必要

要抽象成一种运算.由量 $\gamma(1,0,1)=\overrightarrow{OA}$ ;  $(0,1,1)=\overrightarrow{OB}$ 式因 算

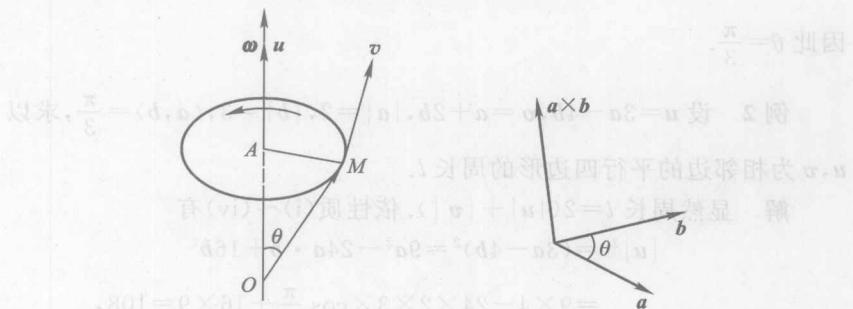


图 8-18

图 8-19

**定义 2** 任给矢量  $a, b$ , 依如下方式确定一矢量  $c$ :  $|c| = |a| |b| \sin \langle a, b \rangle$ ;  $c$  同时垂直于  $a, b$ , 且当  $a, b$  不共线时  $a, b, c$  构成右手系. 称如上的矢量  $c$  为矢量  $a, b$  的矢量积(也称为外积或叉积), 记作  $a \times b$  (图 8-19).

依定义 2, 对矢量积的模有公式

$$|a \times b| = |a| |b| \sin \langle a, b \rangle. \quad (6)$$

利用定义 2, 现在可将前面旋转问题中的速度  $v$  表成  $\omega \times \overrightarrow{OM}$ . 值得注意的是,  $v$  与  $\omega, \overrightarrow{OM}$  的关系似乎颇为复杂, 但引入矢量积之后, 就获得了很简单的表达式  $v = \omega \times \overrightarrow{OM}$ !

由定义 2 可验证矢量积有如下性质:

- (i) 反交换律:  $a \times b = -b \times a$ .
  - (ii) 结合律:  $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$ .
  - (iii) 分配律:  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ .
  - (iv)  $a \times b = 0 \Leftrightarrow a$  与  $b$  共线; 特别地,  $a \times a = 0$ .
  - (v)  $|a \times b| = S(a$  与  $b$  构成的平行四边形的面积).
- 直接由定义得出(注意与式(3)对照!)  $i \times i = j \times j = k \times k = 0$ ,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}. \quad (7)$$

利用式(7)和性质(i)~(iii),若

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k},$$

则

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\&= a_x b_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_x b_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_x b_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\&\quad + a_y b_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_y b_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_y b_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\&\quad + a_z b_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_z b_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_z b_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k},\end{aligned}$$

即矢量积的坐标表示式为:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \{a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x\}.$$

为了便于记忆,将上式改写成行列式形式:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\},$$

或

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (8)$$

**例 4**  $\mathbf{a} = \{1, -3, 2\}, \mathbf{b} = \{2, -1, 3\}$ , 求同时垂直于  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的单位矢量.

**解** 由定义 2 知, 所求的矢量为  $\pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0$ . 由公式(8)有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

于是  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{75}$ , 从而  $\pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 = \pm \frac{1}{\sqrt{75}}(-7\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k})$ .

**例 5** 给定点  $A(1, 2, 3), B(2, -1, 5)$  与  $C(3, 2, -5)$ , 求  $\triangle ABC$  的面积  $S$ .

**解** 由性质(v)得

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

算出

$$\overrightarrow{AB} = \{1, -3, 2\}, \overrightarrow{AC} = \{2, 0, -8\}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \{24, 12, 6\}$$

于是

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{24^2 + 12^2 + 6^2} = 3\sqrt{21}.$$

### 8.3.3 混合积

**定义 3** 对任意矢量  $a, b, c$ , 称  $a \cdot (b \times c)$  为  $a, b, c$  的混合积, 记作  $[abc]$ , 即

$$[abc] = a \cdot (b \times c) \quad (9)$$

可见混合积并非独立的矢量运算, 它不过是数量积与矢量积的“混合”而已. 自然, 混合积的性质与计算公式可由数量积与矢量积的相应结论推演出来. 首先, 结合式(2)与(9)得

$$[abc] = |b \times c| |a| \cos \langle a, b \times c \rangle \quad (10)$$

因为  $|b \times c|$  是以  $b, c$  为邻边的平行四边形的面积, 且易看出  $|a| \cos \langle a, b \times c \rangle$  是以  $a, b, c$  为棱的平行六面体的高(图 8-20), 故式(10)表明混合积的绝对值  $|[abc]|$  是以  $a, b, c$  为棱的平行六面体的体积  $V$ .

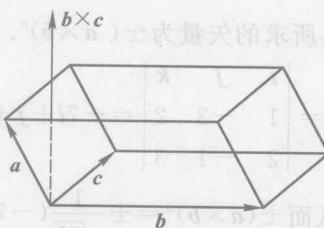


图 8-20

其次, 设  $a = \{a_x, a_y, a_z\}$ ,  $b = \{b_x, b_y, b_z\}$ ,  $c = \{c_x, c_y, c_z\}$ , 由公式(4)与(8)有

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{abc}] &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \{a_x, a_y, a_z\} \cdot \left\{ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right\} \\
 &= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + a_y \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

故得混合积的计算公式:

$$[\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (11)$$

利用公式(10)和(11)容易验证,混合积有如下的性质:

- (i) 轮换性:  $[\mathbf{abc}] = [\mathbf{bca}] = [\mathbf{cab}]$ .
- (ii) 反对称性:  $[\mathbf{abc}] = -[\mathbf{bac}] = -[\mathbf{cba}] = -[\mathbf{acb}]$ .
- (iii)  $[\mathbf{abc}] = 0 \Leftrightarrow$  以  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  为棱的平行六面体的体积  $V$  为零  $\Leftrightarrow$  三条棱落在同一平面上  $\Leftrightarrow$  三矢量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  共面; 特别, 当  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  中任两个共线时  $[\mathbf{abc}] = 0$ .

**例 6** 求以点  $A(1, 2, 2), B(2, 2, 3), C(3, 1, 5)$  与  $D(5, 5, 2)$  为顶点的四面体的体积  $V$ .

解 首先指出  $V = \frac{1}{6} [\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}]$ . 因  $\overrightarrow{AB} = \{1, 0, 1\}, \overrightarrow{AC} = \{2, -1, 3\}, \overrightarrow{AD} = \{4, 3, 0\}$ , 故

$$[\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\text{于是 } V = \frac{1}{6}.$$

**例 7** 求四点  $A_i(x_i, y_i, z_i)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 共面的条件.

解 四点  $A_1, A_2, A_3, A_4$  共面  $\Leftrightarrow$  三矢量  $\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3}, \overrightarrow{A_1 A_4}$  共面  $\Leftrightarrow$   $[\overrightarrow{A_1 A_2} \overrightarrow{A_1 A_3} \overrightarrow{A_1 A_4}] = 0$ . 于是由公式(11)得出, 四点  $A_1, A_2, A_3, A_4$  共

面的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$



## 习题 8.3

1. 设  $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{v} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ , 求  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  和  $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .
2. 已知  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 20\mathbf{i} - 29\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$ , 证明这三个矢量两两互相垂直.
3. 已知  $\mathbf{a} = \{3, 2, -1\}$ ,  $\mathbf{b} = \{1, -1, 2\}$ , 求  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  与  $(5\mathbf{a}) \cdot (3\mathbf{b})$ .
4. 设有一质点开始位于点  $A(1, 2, -1)$  处, 今有一方向角分别为  $60^\circ, 60^\circ, 45^\circ$  且大小为  $100 \text{ N}$  的力  $\mathbf{F}$  作用于此质点, 质点自点  $A$  作直线运动至点  $B(2, 5, -1+3\sqrt{2})$ , 求力  $\mathbf{F}$  所作的功(长度单位是 m).
5. 已知  $|\mathbf{a}| = 3$ ,  $|\mathbf{b}| = 5$ ,  $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$  与  $\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}$  垂直, 求实数  $\lambda$ .
6. 求平行于  $\mathbf{a} = \{2, -1, 2\}$  且满足  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = -18$  的矢量  $\mathbf{x}$ .
7. 证明  $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ , 并由此推出对任何实数  $a_1, a_2, a_3$  有  $[(a_1 + a_2 + a_3)/3]^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)/3$ .
8. 已知  $\mathbf{a} = \{2, 3, -1\}$ ,  $\mathbf{b} = \{1, 2, 1\}$  求  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  和  $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ .
9. 已知  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ , 求同时垂直于  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的单位矢量.
10. 求一单位矢量, 使它同时垂直于  $x$  轴和  $\mathbf{a} = \{3, 6, 8\}$ .
11. 求顶点位于  $A(-2, 3, 1)$ ,  $B(1, -3, 4)$ ,  $C(1, 2, 1)$  的三角形之面积.
12. 已知  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{d}$ . 证明  $\mathbf{a} - \mathbf{d}$  与  $\mathbf{b} - \mathbf{c}$  共线.
13. 已知矢量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  满足条件  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , 证明  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ .
14. 证明  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})$ .
15. 已知  $\mathbf{a} = \{3, 4, 2\}$ ,  $\mathbf{b} = \{3, 5, -1\}$ ,  $\mathbf{c} = \{2, 3, 5\}$ , 求  $[\mathbf{abc}]$ .
16. 证明三矢量  $\mathbf{u} = \{2, -4, 5\}$ ,  $\mathbf{v} = \{2, 6, 4\}$ ,  $\mathbf{w} = \{1, 13, 1\}$  在同一平面上, 并将  $\mathbf{w}$  分解成平行于  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$  的矢量之和.
17. 给定四点  $A(-1, 2, 4)$ ,  $B(6, 3, 2)$ ,  $C(1, 4, -1)$  和  $D(-1, -2, 3)$ , 求四面体  $ABCD$  的体积.
18. 三矢量  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$  满足  $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = \mathbf{0}$  且  $O, B, C$  不

共线. 求证:(1)  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$  共面;(2)  $A, B, C$  共线.

## § 8.4 平面与直线

本节以矢量为工具, 在空间直角坐标系中讨论平面与直线的基本几何性质.

### 8.4.1 平面方程

给定平面  $\pi$ , 设  $M(x, y, z)$  是  $\pi$  上的动点. 则  $\pi$  可用关于坐标  $x, y, z$  的线性方程表示. 依给定的条件不同, 平面方程取不同的形式, 现分述如下.

#### 一、点法式方程

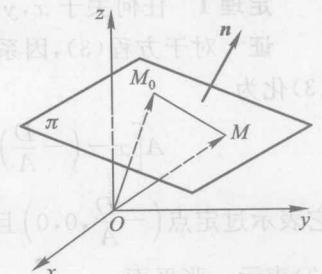
设  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  是给定平面  $\pi$  上的已知点, 非零矢量  $n = \{A, B, C\}$  垂直于平面  $\pi$ , 称  $n$  为平面  $\pi$  的法矢量或简称法矢. 平面  $\pi$  由点  $M_0$  和法矢量  $n$  唯一确定(图 8-21). 下面建立平面  $\pi$  的方程.

设  $M(x, y, z)$  是空间的一动点, 则动点  $M$  在平面上的充分必要条件是  $\overrightarrow{M_0M}$  与  $n$  垂直, 即

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot n = 0. \quad (1)$$

由于  $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ ,  $n = \{A, B, C\}$ , 故有

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$



式(1)或(2)就是平面  $\pi$  的方程. 称式(1)

图 8-21

为平面  $\pi$  的矢量方程, 而称式(2)为平面  $\pi$  的点法式方程(矢量方程的分量方程).

**例 1** 设平面  $\pi$  过点  $M(1, 1, 1)$  与  $N(0, 1, -1)$ , 且垂直于平面  $x+y+z=0$ , 求  $\pi$  的方程.

解 平面  $x+y+z=0$  的法矢量为  $n_1 = \{1, 1, 1\}$ , 平面  $\pi$  的法矢量

$n$  应同时垂直于  $n_1$  与  $\overrightarrow{MN}$ , 故可取

$$n = n_1 \times \overrightarrow{MN} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2i + j + k.$$

由式(2), 知  $\pi$  的方程为

$$-2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

或

$$2x - y - z = 0.$$

## 二、一般式方程

将式(2)改写为

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0.$$

令  $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ , 则式(2)化为

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (3)$$

这里系数  $A, B, C$  不同时为零. 这表明, 平面方程为  $x, y, z$  的三元一次方程. 反之也成立, 这便是下面的定理.

**定理 1** 任何关于  $x, y, z$  的三元一次方程(3)都表示一张平面.

**证** 对于方程(3), 因系数  $A, B, C$  不同时为零, 不妨设  $A \neq 0$ , 则式(3)化为

$$A\left[x - \left(-\frac{D}{A}\right)\right] + B(y-0) + C(z-0) = 0,$$

它表示过定点  $(-\frac{D}{A}, 0, 0)$  且法矢量为  $n = \{A, B, C\} \neq 0$  的平面. 即式(3)表示一张平面.  $\square$

称方程(3)为平面的一般方程, 这里要求系数  $A, B, C$  不同时为零.

容易看出, 平面(3)过原点  $\Leftrightarrow D=0$ ; 平面(3)平行于  $xy$  平面  $\Leftrightarrow A=B=0$ ; 平面(3)平行于  $x$  轴  $\Leftrightarrow A=0$ ; 平面(3)过  $x$  轴  $\Leftrightarrow A=D=0$ , 其余类推.

**例 2** 求过点  $(4, -3, -1)$  且过  $x$  轴的平面  $\pi$  的方程.

**解** 所求平面方程必有形式  $By + Cz = 0, B^2 + C^2 \neq 0$ . 以  $y = -3$ ,

$z = -1$  代入得  $C = -3B$ . 取  $B = 1$ , 则  $C = -3$ , 于是  $\pi$  的方程为  $y - 3z = 0$ .

### 三、截距式方程

设平面  $\pi$  过点  $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$  (图 8-22), 其中  $abc \neq 0$ . 由式(3)知平面  $\pi$  的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

由于点  $A, B, C$  都在平面  $\pi$  上, 所以  $A, B, C$  的坐标都满足上面方程, 即有

$$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$$

可得  $A = -\frac{D}{a}, B = -\frac{D}{b}, C = -\frac{D}{c}$ .

以此代入平面  $\pi$  的方程并除以  $D$  ( $D \neq 0$ ), 即得平面  $\pi$  的方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (4)$$

式(4)称为平面  $\pi$  的截距式方程, 其中  $a, b, c$  是平面  $\pi$  在三坐标轴上的“截距”.

### 8.4.2 直线方程

给定直线  $L$ , 设  $M(x, y, z)$  是  $L$  上的动点, 则  $L$  可用关于坐标  $x, y, z$  的线性方程组表示. 依给定的条件不同, 直线方程取不同的形式, 现分述如下.

#### 一、一般式方程

空间直线  $L$  可以看作是过直线  $L$  且不平行的两个平面  $\pi_1$  和  $\pi_2$  的交线. 设平面  $\pi_i$  ( $i=1, 2$ ) 的方程为

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \quad (i=1, 2),$$

由于  $\pi_1$  与  $\pi_2$  不平行, 即  $\{A_1, B_1, C_1\} \times \{A_2, B_2, C_2\} \neq 0$ , 则点  $M(x, y, z)$  在直线  $L$  上的充分必要条件是  $(x, y, z)$  满足方程组

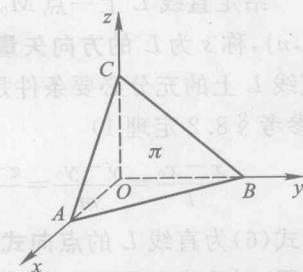


图 8-22

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

称式(5)为直线  $L$  的一般式方程.

## 二、点向式方程

给定直线  $L$  上一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  及平行于  $L$  的非零矢量  $s = \{l, m, n\}$ , 称  $s$  为  $L$  的方向矢量或简称为方向矢. 容易看出,  $M(x, y, z)$  在直线  $L$  上的充分必要条件是矢量  $\overrightarrow{M_0M}$  与  $s$  共线(图 8-23), 这相当于(参考 § 8.2 定理 1)

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \quad (6)$$

称式(6)为直线  $L$  的点向式方程(或标准方程、对称式方程). 注意, 若  $l=0$ , 则应以“ $x=x_0, (y-y_0)/m=(z-z_0)/n$ ”代替式(6); 若  $l=m=0$  时, 则应以“ $x=x_0, y=y_0$ ”代替式(6), 其他类似.

若给定直线上两相异点  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  ( $i=1, 2$ ), 则  $s=\overrightarrow{M_1M_2}$  是  $L$  的方向矢. 于是, 套用式(6)立即可得  $L$  的方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

## 三、参数方程

直线  $L$  的方程(6)还可用下列形式表示: 如设

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t,$$

则有

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (7)$$

因式(7)含有参数  $t$ , 故也称它为直线  $L$  的参数方程. 记  $r = \overrightarrow{OM}, r_0 = \overrightarrow{OM_0}$ , 由于  $\overrightarrow{M_0M}$  与  $s$  共线  $\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel s \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = ts$  故

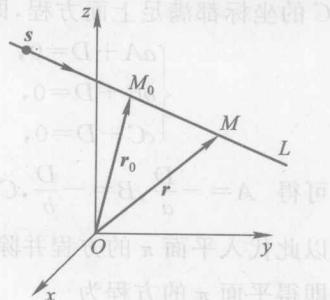


图 8-23

有

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = ts \quad \text{或} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + ts \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (8)$$

称式(8)为直线  $L$  的矢量方程. 直线  $L$  的参数方程(7)不过是直线  $L$  矢量方程(8)的坐标形式而已.

将方程(6)~(8)化为一般方程是容易的. 下面是将一般方程化为其他形式方程的例子.

例 3 求直线  $\begin{cases} 16x - 2y - z + 5 = 0, \\ 20x + y - 3z + 15 = 0 \end{cases}$  的标准方程与参数方程.

解 I 解关于  $y, z$  的线性方程组

$$\begin{cases} 2y + z = 16x + 5, \\ -y + 3z = 20x + 15, \end{cases}$$

得  $y = 4x, z = 8x + 5$ , 这相当于  $x = \frac{y}{4}, x = \frac{z - 5}{8}$ , 即

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z - 5}{8},$$

它就是所给直线的标准方程. 相应的参数方程为

$$x = t, y = 4t, z = 5 + 8t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

解 II 以  $x = 0$  代入所给方程组, 解出  $y = 0, z = 5$ , 可见点  $(0, 0, 5)$  在直线上. 平面  $16x - 2y - z + 5 = 0$  与  $20x + y - 3z + 15 = 0$  的法矢量分别为  $\mathbf{n}_1 = \{16, -2, -1\}$  与  $\mathbf{n}_2 = \{20, 1, -3\}$ . 算出

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \{7, 28, 56\} = 7\{1, 4, 8\},$$

则  $s = \{1, 4, 8\}$  是直线的方向矢. 于是套用式(6)和(7)同样得出所要的标准方程为  $\frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z - 5}{8}$ , 参数方程为  $x = t, y = 4t, z = 5 + 8t \quad (-\infty < t < +\infty)$ .

### 8.4.3 关于平面与直线的基本问题

#### 一、距离问题

##### 1. 平面外一点到该平面的距离

设平面  $\pi$  的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$  是平面  $\pi$  外一点 (如图 8-24), 从  $P_1$  向平面  $\pi$  引垂线, 设垂足是  $P$ , 则  $|\overrightarrow{PP_1}|$  即为  $P_1$  到平面  $\pi$  的距离  $d$ .

在平面  $\pi$  上任取一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , 则有

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

记平面  $\pi$  的法矢量为  $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ , 它与矢量  $\overrightarrow{P_0 P_1}$  的夹角为  $\theta$ , 则

$$d = |\overrightarrow{P_0 P_1}| \cos \theta.$$

又

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0 P_1} = |\mathbf{n}| |\overrightarrow{P_0 P_1}| \cos \theta,$$

故

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{P_0 P_1}| \cos \theta &= \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0 P_1}|}{|\mathbf{n}|} \\ &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned}$$

所以

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (9)$$

例 4 在  $y$  轴上求一点, 使它到平面  $x - 2y - 2z - 2 = 0$  的距离为 6.

解 设所求点为  $(0, y_0, 0)$ , 由点到平面的距离公式得

$$\frac{|-2y_0 - 2|}{\sqrt{1+4+4}} = 6,$$

即

$$|-2y_0 - 2| = 6\sqrt{6},$$

故

$$y_0 = -10 \quad \text{或} \quad y_0 = 8,$$

因此所求点为  $(0, -10, 0)$  或  $(0, 8, 0)$ .

## 2. 直线外一点到该直线的距离

设直线  $L$  的方程为

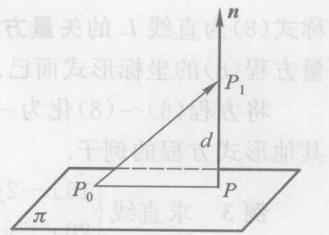


图 8-24

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$  是直线  $L$  外一点 (如图 8-25),  
求点  $P_1$  到直线  $L$  的距离  $d$ .

直线  $L$  的方向矢量  $s = \{l, m, n\}$ , 则

$$d = |\overrightarrow{P_0 P_1}| \sin \varphi,$$

而

$$|\overrightarrow{P_0 P_1} \times s| = |\overrightarrow{P_0 P_1}| |s| \sin \varphi,$$

故

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0 P_1} \times s|}{|s|}. \quad (10)$$

这里  $\overrightarrow{P_0 P_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$ ,  $s = \{l, m, n\}$ .

例 5 求点  $P(1, 2, 3)$  到直线  $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}$  的距离  $d$ .

解 在直线  $L$  上取一点  $P_0(0, 4, 3)$ , 则  $\overrightarrow{P_0 P} = \{1-0, 2-4, 3-3\} = \{1, -2, 0\}$ , 直线的方向矢量  $s = \{1, -3, -2\}$ , 则

$$(1) \quad \overrightarrow{P_0 P} \times s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4i + 2j - k,$$

$$(2) \quad |\overrightarrow{P_0 P} \times s| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21},$$

$$(3) \quad |s| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14},$$

所以

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0 P} \times s|}{|s|} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

## 二、两平面的相互关系

两平面的法矢量之间的夹角称为两平面的夹角 (通常取锐角, 如图 8-26 所示).

设平面  $\pi_1$  及  $\pi_2$  的方程分别为

$$\pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$\pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

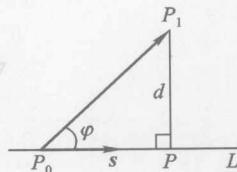


图 8-25

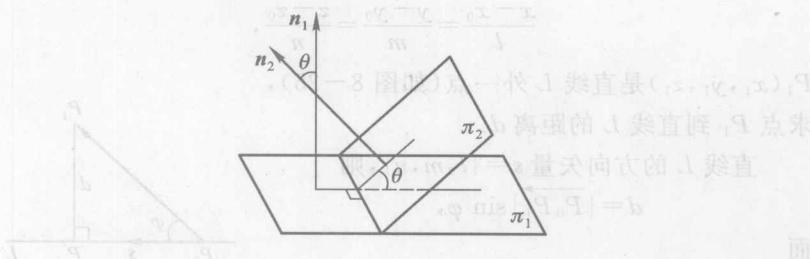


图 8-26

则它们的法矢量分别为

$$\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

于是  $\pi_1$  与  $\pi_2$  两平面的夹角  $\theta$  满足

$$\cos \theta = \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|},$$

即

$$\cos \theta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (11)$$

由此可得：

(1) 两平面相互垂直的充要条件是：

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad \text{即} \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (12)$$

(2) 两平面相互平行的充要条件是：

$$\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \quad \text{即} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (13)$$

**例 6** 求两平面  $2x - y + z - 6 = 0$  和  $x + y + 2z - 5 = 0$  之间的夹角  $\theta$ .

解 由夹角公式(11)有

$$\cos \theta = \frac{2 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{2},$$

所以  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

**例 7** 一平面通过  $x$  轴, 且与  $zx$  坐标面的夹角为  $30^\circ$ , 求此平面的

方程.

解 因为平面通过  $x$  轴, 故可设所求平面的方程为

$$By + Cz = 0.$$

此平面的法矢量为  $\mathbf{n} = \{0, B, C\}$ ,  $zx$  坐标面的法矢量可取为  $\mathbf{j} = \{0, 1, 0\}$ .

由公式(11)得

$$\cos 30^\circ = \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}},$$

化简得

$$B^2 = 3C^2 \Rightarrow B = \pm\sqrt{3}C.$$

代入方程  $By + Cz = 0$  并注意到  $C \neq 0$ , 再消去  $C$  即得所求平面的方程为

$$\sqrt{3}y + z = 0 \quad \text{或} \quad \sqrt{3}y - z = 0.$$

### 三、直线与平面的关系

#### 1. 直线与平面的夹角

当直线  $L$  与平面  $\pi$  不垂直时, 直线  $L$  和它在平面  $\pi$  上的投影直线  $L'$  的夹角  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ) (图 8-27) 称为直线  $L$  与平面  $\pi$  的夹角; 当直线  $L$  与平面  $\pi$  垂直时, 规定直线  $L$  与平面  $\pi$  的夹角为  $\frac{\pi}{2}$ ; 当直线  $L$  与平面  $\pi$  平行时, 规定直线  $L$  与平面  $\pi$  的夹角为  $0$  或  $\pi$ .

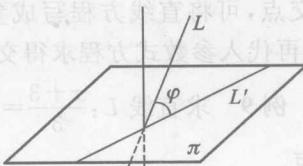
设直线  $L$  的方向矢量  $s = \{l, m, n\}$ ,

图 8-27

平面  $\pi$  的法矢量  $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ , 则直线  $L$  与平面  $\pi$  的夹角  $\varphi = |\frac{\pi}{2} - \langle s, n \rangle|$ , 因此  $\sin \varphi = |\cos \langle s, n \rangle|$ , 故有

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (14)$$

因此有:



$$(1) L \perp \pi \Leftrightarrow \mathbf{s} // \mathbf{n} \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}, \quad (15)$$

$$(2) L // \pi \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0, \text{ 且 } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \quad (16)$$

(3)  $L$  在平面  $\pi$  内  $\Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0$  有  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ , 其中  $(x_0, y_0, z_0) \in L$ .

**例 8** 求直线  $L: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$  与平面  $\pi: 2x + y + z - 6 = 0$  的夹角  $\varphi$ .

解  $L$  的方向矢量  $s = \{1, 1, 2\}$ , 平面  $\pi$  的法矢量  $n = \{2, 1, 1\}$ , 由公式(14)得

$$\sin \varphi = \frac{|1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5}{6},$$

故  $\varphi = \arcsin \frac{5}{6}$ .

## 2. 直线与平面的交点

求直线  $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$  与平面  $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$  的交点, 可将直线方程写成参数式代入平面方程, 求出交点处的参数值, 再代入参数式方程求得交点坐标.

**例 9** 求直线  $L: \frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1}$  与平面  $\pi: x + 2y + 2z + 6 = 0$  的交点.

解 先将直线方程化为参数式

$$\begin{cases} x = -3 + 3t, \\ y = -2 - 2t, \\ z = t, \end{cases}$$

代入平面方程得

$$(-3 + 3t) + 2(-2 - 2t) + 2t + 6 = 0,$$

解得  $t = 1$ , 再代入直线的参数式方程得交点坐标

$$\begin{cases} x = -3 + 3 \times 1 = 0, \\ y = -2 - 2 \times 1 = -4, \\ z = 1, \end{cases}$$

故交点为 $(0, -4, 1)$ .

**四、直线与直线的关系**

设两直线方程是：

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad \text{由 } (x, y) = Q$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

它们分别过两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (图 8-28), 其方向矢量分别为 $s_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ 和 $s_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ .

### 1. 两直线共面的条件

这两直线共面即三矢量 $\overrightarrow{P_1 P_2}, s_1, s_2$ 共面, 充分必要条件是 $\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (s_1 \times s_2) = 0$ , 即

$$(17) \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$2. \text{ 直线 } L_1 // \text{ 直线 } L_2 \Leftrightarrow s_1 // s_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (18)$$

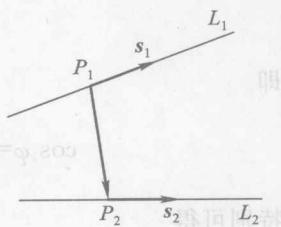


图 8-28

### 例 10 判定两直线

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1} \text{ 和 } \frac{x-9}{16} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{1}$$

是否相交.

解 在两直线上分别取点 $P_1(1, -2, 2)$ 和 $P_2(9, 2, -1)$ , 则 $\overrightarrow{P_1 P_2} = \{8, 4, -3\}$ , 而 $s_1 = \{2, 1, -1\}$ ,  $s_2 = \{6, 3, 1\}$ 分别为两直线的方向矢量, 由

$$\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (s_1 \times s_2) = \begin{vmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

得两直线共面, 又 $\frac{6}{2} = \frac{3}{1} \neq \frac{1}{-1}$ , 所以两直线不平行. 于是此两直线一定相交.

### 3. 两直线的夹角

两直线的夹角可用两直线方向矢量的夹角表示. 设两直线的方向矢量分别为  $s_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$  和  $s_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ , 则两直线的夹角  $\varphi = \langle s_1, s_2 \rangle$ , 由

$$s_1 \cdot s_2 = |s_1| |s_2| \cos \varphi,$$

有

$$\cos \varphi = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1| |s_2|},$$

即

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (19)$$

特别可得

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow s_1 \cdot s_2 = 0 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (20)$$

例 11 求直线  $L_1: \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}$  和直线  $L_2: \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases}$  的

夹角  $\varphi$ .

解 因为平面  $x+2y+z-1=0$  的法矢量  $n_1 = \{1, 2, 1\}$ , 平面  $x-2y+z+1=0$  的法矢量  $n_2 = \{1, -2, 1\}$ , 所以直线  $L_1$  的方向矢量  $s_1 = n_1 \times n_2 = \{4, 0, -4\}$ . 同理可得直线  $L_2$  的方向矢量  $s_2 = \{-3, -3, 0\}$ . 在求夹角时, 可取  $s_1$  的同方向矢量  $\tau_1 = \{1, 0, -1\}$ ,  $s_2$  的同方向矢量  $\tau_2 = \{-1, -1, 0\}$  来代替  $s_1, s_2, \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$  即为  $L_1$  与  $L_2$  的夹角  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \\ &= \frac{1 \times (-1) + 0 \times (-1) + (-1) \times 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ . 要说明的是, 若将  $\tau_1$  反向, 得出的夹角  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  也对.

### 五、平面束方程

设直线  $L$  是两个不平行平面

$$\pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad (21)$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (22)$$

的交线,称通过这两平面交线  $L$  的所有平面为由平面  $\pi_1$  和平面  $\pi_2$  所确定的平面束. 关于平面束我们有如下定理.

**定理 2** 由平面  $\pi_1$  和平面  $\pi_2$  所确定的平面束方程可表示为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (23)$$

其中  $\lambda, \mu$  为不同时为零的常数.

**证** 将(23)式改写为

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2)z + (\lambda D_1 + \mu D_2) = 0, \quad (24)$$

这是一个  $x, y, z$  的三元一次方程. 若

$$\lambda A_1 + \mu A_2 = \lambda B_1 + \mu B_2 = \lambda C_1 + \mu C_2 = 0,$$

由于  $\lambda, \mu$  不同时为零,不妨设  $\mu \neq 0$ ,于是有

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = -\frac{\lambda}{\mu}.$$

这表明平面  $\pi_1$  与平面  $\pi_2$  平行,与条件矛盾. 所以由定理 1 知式(23)表示一张平面.

因为直线  $L$  上任意点  $(x, y, z)$  满足式(21)和(22),所以点  $(x, y, z)$  也满足式(23),故平面(23)属于由平面  $\pi_1$  和平面  $\pi_2$  所确定的平面束.

另外,设  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  是交线  $L$  外一点,则  $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1$  与  $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2$  不能同时为零,故可取不同时为零的常数  $\lambda, \mu$ ,使点  $M_0$  满足

$$\lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + \mu(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0.$$

这表明通过交线  $L$  的任何平面都包括在方程(23)所表示的平面内.  $\square$

式(23)称为双参数平面束方程. 由于  $\lambda$  和  $\mu$  不同时为零,因此平面束也可用如下的单参数平面束方程:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (25)$$

在具体应用时,若依一定的附加条件定出参数  $\lambda$  和  $\mu$ ,就能得到平面束中的一个满足所给条件的平面方程.

**例 12** 求通过直线  $L_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{-1}$  且平行于直线

(88)

$$L_2: \begin{cases} x+2y-2z-16=0 \\ y-2z-10=0 \end{cases}$$

求平面  $\pi$  的方程.

解 将  $L_1$  化为一般式:  $\begin{cases} 5x+y-13=0, \\ x+z-1=0, \end{cases}$  因为平面  $\pi$  过直线  $L_1$ , 故平面  $\pi$  的方程可设为

$$(5x+y-13)+\lambda(x+z-1)=0,$$

其法矢量  $n=\{5+\lambda, 1, \lambda\}$ ,  $\lambda$  是待定常数.

直线  $L_2$  的方向矢量为

$$s_2=\{1, 2, -2\}\times\{0, 1, -2\}=\{-2, 2, 1\},$$

由平面  $\pi \parallel$  直线  $L_2$ , 则有  $n \cdot s_2=0$ , 故得

$$(-2)(5+\lambda)+2\times 1+1\times \lambda=0,$$

由此解得  $\lambda=-8$ , 于是平面  $\pi$  的方程为

$$(5x+y-13)+(-8)(x+z-1)=0,$$

即  $3x-y+8z+5=0$ .



## 习题 8.4

- 求满足下列条件的平面之方程:
  - 平行于平面  $3x-7y+5z-12=0$  且过点  $(4, -7, 1)$ ;
  - 过两点  $A(8, -3, 1)$  与  $B(4, 7, 2)$  且垂直于平面  $3x+5y-7z-21=0$ ;
  - 过三点  $A(7, 6, 7), B(5, 10, 5), C(-1, 8, 9)$ ;
  - 过原点且垂直于两平面  $x-y+z-7=0$  及  $3x-2y-12z+5=0$ ;
  - 与各坐标轴的截距相等且过点  $(6, 2, -4)$ ;
  - 平行于平面  $5x+3y+2z+7=0$  且与各坐标轴的截距的总和为 31;
  - 平面法矢量的方向数为  $6, -2, 3$ , 且原点到此平面的距离为 3.
- 求两平面  $3x+6y-2z-21=0$  和  $3x+6y-2z+35=0$  之间的距离.

3. 在  $x$  轴上求一点, 使这点与两平面  $2x-y+2z-5=0$  和  $x+2y-2z+7=0$  的距离相等.

- 设  $a, b, c$  分别为平面在三坐标轴上的截距,  $d$  为原点与平面之间的距离,

证明  $a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} = d^{-2}$ .

5. 求满足下列条件的直线之方程:

(1) 过点(2,3,4)且垂直于平面  $3x-5y+7z+6=0$ ;

(2) 过点(2,-3,8)且平行于  $z$  轴;

(3) 过原点和点  $(a,b,c)$ ;

(4) 过点(1,2,3)且和  $z$  轴相交, 和直线  $x=y=z$  垂直.

6. 求一点使其与原点关于平面  $6x+2y-9z+121=0$  对称.

(1)

7. 求点  $A(1,2,3)$  到直线  $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x+z=3 \end{cases}$  的距离.

8. 求直线  $\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ 2x+3y-z-7=0 \end{cases}$  的标准方程.

9. 过直线  $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$  作平面  $x+4y-3z+7=0$  的垂直平面, 写出它的方程.

10. 求直线  $\begin{cases} x-y+z+1=0, \\ x-y-z-1=0 \end{cases}$  在平面  $x+y+z=0$  上的投影直线之方程.

11. 写出点  $A(2,3,1)$  到直线  $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$  的垂线之方程.

12. 已知直线  $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-2}$  和  $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{6}$ , 先验证它们相交, 再求由它们所确定的平面之方程.

13. 求满足下列条件的平面之方程:

(1) 过点(2,1,1)且垂直于直线  $\begin{cases} x+2y-z-1=0, \\ 2x+y-z=0; \end{cases}$

(2) 过点(3,1,-2)且直线  $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ ;

(3) 过直线  $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$  且平行于直线  $\frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$ .

14. 求一平面, 使它通过两平面

$$3x+y-z+5=0 \quad \text{与} \quad x-y+z-2=0$$

的交线, 且与平面  $y-z=0$  成  $45^\circ$  角.

面表的(0,8,8)是(1,-8,1), (1,1,-1), (0,0,0)点数来 1 次

## § 8.5 曲面与曲线

### 8.5.1 曲面

关于曲面的严格定义已超过本课本的范围. 设方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

所确定的图形  $S = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = 0\}$  为一个曲面, 则称方程(1)为曲面  $S$  的方程, 通常就说“曲面  $F(x, y, z) = 0$ ”.

关于曲面的两个基本问题是:

I 已知曲面  $S$  是满足给定条件的点的集合, 求其方程.

II 已给曲面方程, 确定其几何形状.

下面讨论几种常见的曲面.

#### 一、球面

到一定点  $M_0(a, b, c)$  的距离恒为常数  $R$  的点组成的集合构成一曲面  $S$ , 它就是以  $M_0$  为球心, 以  $R$  为半径的球面. 点  $M(x, y, z)$  在球面上的充要条件是  $|M_0M| = R$ , 即

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \quad (2)$$

(2) 就是球面  $S$  的方程. 方程(2)可改写为

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0. \quad (3)$$

反之, 给定一个形如(3)的二次方程, 总可以用“配方法”将其化为

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = \rho,$$

其中

$$\rho = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 + C^2) - D.$$

因此, 当  $\rho > 0$  时方程表示一个以  $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2})$  为球心, 以  $\sqrt{\rho}$  为半径的球面.

**例 1** 求过点  $(0, 0, 0), (1, -1, 1), (1, 2, -1)$  与  $(2, 3, 0)$  的球面方程.

解 设所求方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0.$$

将所给四点的坐标代入后得到关于  $A, B, C, D$  的如下方程组：

$$\begin{cases} D = 0, \\ A - B + C + D = -3, \\ A + 2B - C + D = -6, \\ 2A + 3B + D = -13. \end{cases}$$

由此解得

$$A = -\frac{7}{2}, B = -2, C = -\frac{3}{2}, D = 0.$$

于是球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{7}{2}x - 2y - \frac{3}{2}z = 0,$$

或

$$(x - \frac{7}{4})^2 + (y - 1)^2 + (z - \frac{3}{4})^2 = (\frac{\sqrt{74}}{4})^2.$$

## 二、柱面

平行于定直线而沿某定曲线运动的直线所形成的曲面称为柱面，该定曲线称为柱面的准线，动直线的每一位置称为柱面的母线。

设柱面  $S$  的母线平行于  $z$  轴， $S$  的准线  $C$  是  $xy$  平面上的曲线  $F(x, y) = 0$ 。则任一点  $M(x, y, z)$  在柱面  $S$  上的充要条件是： $M$  在  $xy$  平面上的投影  $N(x, y, 0)$  在曲线  $C$  上（图 8-29），而这意味着  $F(x, y) = 0$ ，这就是此柱面  $S$  的方程。

应注意区分对方程  $F(x, y) = 0$  的两种不同理解：限制在  $xy$  平面上， $F(x, y) = 0$  是曲线方程；而在空间中， $F(x, y) = 0$  表示一个柱面。类似地，母线平行于  $x$  轴（或  $y$  轴）的柱面可表示为方程  $F(y, z) = 0$ （或  $F(x, z) = 0$ ）。如方程

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

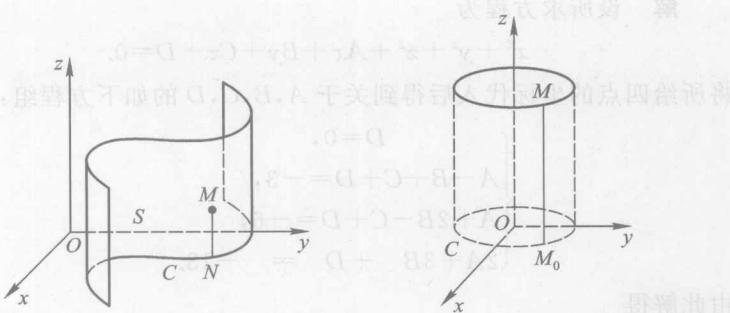


图 8-29

图 8-30

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

$$x^2 = 2py (p > 0)$$

分别表示的柱面称为圆柱面(图 8-30),椭圆柱面(同图 8-30),双曲柱面(图 8-31)和抛物柱面(图 8-32).

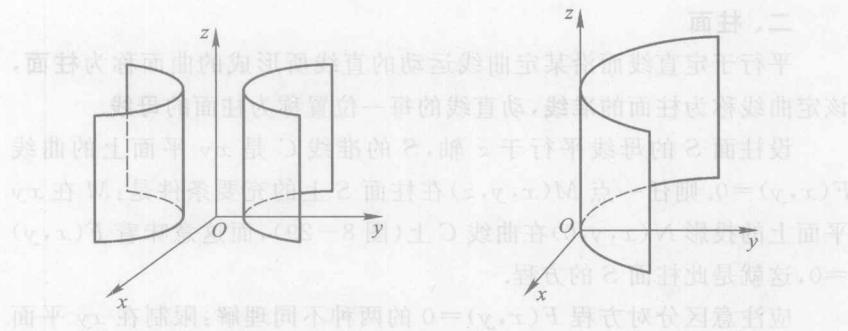


图 8-31

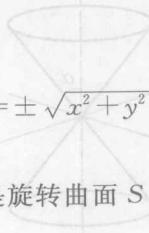
图 8-32

### 三、旋转曲面

平面曲线围绕同一平面内某定直线旋转一周所形成的曲面称为旋转曲面,该定直线称为旋转轴.

设旋转曲面  $S$  由  $yz$  平面上的曲线  $C: F(y, z) = 0$  绕  $z$  轴旋转而成

(图 8-33), 则任一点  $M(x, y, z)$  在旋转曲面  $S$  上的充要条件是:  $C$  上存在一点  $M_0(0, y_0, z_0)$ ,  $M$  在  $M_0$  绕  $z$  轴旋转所形成的圆周上, 而这意味着



以  $y_0 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z_0 = z$  代入  $F(y_0, z_0) = 0$  得

$$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (4)$$

这就是旋转曲面  $S$  的方程.

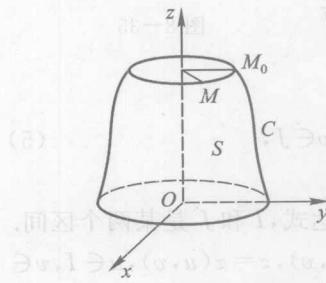


图 8-33

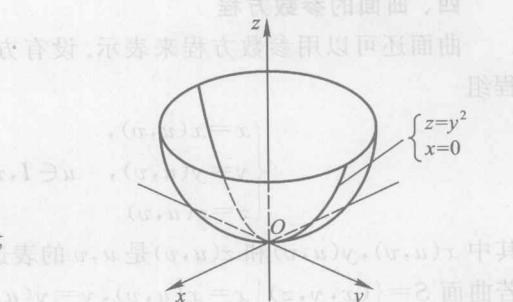


图 8-34

类似地,  $yz$  平面上的曲线  $C: F(y, z) = 0$  绕  $y$  轴旋转而成的旋转曲面  $S$  的方程是  $F(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ ;  $xz$  平面上的曲线  $C: F(x, z) = 0$  绕  $x$  轴(或  $z$  轴)旋转而成的旋转曲面  $S$  的方程是  $F(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ (或  $F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ ); 如此等等.

如  $yz$  平面上的曲线  $C: z = y^2$  绕  $z$  轴旋转而成的旋转曲面(称之为旋转抛物面)  $S$ (图 8-34)的方程是

$$z = x^2 + y^2.$$

特别地, 平面直线  $L$  围绕同一平面内另一条与  $L$  相交的定直线旋转一周所形成的旋转曲面称为圆锥面. 两直线的交点称为圆锥面的顶点, 两直线的夹角  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) 叫做圆锥面的半顶角.

当顶点在原点,旋转轴为 $z$ 轴,半顶角为 $\alpha$ 时(图8-35),由于 $yz$ 平面上直线 $L$ 的方程为 $z=y\tan\alpha$ ,因此,圆锥面的方程为 $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\tan\alpha$ ,或 $z^2=a^2(x^2+y^2)$ ,其中 $a=\tan\alpha$ .

类似地,顶点在原点,旋转轴为 $y$ 轴(或 $x$ 轴),半顶角为 $\alpha$ 的圆锥面方程为 $y^2=a^2(x^2+z^2)$ (或 $x^2=a^2(y^2+z^2)$ ).

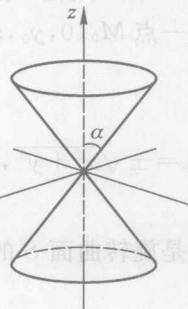


图 8-35

#### 四、曲面的参数方程

曲面还可以用参数方程来表示.设有方程组

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v) \end{cases}, \quad u \in I, v \in J, \quad (5)$$

其中 $x(u,v)$ , $y(u,v)$ 和 $z(u,v)$ 是 $u,v$ 的表达式, $I$ 和 $J$ 是某两个区间.若曲面 $S=\{(x,y,z) | x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v), u \in I, v \in J\}$ ,则称方程(5)为曲面 $S$ 的参数方程.它的矢量方程为:

$$\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k}, \quad u \in I, v \in J. \quad (6)$$

例如,平面 $Ax+By+Cz+D=0(C \neq 0)$ 可用参数方程表示为:

$$x=u, y=v, z=-\frac{A}{C}u-\frac{B}{C}v-\frac{D}{C}.$$

圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}, 0 \leq z \leq 1$ 的矢量方程为:

$$\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+r\mathbf{k}, \quad 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

#### 8.5.2 空间曲线

空间曲线通常由关于曲线上动点坐标的方程组表示.依给定的条件不同,曲线方程取不同的形式.两种主要形式如下.

##### 一、一般式方程

空间曲线 $L$ 可以看作两个曲面的交线.设两曲面的方程是 $F_1(x, y, z)=0$ 和 $F_2(x, y, z)=0$ ,则空间中任一点 $M(x, y, z)$ 在曲线 $L$ 上的

充要条件是:  $(x, y, z)$  满足方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

称式(7)为曲线  $L$  的一般式方程(可与直线的一般式方程对照!). 例如, 方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x, \end{cases}$$

表示圆柱面  $x^2 + y^2 = 1$  与平面  $z = x$  的交线. 注意这同一条曲线也可以表示为方程

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1, \\ z = x. \end{cases}$$

可见, 同一曲线可用不同的方程组表示.

## 二、参数方程

空间曲线  $L$  可以看作质点运动的轨迹. 若动点  $M(x, y, z)$  对时间  $t$  的依赖关系为:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad (8)$$

则方程组(8)完全决定了曲线  $L$  上每点的位置. 一般地, 若曲线  $L$  上动点的坐标  $(x, y, z)$  能表为式(8), 其中  $t$  为参数(不一定表示时间), 则称式(8)为曲线的参数方程. 它的矢量方程为:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in I.$$

(9)

$\mathbf{r}$  是位置矢量(见图 8-36), 这时我们也称  $\mathbf{r}(t)$  为三维矢量值函数或简称为

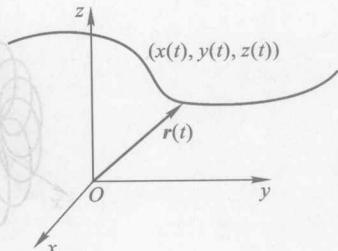


图 8-36

矢量函数. 借助坐标函数, 可以定义矢量函数的极限、连续、导数和积分等, 例如  $\mathbf{r}(t)$  连续即  $x(t), y(t), z(t)$  均连续, 导数公式为  $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$ .

注意,上节中直线的参数方程(7)(或(8))正是此处方程(8)(或(9))的特殊情况.

图8-37,图8-38和图8-39分别展示了由计算机绘图程序生成的三条空间曲线.

$$L_1: \mathbf{r}(t) = (\sin 3t) \mathbf{i} + (\sin t) \mathbf{j} + tk,$$

$$L_2: \mathbf{r}(t) = (\cos t) \mathbf{i} + (\sin t) \mathbf{j} + (\sin 2t) \mathbf{k}$$

$$L_3: \mathbf{r}(t) = (4 + \sin 20t) \mathbf{i} + (4 + \sin 20t) \mathbf{j} + (\cos 20t) \mathbf{k}.$$

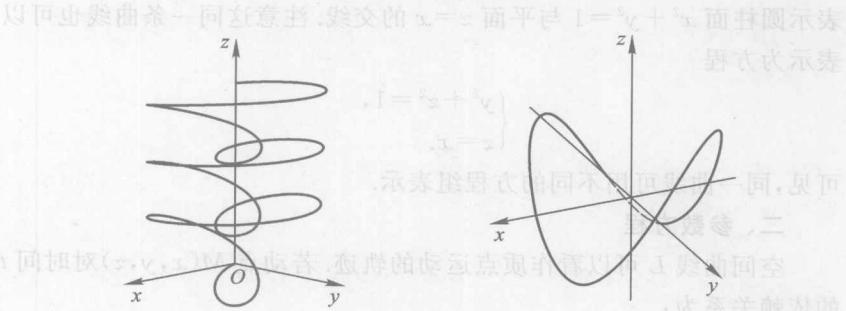


图 8-37

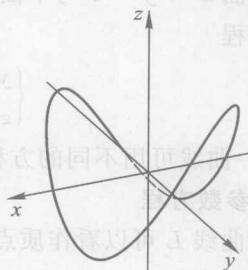


图 8-38

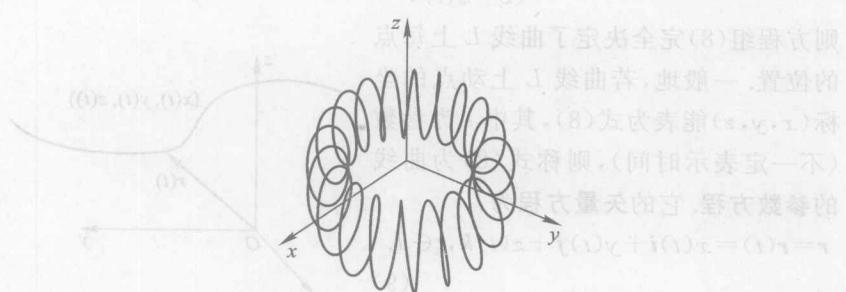


图 8-39

**例 2** 设一质点从  $A(a, 0, 0)$  ( $a > 0$ ) 出发, 沿圆柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  运动, 一方面以常角速度  $\omega$  绕  $z$  轴旋转, 同时以匀速  $b$  沿  $z$  轴正向移动.

求质点的轨迹方程.

解 以  $(x, y, z)$  记动点之坐标, 设  $\theta$  是  $xy$  平面上点  $(x, y)$  的极角, 则  $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, \theta = \omega t, z = bt$ . 于是所求质点轨迹的方程为

$$x = a \cos \omega t, y = a \sin \omega t, z = bt (t \geq 0),$$

或  $\mathbf{r}(t) = (\cos \omega t) \mathbf{i} + (\sin \omega t) \mathbf{j} + (bt) \mathbf{k} (t \geq 0).$

例 2 中的曲线就是经常要用到的圆柱螺旋线(图 8-40).

曲面的平面平分圆柱螺旋线

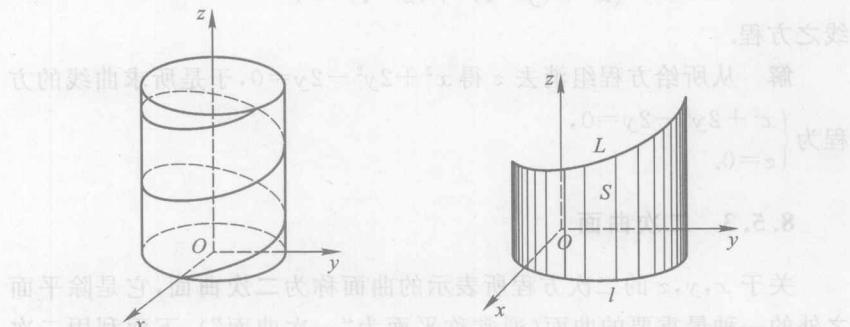


图 8-40

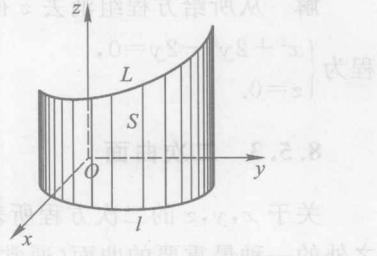


图 8-41

### 三、空间曲线的投影柱面和投影曲线

设  $L$  是一空间曲线.  $L$  上每点  $M(x, y, z)$  在  $xy$  平面上有一投影  $(x, y, 0)$ , 这样的点  $(x, y, 0)$  构成一集合  $l$ , 它通常是在  $xy$  平面上的一条曲线(有时可能退化为一点), 称为  $L$  在  $xy$  平面上的投影曲线(图 8-41).

现过曲线  $L$  作母线平行于  $z$  轴的柱面  $S$ , 称  $S$  为  $L$  对  $xy$  平面的投影柱面, 则投影曲线  $l$  即为投影柱面  $S$  与  $xy$  平面的交线. 设曲线  $L$  的方程为

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

从式(10)消去  $z$  后得方程  $G(x, y) = 0$ , 则

$$\begin{cases} G(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

就是投影曲线  $l$  的方程.

同理, 从式(10)消去  $x$  或  $y$ , 然后与  $x=0$  或  $y=0$  联立, 立即可得曲线  $L$  在  $yz$  平面或  $zx$  平面上的投影曲线的方程:

$$\begin{cases} H(y, z)=0, \\ x=0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} K(z, x)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

例 3 求曲线  $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$  在  $xy$  平面上的投影曲线之方程.

解 从所给方程组消去  $z$  得  $x^2+2y^2-2y=0$ , 于是所求曲线的方程为  $\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0, \\ z=0. \end{cases}$

### 8.5.3 二次曲面

关于  $x, y, z$  的二次方程所表示的曲面称为二次曲面, 它是除平面之外的一种最重要的曲面(通常称平面为“一次曲面”). 下面利用二次曲面的标准方程讨论其几何形状, 所用方法为所谓平面截痕法, 即用一系列平行于坐标面的平面截割二次曲面, 通过对所得交线(即截痕)的考察, 得二次曲面的形状.

以下假设  $a, b, c > 0$ .

#### 一、椭球面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (11)$$

所表示的曲面称为椭球面, 称  $a, b, c$  为椭球面的半轴. 因式(11)左端仅含  $x, y, z$  的平方项, 故曲面既关于三坐标面对称, 又关于坐标原点对称, 且由

$$|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$$

知椭球面在由平面  $x=\pm a, y=\pm b, z=\pm c$  所界定的长方体内, 故椭球面是有界的.

今用平面  $z=h$  ( $|h| \leq c$ ) 截割椭球面. 若  $|h| < c$ , 则截痕为椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2(1-c^{-2}h^2)} + \frac{y^2}{b^2(1-c^{-2}h^2)} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

若  $h = \pm c$ , 则截痕退化为孤立点  $(0, 0, \pm c)$ . 用平面  $x = h$  ( $|h| \leq a$ ) 或  $y = h$  ( $|h| \leq b$ ) 截椭球面的情况可类推.

由上面的分析知椭球面(11)的形状如图 8-42 所示.

特别地, 当  $a, b, c$  中有两个相等时, 则式(11)表示一旋转椭球面; 当  $a = b = c$  时, 式(11)表示一球面.

## 二、单叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (12)$$

所表示的曲面称为单叶双曲面, 它亦关于各坐标平面及坐标原点对称. 用平面  $z = h$  ( $|h| < \infty$ ) 截此曲面, 截痕是一椭圆:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2(1+c^{-2}h^2)} + \frac{y^2}{b^2(1+c^{-2}h^2)} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

当  $h = 0$ , 得到一最小的椭圆, 称为“腰椭圆”. 用平面  $y = h$  ( $|h| < \infty$ ) 截曲面, 截痕为双曲线:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

当  $|h| < b$  时, 双曲线的实轴与  $x$  轴同向; 当  $|h| > b$  时, 双曲线的实轴与  $z$  轴同向; 当  $|h| = b$  时, 双曲线退化为一对相交直线. 用平面  $x = h$  ( $|h| < \infty$ ) 截单叶双曲面的情况可类推.

由上面的分析知单叶双曲面(12)的形状如图 8-43 所示.

特别地, 当  $a = b$  时, 式(12)表示一单叶旋转双曲面.

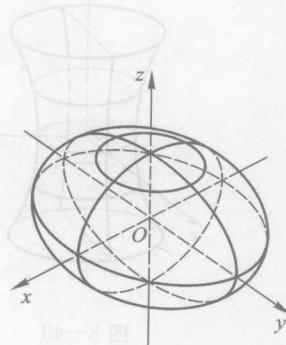


图 8-42

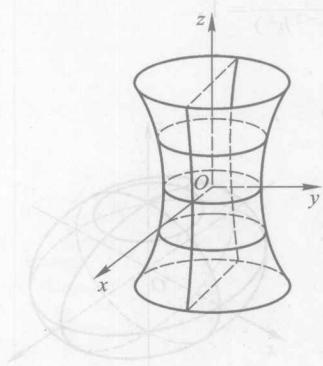


图 8-43

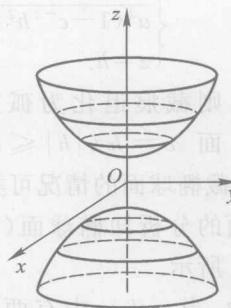


图 8-44

### 三、双叶双曲面

由方程

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (13)$$

所表示的曲面称为双叶双曲面, 它由分别位于  $xy$  平面上下两侧的两叶组成. 用平面  $z=h$  ( $|h| \geq c$ ) 截此曲面, 当  $|h| > c$  时, 截痕为一椭圆:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2(c^{-2}h^2-1)} + \frac{y^2}{b^2(c^{-2}h^2-1)} = 1, \\ z=h. \end{cases}$$

当  $h=\pm c$  时, 截痕为孤立点  $(0, 0, \pm c)$ . 用平面  $x=h$  或  $y=h$  ( $|h| < \infty$ ) 截曲面所得截痕皆为双曲线, 其实轴平行于  $z$  轴. 双叶双曲面的形状如图 8-44 所示.

### 四、椭圆抛物面

由方程

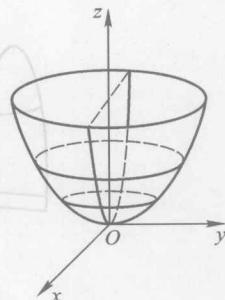
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (14)$$

所表示的曲面称为椭圆抛物面, 它位于  $xy$  平面上方且关于  $xz$  平面及  $yz$  平面对称, 当  $a=b$  时是一旋转抛物面. 用平面  $z=h$  ( $h \geq 0$ ) 截此曲面, 截痕为椭圆 (若  $h>0$ ) 或一个孤立点  $(0, 0, 0)$  (若  $h=0$ ). 用平面  $y=$

$h(|h|<\infty)$  截此曲面, 截痕为抛物线:

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

用平面  $x=h(|h|<\infty)$  截曲面的情况可类推. 椭圆抛物面的形状如图 8-45 所示.

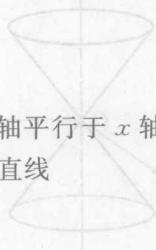


## 五、双曲抛物面

由方程

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (15)$$

所表示的曲面称为双曲抛物面. 用平面  $z=h(|h|<\infty)$  截此曲面, 当  $h\neq 0$  时截痕为双曲线;



$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h. \end{cases}$$

其实轴平行于  $x$  轴(若  $h>0$ )或  $y$  轴(若  $h<0$ ); 当  $h=0$  时截痕为一对相交直线

$$\begin{cases} y = \pm \frac{b}{a}x, \\ z = 0. \end{cases}$$

用平面  $y=h(|h|<\infty)$  截此曲面, 截痕为开口向上的抛物线:

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

用平面  $x=h(|h|<\infty)$  截此曲面的情况可类推. 椭圆抛物面形如一个马鞍(图 8-46), 通常也称为鞍形面.

## 六、椭圆锥面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (16)$$

所表示的曲面称为椭圆锥面; 当  $a=b$  时为圆锥面. 在此曲面上任取一

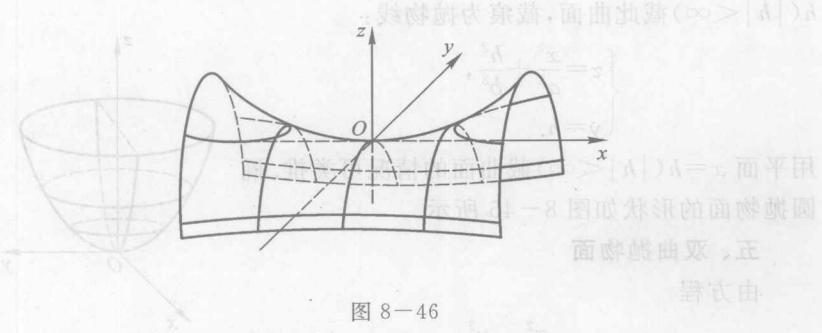


图 8-46

点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 设它不是原点, 则对任何实数  $t$ , 点  $(tx_0, ty_0, tz_0)$  亦在曲面上. 这表明曲面包含过原点与点  $M_0$  的直线(图 8-47). 取定  $h \neq 0$ , 用平面  $z=h$  截此曲面, 截痕为椭圆:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(c^{-1}ah)^2} + \frac{y^2}{(c^{-1}bh)^2} = 1, \\ z=h. \end{cases}$$

令点  $M_0$  沿此椭圆运行一周, 则连结原点与点  $M_0$  的动直线恰好扫过整个曲面.

一般地, 给定平面  $\pi$  上的曲线  $C$  及  $\pi$  外一点  $V$ , 所有过点  $V$  且与  $C$  相交的直线构成一曲面, 称此曲面为以  $V$  为顶点, 以  $C$  为准线的锥面, 且称每条过点  $V$  并与  $C$  相交的直线为锥面的母线.

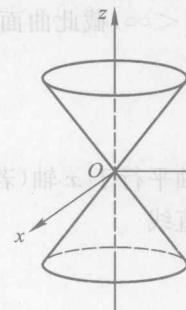


图 8-47



## 习题 8.5

1. 求到点  $(-5, 0, 0)$  和点  $(5, 0, 0)$  的距离之和等于 20 的点的轨迹之方程.
2. 设动点到  $z$  轴的距离的平方等于此点到  $yz$  面的距离的 2 倍, 求此动点的轨迹之方程.
3. 求满足下列条件的球面之方程:

1. 球心在点  $(1, 4, -7)$  且与平面  $6x+6y-7z+42=0$  相切;

(2) 球心在点(6, -8, 3)且与 z 轴相切;

(3) 过点(2, -4, 5)并包含圆  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ z = 0; \end{cases}$

(4) 过四点(0, 0, 0), (4, 0, 0), (1, 3, 0), (0, 0, -4).

4. 写出与直线  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-6}{4}$  在点(1, -4, 6)相切, 并与直线  $\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-6}$  在点(4, -3, 2)相切的球面之方程.

5. 过 x 轴作球面  $(x+5)^2 + (y-8)^2 + (z-1)^2 = 16$  的切平面.

6. 指明下列方程所表示的曲线:

(1)  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x = 3; \end{cases}$

(2)  $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36, \\ y = 1; \end{cases}$

(3)  $\begin{cases} x^2 - 4y + z^2 = 25, \\ x = -3. \end{cases}$

7. 求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = x + 1 \end{cases}$  在 xy 面上的投影曲线之方程.

8. 求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$  在 xz 面上的投影曲线之方程.

9. 将曲线  $\begin{cases} 2y^2 + z^2 - 4z + 4x = 0, \\ y^2 + 3z^2 - 12z - 8x = 0 \end{cases}$  表为母线平行于 x 轴的柱面和母线平行于 z 轴的柱面的交线.

10. 求下列曲线绕给定坐标轴旋转所成曲面之方程:

(1)  $\begin{cases} y = kx, \\ z = 0 \end{cases}$  绕 x 轴;

(2)  $\begin{cases} x^2 + z^2 = 9, \\ y = 0 \end{cases}$  绕 z 轴;

(3)  $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 36, \\ z = 0 \end{cases}$  绕 y 轴;

(4)  $\begin{cases} (y-4)^2 + z^2 = 9, \\ x = 0 \end{cases}$  绕 z 轴.

11. 指出下列方程所表示的曲面, 并绘出草图:

(1)  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9;$

(2)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 3z;$

(3)  $x^2 + y^2 - z^2 = 1;$

(4)  $x^2 - y^2 - z^2 = 1;$

(5)  $x^2 + y^2 = z^2;$

(6)  $x^2 - y^2 = 4z.$

12. 已知曲面  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ , 求一平行于  $yz$  面的平面, 使它与曲面的交线是一对直线.

13. 绘出下列各组曲面所围立体的图形:

$$(1) \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1 \text{ 与三坐标面;}$$

$$(2) z = x^2 + y^2, z = 0, x^2 + y^2 = 2x;$$

$$(3) x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = x^2 + y^2;$$

$$(4) z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2};$$

$$(5) x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = y;$$

$$(6) y = 0, z = 0, 3x + y = 6, 3x + 2y = 12, x + y + z = 6;$$

$$(7) 2y^2 = x, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1, z = 0.$$

14. 平行于  $yz$  面且过点  $(0, 0, 1)$  的平面  $\pi_1$  与曲面  $\Sigma: z = x^2 + y^2$  相切于点  $(0, 0, 0)$ .

求此平面  $\pi_1$  的方程.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: z = x^2 + y^2 \\ \Sigma: z = x^2 + y^2 \end{array} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: z = x^2 + y^2 \\ \Sigma: z = x^2 + y^2 \end{array} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: z = x^2 + y^2 \\ \Sigma: z = x^2 + y^2 \end{array} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: z = x^2 + y^2 \\ \Sigma: z = x^2 + y^2 \end{array} \right\} (4)$$

由(1)得  $x^2 + y^2 = z$ , 由(2)得  $x^2 + y^2 = z$ , 由(3)得  $x^2 + y^2 = z$ , 由(4)得  $x^2 + y^2 = z$ .

$$z = x^2 + y^2$$

$$z = x^2 + y^2 + x$$

$$z = x^2 + y^2 - x$$

$$z = x^2 + y^2 + x$$

$$z = x^2 + y^2 - x$$

$$z = x^2 + y^2 + x$$

## 第九章

# 多元函数微分学

科学与实际问题中所考察的量往往依赖于多个因素.因此,从一元函数过渡到多元函数是很自然的.本章大体上遵循处理一元函数的思路:首先从描述多元函数的极限与连续性入手;然后引入多元函数的导数(偏导数与方向导数)与微分;进而建立 Taylor 公式;最后介绍多元函数微分学的某些应用.由一元函数过渡到二元函数,会出现某些实质性的新问题.从二元函数过渡到任意多元函数,通常不过是平行的推广.因此,本章将主要考虑二元函数.通过类比,有关二元函数的概念、结论与方法,可自然地推广到多元函数.

### || § 9.1 多元函数

#### 9.1.1 区域

为描述二元函数的定义域,需要平面区域的概念.

以  $\mathbf{R}^2$  记  $xy$  平面.任给一点  $P_0 \in \mathbf{R}^2, \delta > 0$ , 令

$$N(P_0, \delta) = \{P \in \mathbf{R}^2 \mid |P_0 P| < \delta\}, \quad (1)$$

它就是以  $P_0$  为中心、以  $\delta$  为半径的开圆(“开”意味着不包括边界),也称为点  $P_0$  的“ $\delta$  邻域”,简称为邻域.

设  $D$  是  $\mathbf{R}^2$  中一点集(图 9-1).若  $P \in D$ , 且  $D$  包含  $P$  的某个邻域, 则称  $P$  为  $D$  的内点. 若  $Q \in \mathbf{R}^2, Q$  的任何邻域同时含有  $D$  内与  $D$  外的点, 则称  $Q$  为  $D$  的边界点.  $D$  的全体边界点构成一集  $L$ , 称为  $D$  的边界. 若  $D$  中每点都是内点, 且  $D$  中任何两点可用全在  $D$  内的

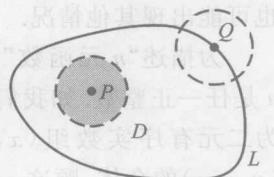


图 9-1

折线连接,则称  $D$  为开区域;开区域连同其边界一起构成闭区域.今后若说到区域  $D$  而未加说明,则  $D$  可指开区域、闭区域或一开区域连同其一部分边界.图 9-2 给出了各种区域的例子,其中虚线表示不属于区域的一部分边界,区域(f)已除去点  $A$ .区域的边界通常是一条或几条互不相交的闭曲线(如图 9-2(a)(b)(e)),但并非必定如此(如图 9-2(c)(d)).若区域  $D$  含于某个圆内,则称  $D$  为有界区域;否则称  $D$  为无界区域.在图 9-2 中,(a)(b)(d)(f)是有界区域,而(c)(e)是无界区域.

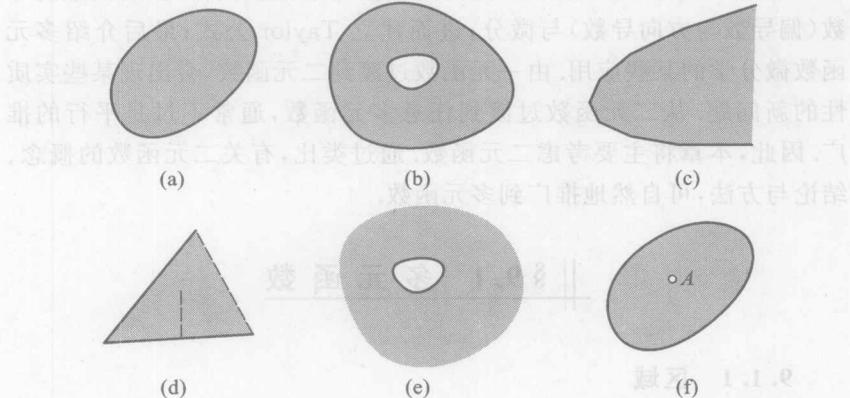


图 9-2

(D) 对于空间区域可作类似的描述.本书用到的空间区域的边界通常是一个或几个互不相交的闭曲面(球面可作为闭曲面的典型例子),但也可能出现其他情况.

为描述“ $n$  元函数”的定义域,需要更一般的“ $n$  维区域”的概念,  $n$  是任一正整数.如我们所知,直线可理解为实数的全体;平面可理解为二元有序实数组  $(x, y)$  的全体;空间可理解为三元有序实数组  $(x, y, z)$  的全体.顺这一思路推想下去,自然导致如下一般概念:称  $n$  元有序实数组  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的全体为  $n$  维空间,记作  $\mathbf{R}^n$ ;称  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为  $\mathbf{R}^n$  中的点,称  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 为该点的第  $i$  个坐标.任给

$\mathbf{R}^n$  中两点  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  与  $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , 规定二者之间的距离  $d$  为(参照 § 8.1(1)):

$$d = |PQ| = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \quad (2)$$

任给  $P_0 \in \mathbf{R}^n, \delta > 0$ , 令(与式(1)对照!)

$$N(P_0, \delta) = \{P \in \mathbf{R}^n \mid |P_0 P| < \delta\}, \quad (3)$$

称  $N(P_0, \delta)$  为以  $P_0$  为中心、以  $\delta$  为半径的  $n$  维开球, 或称为  $P_0$  的  $\delta$  邻域, 简称为邻域. 有了邻域概念, 就可以如同对平面区域一样, 描述  $\mathbf{R}^n$  中的区域、区域的边界等概念, 当  $n=2, 3$  时, 就得到有关平面区域与空间区域的相应概念.

通常以不等式表示区域, 以下是几个简单例子:

$$D: x^2 \leq y \leq x, 1/2 \leq x \leq 1;$$

$$E: x^2 + y^2 < z < \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 < 1;$$

$$G: 0 \leq x_i \leq 1, i=1, 2, \dots, n,$$

其中  $D$  是平面闭区域,  $E$  是由抛物面  $z = x^2 + y^2$ 、球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  与圆柱面  $x^2 + y^2 = 1$  (参考 § 8.5) 所围成的空间开区域,  $G$  是一个  $n$  维区域, 可称之为“ $n$  维单位立方体”, 当  $n=2, 3$  时分别为通常的单位正方形与单位正方体.  $D, E$  见图 9-3. 当  $n>3$  时已无法将  $G$  画出来. 注意  $G$  既不是开区域也不是闭区域. 一般说来, 开区域用一组严格的不

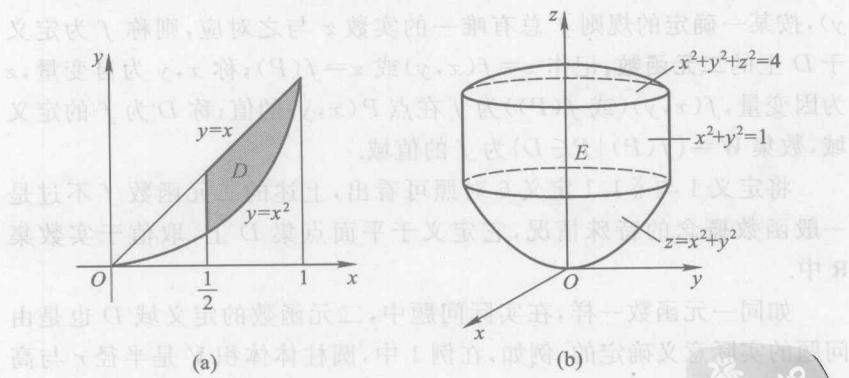


图 9-3

等式表示,如上述的  $E$ ;闭区域则用一组不严格的不等式表示,如上述的  $D$ .

### 9.1.2 多元函数的概念

如同一元函数一样,多元函数概念是从多个变量互相关联地变化这一普遍存在的事实抽象出来的.试看两个例子.

**例 1** 如所熟知,半径为  $r$ 、高为  $h$  的圆柱体的体积  $V$  由公式

$$V = \pi r^2 h \quad (4)$$

表示.当  $r$  与  $h$  在  $(0, \infty)$  内任意取定一组数值时,体积  $V$  也就由式(4)确定了.

**例 2** 一定质量的理想气体的体积  $V$  表为公式

$$V = RT/P, \quad (5)$$

其中  $R$  是某个常数,  $T$  是绝对温度,  $P$  是压强.对任给的  $T > 0, P > 0, V$  由式(5)唯一确定.

以上两例的具体含义很不相同,但有一明显的共同点:当一对变量  $(r, h)$  或  $(T, P)$  在其变域内取定一组值之后,第三个与之相依的变量的值便随之确定.三个变量之间的这种依从关系就是函数关系,准确的定义如下.

**定义 1** 设  $D$  是  $\mathbf{R}^2$  中的一个点集.若对于  $D$  中每一个点  $P(x, y)$ ,按某一确定的规则  $f$  总有唯一的实数  $z$  与之对应,则称  $f$  为定义于  $D$  上的二元函数,记作  $z = f(x, y)$  或  $z = f(P)$ ;称  $x, y$  为自变量,  $z$  为因变量,  $f(x, y)$  (或  $f(P)$ ) 为  $f$  在点  $P(x, y)$  的值;称  $D$  为  $f$  的定义域,数集  $W = \{f(P) | P \in D\}$  为  $f$  的值域.

将定义 1 与 §1.1 定义 6 对照可看出,上述的二元函数  $f$  不过是一般函数概念的特殊情况,它定义于平面点集  $D$  上,取值于实数集  $\mathbf{R}$  中.

如同一元函数一样,在实际问题中,二元函数的定义域  $D$  也是由问题的实际意义确定的.例如,在例 1 中,圆柱体体积  $V$  是半径  $r$  与高  $h$  的函数,定义域  $D = \{(r, h) : r > 0, h > 0\}$ ,它是平面上不包括边界在内的第一象限.若考虑由某一公式表示的函数  $f(x, y)$  而不论其实际含

义,则认定其定义域为使函数表达式有意义的  $(x, y)$  的全体. 例如, 函数

$$f(x, y) = \frac{\ln(x-y)}{\sqrt{1-x}}$$

的定义域  $D = \{(x, y) | y < x < 1\}$  是一无界开区域(图 9-4).

图 9-4 中的点集  $D$  由不等式  $0 < x < 1$  和  $y < x$  确定.

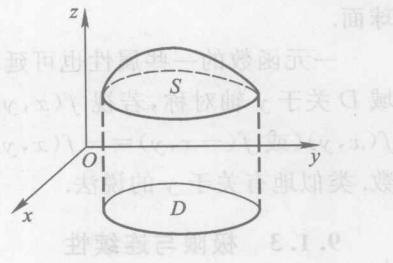
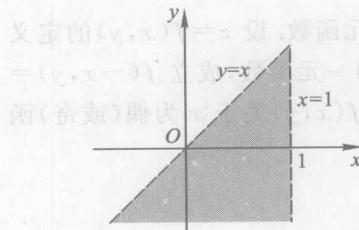


图 9-4

图 9-5

设  $z = f(x, y)$  为定义于  $D$  上的函数. 称空间中的点集

$$S = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$$

为函数  $z = f(x, y)$  的图形(图 9-5). 通常  $S$  是一曲面,一般就简单地称“曲面  $z = f(x, y)$ ”. 例如函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x^2 - y^2, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 1, & 1 < x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

定义在闭圆域  $D: x^2 + y^2 \leq 4$  上,它的图形是如图 9-6 所示的曲面.

对  $f(x, y)$  的值域  $W$  内任一取定的值  $c$ , 方程  $f(x, y) = c$  的解的集合通常确定  $xy$  平面上一条曲线(但也可能是一个点或一块区域,如图 9-6(B)),称它为函数  $f(x, y)$  的等值线(或等位线). 当  $c$  取遍  $W$  时,方程  $f(x, y) = c$  给出  $f(x, y)$  的

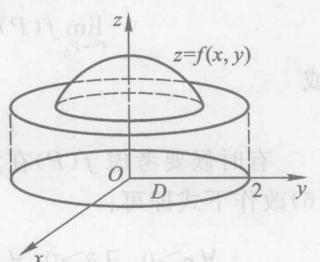


图 9-6

等值线族,它们对函数提供了一种有效的图示.

关于二元函数的概念与记号可自然地推广到三元函数  $u=f(x, y, z)$  及  $n$  元函数  $u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . 只是当  $n \geq 3$  时,  $n$  元函数的图形已不能实际画出来. 与二元函数的等值线对照,对于三元函数  $u=f(x, y, z)$ , 可以考虑它的等值面  $f(x, y, z)=c$ . 例如, 函数  $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$  的等值面  $x^2+y^2+z^2=c$  ( $c>0$ ) 是一族以原点为中心的同心球面.

一元函数的一些属性也可延伸到多元函数. 设  $z=f(x, y)$  的定义域  $D$  关于  $y$  轴对称, 若视  $f(x, y)$  为  $x$  的一元函数, 成立  $f(-x, y)=f(x, y)$  (或  $f(-x, y)=-f(x, y)$ ) 则称  $f(x, y)$  关于  $x$  为偶(或奇)函数. 类似地有关于  $y$  的说法.

### 9.1.3 极限与连续性

设  $N(P_0, \delta)$  依式(1), 以  $\overset{\circ}{N}(P_0, \delta)$  记从  $N(P_0, \delta)$  中去掉点  $P_0$  后所得的集合, 称它为  $P_0$  的“去心  $\delta$  邻域”, 简称为去心邻域. 以下定义是 § 2.2 定义 3 的一个自然推广.

**定义 2** 设  $f(x, y)$  在  $P_0$  的某个去心邻域上有定义,  $l$  是一常数. 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \in \overset{\circ}{N}(P_0, \delta): |f(P) - l| < \varepsilon \quad (6)$$

(与 § 2.2(5) 对照!), 则说当  $P \rightarrow P_0$  时  $f(x, y)$  收敛于(或趋于)  $l$ , 称  $l$  为当  $P \rightarrow P_0$  时  $f(x, y)$  的极限, 记作

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l,$$

或

$$f(P) \rightarrow l (P \rightarrow P_0).$$

有时候要考虑  $f(P)$  在定义域  $D$  的边界点  $P_0$  的极限, 此时只需将(6) 改作下式即可:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \in \overset{\circ}{N}(P_0, \delta) \cap D: |f(P) - l| < \varepsilon.$$

**例 3** 证明  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} = 0$ .

证 当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时, 易见以下不等式

$$\left| \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x^2 y|}{x^2 + y^2} \leq |y|$$

成立.  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $\delta = \epsilon$ , 则当  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$  (这相当于点  $P(x, y)$  属于  $N(O, \delta)$ ) 时, 有

$$\left| \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \epsilon.$$

由定义 2, 可知  $(x^2 + y^2)^{-1} \sin(x^2 y) \rightarrow 0$  ( $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ).

例 4 设  $f(x, y) \rightarrow l$  ( $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ),  $y = y(x)$  在  $x_0$  邻近有定义, 且  $y(x) \rightarrow y_0$  ( $x \rightarrow x_0$ ). 证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y(x)) = l. \quad (7)$$

证  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $\delta > 0$ , 使当  $P \in N(P_0, \delta)$  时,  $|f(P) - l| < \epsilon$ ,  $P_0$  记点  $(x_0, y_0)$ . 取  $\sigma > 0$ , 使  $\sigma < \delta/2$ , 且当  $0 < |x - x_0| < \sigma$  时  $|y(x) - y_0| < \delta/2$ . 于是当  $0 < |x - x_0| < \sigma$  时, 有

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y(x) - y_0)^2} \\ \leq |x - x_0| + |y(x) - y_0| < \delta,$$

因此  $(x, y(x)) \in N(P_0, \delta)$ , 从而  $|f(x, y(x)) - l| < \epsilon$ . 这表明式(7)成立.

例 4 的结果表明: 若  $f(P) \rightarrow l$  ( $P \rightarrow P_0$ ), 则当  $P$  沿任一条曲线  $y = y(x)$  趋于  $P_0$  时, 都应有  $f(P) \rightarrow l$ . 由于在平面上  $P$  趋于  $P_0$  的途径极具任意性, 因而“ $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$  存在”这一结论是很强的.

例 5 设  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ , 证明  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  不存在.

证 令  $y(x) = kx$ , 则  $y(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ ), 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y(x)) = \frac{k}{1+k^2} \quad (|k| < \infty).$$

因  $k/(1+k^2)$  随  $k$  变化, 故由例 4 知  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  不存在.

一元函数极限的很多结论, 如有界性、唯一性、保号性以及四则运算法则等都可以很自然地推广到多元极限中来. 例如保号性可以叙述

为:若 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l > 0$ ,则存在 $\delta > 0$ ,使得对每个 $P \in N(P_0, \delta) \cap D(D$ 为 $f$ 的定义域), $f(P) > 0$ .

关于连续性的定义,亦可以照搬一元函数的形式.

**定义3** 设函数 $f(P)$ 在点 $P_0$ 有定义.若

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0), \quad (8)$$

则说 $f(P)$ 在点 $P_0$ 连续,并称点 $P_0$ 为 $f(P)$ 的一个连续点.若 $f(P)$ 在点 $P_0$ 不连续,则称点 $P_0$ 为 $f(P)$ 的间断点.若 $f(P)$ 在 $D$ 内每点连续,则说 $f(P)$ 在 $D$ 内连续.

容易看出,若 $f(x, y)$ 在定义域 $D$ 的内点 $(x_0, y_0)$ 连续,则一元函数 $f(x, y_0)$ 与 $f(x_0, y)$ 分别在点 $x_0$ 与 $y_0$ 连续.但反过来却未必.例如,设

则 $f(x, 0)$ 与 $f(0, y)$ 分别对 $x$ 与 $y$ 连续,但 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 显然不连续.

如同一元函数一样,多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零)与复合函数都是连续函数.由此推出,任何多元初等函数在其有定义的区域内连续.所谓多元初等函数,指由多元的基本初等函数经有限次四则运算与复合而得到的函数,如 $\sin(x^2 + y)$ , $xy + \ln(x^2 + y^2)$ 等.

由这个结论,当要求某个多元初等函数在定义区域内一点 $P_0$ 的极限时,只要求出该函数在点 $P_0$ 的函数值就行了,即

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

**例6** 求 $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

解 设 $f(x, y) = \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , 则

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} f(x, y) = f(1, 0) = \frac{\ln(1 + e^0)}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \ln 2.$$

有界闭区域上的连续函数具有如同闭区间上的连续函数一样的性

质。现叙述如下：

**定理 1** 设  $f(P)$  在有界闭区域  $D$  上有定义且连续，则  $f(P)$  有以下性质：

(i) 最值性： $f(P)$  在  $D$  上取得最大值与最小值，即存在  $P_1, P_2 \in D$ ，使得  $\forall P \in D: f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2)$ 。

(ii) 介值性：任给  $P, Q \in D$ ，若  $f(P) \leq k \leq f(Q)$ ，则存在  $M \in D$ ，使得  $f(M) = k$ 。

(iii) 一致连续性： $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当  $P, Q \in D$ ,  $|PQ| < \delta$  时恒有  $|f(P) - f(Q)| < \epsilon$ .



## 习题 9.1

1. 在实轴上，在平面直角坐标系中以及空间直角坐标系中分别指出下列点集所构成的图形( $O$  为坐标原点,  $P$  是点集中任意一点)：

(1)  $|PO| < 1$ ; (2)  $|PO| \geq 1$ .

2. 绘出下列平面区域：

(1)  $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ ;

(2)  $\{(x, y) \mid |1-y| \leq 1, |x| < y^2\}$ .

3. 求下列函数的定义域，并绘图表示：

(1)  $z = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{9} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ ;

(2)  $z = \ln(y^2 - 2x + 1)$ ;

(3)  $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$ ; (4)  $z = \arccos \frac{y-1}{x}$ ;

(5)  $z = \ln[x \ln(y-x)]$ ; (6)  $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$ .

4. 已知函数  $f(u, v) = u^v$ , 求  $f(xy, x+y)$ .

5. 已知  $f(x, y) = \ln x \ln y$ , 证明

$$f(x, u) + f(x, v) + f(y, u) + f(y, v) = f(xy, uv).$$

6. 若函数  $f(x, y, z)$  满足关系式  $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$ , 则称  $f(x, y, z)$  为  $k$  次齐次函数。证明  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - xy \tan(x/y)$  为二次齐次函数。

7. 若  $f(x+y, y/x) = x^2 - y^2$ , 求  $f(x, y)$ .

8. 求下列极限：

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}};$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}; \quad (4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2};$$

9. 证明下列极限不存在：

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}; \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^8+y^2};$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y), \text{ 其中 } f(x,y)=\begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy=0. \end{cases}$$

10. 研究下列函数的连续性：

$$(1) f(x,y)=\begin{cases} xy/\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0; \end{cases}$$

$$(2) f(x,y)=\begin{cases} x^3 y/(x^6+y^2), & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

11. 求下列函数的间断点：

$$(1) z=\ln \sqrt{x^2+y^2}; \quad (2) z=\frac{1}{x-y}; \quad (3) u=\frac{1}{x^2+y^2-z^2}$$

## § 9.2 偏导数与全微分

### 9.2.1 偏导数的定义与计算

在一元函数中, 我们已经知道导数就是函数的变化率, 它反映了函数在一点处变化的快慢程度, 导数已成为研究一元函数的重要分析工具. 对于多元函数, 同样需要研究它的“变化率”. 然而, 由于自变量多于一个, 情况就复杂得多. 以二元函数  $z=f(x,y)$  为例, 我们在本节先考虑  $(x,y)$  沿平行于  $x$  轴和平行于  $y$  轴两个特殊方位变化时  $f(x,y)$  的变化率. 这一方面是由于它们比较简单而又应用广泛, 下面将要看到它实际上化为一元函数的变化率; 另一方面还因为它们是研究其他方向变化率的基础, 这在后面讲方向导数一节将要提到.

设  $D$  是  $xy$  平面上一区域.

**定义 1** 设函数  $z=f(x, y)$  在  $D$  上有定义,  $P_0(x_0, y_0) \in D$ . 若关于  $x$  的函数  $f(x, y_0)$  在  $x_0$  可导, 则称其导数为  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  对  $x$  的偏导数, 记作  $f_x(x_0, y_0)$ , 即

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \frac{d}{dx} f(x, y_0) \Big|_{x=x_0} = (\text{偏导数}) z = \dots \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (1)$$

对  $y$  的偏导数  $f_y(x_0, y_0)$  可类似定义.

对于  $f_x(x_0, y_0)$ , 还可使用以下记号:

$$z_x(x_0, y_0), \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0},$$

其中点  $(x_0, y_0)$  可写成  $P_0$ , 如  $\partial f(P_0)/\partial x$ . 若对每点  $(x, y) \in D$ , 偏导数  $f_x(x, y)$  存在, 则  $f_x(x, y)$  是  $D$  上的二元函数, 对这个函数可使用以下记号:

$$f_x, z_x, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}.$$

以上概念与记号可自然地推广到任何多元函数.

注意  $f_x(x, y)$  实际上是将  $y$  看作常量而对  $x$  求的导数, 因而本质上是一元函数的导数. 所谓“偏”, 是指求导运算偏于某个变元, 而将其余变元看作常数.

既然偏导数实质上是一元函数的导数, 为计算偏导数, 自然可直接应用一元函数的求导方法.

**例 1** 求  $z=x^3+2x^2y-y^3$  在点  $(1, 3)$  对  $x$  与  $y$  的偏导数.

**解 I** 视  $y$  为常量, 首先求出

$$z_x = 3x^2 + 4xy, z_y = 2x^2 - 3y^2;$$

然后以  $x=1, y=3$  代入得

$$z_x(1, 3) = 15, z_y(1, 3) = -25.$$

**解 II** 首先以  $y=3$  代入得

$$z(x, 3) = x^3 + 6x^2 - 27,$$

于是

$$z_x(1, 3) = (x^3 + 6x^2 - 27)' \Big|_{x=1} = 15.$$

类似地可求得  $z_y(1,3) = -25$ .

例 2 设  $z = (x+y)^{xy}$  ( $x+y > 0$ ), 求  $z_x, z_y$ .

解 用对数求导法:

$$z_x = z(\ln z)_x = z \frac{\partial}{\partial x} [xy \ln(x+y)]$$

$$(1) \quad = z \left[ y \ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} \right]$$

$$= (x+y)^{xy} \left[ y \ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} \right].$$

类似地可得

$$z_y = (x+y)^{xy} \left[ x \ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} \right].$$

例 3 设变量  $x, y, z$  满足  $z = x+y$ , 证明:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1.$$

证 由于  $x = z-y, y = z-x$ . 故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 1$$

相乘得证.

此例表明, 偏导数记号  $\frac{\partial z}{\partial x}$  不可以理解为“ $\partial z$  与  $\partial x$  的商”. 这与一元函数  $y = y(x)$  的导数记号  $\frac{dy}{dx}$  可以理解为“ $dy$  与  $dx$  的商”是不一样的.

对于有两个以上自变量的函数的偏导数定义与运算完全类似于二元函数. 以下举例说明.

例 4 求  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  的偏导数.

解 将  $y, z$  都看成常数, 对  $x$  求导得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}.$$

利用函数  $r$  关于自变量  $x, y, z$  的对称性, 便有

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

偏导数的几何意义可直接由一元函数导数的几何意义得出：给定函数  $z=z(x, y)$ , 设  $z_0 = z(x_0, y_0)$ , 则  $z_x(x_0, y_0)$  是平面  $y=y_0$  上的曲线

$$\begin{cases} z=z(x, y_0), \\ y=y_0 \end{cases}$$

在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  的切线  $T_x$  对  $x$  轴的斜率； $z_y(x_0, y_0)$  是平面  $x=x_0$  上的曲线

$$\begin{cases} z=z(x_0, y), \\ x=x_0 \end{cases}$$

在点  $M_0$  的切线  $T_y$  对  $y$  轴的斜率（图 9-7）。

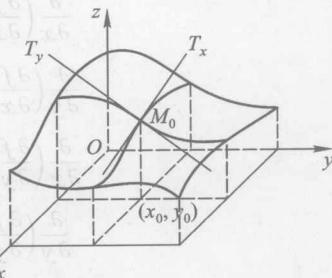


图 9-7

我们已经知道，可导的一元函数必定连续，但偏导数存在不足以保证多元函数的连续性。

### 例 5 研究函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点  $(0, 0)$  的连续性与偏导数的存在性。

解 因  $f(x, 0) \equiv 0$ , 故  $f_x(0, 0) = 0$ ; 同理  $f_y(0, 0) = 0$ . 可见  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  存在对  $x$  与  $y$  的偏导数。另一方面, 由上节例 5 知

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ 不存在.}$$

所以  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处是不连续的。

与一元函数的结论“可导必连续”相比, 此处的“有偏导但却不连续”的原因在于, 偏导数只是刻画了函数在可导点处沿着平行于坐标轴的直线段上的局部性态, 而连续则是函数在连续点的一个邻域上的性态。

另一方面, 与一元函数类似的是, 二元函数在某点连续也不能保证在该点有偏导数。例如  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  在  $(0, 0)$  处连续, 但在  $(0, 0)$  处的两个偏导数都不存在。综合即知偏导数存在与连续性无关。

## 9.2.2 高阶偏导数

设函数  $z=f(x,y)$  在区域  $D$  上存在偏导数  $f_x, f_y$ , 称它们为“一阶偏导函数或偏导数”. 若  $f_x$  与  $f_y$  又存在偏导数, 则称其偏导数为  $z=f(x,y)$  的二阶偏导数, 它们是:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}=z_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=f_{xy}=z_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=f_{yx}=z_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}=z_{yy},$$

其中  $f_{xy}$  与  $f_{yx}$  称为混合偏导数.

类似地可定义任何多元函数的二阶偏导数. 进而又可以考虑二阶以上的偏导数. 一般地, 称一个多元函数  $f$  的  $n$  阶偏导数的偏导数为  $f$  的  $n+1$  阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

**例 6** 设  $z=e^{xy}$ , 求  $z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}, z_{yy}$ .

**解** 首先求出  $z_x=ye^{xy}$ ,  $z_y=xe^{xy}$ , 然后有

$$z_{xx}=y^2e^{xy}, z_{yy}=x^2e^{xy}, z_{xy}=(1+xy)e^{xy}=z_{yx}.$$

上例中出现等式  $z_{xy}=z_{yx}$  并非偶然, 事实上有以下一般结果:

**定理 1** 若  $z=f(x,y)$  在区域  $D$  上存在连续的偏导数  $f_{xy}$  与  $f_{yx}$ , 则  $f_{xy}=f_{yx}$ .

证明从略. 定理 1 表明, 当混合偏导数存在且连续时, 它们与对各变元的求导顺序无关. 这一结果可推广到任何多元函数的任意阶混合偏导数. 下例说明, “混合偏导数连续”这一条件不可去掉.

**例 7** 设  $z=\begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$  求  $z_{xy}(0,0)$  与  $z_{yx}(0,0)$ .

**解** 当  $(x,y) \neq (0,0)$  时, 有

$$(8) \quad z_x(x, y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \quad z_y(x, y) = \frac{x^5 + 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

其次由  $z(x, 0) \equiv 0$  及  $z(0, y) \equiv 0$  得  $z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0$ . 于是

$$z_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{z_x(0, y)}{y} = -1;$$

$$z_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z_y(x, 0)}{x} = 1.$$

(8) 注意上例中的  $z_{xy}$  恰在点  $(0, 0)$  间断.

高阶偏导数可通过逐次求导得出, 无需新的计算方法. 下面看几个例子.

**例 8** 设  $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 证明  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ .

**证** 令  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 则  $u = 1/r, r_x = x/r$  (参见例 4). 于是

$$u_x = -\frac{r_x}{r^2} = -\frac{x}{r^3};$$

$$u_{xx} = \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{x}{r} - \frac{1}{r^3} = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}.$$

由对称性可以推断

$$u_{yy} = \frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}, \quad u_{zz} = \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}.$$

于是

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} - \frac{3}{r^3} = 0.$$

“ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ”这一记号今后将多次运用.

**例 9**  $z = \ln(x^2 y + 2x + y)$  求  $z_x, z_{xy}$

$$\text{解 } z_x = \frac{2xy + 2}{x^2 y + 2x + y} = \frac{2(xy + 1)}{x^2 y + 2x + y},$$

$$z_{xy} = \frac{2x \cdot (x^2 y + 2x + y) - 2(xy + 1)(x^2 + 1)}{(x^2 y + 2x + y)^2}$$

$$= \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 y + 2x + y)^2}.$$

### 9.2.3 全微分

我们从 3.3.1 知道, 一元函数  $y = f(x)$  在一点  $x_0$  可微意味着

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad (2)$$

其中  $A = f'(x_0)$  与  $\Delta x$  无关. 类比于此, 下面给出二元函数可微的定义.

**定义 2** 设  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某个邻域内有定义, 记函数的全增量为  $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ . 若存在仅与  $P_0$  有关而与  $\Delta x, \Delta y$  无关的常数  $A, B$ , 使  $\Delta z$  可表为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad (3)$$

(与式(2)对照!), 则说  $f(x, y)$  在点  $P_0$  可微, 且称  $A\Delta x + B\Delta y$  为  $f(x, y)$  在点  $P_0$  的全微分(简称微分), 记作  $df(P_0)$  或  $dz(P_0)$ , 其中  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ . 若  $f(x, y)$  在区域  $D$  内每点可微, 则说  $f(x, y)$  在  $D$  内可微.

由式(3)直接推出: 若  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ , 则  $\Delta z \rightarrow 0$ . 可见如同一元函数一样, 可微的二元函数必连续. 至于可微与导数存在的关系, 下面的定理表明, 二元函数与一元函数略有不同.

**定理 2** 若二元函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微, 则偏导数  $f_x(x_0, y_0)$  与  $f_y(x_0, y_0)$  存在, 且

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y. \quad (4)$$

**证** 由于可微, 故有常数  $A, B$ , 使得对任意的  $\Delta x$  及  $\Delta y$  成立

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho).$$

令  $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ , 则有

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\Delta x} = A.$$

同理可证  $f_y(x_0, y_0) = B$ . 结论成立.

**例 10** 设  $z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$  研究  $f(x, y)$

在  $(0, 0)$  的连续性与可微性.

**解** 易验证不等式

$$|f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

由此可见  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  连续. 由  $f(x, 0) = f(0, y) = 0$  求出偏导数

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0.$$

由定义,验证一个可导函数在 $(x_0, y_0)$ 的可微性只需检验 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - [f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\rho}$ 是否为0.对于此例,由于极限

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \end{aligned}$$

不存在,因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是不可微的.可见偏导数存在只是可微的必要条件.然而如果将偏导数存在加强为存在且连续则可保证可微性.下面是关于这个结论的定理.

**定理3** 若二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0, y_0)$ 的某个领域内存在偏导数,且 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在点 $(x_0, y_0)$ 连续,则函数在该点可微.

**证** 设 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 是 $(x_0, y_0)$ 附近的一个点.考虑函数 $z=f(x,y)$ 的全增量

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + \\ &\quad [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]. \end{aligned}$$

对上面两个方括号应用Lagrange中值定理,可得

$$\Delta z = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y,$$

其中 $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ .

又由于 $f_x, f_y$ 是连续的,故

$$\begin{aligned} \Delta z &= (f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1) \Delta x + (f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2) \Delta y \\ &= f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + (\epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y), \end{aligned}$$

其中 $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ (当 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时).于是当 $P \rightarrow 0$ 时

$$\left| \frac{\Delta z - f_x(x_0, y_0) \Delta x - f_y(x_0, y_0) \Delta y}{\rho} \right| = \left| \frac{\epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y}{\rho} \right| \leq |\epsilon_1| + |\epsilon_2| \rightarrow 0.$$

因此函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0, y_0)$ 可微.  $\square$

在式(4)中取 $f(x,y) \equiv x$ ,得 $dx = \Delta x$ ;同理 $dy = \Delta y$ .因此,若函数 $z=z(x,y)$ 在某区域内有连续偏导数,记 $dz = dz(x,y)$ ,则依公式(4)有全微分公式

$$dz = z_x dx + z_y dy. \quad (5)$$

以上所述的关于微分的概念、记号与结论可自然地推广到任意多元函数.

例 11 设  $z = x^2 y + y^2$ , 求  $dz$ .

解 直接求出  $z_x = 2xy$ ,  $z_y = x^2 + 2y$ , 于是由公式(5)有

$$dz = 2xy dx + (x^2 + 2y) dy.$$

例 12 设  $u = x + \sin xy + e^{yz}$ , 求  $du$ .

解 因  $u_x = 1 + y \cos xy$ ,  $u_y = x \cos xy + ze^{yz}$ ,  $u_z = ye^{yz}$ , 故

$$du = (1 + y \cos xy) dx + (x \cos xy + ze^{yz}) dy + ye^{yz} dz.$$

一元函数的微分规则可以推广到多元函数:

I 线性规则:  $d(\alpha u + \beta v) = \alpha du + \beta dv$ ,  $\alpha, \beta$  为常数.

II 积规则 (Leibniz 规则):  $d(uv) = vdu + udv$ .

III 商规则:  $d(u/v) = (vdu - udv)/v^2$  ( $v \neq 0$ ).

以下是应用这些规则计算微分的例子.

例 13 计算函数  $z = x^2 + y^2$  在  $(1,1)$  处的全微分.

解 由规则 I,

$$dz = dx^2 + dy^2 = 2xdx + 2ydy,$$

故

$$dz(1,1) = 2dx + 2dy.$$

例 14 计算  $u = xe^{yz}$  的全微分.

解 由规则 II、III,

$$du = \frac{zd(xe^{yz}) - xe^{yz}dz}{z^2}$$

$$= \frac{z(xe^{yz}dy + e^{yz}dx) - xe^{yz}dz}{z^2}$$

$$= \frac{e^y}{z} dx + \frac{xe^y}{z} dy - \frac{xe^y}{z^2} dz$$

最后我们来分析一下二元函数可微的几何意义.

□ 设二元函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  可微, 则在  $(x_0, y_0)$  某邻域内有

$$(1) f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\rho),$$

其中  $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ . 有

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0),$$

即

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0).$$

记

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0),$$

它表示通过点  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  并以  $\{f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\}$  为法矢量的一个平面. 这表明, 若  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  可微, 则曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  的附近可以用一个平面来近似, 类似于一元函数的切线, 称此平面为曲面在该点的切平面, 关于切平面将在后续的内容中讨论.

#### 9.2.4 复合函数微分法

我们在第三章中已看到, 求复合函数导数的“链规则”在一元函数微分学中起重要作用. 今将其推广到多元复合函数.

**定理 4** 设  $z = f(u, v)$  在区域  $D$  上有连续的偏导数  $f_u, f_v; u = u(x)$  与  $v = v(x)$  在区间  $I$  上可微, 且  $(u(x), v(x)) \in D (x \in I)$ , 则  $z = f(u(x), v(x))$  在区间  $I$  上可微, 且

$$z_x = f_u u_x + f_v v_x, \quad (6)$$

其中  $z_x = dz/dx$ ,  $f_u$  记  $f_u(u(x), v(x))$ ,  $f_v$  仿此.

**证** 取定  $x_0 \in I$ , 设  $\Delta x \neq 0$ ,  $x_0 + \Delta x \in I$ . 令  $u_0 = u(x_0), v_0 = v(x_0)$ ,  $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u_0, \Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v_0, \varphi(x) = f(u(x), v(x))$ , 则

$$\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0)$$

=  
= 告: 量变区间中个  
=  $[f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0 + \Delta v)]$

即, 由正(x) = m, 焉主 +  $[f(u_0, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0)]$

$$= f_u(u_0 + \theta_1 \Delta u, v_0 + \Delta v) \Delta u$$

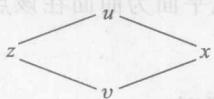
$$+ f_v(u_0, v_0 + \theta_2 \Delta v) \Delta v,$$

其中用了 Lagrange 中值定理,  $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ . 因当  $\Delta x \rightarrow 0$  时有  $\Delta u \rightarrow 0$ ,  $\Delta v \rightarrow 0$ , 而  $f_u, f_v$  连续, 故有

$$\begin{aligned}\varphi'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ f_u(u_0 + \theta_1 \Delta u, v_0 + \Delta v) \frac{\Delta u}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. + f_v(u_0, v_0 + \theta_2 \Delta v) \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] \\ &= f_u(u_0, v_0) u'(x_0) + f_v(u_0, v_0) v'(x_0).\end{aligned}$$

这表明等式(6)成立.  $\square$

定理4中的函数 $z$ 通过变量 $u, v$ 而与自变量 $x$ 相关联, 其复合关系可图示为

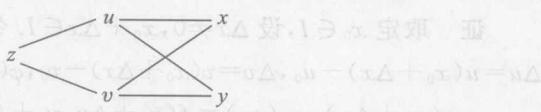


通常称 $u, v$ 为中间变量.

公式(6)可朝两个方向推广. 首先, 它可直接用于 $u, v$ 是多元函数的情况. 例如, 若 $u=u(x, y), v=v(x, y), u, v$ 都有对 $x$ 与 $y$ 的偏导数,  $f(u, v)$ 有连续偏导数 $f_u, f_v, z=f(u(x, y), v(x, y))$ , 则分别将 $y$ 与 $x$ 看作常数应用公式(6)得

$$z_x = f_u u_x + f_v v_x, \quad z_y = f_u u_y + f_v v_y. \quad (7)$$

函数 $z$ 通过中间变量 $u, v$ 与自变量 $x, y$ 相关联的关系可图示为



另一方面, 公式(6)可推广到含任意多个中间变量的情况: 若 $z=f(u_1, u_2, \dots, u_n), \partial f / \partial u_i (1 \leq i \leq n)$ 存在且连续,  $u_i=u_i(x)$ 可微, 则

$$\frac{dz}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{du_i}{dx}. \quad (8)$$

通常, 将上式中的 $dz/dx$ 称为“全导数”. 若取 $n=1$ , 则由式(8)得出一元函数的链规则.

公式(6)~(8)可统一于更一般的公式

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n), \quad (9)$$

其中  $z = f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ ,  $u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $1 \leq i \leq m$ ), 假定  $\frac{\partial f}{\partial u_i}$  与  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  皆存在, 且  $\frac{\partial f}{\partial u_i}$  连续 ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ).

例 15 设  $z = u \ln v$ ,  $u = \sin x$ ,  $v = \cos x$ , 求  $z_x$ .

解 套用公式(6):

$$\begin{aligned} z_x &= (\ln v) \cos x + (u/v)(-\sin x) \\ &= \cos x \ln \cos x - \sin x \tan x. \end{aligned}$$

作为对照, 下面不用中间变量  $u, v$  计算  $z_x$ :

$$\begin{aligned} z_x &= (\sin x \ln \cos x)' \\ &= \cos x \ln \cos x - \sin x \tan x. \end{aligned}$$

例 16 设  $z = u^2 v - uv^2$ ,  $u = x \sin y$ ,  $v = x \cos y$ , 求  $z_x, z_y$ .

解 套用公式(7):

$$\begin{aligned} z_x &= (2uv - v^2) \sin y + (u^2 - 2uv) \cos y \\ &= 3x^2 \sin y \cos y (\sin y - \cos y). \end{aligned}$$

类似地得  $z_y = x^3 (2 \sin^2 y \cos y + 2 \sin y \cos^2 y - \sin^3 y - \cos^3 y)$ .

不用中间变量的直接算法(例如对  $z_y$ )是:

$$\begin{aligned} z_y &= \frac{\partial}{\partial y} [x^2 \sin^2 y \cdot x \cos y - x \sin y \cdot x^2 \cos^2 y] \\ &= x^3 (2 \sin y \cos^2 y - \sin^3 y - \cos^3 y + 2 \sin^2 y \cos y). \end{aligned}$$

例 17 设  $z = f(x, \varphi(x), \psi(x))$ ,  $f$  有连续偏导数,  $\varphi(x)$  与  $\psi(x)$  可微, 求全导数  $\frac{dz}{dx}$ .

解 令  $u_1 = x$ ,  $u_2 = \varphi(x)$ ,  $u_3 = \psi(x)$ , 以  $f'_i$  记  $\frac{\partial f}{\partial u_i}$  ( $1 \leq i \leq 3$ ), 则依公式(8)有

$$\frac{dz}{dx} = f'_1 + f'_2 \varphi'(x) + f'_3 \psi'(x).$$

$f'_i$  是一种很方便的缩记号. 首先, 它带来很大的简化, 如上例中的  $f'_1$  完全写出来应是  $\frac{\partial f(x, \varphi(x), \psi(x))}{\partial u_1}$ . 其次, 使用记号  $f'_i$  可不必明显地写出中间变量  $u_i$ . 试看下例.

**例 18** 设  $u=f(x, x^2y, xy^2z)$ ,  $f$  有连续偏导数, 求  $u_x, u_y, u_z$ .

解 不明显写出中间变量, 直接用公式(9):

$$u_x = f'_1 + 2xyf'_2 + y^2zf'_3;$$

$$u_y = x^2f'_2 + 2xyzf'_3; \quad u_z = xy^2f'_3.$$

上面的计算过程详细写出来本应是: 令  $u_1 = x, u_2 = x^2y, u_3 = xy^2z$ , 则

$$u_x = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial x};$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u_1} + 2xy \frac{\partial f}{\partial u_2} + y^2z \frac{\partial f}{\partial u_3},$$

这就繁琐多了.

**例 19** 设  $z=f(\varphi(x)-\varphi(y), \varphi(xy))$ ,  $f$  有连续偏导数,  $\varphi$  可微, 求  $z_x, z_y$ .

解 直接用公式(7):

$$z_x = \varphi'(x)f'_1 + y\varphi'(xy)f'_2; \quad z_y = -\varphi'(y)f'_1 + x\varphi'(xy)f'_2.$$

**例 20** 设  $u=f(x+x^2y+xy^2z^3)$ ,  $f$  可微, 求  $u_x, u_y, u_z$ .

解 令  $v=x+x^2y+xy^2z^3$ , 以  $f'$  记  $f'(v)$ , 则

$$u_x = v_x f' = (1+2xy+y^2z^3) f'.$$

同理,  $u_y = (x^2+2xyz^3) f'$ ,  $u_z = 3xy^2z^2 f'$ .

当  $v$  的表达式较长且  $f'(v)$  多次出现时, 将  $f'(v)$  简写为  $f'$  尤其便利. 但应注意指明  $f'$  的意义, 避免将  $f'$  与  $u_x$  或  $u_y, u_z$  相混, 且不应将上例中的  $(1+2xy+y^2z^3) f'$  写成  $f'(1+2xy+y^2z^3)$ . 实际上, 完整的写法是:

$$u_x = (1+2xy+y^2z^3) f'(x+x^2y+xy^2z^3).$$

复合函数的高阶偏导数计算仍然是应用公式(6)~(8), 但通常计算量会增加一些.

**例 21** 设  $z=f(xy, x^2-y^2)$ ,  $f$  有二阶连续偏导数, 求  $z_{xx}, z_{xy}$ .

解 令  $u=xy, v=x^2-y^2, f'_1=f_u, f'_2=f_v, f''_{11}=f_{uu}, f''_{12}=f_{uv}=f_{uu}, f''_{22}=f_{vv}$ , 运用公式(7)得:

$$z_x = yf'_1 + 2xf'_2.$$

再次应用公式(7)时,应特别注意  $f'_1$  和  $f'_2$  还是二元复合函数,而且复合的方式仍是按题目所给的方式,如  $f'_1(xy, x^2 - y^2)$ . 按这个思路就得到

$$\begin{aligned} z_{xx} &= y(f'_1)_x + 2x(f'_2)_x + 2f'_2 \\ &= y^2 f''_{11} + 4xy f''_{12} + 4x^2 f''_{22} + 2f'_2; \\ z_{xy} &= y(f'_1)_y + 2x(f'_2)_y + f'_1 \\ &= xy f''_{11} - 2y^2 f''_{12} + 2x^2 f''_{21} - 4xy f''_{22} + f'_1 \\ &= xy f''_{11} + 2(x^2 - y^2) f''_{12} - 4xy f''_{22} + f'_1. \end{aligned}$$

如同记号  $f'_1, f'_2$  一样,记号  $f''_{11}, f''_{22}$  等不仅有明显的简化效果,而且可避免写出中间变量,因而有很大的优越性,值得采用.

**例 22** 设  $u = f(x, xy, xyz)$ ,  $f$  有二阶连续偏导数,求  $u_{xx}, u_{yy}, u_{yz}$ .

解 不明显写出中间变量:

$$\begin{aligned} u_x &= f'_1 + yf'_2 + yzf'_3; \\ u_{xx} &= (f'_1)_x + y(f'_2)_x + yz(f'_3)_x + yf'_3 \\ &= xy f''_{11} + xy^2 f''_{21} + xy^2 zf''_{31} + yf'_3. \\ u_y &= xf'_2 + xz f'_3. \\ u_{yy} &= x(f'_2)_y + xz(f'_3)_y \\ &= x(xf''_{22} + xz f''_{23}) + xz(xf''_{32} + xz f''_{33}) \\ &= x^2 f''_{22} + 2x^2 zf''_{23} + x^2 z^2 f''_{33}. \\ u_{yz} &= x(f'_2)_z + xf'_3 + xz(f'_3)_z \\ &= xf''_{23} \cdot xy + xf'_3 + xz f''_{33} \cdot xy \\ &= x^2 yf''_{23} + xf'_3 + x^2 yz f''_{33}. \end{aligned}$$

最后,类似于一元函数的微分形式不变性,多元复合函数的微分也具有形式不变性,通常称之为微分的链规则,即

$$df(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n f'_i(u_1, \dots, u_n) du_i.$$

现以二元函数  $z = f(u_1, u_2)$  为例,其中  $u_1 = u_1(x, y), u_2 = u_2(x, y)$ , 即  $z = f(u_1, u_2) = f(u_1(x, y), u_2(x, y))$

来证明链规则. 由全微分公式(5)得

$$\begin{aligned} dz &= z_x dx + z_y dy \\ &= \left( z_{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + z_{u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) dx + \left( z_{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial y} + z_{u_2} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) dy \\ &= z_{u_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} dx + \frac{\partial u_1}{\partial y} dy \right) + z_{u_2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} dx + \frac{\partial u_2}{\partial y} dy \right) \\ &= z_{u_1} du_1 + z_{u_2} du_2. \end{aligned}$$

上式说明尽管  $u_1, u_2$  是中间变量, 但全微分  $dz$  与  $u_1, u_2$  是自变量时在形式上完全一致, 故又称这个性质为一阶全微分形式不变性. 恰当地利用这个重要性质, 常会得到很好的效果.

例 23 设  $z = e^{xy} \sin(y^2/x)$ , 求  $dz$ .

解 综合运用积商的微分规则和链规则, 有

$$\begin{aligned} dz &= \sin(y^2/x) de^{xy} + e^{xy} d(\sin(y^2/x)) \\ &= e^{xy} \sin(y^2/x) d(xy) + e^{xy} \cos(y^2/x) d(y^2/x) \\ &= e^{xy} \sin(y^2/x) (ydx + xdy) \\ &\quad + e^{xy} \cos(y^2/x) \cdot x^{-2} (2xydy - y^2dx) \\ &= e^{xy} [y\sin(y^2/x) - (y^2/x^2)\cos(y^2/x)] dx \\ &\quad + e^{xy} [x\sin(y^2/x) + 2(y/x)\cos(y^2/x)] dy. \end{aligned}$$

例 24 设  $z = f(xy, x/y)$ ,  $f$  有连续偏导数, 求  $dz$  与  $z_x, z_y$ .

解 首先运用链规则, 有

$$\begin{aligned} dz &= f'_1 d(xy) + f'_2 d(x/y) \\ &= (ydx + xdy) f'_1 + y^{-2} (ydx - xdy) f'_2 \\ &= (yf'_1 + y^{-1} f'_2) dx + (xf'_1 - xy^{-2} f'_2) dy. \end{aligned}$$

将所得结果与公式  $dz = z_x dx + z_y dy$  比较得

$$z_x = yf'_1 + y^{-1} f'_2, \quad z_y = xf'_1 - xy^{-2} f'_2.$$

形式上,  $z_x, z_y$  是  $dz$  的表达式中  $dx$  与  $dy$  的“系数”.

### 9.2.5 隐函数微分法

在 3.4.1 中已提到, 由形如  $F(x, y) = 0$  的方程所确定的函数  $y = y(x)$  称为隐函数. 并非任何方程  $F(x, y) = 0$  都能确定一个隐函数. 例

如,方程  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  就不确定任何函数.下面的定理给出隐函数存在的条件及其导数的求法.

**定理 5(隐函数存在定理)** 设函数  $F(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内有连续偏导数  $F_x, F_y$ , 且  $F(x_0, y_0) = 0, F_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 则存在  $P_0$  的邻域  $U$  与含  $x_0$  的区间  $I$ , 使得在  $I$  上有唯一的可微函数  $y = y(x)$ , 满足  $y(x_0) = y_0, (x, y(x)) \in U$  以及  $F(x, y(x)) \equiv 0 (x \in I)$ , 且

$$y' = -F_x/F_y, \quad (10)$$

其中  $y'$  记  $y'(x), F_x$  记  $F_x(x, y(x)), F_y$  仿此.

定理证明的难点在于指明所述的  $y(x)$  存在且可微, 证明的这一部分从略. 至于求导公式(10)的推导则不困难: 利用公式(6)对恒等式  $F(x, y(x)) \equiv 0$  求导得

$$F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))y'(x) = 0. \quad (11)$$

由  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  及  $F_y$  连续, 知在  $(x_0, y_0)$  邻近有  $F_y(x, y) \neq 0$ , 于是可从式(11)解出  $y'(x)$ , 从而得出式(10).

公式(10)可朝两个方向推广. 首先, 它可直接应用于  $F$  含两个以上变元的情况. 例如, 若方程  $F(x, y, z) = 0$  确定隐函数  $z = z(x, y)$ , 则分别将  $y$  与  $x$  看作常数应用公式(10)得

$$z_x = -F_x/F_z, z_y = -F_y/F_z, \quad (12)$$

其中  $F_x$  记  $F_x(x, y, z(x, y)), F_y, F_z$  仿此. 应用公式(12)所需的条件可通过类比从定理 5 导出, 不详述. 另一方面, 公式(10)可推广到由方程组确定的隐函数. 常用的有以下两种情形.

**情形 I** 设函数  $F(x, u, v)$  与  $G(x, u, v)$  在点  $P_0(x_0, u_0, v_0)$  的某一个邻域内关于自变量的偏导数都连续, 且有

$$(1) F(x_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, u_0, v_0) = 0,$$

$$(2) \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}_{P_0} \neq 0, \left[ \text{记} \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = J, \text{称为 Jacobi 行列式.} \right]$$

则存在  $P_0$  的邻域  $U$  与含  $x_0$  的区间  $I$ , 使得在  $I$  上有唯一的一组可微函数  $u = u(x), v = v(x) (x \in I)$ , 满足  $u_0 = u(x_0), v_0 = v(x_0), (x, u(x), v(x)) \in U$  以及方程组:

$$\begin{cases} F(x, u(x), v(x)) = 0, \\ G(x, u(x), v(x)) = 0. \end{cases}$$

并且有如下的导数计算公式

$$\frac{du}{dx} = - \begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} / J, \quad \frac{dv}{dx} = - \begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} / J. \quad (13)$$

**情形 II** 设函数  $F(x, y, u, v)$  与  $G(x, y, u, v)$  在  $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$  的某个邻域内关于自变量的偏导数都连续. 且有

$$(1) \quad F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \quad G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0;$$

$$(2) \quad J(P_0) \neq 0, \quad J \text{ 同情形 I.}$$

则存在  $P_0$  的邻域  $U$  与含  $(x_0, y_0)$  的邻域  $D$ , 使得在  $D$  上有唯一的一组可微函数  $u=u(x, y), v=v(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ ), 满足  $u_0=u(x_0, y_0), v_0=v(x_0, y_0), (x, y, u(x, y), v(x, y))$  以及方程组:

$$\begin{cases} F(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0, \\ G(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0 \end{cases}$$

并且有如下的偏导数计算公式

$$\begin{aligned} u_x &= - \begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} / J, \quad u_y = - \begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix} / J, \\ v_x &= - \begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} / J, \quad v_y = - \begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix} / J. \end{aligned} \quad (14)$$

**例 25** 设  $z=z(x, y)$  是由方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$  所确定的隐函数, 求  $z_x, z_y$ .

解 令  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$ , 则

$$F_x = 2x, \quad F_y = 2y, \quad F_z = 2(z-2).$$

于是套用公式(12)得  $z_x = x/(2-z), z_y = y/(2-z)$  ( $z \neq 2$ ).

**例 26** 设函数  $z=z(x, y)$  由方程  $f(xy, y^2, x-z)=0$  所确定,  $f$  有连续偏导数, 求  $z_x, z_y$ .

解 I 令  $F(x, y, z) = f(xy, y^2, x-z)$ , 则

$$F_x = yf'_1 + f'_3, \quad F_y = xf'_1 + 2yf'_2, \quad F_z = -f'_3.$$

然后用公式(12)得

$$z_x = (yf'_1 + f'_3)/f'_3, \quad z_y = (xf'_1 + 2yf'_2)/f'_3 (f'_3 \neq 0).$$

**解 II** 将等式  $f(xy, y^2, x-z)=0$  分别对  $x, y$  求导(将  $z$  看做  $x, y$  的函数), 得出关于  $z_x, z_y$  的方程:

$$yf'_1 + (1-z_x)f'_3 = 0,$$

$$xf'_1 + 2yf'_2 - z_y f'_3 = 0.$$

解此两方程,便同样得到所要求的  $z_x, z_y$ .

**解 III** 将等式  $f(xy, y^2, x-z)=0$  两边全微分,得

$$(ydx+xdy)f'_1 + 2yf'_2 \cdot dy + (dx-dz)f'_3 = 0.$$

解出  $dz$ ,

$$dz = \frac{yf'_1 + f'_3}{f'_3} dx + \frac{xf'_1 + 2yf'_2}{f'_3} dy,$$

对比全微分公式(5)可以得到  $z_x$  和  $z_y$ .

**例 27** 设  $y=y(x)$  与  $z=z(x)$  由方程  $x+y+z=0$  与  $x^2+y^2+z^2=1$  确定,求  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ .

**解 I** 令  $F(x, y, z)=x+y+z, G(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-1$ , 则

$$F_x=F_y=F_z=1, G_x=2x, G_y=2y, G_z=2z.$$

于是套用公式(13)得

$$\frac{dy}{dx} = -\left| \begin{array}{cc} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{array} \right| \left/ \left| \begin{array}{cc} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{array} \right| \right. = \frac{x-z}{z-y};$$

同理可得  $\frac{dz}{dx} = (x-y)/(y-z)$ .

**解 II** 对方程  $x+y+z=0$  与  $x^2+y^2+z^2=1$  的两边对  $x$  求导, 得

$$\begin{cases} 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0, \\ 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

由此方程组即可解出  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ . 解法 II 更实用, 不用记忆上述的公式(13), (14).

**例 28** 设函数  $y=y(x)$  与  $z=z(x)$  由方程组

$$z=f(x, y), y=g(x, z)$$

确定,  $f$  与  $g$  有连续偏导数且  $f_z g_z \neq 1$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ .

解 令  $F(x, y, z) = f(x, y) - z, G(x, y, z) = g(x, z) - y$ , 则

$$F_x = f_x, \quad F_y = f_y, \quad F_z = -1;$$

$$G_x = g_x, \quad G_y = -1, \quad G_z = g_z.$$

于是用公式(13)得

$$\frac{dy}{dx} = - \begin{vmatrix} f_x & -1 \\ g_x & g_z \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} f_y & -1 \\ -1 & g_z \end{vmatrix} = \frac{f_x g_z + g_x}{1 - f_y g_z}.$$

类似地有  $\frac{dz}{dx} = (f_y g_x + f_x) / (1 - f_y g_z)$ .

若对方程组关于  $x$  求导得出

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = g_x + g_z \frac{dz}{dx},$$

则由此同样可解出  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ , 而不必套公式(13). 对于具体问题, 后一解法通常更为可取.

**例 29(反函数存在定理)** 设函数  $x = x(u, v), y = y(u, v)$  在点  $(u, v)$  的某一邻域内有一阶连续偏导数, 且  $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ . 求证方程组

$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$  在点  $(x, y, u, v)$  的某一邻域内唯一确定具有一阶连续偏导数的反函数  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ .

解 将上述方程组写成

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = x - x(u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = y - y(u, v) = 0, \end{cases}$$

则由

$$J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x_u & -x_v \\ -y_u & -y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

和隐函数定理 II 立即可以得出所要证明的结论.

**例 30** 设函数  $z = z(x, y)$  满足方程组

例 30 设函数  $z = u e^v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = uv$ , 求  $z_x, z_y$ . (15)

求  $z_x, z_y$ .

解 I 由  $z = uv$  有

$$z_x = u_x v + u v_x, z_y = u_y v + u v_y. \quad (16)$$

为求  $u_x, v_x$ , 将(15)的前两个方程对  $x$  求导(视  $u, v$  为  $x, y$  的二元函数):

$$1 = e^v u_x + u e^v v_x, 0 = u_x \sin v + u v_x \cos v,$$

由此解出

$$u_x = \frac{\cos v}{e^v (\cos v - \sin v)}, v_x = \frac{-\sin v}{u e^v (\cos v - \sin v)},$$

类似地求得

$$u_y = -\frac{1}{\cos v - \sin v}, v_y = \frac{1}{u (\cos v - \sin v)}.$$

将以上结果代入式(16)得出

$$z_x = \frac{v \cos v - \sin v}{e^v (\cos v - \sin v)}, z_y = \frac{1 - v}{\cos v - \sin v}.$$

解 II 将(15)的三个方程对  $u, v$  求导得:

$$v = z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x e^v + z_y \sin v;$$

$$u = z_v = z_x x_v + z_y y_v = z_x u e^v + z_y u \cos v,$$

由此解出  $z_x, z_y$ , 可以得到同样结果.

隐函数的高阶偏导数的计算方法通常是在一阶偏导数的基础上直接进行对某变量的求导运算, 下面给出两个例子.

例 31 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $x = z e^{y+z}$  确定, 求  $z_{xy}$ .

解 首先算出

$$z_x = \frac{z}{x(z+1)}, z_y = \frac{1}{z+1} - 1;$$

然后有

$$\begin{aligned} z_{xy} &= z_{yx} = (z_y)_x = \left(\frac{1}{z+1}\right)_x = \frac{z}{(z+1)^2} \\ &= -\frac{z_x}{(z+1)^2} = -\frac{z}{x(z+1)^3}. \end{aligned}$$

(3) 例 32 设函数  $z=z(x,y)$  由方程  $F(x+z, xy)=0$  确定,  $F$  有连续的二阶偏导数, 求  $z_{xy}$ .

解 首先求出

$$(31) \quad z_x = -1 - \frac{yF'_2}{F'_1}, \quad z_y = -\frac{xF'_2}{F'_1}.$$

然后有

$$\begin{aligned} z_{xy} &= -y \left( \frac{F'_2}{F'_1} \right)_y - \frac{F'_2}{F'_1} = y \frac{F'_2(F'_1)_y - F'_1(F'_2)_y}{(F'_1)^2} - \frac{F'_2}{F'_1} \\ &= \frac{y[F'_2 \cdot (z_y F''_{11} + x F''_{12}) - F'_1 \cdot (z_y F''_{12} + x F''_{22})] - F'_1 \cdot F'_2}{(F'_1)^2} \\ &= \frac{y[z_y \cdot (F'_2 F''_{11} - F'_1 F''_{12}) + x(F'_2 F''_{12} - F'_1 F''_{22})] - F'_1 \cdot F'_2}{(F'_1)^2} \end{aligned}$$

代入  $z_y$  的表达式, 得

$$z_{xy} = \frac{xy(2F'_1 F'_2 F''_{12} - (F'_2)^2 F''_{11} - (F'_1)^2 F''_{22}) - (F'_1)^2 F'_2}{(F'_1)^3}$$



## 习题 9.2

1. 求下列函数的所有一阶偏导数:

$$(1) z=x^4+y^4-4x^2y^2; \quad (2) z=xy+(x/y);$$

$$(3) z=y^{-1}\cos x^2; \quad (4) z=\tan(x^2/y);$$

$$(5) z=x^y; \quad (6) z=\arctan \frac{x+y}{1-xy};$$

$$(7) z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}); \quad (8) u=(x/y)^x;$$

$$(9) u=1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}; \quad (10) u=x^{y/z}.$$

2. 设  $f(x,y)=(1+xy)^x$ , 求  $f_x(1,1), f_y(1,1)$ .

3. 设  $f(x,y)=\sin x \ln(y+1)+\cos y \ln(1-x)$ , 求  $f_x(0,0), f_y(0,0)$ .

4. 设  $u=x^y y^x$ , 求证  $xu_x+yu_y=(x+y+\ln u)u$ .

5. 设  $u=\ln(1+x+y^2+z^2)$ , 当  $x=y=z=1$  时计算  $u_x+u_y+u_z$ .

6. 求曲线  $\begin{cases} z=(x^2+y^2)/4, \\ y=4 \end{cases}$  在点  $(2,4,5)$  处的切线与  $x$  轴正向的夹角.

7. 求下列函数的全微分:

$$(1) z = x^2 + xy^2 + \sin y; \quad (2) z = x/y;$$

$$(3) z = \sin(x^2 + y^2); \quad (4) u = z/\sqrt{x^2 + y^2}.$$

8. 设  $z = z(x, y)$  由下列方程确定, 求  $dz, z_x, z_y$ :

$$(1) x + y + z = e^z; \quad (2) z^3 - 3xyz = a^3;$$

$$(3) f(x, x+y, x+y+z) = 0;$$

$$(4) f(x+y+z, x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

9. 求下列函数在指定点的全微分:

$$(1) z = x^2 + y^2 \sin(x+y), (0,0), (\pi/4, \pi/4);$$

$$(2) z = \ln(x^2 + y^2), (0,1), (1,1).$$

10. 证明下列函数在点  $(0,0)$  处不可微:

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} xy^2/(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = |x-y|; \quad (3) f(x, y) = \sqrt{|xy|}.$$

$$(11) \text{ 证明 } f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases} \text{ 在 } (0,0) \text{ 点连续, 偏导数}$$

存在且可微.

12. 求下列函数的导数  $u_t$ :

$$(1) u = xyz \text{ 且 } x = 1+t^2, y = \ln t, z = \tan t;$$

$$(2) u = e^{t-2y} \text{ 且 } x = \sin t, y = t^3;$$

$$(3) u = f(ty, t^2 + y^2), \text{ 其中 } y = \varphi(t), \text{ 且 } f \text{ 有连续偏导数, } \varphi \text{ 可微.}$$

13. 对下列函数求  $u_x, u_y$  (其中  $\varphi, f$  有连续偏导数):

$$(1) u = s^2 \ln t, \text{ 其中 } s = x/y, t = 3x - 2y;$$

$$(2) u = f(xy, x^2 + y^2); \quad (3) u = f(x, y, z), \text{ 其中 } z = \varphi(x, y);$$

$$(4) u = f(x+xy + xyz); \quad (5) u = f(x, xy, xyz).$$

14. 已知  $u = f(x-y, y-z, t-z)$ , 其中  $f$  有连续偏导数, 求

$$u_x + u_y + u_z + u_t.$$

$$15. \text{ 设 } u = f(x^2 + y^2 + z^2), f \text{ 可微, 求 } \frac{du}{dx}.$$

$$16. \text{ 设 } u = \int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2} dt (x > 0, y > 0), \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}.$$

17. 设  $f$  的导数存在, 验证下列各式:

$$(1) \text{ 若 } u = yf(x^2 + y^2), \text{ 则 } yu_x + xu_y = xu/y;$$

$$(2) \text{ 若 } u = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}, \text{ 则 } \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2};$$

$$(3) \text{ 若 } z = xy + xf(u) \text{ 且 } u = y/x, \text{ 则 } zx_x + yz_y = z + xy.$$

18. 求由下列方程所确定的函数  $z = f(x, y)$  的偏导数:

$$(1) x + y + z = e^z; \quad (2) xyz = x + y + z.$$

19. 设  $F$  有连续偏导数, 求  $z_x, z_y$ :

$$(1) F(x+y, y+z, z+x) = 0; \quad (2) F(x-y, y-z, z-x) = 0;$$

$$(3) F(x, x+y, x+y+z) = 0.$$

20. 设由方程  $z = x + y\varphi(z)$  确定函数  $z = z(x, y)$ , 且  $1 - y\varphi' \neq 0$ , 证明  $z_y = \varphi(z)z_x$ .

21. 求下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x + y + z = 4, \end{cases} \text{求 } \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx};$$

$$(2) \begin{cases} xu + yv = 0, \\ yu + xv = 1, \end{cases} \text{求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$(3) \begin{cases} u + v = x, \\ u^2 + v^2 = y, \end{cases} \text{求 } \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

22. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$  确定的隐函数且  $z < 2$ , 而

$$u = xy^2 z^3, \text{求 } \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}.$$

23. 已知  $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + xz^2$ , 求  $f_{xx}(1, 2, 3)$  与  $f_{xyz}(4, 5, 6)$ .

24. 求  $z = y^{\ln x}$  的所有二阶偏导数.

$$25. \text{ 设 } z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}, \text{求 } z_{xx}, z_{xy}.$$

$$26. \text{ 设 } z = xf(y/x) + g(y/x), \text{其中 } f, g \text{ 二阶可导, 求 } x^2 z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy}.$$

$$27. \text{ 设 } u = f(x+y, xy), f \text{ 有二阶连续偏导数, 求 } u_{xy}.$$

### § 9.3 方向导数与梯度

#### 9.3.1 方向导数

偏导数刻画了当单个自变量的变动所引起函数值的变动的变化率. 如果让所有自变量按照某个比例关系变动, 所引起的函数值的变化

率也是一个重要的概念. 这便是下面的方向导数概念.

**定义 1** 设函数  $u=f(x, y, z)$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的某邻域内有定义.  $\mathbf{n}=\{a, b, c\}$  是一非零矢量,  $l$  是从点  $P_0$  出发且沿方向  $\mathbf{n}$  的射线,  $P(x_0+sa, y_0+sb, z_0+sc)$  ( $s>0$ ) 为  $l$  上的点,  $\rho=|P_0P|$ . 若极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\rho}$$

存在, 则称其为  $f(x, y, z)$  在点  $P_0$  沿方向  $\mathbf{n}$  的方向导数, 记作  $\partial f(P_0)/\partial n$  或  $\partial u(P_0)/\partial n$ , 即

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial n} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+ax, y_0+bs, z_0+cs) - f(x_0, y_0, z_0)}{s \sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \quad (1)$$

显然, 若偏导数  $f_x(P_0)$  存在, 则它就是  $f$  在点  $P_0$  沿方向  $i$  的方向导数; 而  $f$  在点  $P_0$  沿方向  $-i$  的方向导数为  $-f_x(P_0)$ . 对于沿方向  $j$ ,  $k$  的方向导数有类似结果. 鉴于任何非零矢量  $\mathbf{n}$  有分解式  $\mathbf{n}=n_i\mathbf{i}+n_j\mathbf{j}+n_k\mathbf{k}$  ( $\S 8.2(4)$ ), 自然期望通过  $f_x(P_0)$ ,  $f_y(P_0)$  与  $f_z(P_0)$  的某一组合来表示  $\partial f(P_0)/\partial n$ . 下面的结果在一定条件下证实了这一设想.

**定理 1** 设  $f(x, y, z)$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  可微,  $\mathbf{n}$  是一非零矢量, 它的方向余弦为  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , 则方向导数  $\partial f(P_0)/\partial n$  存在, 且

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial n} = f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \cos \beta + f_z(P_0) \cos \gamma. \quad (2)$$

**证** 设  $l$  是从  $P_0$  出发且沿方向  $\mathbf{n}$  的射线. 在  $l$  上任取一点  $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ , 令  $\rho=|P_0P|$ , 则

因  $f$  在点  $P_0$  可微, 故有 (参照  $\S 9.2$  公式(3)(4))

$$f(P) - f(P_0) = f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z + o(\rho).$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(P_0)}{\partial n} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ f_x(P_0) \frac{\Delta x}{\rho} + f_y(P_0) \frac{\Delta y}{\rho} + f_z(P_0) \frac{\Delta z}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho} \right] \\ &= f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \cos \beta + f_z(P_0) \cos \gamma. \end{aligned}$$

**注** 公式(2)可以用矢量记成以下形式:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial n} = \{f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)\} \cdot \mathbf{n}^0.$$

若  $u=f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微,  $\mathbf{n}$  是  $xy$  平面上的非零矢量, 则方向导数  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial n}$  存在, 且有

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial n} = \{f_x(P_0), f_y(P_0)\} \cdot \mathbf{n}^0, \quad (3)$$

其中  $\alpha$  是  $x$  轴正向到  $\mathbf{n}$  的转角. 由  $x$  轴正向逆时针方式转到  $\mathbf{n}$  的角取为正值. 而顺时针方式转到  $\mathbf{n}$  的角取为负值.

试看几个应用公式(2)与(3)的例子.

**例 1** 设  $u=x+y^2+z^3$ , 求  $u$  在点  $P_0(1, 1, 1)$  沿方向  $\mathbf{n}=\{2, -2, 1\}$  的方向导数.

**解** 显然  $u$  可微, 故可用公式(2). 首先求出  $u_x(P_0)=1, u_y(P_0)=2, u_z(P_0)=3, \mathbf{n}^0=\{2/3, -2/3, 1/3\}$ . 然后套用公式(2)得

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial n} = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

**例 2** 设  $u=xe^{2y}$ , 给定点  $P(1, 1)$  与  $Q(2, 0)$ , 求  $u$  在点  $P$  沿方向  $\overrightarrow{PQ}$  的方向导数.

**解** 令  $\mathbf{n}=\overrightarrow{PQ}$ , 则  $\mathbf{n}=i-j, \mathbf{n}^0=(i-j)/\sqrt{2}$ . 其次,  $u_x(P)=e^2, u_y(P)=2e^2$ , 于是依公式(3)有

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = \frac{e^2}{\sqrt{2}} - \frac{2e^2}{\sqrt{2}} = -\frac{e^2}{\sqrt{2}}.$$

**例 3** 设函数  $u=f(x, y)$  有连续偏导数.  $f(x, y)=C$  是一条等值线. 如果在其上点  $P_0(x_0, y_0)$  处,  $f_y(P_0) \neq 0$ . 求等值线在点  $P_0$  的法线方向矢量  $\mathbf{n}$  以及  $\frac{\partial u(P_0)}{\partial n}$ .

**解** 由隐函数求导法则知等值线的切线斜率为  $\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(P_0)}{f_y(P_0)}$ , 从而切线方向矢量为  $\{f_y(P_0), -f_x(P_0)\}$  取与之垂直的矢量  $\pm\{f_x(P_0), f_y(P_0)\}$  作为法线方向矢量  $\mathbf{n}$ . 从而

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial n} = \{f_x(P_0), f_y(P_0)\} \cdot \mathbf{n}^0 = \pm \sqrt{f_x^2(P_0) + f_y^2(P_0)}.$$

由定理 1 知, 可微性保证方向导数存在. 但下面的例子表明, 方向导数存在推不出可微, 甚至推不出偏导数存在.

**例 4** 研究函数  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  在点  $(0, 0)$  的偏导数及方向导数的存在性、可微性.

解 因  $f(x, 0) = |x|$  在  $x = 0$  不可微, 故  $f_x(0, 0)$  不存在; 同理  $f_y(0, 0)$  不存在. 由 § 9.2 定理 2,  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  便不可微. 另一方面, 对任何  $n = i \cos \alpha + j \sin \alpha$ , 存在方向导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(0, 0)}{\partial n} &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) - f(0, 0)}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \\ &= 1.\end{aligned}$$

### 9.3.2 梯度

若令  $\mathbf{g} = \{f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)\}$ , 则公式(2)可进一步缩写成

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial n} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}^0. \quad (4)$$

若以  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) 记  $\mathbf{g}$  与  $\mathbf{n}$  之间的夹角, 则式(4)相当于(根据矢量内积的定义)

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial n} = |\mathbf{g}| \cos \theta. \quad (5)$$

式(5)表明, 若  $\mathbf{g} \neq 0$ , 则仅当  $\theta = 0$  时,  $\partial f(P_0)/\partial n$  取得最大值, 且此最大值就是  $|\mathbf{g}|$ . 换言之,  $f$  沿方向  $\mathbf{g}$  增长最快, 且这个最大的方向导数就是  $\mathbf{g}$  的模. 可见, 矢量  $\mathbf{g}$  有重要意义, 因此引入

**定义 2** 若  $u = f(x, y, z)$  在点  $P_0$  存在对各变元的偏导数, 则称矢量  $\{f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)\}$  为函数  $f$  在点  $P_0$  的梯度, 记作  $\text{grad } f(P_0)$  或  $\text{grad } u(P_0)$ , 即

$$\text{grad } f(P_0) = \{f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)\}. \quad (6)$$

利用定义 2, 现在可将定理 1 改述为: 若  $f(x, y, z)$  在点  $P_0$  可微, 则对任一非零矢量  $\mathbf{n}$ , 有

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial n} = \mathbf{grad} f(P_0) \cdot \mathbf{n}^0. \quad (7)$$

若函数  $u=f(x,y,z)$  在区域  $D$  上处处存在偏导数  $f_x, f_y, f_z$ , 则梯度  $\mathbf{grad} f(P)$  ( $P \in D$ ) 是一个随点  $P$  变动的矢量, 简写作  $\mathbf{grad} f$  或  $\mathbf{grad} u$ , 即

$$\mathbf{grad} u = \{u_x, u_y, u_z\}. \quad (8)$$

对于二元函数  $u=f(x,y)$ , 与式(8)相应的公式是

$$\mathbf{grad} u = \{u_x, u_y\}. \quad (9)$$

例 5 求  $\mathbf{grad} \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ .

解 令  $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ,  $\mathbf{r}=\{x, y, z\}$ , 则  $r=|\mathbf{r}|$ ,  $r_x=x/r$ ,  $r_y=y/r$ ,  $r_z=z/r$ , 于是  $\mathbf{grad} r=\mathbf{r}/r$  ( $r \neq 0$ ).

例 6 设  $u=xy^2+yz^3$ , 求  $u$  在点  $P_0(2, -1, 1)$  的梯度及梯度的模与方向余弦.

解 分别算出  $u_x(P_0)=1$ ,  $u_y(P_0)=-3$ ,  $u_z(P_0)=-3$ , 于是

$$\mathbf{grad} u(P_0)=\{1, -3, -3\};$$

$$|\mathbf{grad} u(P_0)|=\sqrt{19}.$$

进而得出  $\mathbf{grad} u(P_0)$  的方向余弦为

$$\cos \alpha=1/\sqrt{19}, \cos \beta=\cos \gamma=-3/\sqrt{19}.$$



### 习题 9.3

1. 设平面矢量  $\mathbf{n}$  与  $x$  轴正向夹角为  $60^\circ$ , 求函数  $u=x^2-y^2$  在点  $M(1,1)$  处沿方向  $\mathbf{n}$  的方向导数.

2. 给定点  $M(5,1,2)$ ,  $N(9,4,14)$ , 求函数  $u=xyz$  在点  $M$  处沿  $MN$  的方向导数.

3. 求  $u=x^2-xy+y^2$  在点  $(1,1)$  处沿方向  $\mathbf{n}=\{\cos \alpha, \sin \alpha\}$  的方向导数, 并指出:

(1) 沿哪个方向它的方向导数最大?

(2) 沿哪个方向它的方向导数最小?

(3) 沿哪个方向方向导数为零?

4. 求函数  $u = \ln(x^2 + y^2)$  在点  $M(x_0, y_0)$  处沿它在此点的梯度方向的方向导数.

5. 求函数  $u = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$  在点  $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$  处沿曲线  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  在该点的法线方向的方向导数.

6. 求下列函数在指定点的梯度:

$$(1) u = x^3 + y^3 - 3xy, M(2, 1); \quad (2) u = xyz, M(2, 1, 1);$$

$$(3) u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, M(x_0, y_0, z_0).$$

7. 求  $u = x^2 + y^2 - z^2$  在点  $A(a, 0, 0)$  与  $B(0, a, 0)$  两点的梯度间的夹角.

## § 9.4 微分学的几何应用

### 9.4.1 曲线的切线与法平面

设曲线  $C$  由如下参数方程给定:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (t \in I), \quad (1)$$

其中  $I$  是某个区间. 约定  $r = \{x, y, z\}$ ,  $r(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ , 则方程组(1)缩写成矢量形式:  $r = r(t)$  ( $t \in I$ ). 称  $r(t)$  为定义于  $I$  上的矢量函数.

**定义 1** 若  $x(t), y(t)$  与  $z(t)$  可导, 则说  $r(t)$  可导, 且规定  $r(t)$  的导数为

$$\frac{dr}{dt} = r'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}. \quad (2)$$

若  $r'(t_0) \neq \mathbf{0}$  (这等价于  $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$  不同时为零), 则称  $r'(t_0)$  (及任何与  $r'(t_0)$  共线的非零矢量) 为曲线  $C$  在点  $P_0$  的切矢量(也简称切矢),  $P_0$  记点  $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ . 若  $r'(t)$  存在、连续(这意味着  $x'(t), y'(t), z'(t)$  皆连续) 且  $r'(t) \neq \mathbf{0}$ , 则称  $C$  为光滑曲线.

简言之, 光滑曲线就是切矢量连续变动的曲线. 若曲线  $C$  可分为有限段, 每一段为光滑曲线, 则称  $C$  为分段光滑曲线.

**定义 2** 设  $t_0 \in I, x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$ . 若  $r'(t_0)$  存在且非零矢量,  $T$  是过点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  且以  $r'(t_0)$  为方向矢的直线,  $N$

是过点  $M_0$  且以  $r'(t_0)$  为法矢的平面, 则分别称  $T$  与  $N$  为曲线  $C$  在点  $M_0$  的切线与法平面.

依空间解析几何直线与平面的表示法及(1),  $T$  与  $N$  的方程分别为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}. \quad (3)$$

与

$$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0. \quad (4)$$

**注 1** 令  $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  仿此; 以  $M$  记  $C$  上的点  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ , 则直线  $M_0M$  (称它为曲线  $C$  的割线) 的方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{\Delta y} = \frac{z-z_0}{\Delta z}.$$

与方程(3)对照看出, 切线  $T$  正是割线  $M_0M$  在  $M \rightarrow M_0$  时的极限.

**注 2** 若平面曲线由方程  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  ( $t \in I$ ) 中其给出,  $t_0 \in I$ ,  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $x'(t_0)$  与  $y'(t_0)$  不同时为零, 则曲线在点  $(x_0, y_0)$  的切线与法线方程分别为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} \quad (5)$$

与

$$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) = 0. \quad (6)$$

**注 3** 若平面曲线由方程  $y=y(x)$  ( $x \in I$ ) 给出,  $x_0 \in I$ , 则可将  $x$  看成参数方程的参数

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases} \quad (x \in I).$$

则曲线在点  $(x_0, y_0)$  的切线与法线方程分别为

$$\frac{x-x_0}{y'(x_0)} = \frac{y-y_0}{y'(x_0)} \quad \text{即} \quad y-y_0 = y'(x_0)(x-x_0)$$

$$\text{与} \quad 1 \cdot (x-x_0) + y'(x_0)(y-y_0) = 0 \quad \text{即} \quad x-x_0 = -y'(x_0)(y-y_0).$$

**注 4**  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$  与  $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  都是曲线  $C$  的割线的方向矢量.

1° 当  $t > t_0$  即  $\Delta t > 0$  时,  $\Delta \mathbf{r}$  指向  $t$  增大方向(图 9-8).

从而  $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  也是指向  $t$  增大方向.

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\} \text{ 指向 } t \text{ 增大方向.}$$

2° 当  $t < t_0$  即  $\Delta t < 0$  时,  $\Delta \mathbf{r}$  指向  $t$  减小方向,  $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  指向  $t$  增大方向,

故同样可得  $\mathbf{r}'(t_0)$  是指向  $t$  增大方向.

综上所述, 可知  $\mathbf{r}'(t_0)$  是曲线  $C$  在  $(x_0, y_0, z_0)$  这一点的切矢量且指向  $t$  增大方向.

**例 1** 求螺旋线  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$  ( $a, b > 0$ ) 在  $t = \pi/2$  处的切线与法平面方程.

解  $t = \pi/2$  对应曲面上的点  $(0, a, b\pi/2)$ . 算出

$$x'(\pi/2) = -a, y'(\pi/2) = 0, z'(\pi/2) = b,$$

然后套用式(3), (4)得出, 所求的切线与法平面方程分别为

$$\frac{x}{-a} = \frac{y-a}{0} = \frac{z-(b\pi/2)}{b},$$

与

$$2ax - 2bz + b^2\pi = 0.$$

**例 2** 在曲线  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$  上求一点, 使曲线在此点的切线平行于平面  $x + 2y + z = 4$ .

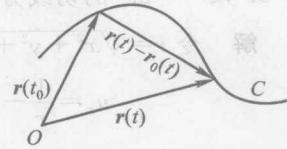
解 曲线的切矢  $\tau = \{1, 2t, 3t^2\}$ ; 所给平面的法矢  $\mathbf{n} = \{1, 2, 1\}$ . 切线平行于所给平面相当于  $\tau$  与  $\mathbf{n}$  垂直, 即

$$\tau \cdot \mathbf{n} = 1 + 4t + 3t^2 = 0,$$

由此解出  $t = -1, -1/3$ , 故合于要求的点有两个:  $(-1, 1, -1)$  与

$$(-1/3, 1/9, -1/27).$$

**例 3** 求函数  $u = x / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  在点  $P(1, 2, -2)$  沿曲线  $x = t$ ,



$y=2t^2$ ,  $z=-2t^4$  的切线方向( $t$  增大方向)的方向导数.

解 令  $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ , 则  $u=x/r$ , 有

$$u_x=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}, u_y=-\frac{xy}{r^3}, u_z=-\frac{xz}{r^3};$$

$$\text{grad } u(P)=\left\{\frac{8}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{2}{27}\right\}.$$

曲线的切矢  $\tau=\{1, 4t, -8t^3\}$ ; 以  $t=1$  代入得  $\tau=\{1, 4, -8\}$ . 于是

$$\frac{\partial u(P)}{\partial \tau}=\text{grad } u(P) \cdot \tau^0$$

$$=\left\{\frac{8}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{2}{27}\right\} \cdot \left\{\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{9}\right\}=-\frac{16}{243}.$$

#### 9.4.2 曲面的切平面与法线

设曲面  $S$  由以下方程给定:

$$F(x, y, z)=0 \quad (7)$$

其中  $F(x, y, z)$  是某空间区域  $V$  内的函数. 以下定义类似前面空间曲线的相关定义.

**定义 3** 设点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  在曲面  $S$  上,  $F(x, y, z)$  于点  $P_0$  处可微, 若矢量  $n=\text{grad } F(P_0) \neq 0$ , 则称它(及任何与之平行的非零矢量)为曲面  $S$  在点  $P_0$  处的法矢量(简称为法矢), 若  $F$  有连续的偏导数且处处  $\text{grad } F \neq 0$ (这等价于  $F_x, F_y, F_z$  不会同时为零), 则称  $S$  为光滑曲面.

简言之, 光滑曲面就是法矢量连续变动的曲面. 若曲面  $S$  可分为有限多片, 每片为光滑曲面, 则称  $S$  为分片光滑曲面.

以下定义恰与定义 2 相对应.

**定义 4** 设  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  是光滑或分片光滑曲面  $S$  上一点,  $n=\text{grad } F(P_0) \neq 0$ ,  $T$  是过点  $P_0$  且以  $n$  为法矢的平面,  $N$  是过点  $P_0$  且以  $n$  为方向矢的直线, 则分别称  $T$  与  $N$  为曲面  $S$  在点  $P_0$  的切平面与法线.

依 § 8.4(1) 及(6),  $T$  与  $N$  的方程分别为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0 \quad (8)$$

与

$$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(P_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(P_0)}. \quad (9)$$

若曲面  $S$  由方程  $z=f(x, y)$  给定, 令  $F(x, y, z)=f(x, y)-z$ , 则  $\text{grad } F=\{f_x, f_y, -1\}$ , 于是方程(8)与(9)分别成为

$$z-z_0=f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0) \quad (10)$$

与

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}, \quad (11)$$

其中  $z_0=f(x_0, y_0)$ .

注意到(10)式右端恰好是  $z=f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的全微分, 而左端是切平面上点的竖坐标的改变量. 因此, 函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的全微分在几何上表示曲面  $z=f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处切平面上点的竖坐标的改变量.

**注 5** 设  $L$  是曲面  $S$  上过点  $P_0$  的任一光滑曲线, 其参数方程为  $x=x(t), y=y(t), z=z(t), t=t_0$  对应点  $P_0$ . 微分等式  $F(x(t), y(t), z(t))=0$  得出

$$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) = 0,$$

其中  $F_x=F_x(x(t), y(t), z(t)), F_y, F_z$  仿此. 以  $t=t_0$  代入上式得  $\text{grad } F(P_0) \cdot \tau=0$ , 其中  $\tau=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$  是  $L$  在点  $P_0$  的切矢量. 可见  $L$  在点  $P_0$  的切线在平面(8)上. 这就得出: 曲面  $S$  在点  $P_0$  的切平面是包含任何位于曲面上的曲线在  $P_0$  的切线的平面.

**注 6** 若平面曲线由方程  $F(x, y)=0$  给定,  $F(x_0, y_0)=0$ ,  $\text{grad } F(x_0, y_0) \neq 0$ , 则利用上册 § 3.1(7), (8) 及隐函数求导公式容易推出, 曲线在点  $(x_0, y_0)$  的切线与法线方程分别为

$$F_x(x_0, y_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0)(y-y_0) = 0 \quad (12)$$

与

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0)}. \quad (13)$$

将(8), (9)与(12), (13)类比, 有助于记住这些公式.

**注 7** 梯度的意义

设  $u=F(x, y, z)$ , 它的等量面  $S$  为  $F(x, y, z)=C$  ( $C$  为任意常数)

数).由本节内容可知  $S$  的法矢量  $\mathbf{n} = \pm \{F_x, F_y, F_z\} = \pm \text{grad } u$ , 于是  
 $\mathbf{n} \parallel \text{grad } u$ .

另外函数  $u = F(x, y, z)$  在梯度方向的方向导数为  $\mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} =$

$|\mathbf{g}|$  ( $\mathbf{g} = \text{grad } u$ ). 矢量  $\mathbf{g}$  指向了函数增加最快的方向.

于是得出结论: 函数  $u = F(x, y, z)$  的梯度  $\mathbf{g}$  与其等量面  $S$  垂直, 且指向函数值增加的方向.

**例 4** 求曲面  $z = x^2 + y^2 - 1$  在点  $(2, 1, 4)$  的切平面与法线方程.

解 算出  $z_x(2, 1) = 4$ ,  $z_y(2, 1) = 2$ , 然后套用(10), (11)得出, 所求的切平面与法线方程分别为

$$z - 4 = 4(x - 2) + 2(y - 1)$$

与

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1},$$

其中切平面方程可简化为  $4x + 2y - z = 6$ .

**例 5** 求曲面  $z = y + \ln(x/z)$  在点  $P_0(1, 1, 1)$  的切平面与法线方程.

解 令  $F(x, y, z) = y + \ln(x/z) - z$ , 则  $\text{grad } F(P_0) = \{1, 1, -2\}$ , 于是依式(8), (9)得出, 所求切平面与法线方程分别为

$$(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0$$

与

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2},$$

其中切平面方程可简化为  $x + y - 2z = 0$ .

**例 6** 求曲面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  的平行于平面  $x + 4y + 6z = 0$  的切平面.

解 令  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$ , 则  $\mathbf{n} = \text{grad } F = \{2x, 4y, 6z\}$  为曲面的法矢. 曲面切平面与所给平面平行的充要条件是: 法矢  $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{n}_1 = \{1, 4, 6\}$  共线, 即  $2x = 4y/4 = 6z/6$  ( $\S 8.2$  定理 1). 以  $2x = y = z$  代入曲面方程, 解出  $x = \pm 1$ ,  $y = z = \pm 2$ . 于是曲面在点

(1,2,2)与(-1,-2,-2)的切平面合乎所求,它们的方程分别是

$$2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0$$

与

$$-2(x+1)+8(y+2)-12(z+2)=0,$$

简化后为  $x+4y+6z=21$  与  $x+4y+6z=-21$ .

**例 7** 证明:曲面  $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$  ( $a>0$ ) 的切平面在诸坐标轴上所截线段的长度之和为常量.

**证** 任取曲面上一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ( $x_0, y_0, z_0>0$ ),依式(8)写出曲面在点  $P_0$  的切平面方程:

$$\frac{x-x_0}{2\sqrt{x_0}}+\frac{y-y_0}{2\sqrt{y_0}}+\frac{z-z_0}{2\sqrt{z_0}}=0.$$

利用  $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$ ,可将以上方程化为“截距式”:

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1.$$

于是切平面在坐标轴上所截线段的长度之和为:

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a.$$

若曲线  $C$  是曲面  $S_1$  与  $S_2$  的交线,  $S_i$  由方程  $F_i(x, y, z)=0$  ( $i=1, 2$ ) 给出, 则  $C$  的切矢量同时垂直于  $S_1$  与  $S_2$  的法矢(参考注 4), 于是可用  $\text{grad } F_1 \times \text{grad } F_2$  作为曲线  $C$  的切矢量.

**例 8** 求曲线  $\begin{cases} x^2+z^2=10 \\ y^2+z^2=10 \end{cases}$  在点  $P(1,1,3)$  的切线与法平面方程.

**解** 令  $F_1(x, y, z)=x^2+z^2-10$ ,  $F_2(x, y, z)=y^2+z^2-10$ , 算出

$$\text{grad } F_1(P)=\{2, 0, 6\}, \quad \text{grad } F_2(P)=\{0, 2, 6\},$$

$$\text{grad } F_1(P) \times \text{grad } F_2(P)=-4\{3, 3, -1\}.$$

于是所求的切线与法平面方程分别为

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$$

与

$$3(x-1)+3(y-1)-(z-3)=0,$$

后者可简化为  $3x+3y+z=3$ .

 **习题 9.4**

1. 求曲线  $x = \sin^2 t, y = \sin t \cos t, z = \cos^2 t$  在对应于  $t = \pi/4$  的点处的切线与法平面方程.
2. 证明螺旋线  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$  的切线与  $Oz$  轴成定角.
3. 求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0, \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$  在点  $(1, 1, 1)$  处的切线和法平面.
4. 求曲线  $\begin{cases} x^2 - z = 0, \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$  在点  $(1, -2, 1)$  处的法平面与直线  $\begin{cases} 9x - 7y - 21z = 0, \\ x - y - z = 0 \end{cases}$  间的夹角.
5. 求曲线  $\begin{cases} xyz = 1, \\ y^2 = x \end{cases}$  在点  $(1, 1, 1)$  处切矢量的方向余弦.
6. 求下列曲面在指定点的切平面及法线方程:
  - (1)  $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ , 点  $(2, -3, 1)$ ;
  - (2)  $z = 2x^2 + 4y^2$ , 点  $(1, 1, -6)$ .
7. 在曲面  $z = xy$  上求一点, 使该点处的法线垂直于平面  $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ , 并写出此法线方程.
8. 证明锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  上的所有切平面都通过锥面顶点.
9. 平面  $3x + \lambda y - 3z + 16 = 0$  与椭球面  $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$  相切, 求  $\lambda$ .
10. 证明曲面  $xyz = a^2$  ( $a > 0$ ) 的切平面与三坐标平面围成的四面体的体积为常量.

---

**§ 9.5 极 值**


---

**9.5.1 自由极值**

以下设  $u = f(x, y)$  在区域  $D$  上有定义.

**定义 1** 设  $P_0$  是  $D$  的内点. 若存在  $P_0$  的去心邻域  $\overset{\circ}{N}$ , 使得  $\forall P \in$

$U$ , 有  $f(P) > f(P_0)$ , 则称  $f(P_0)$  为  $f$  的一个极小值; 称  $P_0$  为  $f$  的极小值点. 若  $\forall P \in D$ , 有  $f(P) \geq f(P_0)$ , 则称  $f(P_0)$  为  $f$  在  $D$  上的最小值. 类似地可定义极大值、极大值点与最大值. 极小值与极大值统称为极值; 与下文将介绍的“条件极值”相对应, 极值也称为自由极值. 极小值点与极大值点统称为极值点.

若  $P_0$  是  $D$  的内点,  $\text{grad } f(P_0) = \mathbf{0}$  (这意味着  $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$ ), 则称  $P_0$  为  $f$  的驻点. 我们曾经指出: 可微的一元函数的极值点必为驻点. 下面指明这一结论可推广到二元函数.

**定理 1(极值的必要条件)** 若  $P_0$  是  $f(x, y)$  的极值点, 且偏导数  $f_x(P_0)$  与  $f_y(P_0)$  存在, 则  $P_0$  是  $f$  的驻点.

**证** 在定理条件下, 一元函数  $f(x, y_0)$  在  $x_0$  的某邻域内有定义且以  $x_0$  为极值点, 因此  $f_x(x_0, y_0) = 0$ . 同理  $f_y(x_0, y_0) = 0$ , 故  $P_0$  是  $f$  的驻点.  $\square$

如同一元函数一样, 二元函数的驻点也不一定是极值点.

**例 1** 证明  $(0, 0)$  是函数  $u = xy$  的驻点而非极值点.

**证** 因  $u(x, 0) = u(0, y) = 0$ , 故  $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$ , 因此  $(0, 0)$  是  $u$  的驻点. 当  $x \neq 0$  时,  $u(x, x) = x^2 > 0$ ,  $u(x, -x) = -x^2 < 0$ , 可见  $u$  在  $(0, 0)$  的任何邻域内既取正值又取负值, 而  $u(0, 0) = 0$ , 因此  $(0, 0)$  不可能是  $u$  的极值点.

这就如同一元函数一样, 为使驻点成为极值点, 必须附加一定条件. 下面的结果正好是与 § 4.5 定理 1 对应的.

**定理 2(极值的充分条件)** 设  $P_0(x_0, y_0)$  是  $f$  在  $D$  内的驻点;  $f$  在  $D$  内有二阶连续偏导数, 记  $A = f_{xx}(P_0)$ ,  $B = f_{xy}(P_0)$ ,  $C = f_{yy}(P_0)$ ,  $\Delta = AC - B^2$ .

(i) 若  $\Delta > 0$ ,  $A > 0$  (或  $C > 0$ ), 则  $P_0$  是  $f$  的极小值点.

(ii) 若  $\Delta > 0$ ,  $A < 0$  (或  $C < 0$ ), 则  $P_0$  是  $f$  的极大值点.

(iii) 若  $\Delta < 0$ , 则  $P_0$  不是  $f$  的极值点.

**证** 在介绍了二元 Taylor 公式后进行.

**例 2** 求函数  $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$  的极值.

**解** 由方程组

得出驻点  $(1,0), (1,2), (-3,0), (-3,2)$ . 其次算出  
 $z_{xx} = 6(x+1), z_{xy} = 0, z_{yy} = 6(1-y);$   
 $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 36(x+1)(1-y).$

以  $x=1, y=0$  代入, 得  $\Delta = 72 > 0, A = 12 > 0$ . 由定理 2 知,  
 $z(1,0) = -5$  是极小值. 类似地可得出:  $z(-3,2) = 31$  是极大值;  
 $(1,2), (-3,0)$  不是极值点.

若定理 2 中的  $\Delta = 0$ , 则  $f$  在点  $P_0$  可能取极值, 亦可能不取极值.  
 例如, 对函数  $u = (x^2 + y^2)^2$  与  $z = xy^2$  在点  $(0,0)$  都可验证  $\Delta = 0$ , 但  
 $(0,0)$  显然是函数  $u$  的极小值点, 却不是函数  $z$  的极值点.

若  $f(x,y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 则它必在  $D$  上取得最大值与最小值(§ 9.1 定理 1), 分别记为  $M$  与  $m$ . 求  $M$  与  $m$  的程序如下(参照 4.5.2):

1° 求出  $f(x,y)$  在  $D$  内部的所有驻点及偏导数不存在的点, 将这些点作为受检点.

2° 求出  $f(x,y)$  在  $D$  的边界上的最大值  $M_1$  与最小值  $m_1$ .

3° 设  $P_1, P_2, \dots, P_n$  是受检点之全体, 则

$$M = \max\{M_1, f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)\};$$

$$m = \min\{m_1, f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)\}.$$

例 3 设  $D$  是由直线  $x+y=6$  与坐标轴所围的闭三角形域, 求  $z=x^2y(4-x-y)$  在  $D$  上的最大值  $M$  与最小值  $m$ .

解 1° 求驻点. 考虑方程组

$$\begin{cases} z_x = xy(8-3x-2y) = 0, \\ z_y = x^2(4-x-2y) = 0. \end{cases}$$

因当  $(x,y)$  在  $D$  内部时有  $x, y > 0$ , 故以

上方程组可简化成

$$\begin{cases} 3x+2y=8, \\ x+2y=4. \end{cases}$$

由此解出  $x=2, y=1, (2,1)$  即  $z$  在  $D$  内部的唯一驻点(图 9-9).

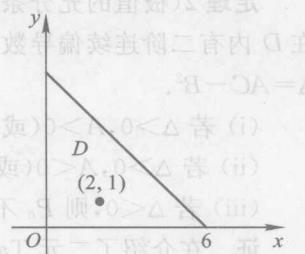


图 9-9

(1) 2° 求  $z$  在边界上的最大值与最小值. 在  $D$  的斜边上

令  $\varphi(x) = 2(x^3 - 6x^2)$ , 则  $\varphi'(x) = 6x(x-4)$ , 可见  $\varphi(x)$  在区间  $(0, 6)$  内有唯一驻点  $x=4$ . 比较  $\varphi(0)=\varphi(6)=0$  与  $\varphi(4)=-64$  得出:  $\varphi(x)$  在  $[0, 6]$  上的最大值与最小值分别为 0 与 -64. 其次, 在  $D$  的直角边上显然  $z=0$ . 因此,  $z$  在边界上有最大值  $M_1=0$ , 最小值  $m_1=-64$ .

3° 算出  $z(2, 1)=4$ , 比较 4 与  $M_1, m_1$  得

$$M = \max\{0, 4\} = 4, \quad m = \min\{-64, 0\} = -64.$$

对应的我们可以将 4.5.2 定理 2 做如下推广:

**定理 3** 设  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 在  $D$  内部可微且有唯一驻点  $P_0$ . 若  $f(x, y)$  在  $D$  上的最小(大)值不在边界上取到, 则必在  $P_0$  取到.

**例 4** 求  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)e^{xy}$  在闭单位圆  $D: x^2 + y^2 \leq 1$  上的最大值  $M$  与最小值  $m$ .

解 由  $f_x = f_y = 0$  得到方程组

$$\begin{cases} 2x + y(x^2 + y^2 - 1) = 0, \\ 2y + x(x^2 + y^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

第一个方程乘以  $x$  减去第二个方程乘以  $y$ , 得到  $2x^2 = 2y^2$ , 于是  $y = \pm x$ , 以此代入第二个方程得  $x(\pm 2 + 2x^2 - 1) = 0$ . 因  $\pm 2 + 2x^2 - 1 \neq 0$  (注意在  $D$  内  $|x| < 1$ ), 故  $x=0$ , 于是  $y=0$ . 这就得出  $f$  在  $D$  内部有唯一驻点  $(0, 0)$ . 因  $f(0, 0) = -1$ , 当  $x^2 + y^2 = 1$  时  $f(x, y) = 0$ , 故  $f(x, y)$  不可能在  $D$  之边界上取得最小值, 因此由定理 3 知  $m = f(0, 0) = -1$ . 其次, 因当  $x^2 + y^2 \leq 1$  时  $f(x, y) \leq 0$ , 故  $M=0$ .

### 9.5.2 条件极值

解例 3 时, 涉及求  $z(x, y)$  在线段  $x+y=6$  ( $0 \leq x \leq 6$ ) 上的最小值, 亦即求函数  $z(x, y)$  在条件  $x+y=6$  ( $0 \leq x \leq 6$ ) 之下的最小值. 一般地, 需要考察求“ $f(x, y)$  在条件  $g(x, y)=0$  下的极小值”的问题. 依照现代通行的写法, 这一问题可表为:

$$\min f(x, y); g(x, y) = 0, (x, y) \in D. \quad (1)$$

通常称(1)为“条件极小”或“约束极小”问题,其中  $f(x, y)$  是问题的目  
标函数,  $g(x, y) = 0$  是约束条件,  $f(x, y)$  与  $g(x, y)$  是某个区域  $D$  内的  
函数.

**定义 2** 设  $P_0 \in D$ . 若存在  $P_0$  的去心邻域  $\dot{N}$ , 使得  $\forall P \in \dot{N}$ , 当  
 $g(P) = 0$  时有  $f(P) > f(P_0)$ , 则称  $P_0$  为问题(1)的局部最优点, 简称  
为最优点, 而称  $f(P_0)$  为最优值(或称它为  $f(x, y)$  在条件  $g(x, y) = 0$  下的  
条件极小值). 若  $\forall P \in D$ , 当  $g(P) = 0$  时恒有  $f(P) \geq f(P_0)$ , 则称  $P_0$   
为问题(1)的整体最优点.

对“条件极大”问题也可作类似描述.

解问题(1)的主导想法是将其化为自由极值问题, 从而可应用定理  
1 与定理 2. 方法之一是将方程  $g(x, y) = 0$  参数化为  $x = x(t)$ ,  
 $y = y(t)$ , 于是问题归于求一元函数  $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$  的极小值. 特  
别, 若能从  $g(x, y) = 0$  解出  $y = y(x)$ , 则问题归于求  $\varphi(x) = f(x,  
y(x))$  的极小值问题. 例如, 例 3 中求  $z(x, y)$  在  $x + y = 6$  ( $0 \leq x \leq 6$ ) 上  
的最小值就是这样处理的. 不过, 在很多情况下, 这一方法未必简便. 方  
法之二是比较巧妙的 Lagrange 乘数法, 这正是下面要着重介绍的.

**Lagrange 乘数法** 关键是引进 Lagrange 函数

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y), \quad (2)$$

其中  $\lambda$  称为 Lagrange 乘数. 由(2)导出方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0, \\ L_y = f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0, \\ L_\lambda = g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

若  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})$  是方程组(3)的解, 则  $(\bar{x}, \bar{y})$  可能为问题(1)的最优点. 注意  
 $L_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) = L_y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) = 0$  正是函数  $L(x, y, \bar{\lambda})$  在点  $(\bar{x}, \bar{y})$  取极值的  
必要条件(定理 1). 可见, Lagrange 乘数法实际上是通过引进“待定乘  
数” $\lambda$ , 将条件极值问题(1)化为函数  $L(x, y, \lambda)$  的自由极值问题. 我们略  
去有关的理论推导, 仅以例子说明具体作法.

**例 5** 解条件极小问题

$$\min xy; \quad x^2 + y^2 = 1. \quad (4)$$

解 作 Lagrange 函数  $L = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ , 然后写出方程组

$$\begin{cases} L_x = y + 2\lambda x = 0, \\ L_y = x + 2\lambda y = 0, \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

第一个方程乘以  $y$  减去第二个方程乘以  $x$  得到  $y^2 = x^2$ , 这与第三个方程联立解出  $y = x = \pm 1/\sqrt{2}$ . 于是得到圆周  $x^2 + y^2 = 1$  上四点:

$$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

直接看出, 点  $P_2, P_4$  是问题(4)的最优点, 而点  $P_1, P_3$  则不是.

Lagrange 乘数法可推广到更一般的条件极值问题:

$$\min f(x_1, \dots, x_n); \quad g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (5)$$

如同对问题(1)一样, 定义 Lagrange 函数  $L = f + \lambda g$ , 然后得到方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0, j=1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g = 0. \end{cases} \quad (6)$$

若  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda})$  是方程组(6)的解, 则  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  可能为问题(5)的最优点. 如果由  $f, g$  的具体构造能够断定问题(5)的最优点存在, 且  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda})$  是方程组(6)的唯一解, 则  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  就是问题(5)的最优点.

进一步, 可考虑有两个约束条件的极值问题:

$$\begin{cases} \min f(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, h(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

此时, 与(6)相当的方程组是

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial h}{\partial x_j} = 0, j=1, 2, \dots, n, \\ g=0, h=0, \end{cases}$$

其中  $\lambda, \mu$  是 Lagrange 乘数. 若  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  是以上方程组的解, 则  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  可能为上述条件极值问题的最优点. 以上方法可自然地推广到含两个以上约束条件的极值问题, 其细节读者应能自己写出.

现在用以上方法来解两个重要极值问题.

**例 6** 设  $P$  是正常数, 求解问题:

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_n} \sum_{j=1}^n x_j; \quad x_1 x_2 \cdots x_n = P, \quad x_j > 0 \quad (1 \leq j \leq n). \quad (7)$$

解 为演算简便, 将条件  $x_1 x_2 \cdots x_n = P$  转化为  $\sum_{j=1}^n \ln x_j = \ln P$ . 作 Lagrange 函数

$$L = \sum_{j=1}^n x_j + \lambda \left( \sum_{j=1}^n \ln x_j - \ln P \right),$$

然后写出方程组:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = 1 + \frac{\lambda}{x_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, n, \\ x_1 x_2 \cdots x_n = P \end{cases}$$

(后一个方程与  $\sum_{j=1}^n \ln x_j = \ln P$  相当). 方程组(8)的满足条件  $x_j > 0$  ( $1 \leq j \leq n$ ) 的唯一解是

$-\lambda = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt[n]{P}$ ,  
 $(\sqrt[n]{P}, \sqrt[n]{P}, \dots, \sqrt[n]{P})$  就是问题(7)的最优点.

由例 6 得出有重要意义的结论: 有定积的  $n$  个正数彼此相等时和最小.

**例 7** 设  $S$  是正常数, 求解问题

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} x_1 x_2 \cdots x_n; \quad \sum_{j=1}^n x_j = S, \quad x_j > 0. \quad (1 \leq j \leq n). \quad (9)$$

解 将目标函数换成  $\sum_{j=1}^n \ln x_j$ , 作 Lagrange 函数

$$L = \sum_{j=1}^n \ln x_j + \lambda \left( \sum_{j=1}^n x_j - S \right).$$

由方程组

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{1}{x_j} + \lambda = 0, & j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n x_j = S \end{cases}$$

得出唯一解  $-1/\lambda = x_1 = x_2 = \dots = x_n = S/n$ , 于是  $(S/n, S/n, \dots, S/n)$  是问题(9)的最优点.

由例 7 得出结论(与“和最小问题”对照!): 有定和的  $n$  个正数彼此相等时积最大.

### 9.5.3 应用问题

上面介绍了求自由极值与条件极值的基本方法, 它们被广泛应用于解各种实际问题. 下面主要考虑涉及条件极值的实际问题, 对这类问题, 通常采用 Lagrange 乘数法, 其具体步骤为:

1° 适当设定变量  $x_j (1 \leq j \leq n)$ .

2° 确定目标函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  与约束条件  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , 写出待解的条件极值问题(如(5)).

3° 尽可能化简问题(参看例 6, 7).

4° 构成 Lagrange 函数并写出形如(6)的方程组.

5° 从所得方程组解出  $\bar{x}_j (1 \leq j \leq n)$ . 至于  $\lambda$ , 并非问题本身所需要. 但如果求出  $\lambda$  有助于求  $\bar{x}_j (1 \leq j \leq n)$ , 则也应求出  $\lambda$ .

6° 由问题的实际意义直接判定  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  就是所要求的最优点.

**例 8** 求三内角正弦之积最大的三角形.

解 1° 设所求三角形之内角为  $x, y, z$ .

2° 令  $u = \sin x \sin y \sin z$ , 依题意, 要求解问题:

$$\max u; x+y+z=\pi, 0 < x, y, z < \pi. \quad (10)$$

3° 以  $\ln u$  替换目标函数  $u$ , 将(10)转化为更便于处理的等价问题:

$$\max \ln u; x+y+z=\pi, 0 < x, y, z < \pi. \quad (11)$$

4° 令  $L = \ln u + \lambda(x+y+z-\pi)$ , 得到方程组

$$\begin{cases} L_x = \cot x + \lambda = 0, \\ L_y = \cot y + \lambda = 0, \\ L_z = \cot z + \lambda = 0, \\ x + y + z = \pi. \end{cases} \quad (11)$$

5° 由方程组(11)得  $\cot x = \cot y = \cot z = -\lambda$ . 因  $\cot x$  在  $(0, \pi)$  内严格单调, 故满足(11)且在  $(0, \pi)$  内的  $x, y, z$  只能是  $x = y = z = \pi/3$ .

6° 平面  $x + y + z = \pi$  在第 I 卦限内的部分是一闭三角形  $T$  (图 9-10), 函数  $u$  在  $T$  上连续, 在其边界上为零, 在其内部为正, 因此必在点  $(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$  取得最大值. 故问题所求三角形为正三角形.

**例 9** 求曲面  $4z = 3x^2 - 2xy + 3y^2$  与平面  $x + y - 4z = 1$  之间的最短距离.

解 1° 以曲面上动点  $P(x, y, z)$  之坐标  $x, y, z$  作为变元.

2° 由 § 8.4(9), 点  $P(x, y, z)$  到平面  $x + y - 4z = 1$  的距离  $d = |x + y - 4z - 1| / \sqrt{18}$ . 依题意, 要求解问题:

$$\min d; \quad 4z = 3x^2 - 2xy + 3y^2. \quad (12)$$

3° 以  $18d^2$  替换目标函数  $d$ , 将问题(12)转化为:

$$\min (x + y - 4z - 1)^2; \quad 4z = 3x^2 - 2xy + 3y^2.$$

注意(12)的目标函数不可微, 经替换后消除了此缺陷.

4° 令  $L = (x + y - 4z - 1)^2 + \lambda(4z - 3x^2 + 2xy - 3y^2)$ , 得出

$$(13) \quad \begin{cases} L_x = 2(x + y - 4z - 1) + \lambda(-6x + 2y) = 0, \\ L_y = 2(x + y - 4z - 1) + \lambda(2x - 6y) = 0, \\ L_z = -8(x + y - 4z - 1) + 4\lambda = 0, \\ 4z = 3x^2 - 2xy + 3y^2. \end{cases}$$

5° 从  $L_z = 0$  得  $2(x + y - 4z - 1) = \lambda$ ; 代入方程  $L_x = 0, L_y = 0$  后得到方程组(容易看出不必考虑  $\lambda = 0$ ):

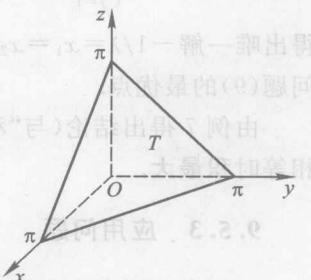


图 9-10

$V = xyz$ ,  $\begin{cases} 6x - 2y = 1, \\ -2x + 6y = 1. \end{cases}$

(a) 要求: 令  $x, y, z$  为正数, 使  $S = xy + yz + zx$  取得最小值.

由此解出  $x = y = 1/4$ . 代入曲面方程解出  $4z = 1/4$ .

6° 由几何意义知最短距离  $d$  一定存在, 它就是

$$d = \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 \right| / \sqrt{18} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

例 10 求原点到曲线  $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$  的最大与最小距离.

解 以  $d$  记原点到点  $(x, y, z)$  的距离, 则  $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . 于是问题相当于求条件极值:

$$\max d^2; z = x^2 + y^2, x + y + z = 1.$$

作 Lagrange 函数

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 1).$$

由方程组

$$\begin{cases} L_x = 2(\lambda + 1)x + \mu = 0, \\ L_y = 2(\lambda + 1)y + \mu = 0, \\ L_z = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ x^2 + y^2 - z = 0, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

消去  $\lambda, \mu$ , 解出

$$x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, z = 2 \mp \sqrt{3}.$$

由此得出,  $d_{\max} = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$ ,  $d_{\min} = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$ .

有不少条件极值问题可直接利用例 6, 7 的结论求解, 无需用 Lagrange 乘数法.

例 11 作一定容积  $V$  的无盖长方体水箱, 使其用料最省.

(a) 解 设水箱的长宽高分别为  $x, y, z$ , 则  $V = xyz$ , 表面积  $S = xy + 2yz + 2xz$ . 依题意, 要求解问题

$$\min S; xyz = V, x, y, z > 0. \quad (13)$$

为套用例 6 的结论, 将上述问题转化为等价的问题

$$\min(xy + 2yz + 2xz), xy + 2yz + 2xz = 4V^2$$

(注意  $xy + 2yz + 2xz = 4(xy\zeta)^2 = 4V^2$ ). 由此立得结论: 要使  $(x, y, z)$  为问题(13)的最优点, 必须  $xy = 2yz = 2xz$ . 这推出  $x = y = 2z$ , 即当  $x:y:z = 2:2:1$  时用料最省.

### 例 12 求周长一定面积最大的三角形.

解 设所求三角形的三边之长分别为  $x, y, z, x+y+z=2s, s$  是正常数. 由平面几何知识知, 三角形的面积

$$\sigma = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}.$$

依题意, 要解问题

$$\max \sigma; x+y+z=2s, x, y, z > 0. \quad (14)$$

以  $(s-x)(s-y)(s-z)$  替换目标函数, 将上述问题转化为:

$$\max(s-x)(s-y)(s-z), (s-x)+(s-y)+(s-z)=s.$$

于是直接由例 7 的结论得出, 当  $(x, y, z)$  是问题(14)的解时, 有  $s-x=s-y=s-z$ , 从而  $x=y=z$ , 即所求三角形为正三角形.

请读者自己用 Lagrange 乘数法解例 11, 12, 并加以对比.

### 9.5.4 Taylor 公式

以下设  $x=x_0+h, y=y_0+k, \rho=\sqrt{h^2+k^2}$ . 若  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微, 则由定义有

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k. \quad (15)$$

当  $\rho$  很小时, (15) 是一个有用的近似公式. 但其精度不高, 且不能用于  $\rho$  较大的情况. 为改进近似公式(15), 须将其右端换成  $h, k$  的适当多项式. 如同一元函数一样, 这导致 Taylor 公式的概念. 下面的定理正好是 § 4.3 中 Taylor 定理的推广.

**定理 4** 设  $f(x, y)$  在区域  $D$  内有直到  $n+1 (n \geq 0)$  阶的连续偏导数, 连结点  $P_0(x_0, y_0)$  与  $P(x, y)$  的线段位于  $D$  内, 则成立

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y), \quad (16)$$

其中  $x=x_0+h, y=y_0+k$ ,

$$(17) \quad T_n(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0);$$

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + th, y_0 + tk) \quad (0 < \theta < 1), \quad (18)$$

这里用了缩写式

$$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(a, b) = \sum_{i=0}^m C_m^i \frac{\partial^m f(a, b)}{\partial x^{m-i} \partial y^i} h^{m-i} k^i, \quad (19)$$

其中  $(a, b) \in D$ , 当  $\rho \rightarrow 0$  时有  $R_n(x, y) = o(\rho^n)$ .

**证明大意** 令  $\varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ . 因当  $t$  从 0 变到 1 时点  $(x_0 + th, y_0 + tk)$  沿线段  $P_0 P$  从  $P_0$  变到  $P$ , 故  $\varphi(t)$  在  $[0, 1]$  上有  $n+1$  阶连续导数. 由一元函数的 Taylor 公式, 有

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} \varphi^{(n+1)}(\theta), \quad (20)$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 为由式(20)导出公式(16)~(18), 只需验证  $\varphi(1) = f(x, y), \varphi(0) = f(x_0, y_0)$  及

$$\begin{aligned} \varphi^{(m)}(t) &= \sum_{i=0}^m C_m^i \frac{\partial^m f(x_0 + th, y_0 + tk)}{\partial x^{m-i} \partial y^i} h^{m-i} k^i \\ &= \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0 + th, y_0 + tk), \end{aligned} \quad (21)$$

其中  $1 \leq m \leq n+1$ . 式(21)可用数学归纳法证明, 细节从略.

式(16)称为  $f$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处的  $n$  阶 Taylor 公式, 其中  $T_n$  与  $R_n$  分别称为  $n$  阶 Taylor 多项式与余项.

若取  $x_0 = y_0 = 0$ , 则从式(16)~(18)得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(0, 0) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(\theta x, \theta y), \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 若在式(16), (17)中令  $n=2$ , 则得到二阶 Taylor 公式

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + f_{xy}(x_0, y_0)hk \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)k^2 + o(\rho^2). \end{aligned} \quad (23)$$

现在利用二元 Taylor 公式来证明定理 2.

**定理 2 的证明** 在  $P_0$  邻近取点  $P(x_0 + h, y_0 + k)$ . 由式(23)及  $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$ , 有

$$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + o(\rho^2),$$

其中  $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ . 令  $h = \rho \cos \theta, k = \rho \sin \theta$ , 则

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = A^{-1}[(Ah + Bk)^2 + \Delta k^2]$$

$$= A^{-1}\rho^2[(A\cos \theta + B\sin \theta)^2 + \Delta \sin^2 \theta] = \rho^2\varphi(\theta),$$

其中

$$\varphi(\theta) = A^{-1}[(A\cos \theta + B\sin \theta)^2 + \Delta \sin^2 \theta] \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

若  $\Delta > 0, A > 0$ , 则必  $\varphi(\theta) > 0$  (否则,  $\exists \theta_0 \in [0, 2\pi]: A\cos \theta_0 + B\sin \theta_0 = \sqrt{\Delta} \sin \theta_0 = 0$ , 这推出  $\sin \theta_0 = \cos \theta_0 = 0$ , 得出矛盾). 因此  $\varphi(\theta)$  在  $[0, 2\pi]$  上有正的最小值, 记为  $m$ . 于是当  $\rho > 0$  充分小时, 有

$$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2}\rho^2\varphi(\theta) + o(\rho^2) \geq \rho^2\left[\frac{m}{2} + \frac{o(\rho^2)}{\rho^2}\right] \geq 0,$$

可见  $f$  在点  $P_0$  取得极小值. 这就证明了结论(i). □

类似地可证明结论(ii), (iii). □

**例 13** 求  $z = x^y$  在点  $(1, 1)$  处的二阶 Taylor 多项式  $T_2(x, y)$ , 并用以计算  $(1.03)^{0.98}$  的近似值.

**解** 首先有  $z(1, 1) = 1$ . 其次相继求出偏导数:

$$z_x = yx^{y-1}, z_x(1, 1) = 1;$$

$$z_y = x^y \ln x, z_y(1, 1) = 0;$$

$$z_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, z_{xx}(1, 1) = 0;$$

$$z_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x, z_{xy}(1, 1) = 1;$$

$$z_{yy} = x^y \ln^2 x, z_{yy}(1, 1) = 0.$$

取  $x_0 = y_0 = 1, n = 2$ , 依公式(17)得

$$T_2(x, y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1). \quad (24)$$

于是

$$(1.03)^{0.98} \approx T_2(1.03, 0.98)$$

$$= 1 + 0.03 + 0.03 \times (-0.02)$$

$$= 1.0294.$$

准确的结果是:  $(1.03)^{0.98} = 1.029391\cdots$ .

通过套用公式(17)来求 Taylor 多项式, 需要计算大量偏导数, 这是很不方便的. 因此, 如同求一元函数的 Taylor 多项式一样, 常常利用已知的 Taylor 展开式通过适当运算间接地得出  $T_n(x, y)$ , 从而避免计算偏导数. 例如, 对例 13 可采用如下间接算法: 首先展开

$$\begin{aligned}(1+s)^{1+t} &= e^{(1+t)\ln(1+s)} \\&= \exp\left[(1+t)\left(s - \frac{s^2}{2} + \dots\right)\right] \\&= \exp\left(s + st - \frac{s^2}{2} + \dots\right) \\&= 1 + \left(s + st - \frac{s^2}{2} + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(s + st - \frac{s^2}{2} + \dots\right)^2 + \dots \\&= 1 + s + st + \dots,\end{aligned}$$

未写出的都是高于二次的项. 于是得  $T_2 = 1 + s + st$ . 以  $s = x - 1$ ,  $t = y - 1$  代入得出式(24).



## 习题 9.5

1. 求下列函数的极值:

(1)  $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ ; (2)  $z = 3xy - x^3 - y^3$ ;

(3)  $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$  ( $0 < x, y < \pi/2$ ).

2. 求由方程  $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$  确定的函数  $z = z(x, y)$  的极值.

3. 求下列函数的条件极值:

(1)  $z = xy$ ,  $x + y = 1$ ; (2)  $u = x - 2y + 2z$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

4. 求函数  $z = 3x^2 + 3y^2 - x^3$  在闭区域  $x^2 + y^2 \leq 16$  上的最小值.

5. 欲造一无盖长方体容器, 已知其底部造价为  $3$  元/ $m^2$ , 侧面造价为  $1$  元/ $m^2$ , 现想用  $36$  元造一容积最大的容器, 求它的尺寸.

6. 求椭圆  $x^2 + 3y^2 = 12$  的内接等腰三角形, 使其底边平行于椭圆的长轴, 且面积最大.

7. 求内接于单位圆中的三角形面积最大者.

8. 求抛物线  $y = x^2$  和直线  $x - y = 2$  之间的最短距离.

9. 求曲线  $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2, \\ z = 6 - 2x^2 - y^2 \end{cases}$  上点的竖坐标的最大值、最小值.

10. 求  $u = \ln x + \ln y + 3 \ln z$  在  $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$  ( $x > 0, y > 0, z > 0$ ) 上的极大值, 并用所得结论证明: 对任意的  $a, b, c > 0$  有

$abc^3 \leq 27 \left( \frac{a+b+c}{5} \right)^5$ .

11. 写出  $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$  在点  $(0, 0)$  处的二阶 Taylor 多项式.

$$\left[ \left( \cdots + \frac{s^2}{2} - s \right) (1+1) \right]_{\text{ex}} =$$

$$\left( \cdots + \frac{s^2}{2} - s + s \right)_{\text{ex}} =$$

$$\cdots + \left( \cdots + \frac{s^2}{2} - s + s \right) \frac{1}{2} + \left( \cdots + \frac{s^2}{2} - s + s \right) + 1 =$$

$$\cdots + s + s + 1 =$$

,  $1 - s = s$  且  $s + s + 1 = 3$  为最大值. 由上得  $s = 1$

(48) 为出解入升  $1 - s = 1$

## 2.8 等式

: 联系的函数不求

$$: x - x_0 - y_0 = 0 \quad (2)$$

$$(3) \pi > y, x > 0$$

. 直线  $(x, y) = s$  是函数的切线  $0 = s + x - x_0 - y_0 = s$

: 直线是函数的切线不求

$$: l = x + y + x_0 - y_0 = s \quad (2) \quad ; l = y + x, y_0 = s \quad (1)$$

: 直线是土  $0 \geq x + y$  是因切线  $x - y_0 + x_0 - s$  是函数

:  $y = x + s$  或者  $y = s$  其他, 器容和式为盖形一截面

: 为常数, 器容的最大容积  $s = x + y$  且, 领导的圆环于平底其外, 顶点三圆卷边内侧  $S = x^2 + y^2$  圆环求

: 大量的面

: 各大圆环面组成三边中圆卷单干封内求

: 表里量的圆面  $S = y - x$  直角  $x = c$  表面积求

## 第十章

# 重 积 分

在第六章中我们已看到,求沿线段分布的量的总和(如细棒的质量,参考 6.4.1),归结为计算定积分.在科学与实际问题中,经常需要求分布于某区域内的量的总和(如质量、体积等),这就需要从定积分过渡到重积分.本章借鉴处理定积分的思路,用“分割、近似代替、求和并取极限”的方法定义重积分;然后给出重积分的某些性质;进而建立重积分的计算公式.由定积分过渡到二重积分,会出现某些新的情况.由二重积分过渡到三重积分,就不再有任何实质性的困难.因此,本章将重点放在二重积分.

### § 10.1 二重积分的定义与性质

#### 10.1.1 体积问题与质量问题

体积与平面薄板质量的计算是导致二重积分概念的两个典型问题.

**体积问题** 设  $z=f(x, y)$  是定义于有界闭区域  $D$  上的非负连续函数.以区域  $D$  为底、以曲面  $z=f(x, y)$  为顶、以  $D$  的边界为准线而母线平行于  $z$  轴的柱面为侧面形成一个立体  $V$  (图 10-1).称  $V$  为曲顶柱体,今要求其体积  $V$ .

与 6.1.1 中处理曲边梯形的面积问题相类似,采用如下“分割求和法”.以任意方式将  $D$  分划为  $n$  个小区域  $D_1, D_2, \dots, D_n$ ,以  $\Delta\sigma_i$  记  $D_i$  的面积,以  $d(D_i)$  记  $D_i$  的直径(即  $D_i$  中两点间的最大距离),令  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$ .相应地,  $V$  被分成  $n$  个小曲顶柱体  $V_1, V_2, \dots, V_n, V_i$  以  $D_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 为底(图 10-1).在每个小区域  $D_i$  上任取一点  $P_i$ ,则当  $\lambda$  充分小时  $V_i$  的体积近似于  $f(P_i)\Delta\sigma_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).这就导致近似公式

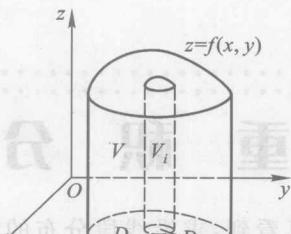


图 10-1

要理解定积分的几何意义，我们考虑一个在平面区域  $D$  上连续函数  $f(x, y)$  的二重积分  $\iint_D f(x, y) dxdy$ 。我们可以将这个区域  $D$  分割成  $n$  个小矩形区域  $D_1, D_2, \dots, D_n$ ，每一块的面积记为  $\Delta\sigma_i$ 。在每一个小矩形  $D_i$  上任取一点  $P_i$ ，并过  $P_i$  作平行于  $z$ -轴的直线，交曲面  $z = f(x, y)$  于一点  $(P_i, f(P_i))$ 。这样就得到了一个柱形薄片，其底面积为  $\Delta\sigma_i$ ，高为  $f(P_i)$ ，因此体积为  $f(P_i)\Delta\sigma_i$ 。所有这样的柱形薄片的体积之和近似于整个立体的体积  $V$ 。当  $n$  越来越大时，这些柱形薄片的体积之和就越精确地逼近整个立体的体积  $V$ 。

λ 愈小(这意味着分划愈细)，以上近似公式就愈精确。因此有理由认为

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i. \quad (1)$$

**质量问题** 设一平面薄板  $D$  (不计其厚度) 放置在  $xy$  平面上， $D$  上任一点处的面密度为  $\mu(x, y)$ ，今要求其质量  $M$ 。

仿照处理前一问题的方法：以任意方式将  $D$  分划为  $n$  小块  $D_1, D_2, \dots, D_n$ ，以  $\Delta\sigma_i$  记  $D_i$  的面积，在  $D_i$  上任取一点  $P_i$ ，则  $D_i$  的质量近似于  $\mu(P_i)\Delta\sigma_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )。于是有理由认为

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(P_i) \Delta\sigma_i, \quad (2)$$

其中  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$ 。

### 10.1.2 二重积分的定义

上面所讨论的两个问题的具体含义很不相同，但其处理方法却非常接近：都归结到同一类型的和式极限(比较式(1)与(2))。形如(1)的和式极限广泛出现于科学的各个领域，因此有必要加以系统研究。于是引进以下概念。

**定义 1** 设  $f(x, y)$  是定义于有界闭区域  $D$  上的有界函数。以任意

方式将  $D$  分划为  $n$  个小区域  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , 分别以  $\Delta\sigma_i$  与  $d(D_i)$  记  $D_i$  的面积与直径, 令  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$ . 在每个  $D_i$  上任取一点  $P_i$ , 构成和式

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i.$$

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i \quad \text{E.1.01}$$

存在, 且与小区域  $D_i$  的分法及点  $P_i$  的取法无关, 则说  $f(x, y)$  在  $D$  上可积, 且称  $I$  为  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分(也简称积分), 记为  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i. \quad (3)$$

为书写简便, 有时也将二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  简写为  $\iint_D f d\sigma$ . 在积分

$\iint_D f d\sigma$  中,  $D$  是积分区域,  $f$  是被积函数. 记号  $d\sigma$  由  $\Delta\sigma_i$  演变而来, 称为面积元, 在直角坐标系下亦写作  $dxdy$ . 如同定积分一样, 二重积分  $\iint_D f(x, y) dxdy$  中的“积分变量” $x, y$  亦可换成其他字母. 例如, 有

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_D f(u, v) du dv.$$

利用定义 1, 现在可将上小节所得的体积与质量公式(1), (2)改写成

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma; \quad M = \iint_D \mu(x, y) d\sigma.$$

与 § 6.1 定理 1 相对应, 关于  $f(x, y)$  的可积性有以下结果:

**定理 1** 设  $f(x, y)$  是定义于有界闭区域  $D$  上的有界函数. 若  $f$  在  $D$  上“分块连续”, 即  $D$  可分划成有限个子区域, 使得  $f$  在每个子区域内部连续, 则  $f$  在  $D$  上可积. 特别,  $D$  上的连续函数必定可积.

若以  $\sigma$  表示区域  $D$  的面积, 则  $\sigma = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$ , 于是在式(3)中取

$f(x, y) \equiv 1$  得

$$\sigma = \iint_D d\sigma = \iint_D dx dy \quad (4)$$

公式(4)是应用二重积分计算面积的依据.

### 10.1.3 二重积分的性质

对比式(3)与 § 6.1(4)看出, 二重积分与定积分的构造有某些类似, 因而应有相近的性质. 实际上, 二重积分有一系列性质不仅与定积分的相应性质形式上很接近, 而且证明方法也几乎相同. 因此, 下面仅叙述有关结论而略去证明. 以下设  $f, g$  在有界闭区域  $D$  上可积,  $\sigma$  表示  $D$  的面积. 以下诸性质与 6.1.3 中的性质 I ~ VI 恰好相对应.

**性质 I (线性性)** 对任何常数  $\alpha, \beta$  有

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) d\sigma = \alpha \iint_D f d\sigma + \beta \iint_D g d\sigma.$$

**性质 II (可加性)** 若  $D$  分划为子区域  $D_1, D_2$ , 则

$$\iint_D f d\sigma = \iint_{D_1} f d\sigma + \iint_{D_2} f d\sigma.$$

**性质 III (比较性质)** 若在  $D$  上  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

**性质 IV (估值定理)** 若在  $D$  上  $A \leq f(x, y) \leq B$ , 则

$$A\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq B\sigma.$$

**性质 V (积分中值定理)** 若  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则存在  $P \in D$ , 使

$$\iint_D f d\sigma = f(P)\sigma.$$

**性质 VI**  $\left| \iint_D f d\sigma \right| \leq \iint_D |f| d\sigma.$

如同对于定积分的情形一样, 上面的性质 I, II 主要用于简化二重积分的计算, 下节中将有例题说明这一点; 性质 III ~ VI 则常用于二重积分的比较与估计. 性质 I, II 显然可推广到任意有限多个加项的情况.

例 1 设  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续、非负且不恒为零, 证明

$$\iint_D f(x, y) d\sigma > 0 \text{ (参照 § 6.1 例 4).}$$

见附录表 I. 1. 01

证 由所给条件必有  $D$  的内点  $P_0$  使  $f(P_0) > 0$  (若在  $D$  内部  $f(P) \equiv 0$ , 则由连续性得出  $f$  在  $D$  之边界上亦为零, 与  $f$  不恒为零矛盾). 由连续性, 存在  $P_0$  的  $\delta$  邻域  $N: N \subset D$ , 在  $N$  上  $f(P) > f(P_0)/2$ .  $D$  除去  $N$  后余下的部分记作  $B$ , 则由性质 II, IV 有:

$$\begin{aligned} \iint_D f d\sigma &= \iint_N f d\sigma + \iint_B f d\sigma \\ &\geq \frac{1}{2} f(P_0) \cdot \pi \delta^2 + 0 > 0. \end{aligned}$$



## 习题 10.1

1. 用二重积分表示曲面  $z = 0, x+y+z=1, x^2+y^2=1$  所围立体的体积.

2. 确定积分  $I = \iint_{\{(x, y) : |x|+|y|<1\}} (x^2+y^2-1) dx dy$  的正负.

3. 下列式子是否成立? 为什么?

(1)  $\iint_D x \sin(x^2+y^2) dx dy = 0, D: x^2+y^2 \leqslant 1;$

(2)  $\iint_D xy dx dy = 4 \iint_{D_1} xy dx dy, \text{ 其中}$

$$D: x^2+y^2 \leqslant 1, D_1: x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0.$$

4. 估计积分  $I = \iint_D (x+xy-x^2-y^2) d\sigma$  的值,  $D: 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2$ .

## § 10.2 二重积分的计算

本节设  $f(x, y)$  是有界闭区域  $D$  上的连续函数, 因而积分  $I = \iint_D f d\sigma$  存在. 为计算  $I$ , 有两条途径可供选择:(A) 直接化为逐次积分(见 10.2.1); (B) 经变量代换(例如极坐标代换)后化为逐次积分.

下面分别予以讨论.

### 10.2.1 化为逐次积分

相继进行两次或多次定积分称为逐次积分(或累次积分). 为将二重积分  $\iint_D f d\sigma$  化为逐次积分, 首先设  $D$  为  $x$  型区域(图 10-2(a)), 即

$$D: y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b, \quad (1)$$

其中  $y_i(x)$  ( $i=1, 2$ ) 是  $[a, b]$  上的连续函数, 且  $y_1(x) \leq y_2(x)$ .  $D$  的边界由直线  $x=a, x=b$  及曲线  $y=y_1(x), y=y_2(x)$  构成.

**定理 1** 设区域  $D$  由(1)给定,  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \quad (2)$$

其中右端积分理解为  $\int_a^b \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$ .

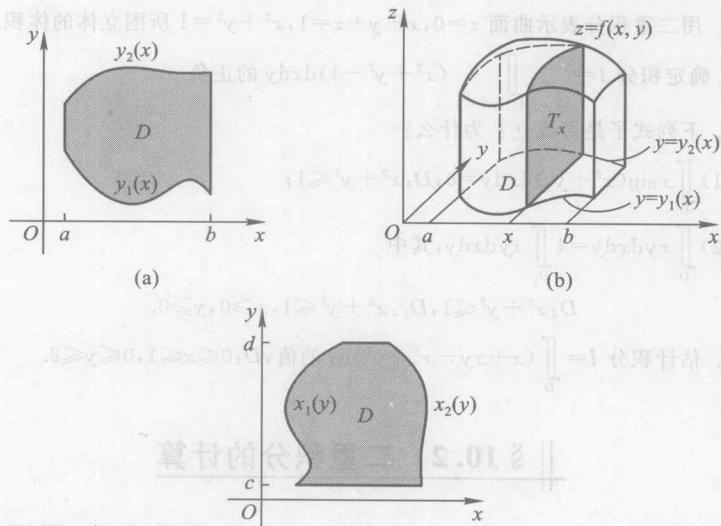


图 10-2

112

下面仅给出公式(2)的一个粗略推导(严格证明从略). 不妨设  $f(x, y) \geq 0$  (否则以  $f(x, y) + C$  代替  $f(x, y)$ ,  $C$  是充分大的正数), 于是  $I = \iint_D f d\sigma$  是以  $D$  为底的曲顶柱体  $V$  的体积. 以平面  $X=x$  截  $V$ , 所得截面是一个曲边梯形(图 10-2(b))  
 $T_x: 0 \leq z \leq f(x, y), y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ .  
以  $S(x)$  表示  $T_x$  的面积, 则由 § 6.1 有

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (a \leq x \leq b).$$

于是, 由平行截面体的体积公式(§ 6.4(2)), 有

$$I = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

此即公式(2).

交换  $x, y$  的地位, 得到定理 1 的以下对偶形式: 设  $D$  为  $y$  型区域(图 10-2(c)), 即

$$D: x_1(y) \leq x \leq x_2(y), \quad c \leq y \leq d, \quad (3)$$

其中  $x_i(y)$  ( $i=1, 2$ ) 是  $[c, d]$  上的连续函数, 且  $x_1(y) \leq x_2(y)$  ( $c \leq y \leq d$ );  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (4)$$

若  $D$  是矩形域  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  (简写作  $D = [a, b; c, d]$ ), 则公式(2), (4)皆可应用, 于是有

$$\begin{aligned} \iint_{[a, b; c, d]} f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \\ &= \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \end{aligned} \quad (5)$$

对于公式(2)与(4)的应用需作几点说明.

1° 应用公式(2)时, 首先应判定  $D$  是否确为  $x$  型区域.  $x$  型区域的几何特征是: 任何穿过  $D$  内部且平行于  $y$  轴的直线与  $D$  的边界恰交于两点.

2° 公式(2)右端的积分限可如此确定:  $a, b$  分别为  $D$  中“最左”与

“最右”的点的横坐标;  $y = y_2(x)$  与  $y = y_1(x)$  分别为  $D$  的上、下边界曲线.

3° 若  $D$  既不属  $x$  型区域, 又不属  $y$  型区域, 则不可直接应用公式(2)与(4). 此时一般应将  $D$  作适当分划, 使得各个子区域是  $x$  型或  $y$  型区域, 因而可分别在各个区域上应用公式(2)或(4).

4° 若  $D$  既是  $x$  型区域, 又是  $y$  型区域(如式(5)中的矩形域), 则原则上可等价地应用公式(2)与(4), 但计算难易可能有所不同, 应依具体情况(通常顾及被积函数的特点)作适当选择.

现在来看几个实际例子.

**例 1** 求  $I = \iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D = [0, 1; 0, 1]$ .

解 用公式(5)并注意  $e^{x+y} = e^x e^y$ , 得

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 e^{x+y} dy = \int_0^1 e^x dx \int_0^1 e^y dy = (e-1)^2.$$

受例 1 启发, 易得如下一般结论: 若  $f(x)$  与  $g(y)$  分别在区间  $[a, b]$  与  $[c, d]$  上连续, 则

$$\iint_{[a, b; c, d]} f(x) g(y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy. \quad (6)$$

**例 2** 求  $I = \iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ .

解  $D$  可表为:  $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$ . 于是由公式(2)有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x^2) dx = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

也可以用公式(4), 但计算要繁琐些:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 y dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 y (1-y^2)^{3/2} dy \quad (\text{凑微分, 令 } y^2=t) \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-t)^{3/2} dt = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

例3 求  $I = \iint_D xy \, dx \, dy$ ,  $D$  是曲线  $x = y^2$  与  $y = x - 2$  所围的区域.

解 解方程组  $x = y^2$ ,  $y = x - 2$ , 得  $x = 1, 4$ ,  $y = -1, 2$ , 这表明曲线  $x = y^2$  与  $y = x - 2$  交于点  $(1, -1)$ ,  $(4, 2)$  (图 10-3). 于是区域  $D$  可表为

$$D: y^2 \leq x \leq y + 2, -1 \leq y \leq 2.$$

因此可用公式(4):

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^2 y \, dy \int_{y^2}^{y+2} x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 y [(y+2)^2 - y^4] \, dy = \frac{45}{8}. \end{aligned}$$

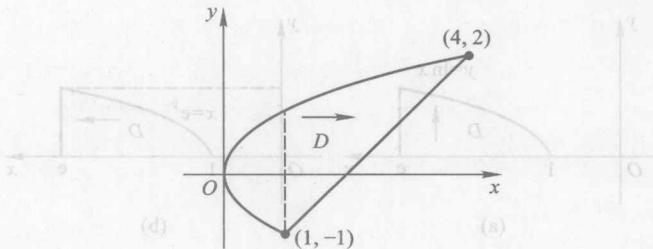


图 10-3

在图 10-3 中,  $D$  内标出了一个与  $x$  轴正向同向的箭头, 这表示首先对  $x$  积分(即用公式(4)).

注意上例中的  $D$  亦可表为  $x$  型区域:

$$D: y_1(x) \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4,$$

其中  $y_1(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-2, & 1 < x \leq 4. \end{cases}$  因  $y_1(x)$  的表达式是分段的, 故用公式(2)时要分段积分:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 x \, dx \int_{y_1(x)}^{\sqrt{x}} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^4 x [x - y_1^2(x)] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 x(x+x) \, dx + \int_1^4 x[x - (x-2)^2] \, dx \right\} = \frac{45}{8}. \end{aligned}$$

可见,第二种算法虽然可行但不可取.

**例 4** 交换积分  $I = \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$  的次序.

**解** 首先化逐次积分为重积分:

$$I = \iint_D f(x, y) dxdy,$$

其中  $D: 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e$  (图 10-4(a)). 然后将  $D$  表为  $y$  型区域:  $e^y \leq x \leq e, 0 \leq y \leq 1$  (图 10-4(b)). 于是由公式(4)得

$$I = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx.$$

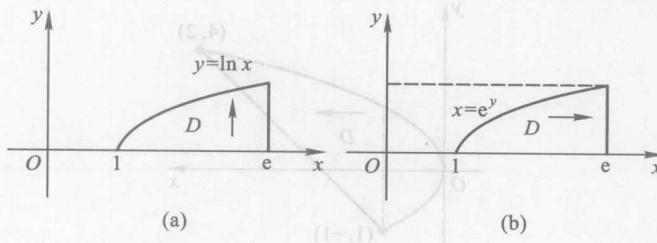


图 10-4

以上解法所用的程序可表为:

逐次积分 → 重积分 → (换序) 逐次积分.

这一程序常用来化简某些逐次积分, 试看一例.

**例 5** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 证明

$$\int_a^b dx \int_a^x f(y) dy = \int_a^b (b-x) f(x) dx. \quad (7)$$

**证** 以  $I$  记式(7)之左端, 则  $I = \iint_D f(y) dxdy$ ,  $D$  是三角形域

$a \leq y \leq x, a \leq x \leq b$  (图 10-5(a)). 将  $D$  改写成  $y \leq x \leq b, a \leq y \leq b$  (图 10-5(b)), 于是依公式(4)有

$$I = \int_a^b f(y) dy \int_y^b dx = \int_a^b f(y)(b-y) dy.$$

(6)  $\int_a^b (b-x)f(x)dx$ . 其中其  
围  $D$  由  $y=x$ ,  $x=a$ ,  $x=b$  及  $y=0$  所成.

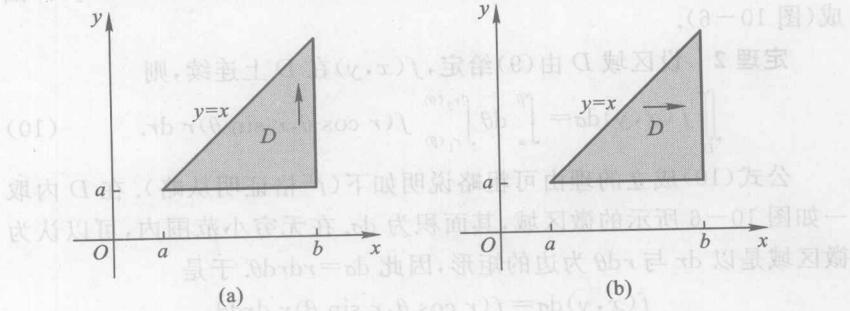


图 10-5 (a) 表示出函数  $y=f(x)$  在区域  $D$  上的二重积分.

**10.2.2 极坐标代换**

设  $(r, \theta)$  是点  $(x, y)$  的极坐标, 即

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta. \quad (8)$$

今要将积分  $\iint_D f d\sigma$  表为关于  $r, \theta$  的逐次积分. 为此, 假定区域  $D$  可表为

$$(与(1)对照!) \quad D: r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad (9)$$

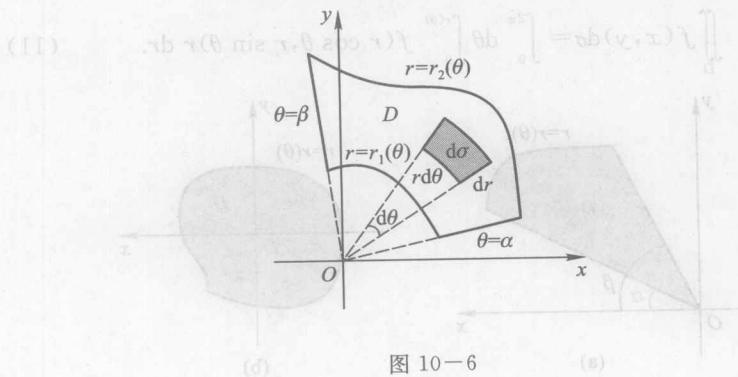


图 10-6 (d) 10-01 图

其中  $r_i(\theta)$  ( $i=1,2$ ) 是定义于  $[\alpha, \beta]$  上的连续函数, 且  $0 \leq r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ). (9) 表示  $D$  由射线  $\theta=\alpha, \theta=\beta$  与曲线  $r=r_1(\theta), r=r_2(\theta)$  围成(图 10-6).

**定理 2** 设区域  $D$  由(9)给定,  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \quad (10)$$

公式(10)成立的理由可粗略说明如下(严格证明从略). 在  $D$  内取一如图 10-6 所示的微区域, 其面积为  $d\sigma$ . 在无穷小范围内, 可以认为微区域是以  $dr$  与  $rd\theta$  为边的矩形, 因此  $d\sigma=rd\theta dr$ . 于是

$$f(x, y) d\sigma = f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

这与(9)一起得出等式(10).

对于公式(10)的应用所需的说明颇类似于对公式(2)的说明:

1° 应用公式(10)时, 首先应判定区域  $D$  是否属于类型(9). 类型(9)的几何特征是: 每条由原点发出且穿过  $D$  内部的射线与  $D$  的边界至多交于两点.

2° 公式(10)右端的积分限可如此确定:  $\alpha, \beta$  分别为  $D$  中点的最小与最大极角; 任给  $\theta \in (\alpha, \beta)$ ,  $r_1(\theta), r_2(\theta)$  是射线  $\theta=\theta$  与  $D$  边界交点的极径. 若  $D$  是由射线  $\theta=\alpha, \theta=\beta$  与曲线  $r=r_2(\theta)$  围成的扇形域, 则  $r_1(\theta) \equiv 0$  (图 10-7(a)); 若此扇形所张角度为  $2\pi$  (这相当于原点在  $D$  内部), 记  $r_2(\theta)$  为  $r(\theta)$  (图 10-7(b)), 则公式(10)成为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \quad (11)$$

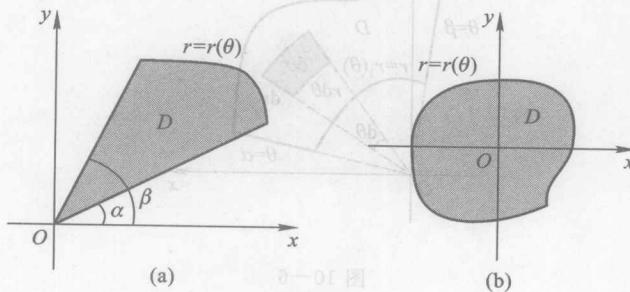


图 10-7

3° 若  $D$  不属于类型(9), 则不可直接应用公式(10), 而应对  $D$  作适当分划, 使得有可能在各子区域上分别应用公式(10).

4° 即使  $D$  属于类型(9), 也仅当函数  $r_i(\theta)$  ( $i=1, 2$ ) 与  $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  较简单时适于应用公式(10). 通常, 当  $D$  的边界由圆弧  $r=a$  或直线  $\theta=\alpha$  等组成, 而  $f(x, y)$  含  $x^2+y^2$  一类式子时, 应用公式(10) 比较有利.

$$\text{例 6} \quad \text{求 } I = \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy, D \text{ 同例 2.}$$

解 在极坐标下,  $D$  可表为:  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ , 即其边界是圆弧  $r=1$  与射线  $\theta=0, \theta=\pi/2$ ; 而被积函数是  $r (= \sqrt{x^2+y^2})$  的函数, 因此本例属于应用公式(10)的典型情况. 依式(10)有

$$\begin{aligned} (81) \quad I &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r dr \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt \quad (t=r^2) \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} (1-\sin u) du \quad (t=\sin u) \\ &= (\pi^2 - 2\pi)/8. \end{aligned}$$

$$\text{例 7} \quad \text{求 } I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy, D \text{ 是圆域 } x^2+y^2 \leq R^2.$$

解 在极坐标下,  $D$  可表为:  $0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . 于是依公式(10)有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr \\ &= \pi \int_0^R e^{-r^2} d(r^2) = \pi(1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

今用以上结果来导出一重要公式. 令  $I(R) = \pi(1 - e^{-R^2})$ . 因矩形 “ $D: |x| \leq R, |y| \leq R$ ” 的边界夹在圆周  $x^2+y^2=R^2$  与  $x^2+y^2=4R^2$  之间, 而依式(6)有

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 = 4 \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2,$$

故由(10)得

$$I(R) \leqslant 4 \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leqslant I(2R).$$

直接看出  $\lim_{R \rightarrow +\infty} I(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} I(2R) = \pi$ , 于是由上面的不等式及夹挤原理得出

$$4 \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \quad \text{或} \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

这与 § 6.3 例 9 的结论一致.

以  $\sigma$  表示区域  $D$  的面积. 若  $D$  表为(9), 则结合公式(10)与上节式(4)得

$$\sigma = \int_a^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr,$$

或

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_a^\beta [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)] d\theta. \quad (12)$$

这就是极坐标下的面积计算公式.

**例 8** 求双纽线  $r^2 = 2a^2 \sin 2\theta$  内部与圆域  $r \leqslant a$  的公共部分的面积  $\sigma$ .

解 由对称性(见图 10-8), 只需考虑第一象限内的部分. 直接用公式(12)先得双纽线在第一象限内围成面积

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 2a^2 \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d(2\theta) \\ &= \frac{1}{2} a^2 [-\cos 2\theta] \Big|_0^{\pi/2} = a^2. \end{aligned}$$

由等式  $2a^2 \sin 2\theta = a^2$  解出  $\theta = \pi/12, 5\pi/12$ .

因此图 10-8 所示的区域  $D$  可表为:

$a \leqslant r \leqslant \sqrt{2a^2 \sin 2\theta}, \pi/12 \leqslant \theta \leqslant 5\pi/12$ . 用公

式(12)算得  $D$  的面积为

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} (2a^2 \sin 2\theta - a^2) d\theta = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)a^2}{6}.$$

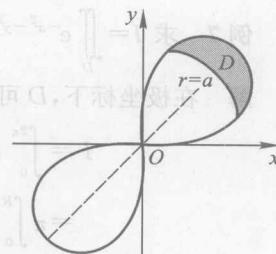


图 10-8

于是

$$\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = 2 \left[ a^2 - \frac{(3\sqrt{3} - \pi)a^2}{6} \right] = a^2 \left( 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right).$$

另外,该题也可直接计算.由对称性

$$\begin{aligned}\sigma &= 4 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/12} 2a^2 \sin 2\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{\pi/4} a^2 d\theta \right] \\ &= 4 \left[ \frac{1}{2} a^2 (-\cos 2\theta) \Big|_0^{\pi/12} + \frac{1}{2} a^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \right) \right] \\ &= a^2 \left( 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right).\end{aligned}$$

**例 9** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  内含在圆柱面  $x^2 + y^2 = ax$  ( $a > 0$ ) 内部分立体的体积  $V$ .

解 由对称性,只需考虑第一卦限部分的体积,这是一曲顶柱体(图 10-9(a)),顶曲面是  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,底是圆域  $D: x^2 + y^2 \leq ax$  ( $y \geq 0$ ) (图 10-9(b)).于是根据二重积分的几何意义,有

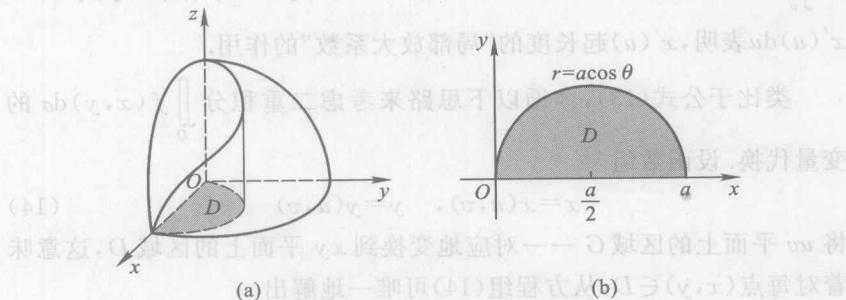


图 10-9

将式(8)代入方程  $x^2 + y^2 = ax$  得  $r = a \cos \theta$ ,此即  $D$  边界的极坐标方程.因此  $D$  可表为

$$0 \leq r \leq a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

于是由公式(10)有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)V &= 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\ &= \frac{4a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{(6\pi - 8)a^3}{9}. \end{aligned}$$

### \* 10.2.3 一般变量代换

在 § 6.2 中建立了定积分的变量代换公式(参看 § 6.2(8), 此处记号略有变动):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(u)) x'(u) du, \quad (13)$$

其中函数  $x = x(u)$  将区间  $[\alpha, \beta]$  一一对应地变换到区间  $[a, b]$ , 且  $x(\alpha) = a, x(\beta) = b; x'(u)$  存在且连续. 从形式上看, 式(13)右端是在积分  $\int_a^b f(x) dx$  中以  $x(u)$  代  $x$ , 以  $x'(u) du$  代  $dx$  的结果. 等式  $dx = x'(u) du$  表明,  $x'(u)$  起长度的“局部放大系数”的作用.

类比于公式(13), 今循以下思路来考虑二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  的变量代换. 设函数组

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (14)$$

将  $uv$  平面上的区域  $G$  一一对应地变换到  $xy$  平面上的区域  $D$ , 这意味着对每点  $(x, y) \in D$ , 从方程组(14)可唯一地解出

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

且  $(u, v) \in G$ . 设函数  $x(u, v), y(u, v)$  皆有连续偏导数. 在  $G$  中取一“微矩形”, 其顶点为  $(u, v), (u+du, v), (u+du, v+dv)$  与  $(u, v+dv)$ , 其面积为  $dudv$ . 此矩形依(14)变换为  $D$  中的曲边四边形  $MNPQ$  (图 10-10). 因

$$\begin{aligned} x(u+du, v) &= x(u, v) + x_u du + o(du); \\ y(u+du, v) &= y(u, v) + y_u du + o(du), \end{aligned}$$

故略去高阶无穷小后可认为点  $N$  的坐标为  $(x + x_u du, y + y_u du)$ , 其中  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ . 类似地, 点  $P, Q$  的坐标分别为  $(x + x_u du + x_v dv, y + y_u du + y_v dv)$  与  $(x + x_v dv, y + y_v dv)$ . 这样,  $MNPQ$  近似于一个平行四边形.

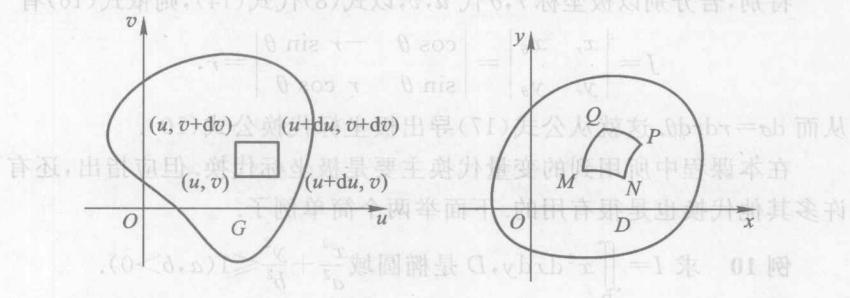


图 10-10

地为一平行四边形, 其面积为(参考 8.3.2).

$$\begin{aligned} d\sigma &= |\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}| \\ &= |\{x_u du, y_u du, 0\} \times \{x_v dv, y_v dv, 0\}| \\ &= |x_u y_v - x_v y_u| dudv, \end{aligned}$$

即

$$\frac{\pi \delta u}{b} = \frac{\pi \delta v}{a} \quad \text{即} \quad d\sigma = |J| dudv, \quad (15)$$

其中

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}, \quad (\pi \geq 0, 1 \geq v \geq 0, 0 \geq u \geq 1) \quad (16)$$

是函数组(14)的 Jacobi 行列式. 公式(15)可看作  $dx = x'(u) du$  的某种推广, 其中的  $|J|$  正好与  $x'(u)$  相当, 可看作面积的“局部放大系数”. 以式(15)代入  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 即得到与(13)相应的二重积分变量代换公式:

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_G f(x(u, v), y(u, v)) |J| dudv \quad (17)$$

今将上述结论准确地表述为(严格证明略去):

**定理 3(变量代换公式)** 设  $f(x, y)$  在  $D$  上连续; 函数组(14)定义于  $uv$  平面上的有界闭区域  $G$  上且有连续的偏导数, 它将  $G$  一一对应地变换到区域  $D$ ,  $J \neq 0$ , 则变量代换公式(17)成立.

特别, 若分别以极坐标  $r, \theta$  代  $u, v$ , 以式(8)代式(14), 则依式(16)有

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r,$$

从而  $d\sigma = r dr d\theta$ . 这就从公式(17)导出极坐标代换公式(10).

在本课程中所用到的变量代换主要是极坐标代换. 但应指出, 还有许多其他代换也是很有用的. 下面举两个简单例子.

**例 10** 求  $I = \iint_D x^2 dx dy$ ,  $D$  是椭圆域  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  ( $a, b > 0$ ).

**解 I** 作代换  $x = au, y = bv$ , 此代换将  $uv$  平面上的圆域 “ $G: u^2 + v^2 \leq 1$ ” 一一对应地变成  $xy$  平面上的椭圆域  $D$ . 因依式(16)有

$$J = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab,$$

故依公式(17)有

$$\begin{aligned} I &= a^3 b \iint_G u^2 du dv \\ &\quad (\text{用极坐标}) \quad = a^3 b \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{a^3 b \pi}{4}. \end{aligned}$$

**解 II** 作代换  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ , 此代换将  $r\theta$  平面上的矩形域 “ $G: 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ” 变换成区域  $D$ , 而  $J = abr$ . 于是依公式(17)有

$$\begin{aligned} I &= a^3 b \iint_G r^3 \cos^2 \theta dr d\theta \\ &= a^3 b \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{a^3 b \pi}{4}. \end{aligned}$$

**例 11** 设  $D$  关于  $y$  轴对称,  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 证明(与 § 6.2(13)对照!)

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{D_+} [f(x, y) + f(-x, y)] dxdy, \quad (18)$$

其中  $D_+$  记  $D$  在右半平面的部分.

**证** 以  $D_-$  记  $D$  在左半平面的部分, 则

$$\iint_D f d\sigma = \iint_{D_+} f d\sigma + \iint_{D_-} f d\sigma.$$

这与式(18)对照易看出, 等式(18)等价于

$$\iint_{D_-} f(x, y) dxdy = \iint_{D_+} f(-x, y) dxdy. \quad (19)$$

代换  $x = -u, y = v$  将  $D_+$  一一对应地变换为  $D_-$ , 而  $J = -1$ , 于是依公式(17)有

$$\begin{aligned} \iint_{D_-} f(x, y) dxdy &= \iint_{D_+} f(-u, v) du dv \\ &= \iint_{D_+} f(-x, y) dxdy, \end{aligned}$$

这表明等式(19)(从而(18))成立.

由式(18)直接推出(与 § 6.2(14)对照!):

$$\iint_D f d\sigma = \begin{cases} 0, & f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}, \\ 2 \iint_{D_+} f d\sigma, & f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}. \end{cases} \quad (20)$$

交换  $x$  与  $y$  的地位得出, 若  $D$  关于  $x$  轴对称, 则

$$\iint_D f d\sigma = \begin{cases} 0, & f \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数}, \\ 2 \iint_{D_+} f d\sigma, & f \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数}, \end{cases} \quad (21)$$

其中  $D_+$  为  $D$  在上半平面的部分.

在重积分计算中, 应注意充分利用以上结论. 例如, 在  $D$  关于  $y$  轴对称时, 有以下等式:

$$\iint_D x^3 e^y dxdy = 0; \quad \iint_D (y^2 + 1) \sin x dxdy = 0.$$

在  $D$  关于  $x$  轴对称时, 有

$$\iint_D x^2 \arctan y \, dx \, dy = 0; \quad \iint_D y(y^2 + x) e^x \, dx \, dy = 0.$$

**例 12** 求由直线  $x+y=1$ ,  $x+y=2$ ,  $y=x$ ,  $y=2x$  所围区域  $D$  (图 10-11(a)) 的面积.

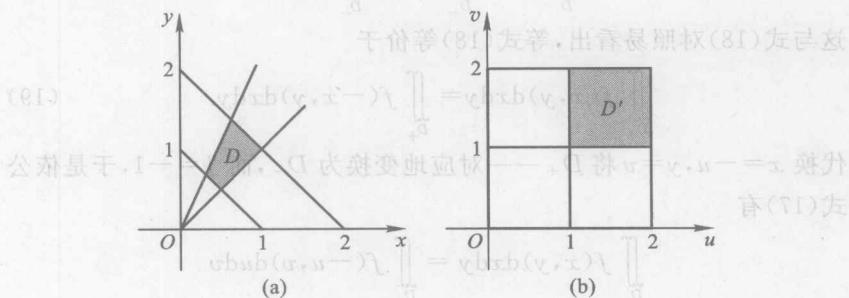


图 10-11

解 所求面积为

$$\iint_D dxdy.$$

上述二重积分直接化为逐次积分计算比较麻烦. 现作变量代换. 令  $u=x+y$ ,  $v=\frac{y}{x}$ , 则  $x=\frac{u}{1+v}$ ,  $y=\frac{uv}{1+v}$ . 在这变换下,  $D$  的边界  $x+y=1$ ,  $x+y=2$ ,  $y=x$ ,  $y=2x$  依次与  $u=1$ ,  $u=2$ ,  $v=1$ ,  $v=2$  对应. 后者构成与  $D$  对应的闭区域  $D'$  的边界. 于是

$$D' = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\},$$

如图 10-11(b) 所示. 又 Jacobi 行列式

$$J = \frac{u}{(1+v)^2} \neq 0, \quad (u, v) \in D'.$$

从而所求面积为

$$\iint_D dxdy = \iint_{D'} \frac{u}{(1+v)^2} du dv$$

$$= \int_1^2 \frac{dv}{(1+v)^2} \int_1^{2v} u du = \frac{1}{4}. \quad (1)$$



## 习题 10.2

1. 列出函数  $f(x, y)$  在下列区域上的两个逐次积分:

(1) 以  $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$  为顶点的三角形;

(2) 由  $y=0, x^2+y^2=R^2 (y>0)$  围成的区域;

(3) 由  $x$  轴与  $y=x^3 (x>0)$  及  $x+y=2$  所围成的区域.

2. 改变下列逐次积分的积分次序:

$$(1) \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy;$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{(3-x)/2} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_1^2 dy \int_{1/y}^y f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_1^3 dy \int_1^y f(x, y) dx + \int_3^9 dy \int_{y/3}^3 f(x, y) dx.$$

3. 证明  $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx (a>0)$ .

4. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D x e^{xy} dxdy, D: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0;$$

$$(2) \iint_D x^2 y \cos(xy^2) dxdy, D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2;$$

$$(3) \iint_D \frac{y dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}, D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2;$$

$$(4) \iint_D xy^2 dxdy, D \text{ 由抛物线 } y^2=2px \text{ 和直线 } x=\frac{p}{2} \text{ 围成} (p>0).$$

5. 将下列积分化为极坐标形式:

$$(1) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} dx;$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2}) dy;$$

$$(3) \int_0^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x^2+y^2) dx.$$

6. 用极坐标计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, D: x^2 + y^2 \leq a^2;$$

$$(2) \iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy, D: \frac{\pi}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 2\pi;$$

$$(3) \iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy, D: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x;$$

$$(4) \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} |xy| dx dy;$$

$$(5) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{x^3+y^3-3xy(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx dy.$$

$$7. \text{ 设 } F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy, \text{ 求 } F'(t).$$

8. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1;$$

$$(2) \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy, D: x \leq 2, y \leq x, xy \geq 1;$$

$$(3) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D: |x| \leq 1, |y| \leq 1;$$

$$(4) \iint_D |\cos(x+y)| dx dy, D: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi;$$

$$(5) \iint_{|x|+|y| \leq 1} (|x|+|y|) dx dy.$$

$$9*. \text{ 证明 } \iint_D f(ax+by+c) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u \sqrt{a^2+b^2} + c) du, \text{ 其中}$$

$$D: x^2 + y^2 \leq 1, a^2 + b^2 \neq 0.$$

10. 求心形线  $r=a(1+\cos \theta)$  与圆  $r=2a \cos \theta$  之间的面积.

11. 求由曲面  $z=x^2+2y^2$  与  $z=6-2x^2-y^2$  所围立体的体积.

12. 设  $D$  是矩形域:  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ . 求

$$\iint_D \sin x \sin y \max(x, y) dx dy.$$

13\*. 求由曲线  $xy=1, xy=2, y=x, y=2x (x>0, y>0)$ , 所围区域的面积.

14\*. 求椭圆  $(a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 = 1$  (其中  $\delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ ) 所围的面积.

青参)时重心函数“数函类”“单主”、“单一”“重二”同域

## § 10.3 三重积分

从二重积分过渡到三重积分,没有任何实质性的困难。关于三重积分的概念、结论与处理方法与二重积分的相应内容如此明显地类似,以至于我们只需列举主要的结论,而略去大多数细节。

本节中,总设  $V$  是给定的空间有界闭区域,以  $v$  记其体积。

### 10.3.1 三重积分的定义

以下定义与 § 10.1 定义 1 恰相对应。

**定义 1** 设  $f(x, y, z)$  是定义于  $V$  上的有界函数。以任意方式将  $V$  分划为  $n$  个小区域  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , 分别以  $\Delta v_i$  与  $d(V_i)$  记  $V_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 的体积与直径,令  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(V_i)$ 。在每个  $V_i$  上任取一点  $P_i$ , 构成和式  $\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta v_i$ 。若极限  $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta v_i$  存在,且与小区域  $V_i$  的分法及点  $P_i$  的取法无关,则说  $f(x, y, z)$  在  $V$  上可积,且称  $I$  为  $f(x, y, z)$  在  $V$  上的三重积分(也简称积分),记为

$$\iiint_V f(x, y, z) dv \quad (\text{也简写作 } \iiint_V f dv), \text{ 即}$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta v_i \quad (1)$$

积分  $\iiint_V f dv$  中的  $dv$  显然由  $\Delta v_i$  演变而来,称为体积元(与面积元  $d\sigma$  对照!),在直角坐标系下也写作  $dxdydz$ 。若在式(1)中取  $f(x, y, z) \equiv 1$ , 则得到

$$v = \iiint_V dv = \iiint_V dxdydz \quad (2)$$

(与 § 10.1(4)对照!)。公式(2)是应用三重积分计算体积的依据。

如同二重积分一样,  $V$  上的“分块连续”有界函数必可积(参看 § 10.1 定理 1); 特别,  $V$  上的连续函数可积. 二重积分的性质 I ~ VI (参看 10.1.3) 仅需微小修改即可用于三重积分. 例如, 关于三重积分的中值定理是(参看 10.1.3 性质 V): 若  $f$  在  $V$  上连续, 则存在一点  $P \in V$ , 使得

$$(3) \quad \iiint_V f(x, y, z) dv = f(P)v.$$

其余概不详论.

义宝函代麻重三 1.01

### 10.3.2 化为逐次积分

对三重积分可建立类似于 § 10.2(2) 的公式.

首先设区域  $V$  可表为

$$V: z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D, \quad (3)$$

其中  $D$  是  $V$  在  $xy$  平面上的投影,  $z_i(x, y)$  ( $i=1, 2$ ) 是  $D$  上的连续函数, 且  $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ . (3) 意味着  $V$  由“底曲面” $z=z_1(x, y)$ 、“顶曲面” $z=z_2(x, y)$  与一柱面围成, 该柱面的母线平行于  $z$  轴, 而准线是  $D$  的边界(图 10—12). 为行文简便起见, 不妨称如上的  $V$  为  $xy$  型区域. 若  $f(x, y, z)$  在  $V$  上连续, 则有公式

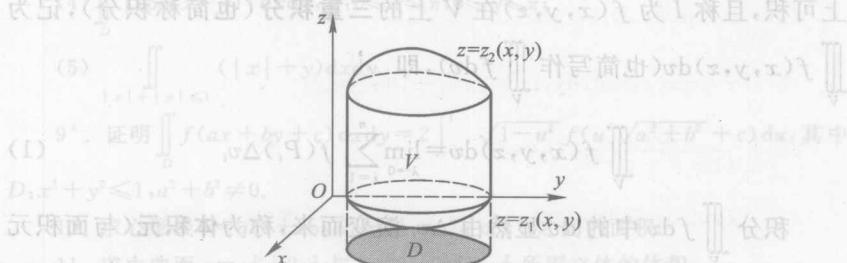


图 10-12

(1) 证明  $\iint_D \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx = \iiint_V f(x, y, z) dv$ , 其中  $D: x^2 + y^2 \leq 1, a^2 + b^2 \neq 0$ .

(2) 求由曲面  $x^2 + y^2 = z$  与  $z = 1 - x^2 - y^2$  所围成的立体的体积.

(3) 求由曲线  $xy = 1, xy = 2, y = 2, y = 4$  ( $x > 0, y > 0$ ) 所围区域的面积.

(4) 求由曲面  $z = x^2 + y^2$  与  $z = 2$  所围立体在第一卦限内的体积.

$$\iiint_V f \, dv = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz. \quad (4)$$

上式右端的积分理解为  $\iint_D \left[ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz \right] dx dy$ . 这样, 就将三重积分的计算归结为定积分与二重积分的计算. 而外层的二重积分又可以依上节的公式(2)或(4)化为逐次积分, 从而最终将  $\iiint_V f \, dv$  表为含三层定积分的逐次积分. 例如, 若  $D$  是  $x$  型区域, 则结合式(4)与上节式(2)有

$$\iiint_V f \, dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz. \quad (5)$$

更换  $x, y, z$  的次序, 还可得到五个类似于(5)的公式. 例如, 设  $V$  是  $yz$  型区域, 即

$$V: x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z), (y, z) \in D_{yz},$$

其中  $D_{yz}$  是  $V$  在  $yz$  平面上的投影; 再设  $D_{yz}$  是  $yz$  平面上的  $y$  型区域, 即

$$D_{yz}: z_1(y) \leq z \leq z_2(y), c \leq y \leq d,$$

则当  $f$  在  $V$  上连续时, 有公式:

$$\begin{aligned} \iiint_V f \, dv &= \iint_{D_{yz}} dy dz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z) \, dx \\ &= \int_c^d dy \int_{z_1(y)}^{z_2(y)} dz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z) \, dx. \end{aligned} \quad (6)$$

其他情况可依此类推, 不必一一列举.

对于公式(4)的应用所需作的说明亦类似于二重积分的情况.

1° 应用公式(4)时, 首先应判定  $V$  是否为  $xy$  型区域.  $xy$  型区域的几何特征是: 任何穿过  $V$  内部且平行于  $z$  轴的直线与  $V$  的边界恰交于两点.

2° 写出  $V$  的“底曲面”与“顶曲面”方程  $z = z_1(x, y)$  与  $z = z_2(x, y)$ , 就得到式(4)右端内层积分的下限  $z_1(x, y)$  与上限  $z_2(x, y)$ .

3° 若区域  $V$  的边界仅由曲面  $z = z_i(x, y)$  ( $i=1, 2$ ) 组成, 令  $z_1(x, y) = z_2(x, y)$ , 则在  $xy$  平面上此方程表示一曲线, 该曲线所围区域  $D$

即  $V$  在  $xy$  平面上的投影. 若  $V$  的边界还包含母线平行于  $z$  轴的柱面  $F(x, y)=0$ , 则该柱面在  $xy$  平面上的投影亦在  $D$  的边界上.

当  $V$  是  $yz$  型或  $zx$  型区域时亦可作类似说明.

4° 若  $V$  不属于上述类型, 则应适当地将  $V$  分划为若干子区域, 使得在每个子区域上可应用公式(4)或类似公式.

**例 1** 求  $I = \iiint_V y \cos(x+z) dv$ ,  $V$  是由柱面  $y=\sqrt{x}$  与平面  $y=0$ ,  $z=0$ ,  $x+z=\pi/2$  所围的区域(图 10-13).

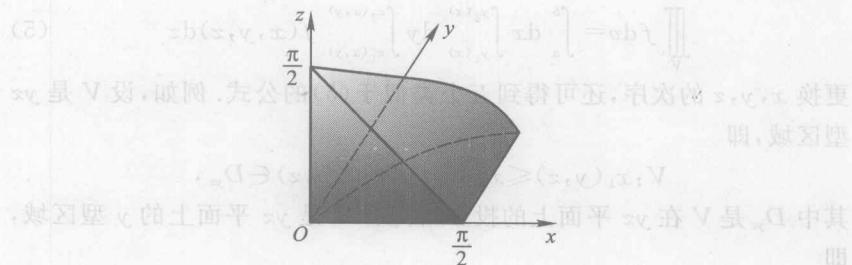


图 10-13

**解**  $V$  显然是一  $xy$  型区域, 它的“底”是平面  $z=0$ , “顶”是平面  $z=(\pi/2)-x$ .  $V$  在  $xy$  平面上的投影  $D$  是由曲线  $y=\sqrt{x}$ ,  $y=0$  与  $x=\pi/2$  所围之区域, 它可表为  $0 \leq y \leq \sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq \pi/2$ , 因而为  $x$  型区域. 于是依公式(5)有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \int_0^{(\pi/2)-x} \cos(x+z) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x(1-\sin x) dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**例 2** 求  $I = \iiint_V \sqrt{x^2+z^2} dv$ ,  $V$  是由锥面  $x^2+z^2=y^2$  与平面  $y=1$  所围成的区域(图 10-14).

**解**  $V$  是一个  $zx$  型区域, 它由边界曲面  $y=\sqrt{x^2+z^2}$  与  $y=1$  围

成,因此方程  $\sqrt{x^2+z^2}=1$  (即  $x^2+z^2=1$ ) 给出  $D$  的边界曲线,  $D$  是  $V$  在  $zx$  平面上的投影. 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \sqrt{x^2+z^2} dx dz = \iint_D \sqrt{x^2+z^2} dy \\ &= \iint_D \sqrt{x^2+z^2} (1-\sqrt{x^2+z^2}) dx dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r(1-r)r dr = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

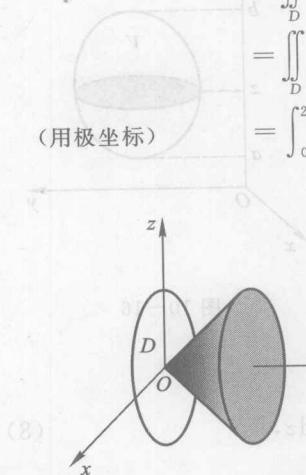


图 10-14

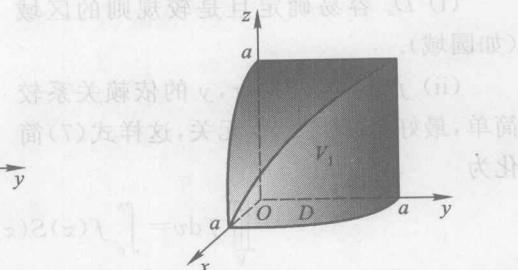


图 10-15

**例 3** 求柱面  $x^2+y^2=a^2$  与  $x^2+z^2=a^2$  所围区域  $V$  的体积  $v$ ,  $a>0$ .

解 由对称性,  $V=8V_1$ ,  $V_1$  为图 10-15 所示的区域  $V$  在第 I 卦限部分,  $V_1$  是一  $xy$  型区域, 它的“底”与“顶”分别为  $z=0$  与  $z=\sqrt{a^2-x^2}$ , 而  $V_1$  在  $xy$  平面上的投影  $D$  是四分之一圆域  $x^2+y^2\leq a^2$ ,  $xy>0$ . 于是结合式(2)与(5)有:

$$\begin{aligned} v &= 8 \iiint_{V_1} dv = 8 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz \\ &= 8 \int_0^a (a^2-x^2) dx = \frac{16a^3}{3}. \end{aligned}$$

现在考虑化  $\iiint_V f dv$  为逐次积分的另一种方法. 设  $V$  介于平面  $z=a$

与  $z=b$  之间,  $\forall z \in (a, b)$ , 用平面  $Z=z$  截  $V$  所得截面在  $xy$  平面上的投影为  $D_z$  (如图 10-16). 若  $f(x, y, z)$  在  $V$  上连续, 则有公式

$$\iiint_V f \, dv = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) \, dx \, dy \quad (7)$$

应用公式(7)计算三重积分的方法称为截面法 (与上册中求平行截面体体积的方法对照!), 它适用于以下情况:

(i)  $D_z$  容易确定且是较规则的区域 (如圆域).

(ii)  $f(x, y, z)$  对  $x, y$  的依赖关系较简单, 最好是  $f$  与  $x, y$  无关, 这样式(7)简化为

$$\iiint_V f \, dv = \int_a^b f(z) S(z) \, dz, \quad (8)$$

其中  $S(z)$  是  $D_z$  的面积. 特别, 取  $f \equiv 1$  从(8)得出

$$v = \iiint_V dv = \int_a^b S(z) \, dz,$$

此即平行截面体的体积公式 (见 § 6.4(2)).

交换  $x, y, z$  的地位, 可得出与(7)类似的另外两个公式, 其具体形式读者应能自己写出.

**例 4** 求  $I = \iiint_V e^{|z|} \, dv$ ,  $V$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ .

解 任给  $z \in (-1, 1)$ , 平面  $Z=z$  截  $V$  所得截面为一圆面, 如图 10-17, 其半径为  $\sqrt{1-z^2}$ , 其面积  $S(z) = \pi(1-z^2)$ . 于是依公式(8)有:

$$I = \int_{-1}^1 e^{|z|} \pi(1-z^2) \, dz$$

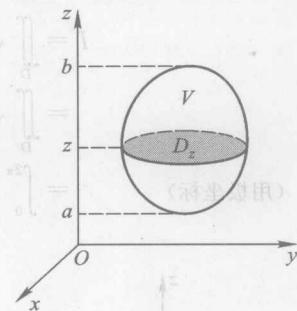


图 10-16

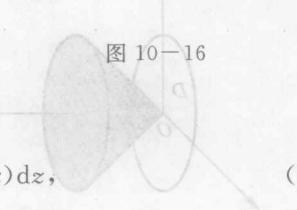


图 10-16

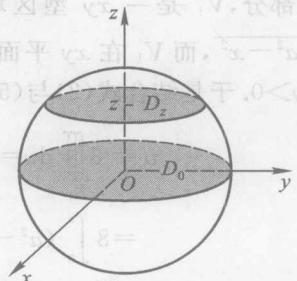
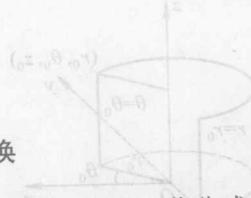


图 10-17

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \int_0^1 e^z (1-z^2) dz \\
 &= 2\pi \left( e - 1 - \int_0^1 z^2 e^z dz \right) \\
 &= 2\pi \text{(用分部积分).}
 \end{aligned}$$



### 10.3.3 柱面坐标与球面坐标代换

首先给出三重积分的一般变量代换公式,它是上节公式(17)的一个自然推广.设函数组

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w) \quad (9)$$

将  $u, v, w$  空间中的区域  $\Omega$  一一对应地变换到区域  $V$ ; (9) 中的函数皆有连续偏导数,且 Jacobi 行列式

$$(10) \quad J = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0.$$

若  $f(x, y, z)$  在  $V$  上连续,则

$$\iiint_V f dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw. \quad (10)$$

公式(10)表明,用  $u, v, w$  表达的体积元公式为

$$dx dy dz = |J| du dv dw. \quad (11)$$

如同在上节公式(15)中一样,式(11)中的  $|J|$  亦起“局部放大系数”的作用.

下面考虑两种最常用的变量代换,它们可看作是极坐标代换的推广.

#### 柱面坐标代换

若  $(r, \theta)$  是  $(x, y)$  的极坐标,则称  $(r, \theta, z)$  为点  $(x, y, z)$  的柱面坐标. 注意,方程  $r = r_0$  与  $\theta = \theta_0$  分别表示圆柱面与过  $z$  轴的半平面(图

10-18(a)).

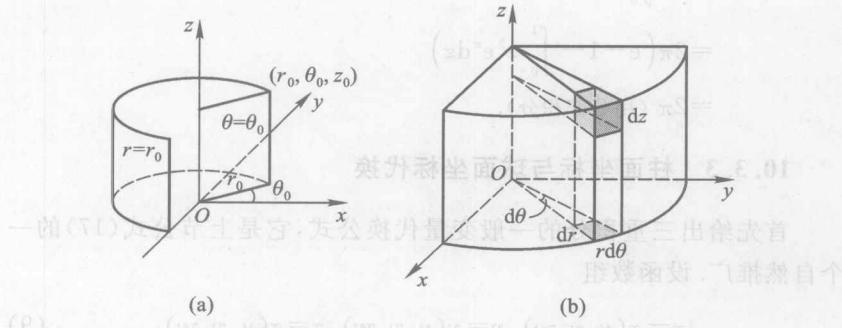


图 10-18

$(r, \theta, z)$  是点  $(x, y, z)$  的柱面坐标意味着

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z. \quad (12)$$

函数组(12)的 Jacobi 行列式为

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & 0 \\ y_r & y_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

因此, 依公式(11)得柱面坐标下的体积元公式为

$$dv = r dr d\theta dz. \quad (13)$$

它有着明显的几何意义: 考虑如图 10-18(b)所示的微区域, 其体积为  $dv$ . 在无穷小范围内, 可以认为微区域是三边分别为  $dr$ 、 $r d\theta$ 、 $dz$  的长方体. 因此  $dv = r dr d\theta dz$ .

若在柱面坐标下, 区域  $V$  可表为

$$V: z_1(r, \theta) \leq z \leq z_2(r, \theta), r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad (14)$$

则依公式(10)有

$$\iiint_V f dv = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr \int_{z_1(r, \theta)}^{z_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz, \quad (15)$$

这就是三重积分的柱面坐标代换公式.

关于公式(15)的用法说明如下:

1°首先判定  $V$  是  $xy$  型区域，并将其表为(3). 然后以  $x=r \cos \theta$ ,  $y=r \sin \theta$  代入“底”与“顶”的曲面方程  $z=z_i(x, y)$ , 得到  $z=z_i(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , 不妨写作  $z=z_i(r, \theta)$  ( $i=1, 2$ ), 则  $z_i(r, \theta)$  就是公式(15)右端内层积分的上、下限. 其次, 将  $V$  在  $xy$  平面上的投影  $D$  表为  $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  (参看 § 10.2(9)), 即得出公式(15)右端中、外层积分的上、下限.

实际上, 以上过程相当于: 首先依公式(4)将积分  $\iiint_V f dv$  表为

$$\iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz;$$

然后用 10.2.2 中的方法对二重积分  $\iint_D$  作极坐标代换.

2°以下情形适于用柱面坐标:  $V$  是  $xy$  型区域, 而  $V$  在  $xy$  平面上的投影  $D$  在极坐标下有简单的表示, 且  $f(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$  也较简单. 当  $V$  是以  $z$  轴为旋转轴的旋转体, 而  $x, y$  在被积函数中以  $x^2 + y^2$  的形式出现时, 应用柱面坐标代换较为有利.

**例 5** 求  $I = \iiint_V z dv$ ,  $V$  是由曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  ( $z \geq 0$ ) 与  $x^2 + y^2 = 3z$  所围成的位于  $xy$  平面上之上的区域.

解  $V$  是以  $z$  轴为旋转轴的旋转体, 同时也是  $xy$  型区域, 其顶曲面与底曲面分别为  $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$  与  $z = (x^2+y^2)/3$ . 由等式  $\sqrt{4-x^2-y^2} = (x^2+y^2)/3$  解出  $x^2+y^2=3$ , 可见  $V$  在  $xy$  平面上的投影是圆域  $x^2+y^2 \leq 3$ . 于是依公式(4)有

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 3} dx dy \int_{(x^2+y^2)/3}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz,$$

然后用极坐标代换得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} z dz \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} r \left( 4 - r^2 - \frac{r^4}{9} \right) dr = \frac{13\pi}{4}. \end{aligned}$$

熟练之后,可以直接用柱面坐标表出  $V$  的边界曲面与区域  $D$ . 如对上例,  $V$  的边界曲面为  $r^2 + z^2 = 4$  与  $r^2 = 3z$ , 由等式  $\sqrt{4-r^2} = z = r^2/3$  解出  $r = \sqrt{3}$ ,  
于是

$$I = \iint_{r \leq \sqrt{3}} r dr d\theta \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} zdz,$$

这就更直接地得出所要结果.

**例 6** 求  $I = \iiint_V (x^2 + y^2) dv$ ,  $V$  是由曲面  $x^2 + y^2 = 2z$ ,  $z = 2$ ,  $y = x$  与  $y = 0$  所围成的在第一卦限内的区域(图 10-19).

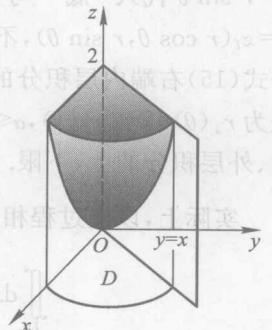


图 10-19

**解**  $V$  是旋转体的一部分, 在柱面坐标下, 它的“底”与“顶”曲面分别为  $z = r^2/2$  与  $z = 2$ . 由  $r^2/2 = 2$  解出  $r = 2$ , 因此  $V$  在  $xy$  平面上的投影  $D$  是扇形  $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi/4$ . 于是依公式(15)有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^2 r^3 dr \int_{r^2/2}^2 dz \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr \end{aligned}$$

曲面  $z = 2$  与  $z = r^2/2$  的交线是圆弧  $\frac{2\pi}{3}$ .

### 球面坐标代换

任给一点  $M(x, y, z)$ , 令  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 设  $\varphi (0 \leq \varphi \leq \pi)$  是矢量  $\overrightarrow{OM}$  与  $z$  轴正向的夹角,  $\theta$  是点  $M$  在  $xy$  平面上的投影  $N$  的极角, 则称  $(\rho, \theta, \varphi)$  为点  $M$  的球面坐标. 注意方程“ $\rho = \text{常数}$ ”表示以原点为中心的球面(图 10-20(a)). 当  $\varphi = \pi/2$  时,  $(\rho, \theta)$  即点  $M$  在  $xy$  平面上的极坐标.

若  $(\rho, \theta, \varphi)$  是点  $(x, y, z)$  的球面坐标, 则导出转换公式

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases} \quad (16)$$

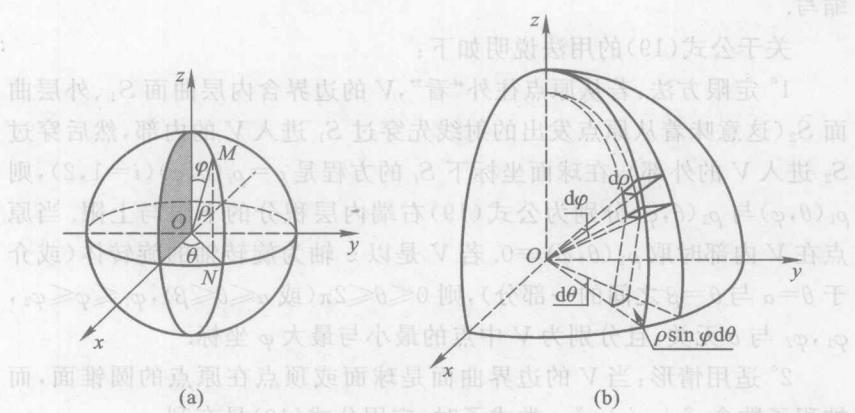


图 10-20

函数组(16)的 Jacobi 行列式为

$$\begin{aligned}
 J &= \begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta & x_\varphi \\ y_\rho & y_\theta & y_\varphi \\ z_\rho & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{vmatrix} \\
 &= -\rho^2 \sin \varphi,
 \end{aligned}$$

因此依公式(11)得球面坐标下的体积元公式为

$$dv = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi \quad (17)$$

其几何意义见图 10-20(b).

若在球面坐标下区域 V 可表为

$$\text{V 出界 } \rho_1(\theta, \varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\theta, \varphi), \varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad (18)$$

则依公式(10)有

$$\iiint_V f dv = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \sin \varphi d\varphi \int_{\rho_1(\theta, \varphi)}^{\rho_2(\theta, \varphi)} f \rho^2 d\rho \quad (19)$$

其中右端积分号下的 f 是  $f(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$  的

缩写.

关于公式(19)的用法说明如下:

1° 定限方法:若从原点往外“看”, $V$  的边界含内层曲面  $S_1$ 、外层曲面  $S_2$ (这意味着从原点发出的射线先穿过  $S_1$  进入  $V$  的内部,然后穿过  $S_2$  进入  $V$  的外部),在球面坐标下  $S_i$  的方程是  $\rho=\rho_i(\theta, \varphi)$  ( $i=1, 2$ ),则  $\rho_1(\theta, \varphi)$  与  $\rho_2(\theta, \varphi)$  分别为公式(19)右端内层积分的下限与上限. 当原点在  $V$  内部时取  $\rho_1(\theta, \varphi)\equiv 0$ . 若  $V$  是以  $z$  轴为旋转轴的旋转体(或介于  $\theta=\alpha$  与  $\theta=\beta$  之间的一部分),则  $0\leq\theta\leq 2\pi$ (或  $\alpha\leq\theta\leq\beta$ ),  $\varphi_1\leq\varphi\leq\varphi_2$ ,  $\varphi_1, \varphi_2$  与  $\theta$  无关,且分别为  $V$  中点的最小与最大  $\varphi$  坐标.

2° 适用情形:当  $V$  的边界曲面是球面或顶点在原点的圆锥面,而被积函数含  $x^2+y^2+z^2$  一类式子时,应用公式(19)最有利.

例 7 求  $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv$ ,  $V$  是

由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  所围成的区域,  $a > 0$ (如图 10-21).

解 在球面坐标下, $V$  的边界曲面可表示为  $\rho=a, \varphi=\pi/4$ . 因此  $V$  可表为:

$$V: 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi/4, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是依公式(19)有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \int_0^a \rho^4 d\rho \\ &= \frac{1}{5} (2 - \sqrt{2}) \pi a^5. \end{aligned}$$

例 8 求  $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$ ,  $V$  是由曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  所围成的区域.

解 在球面坐标下,边界曲面的方程为  $\rho = \cos \varphi$ ,由此得出  $V$  可表为

$$V: 0 \leq \rho \leq \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是依公式(19)有

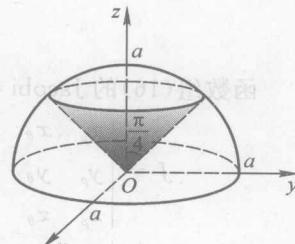


图 10-21

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\cos \varphi} \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{10}. \quad (8)$$

**例 9** 设  $0 < a < b$ ,  $V$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = bz$  内部在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  之外的部分, 求  $V$  的体积  $v$ .

**解** 在球面坐标下,  $V$  的边界曲面可表为  $\rho = b \cos \varphi$  与  $\rho = a$ . 由等式  $b \cos \varphi = a$  解出  $\varphi = \arccos(a/b)$ , 由此得出  $V$  可表为

$$V : a \leq \rho \leq b \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (9)$$

其中  $\varphi_0 = \arccos(a/b)$ . 于是

$$\begin{aligned} v &= \iiint_V dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi d\varphi \int_a^{b \cos \varphi} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi (b^3 \cos^3 \varphi - a^3) d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_1^{a/b} (a^3 - b^3 t^3) dt \quad (t = \cos \varphi) \\ &= \frac{\pi}{6b} (3a^4 - 4a^3 b + b^4). \end{aligned}$$



### 习题 10.3

1. 化三重积分  $\iiint_n f(x, y, z) dx dy dz$  为逐次积分, 其中  $\Omega$  由曲面  $z = x^2 + 4y^2$ ,

$z = 4 - 3x^2$  所围成.

2. 计算  $\iiint_V xy dx dy dz$ ,  $V$  是曲面  $z = xy$  与  $x + y = 1, z = 0$  所围区域.

3. 用柱面坐标计算下列积分:

(1)  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , 其中  $V$  是由锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  及平面  $z = 1$  所围成的区域;

(2)  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , 其中  $V$  是由曲面  $x^2 + y^2 = 2z$  与平面  $z = 2$  所围成的区域;

(3)  $\iiint_V z^2 dx dy dz$ , 其中  $V$  是由  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  与  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$  所围区域的公共部分;

(4)  $\iiint_V z^2 dx dy dz$ , 其中  $V$  是由  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 2x$  所围成的区域.

4. 用球面坐标计算下列积分:

(1)  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv$ , 其中  $V$  是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  所围成的区域;

(2)  $\iiint_V dx dy dz$ , 其中  $V$  是由曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$  ( $z > 0, 0 < a < b$ ) 所围成的区域.

5. 求积分  $\iiint_V \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dv$ , 其中  $V$  是椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ .

6. 设  $f(u)$  是可微函数,

$$F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

求  $F'(t)$ .

7. 证明  $\iiint_V f(z) dx dy dz = \pi \int_{-1}^1 f(z)(1-z^2) dz$ , 其中  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

8. 求  $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z) dv$ , 其中  $V$  是由曲线  $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转一周而成的曲面与平面  $z=4$  所围成的立体.

## § 10.4 重积分的应用

重积分的应用几乎遍及所有科学领域. 本节仅考虑重积分对于某些几何与物理问题的应用, 这些应用比较简单与常见, 且其用法已近乎标准化, 因而较容易掌握. 本节的许多内容与 § 6.4 有某种对应关系, 读者应注意加以对照.

### 10.4.1 几何应用

#### I. 平面区域的面积

设  $D$  是  $xy$  平面上的有界闭区域, 以  $\sigma$  记其面积. § 10.1(4) 给出

了  $\sigma$  的计算公式:

$$\sigma = \iint_D d\sigma, \quad (1)$$

其中面积元  $d\sigma = dx dy$  (对直角坐标), 或  $d\sigma = r dr d\theta$  (对极坐标). 若  $D$  是  $x$  型区域:  $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  (图 10-2), 则依(1)与 § 10.2 (2) 有

$$\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx,$$

这正好与 § 6.4(1)一致. 若在极坐标下  $D$  表为  $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , 则依(1)与 § 10.2(10) 有

$$\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)] d\theta, \quad (2)$$

这已见于 § 10.2(12).

例 1 求曲线  $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$  所围区域  $D$  的面积  $\sigma$ .

解 在极坐标下, 边界曲线的方程是  $r^2 = a^2(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$ ,  $D$  可表为  $0 \leq r \leq r(\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $r(\theta)$  的具体表达式无需写出. 于是依公式(2) 有

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) d\theta \\&= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta = a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta)^2 d\theta \\&= a^2 \left( \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 2\theta d\theta \right) = \frac{3\pi a^2}{4}.\end{aligned}$$

如果读者不想记住公式(2), 则不妨直接用公式(1)并记住  $d\sigma = r dr d\theta$ .

## II. 空间区域的体积

设  $V$  是空间有界闭区域, 以  $v$  表示其体积. § 10.3(2) 给出了  $v$  的计算公式:

$$v = \iiint_V dv, \quad (3)$$

其中体积元  $dv$  在直角坐标、柱面坐标及球面坐标下的表达式为 (参看上节(13), (17)):

$$dv = dx dy dz = r dr d\theta dz = \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi.$$

若  $V$  是  $xy$  型区域:  $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , 则结合(3)与 § 10.3(4)有

$$v = \iint_D [z_2(x, y) - z_1(x, y)] dx dy. \quad (4)$$

若  $z_1(x, y) = 0 \leq z_2(x, y)$ , 则(4)成为曲顶柱体的体积公式, 它与 § 10.1 中的公式一致.

**例 2** 设  $V$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与  $z = x + y$  所围之区域, 求  $V$  的体积  $v$ .

**解 I** 方程  $x^2 + y^2 = x + y$  表示  $xy$  平面上一圆周(如图 10-22), 它所围圆域  $D$  即  $V$  在  $xy$  平面上的投影. 依公式(4)有

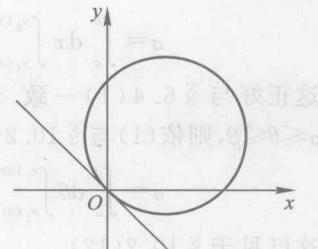


图 10-22

$v = \iint_D (x + y - x^2 - y^2) dx dy$

$$\begin{aligned} & (\text{用极坐标}) = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^{\sin \theta + \cos \theta} (r \cos \theta + r \sin \theta - r^2) r dr \\ & = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{12} (\sin \theta + \cos \theta)^4 d\theta \\ & = \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \sin^4 \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) d\theta \\ & (t = \theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \sin^4 t dt = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

**解 II** 配方  $D$  的表达式:  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ ,

$$\text{则 } v = \iint_D (x + y - x^2 - y^2) dx dy$$

$$= \iint_D \left[ \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \right] dx dy$$

$$= \frac{1}{2} D \text{ 的面积} - \iint_D \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 \right] dx dy.$$

(3) 第二个积分作代换  $\begin{cases} x - \frac{1}{2} = r \cos \theta \\ y - \frac{1}{2} = r \sin \theta, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

即

$$v = \frac{\pi}{4} - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^2 \cdot r dr$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

比较而言第二种解法计算量小一点.

例 3 求曲面  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$  ( $a \geq 0$ ) 所围成立体的体积.

解 由曲面方程可知, 整个立体位于  $xy$  平面上方, 且关于  $xz$ ,  $yz$  平面对称, 并与  $xy$  平面相切. 故在球面坐标系下的范围是:

$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq a \sqrt[3]{\cos \varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

利用对称性, 所求立体的体积为

$$\begin{aligned} v &= \iiint_a dv = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{a \sqrt[3]{\cos \varphi}} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

### III. 曲面的面积

设曲面  $S$  表为方程  $z = z(x, y)$ ,  $z(x, y)$  定义于区域  $D$  上且有连续偏导数  $z_x, z_y$ , 今要求其面积(亦记为  $S$ ).

用微元法: 在曲面上任取一微曲面块, 设其面积为  $dS$ (图10-23), 它在  $xy$  平面上的投影面积为  $d\sigma$ . 设  $n$  是微曲面块上某点处的单位法矢(指向向上),  $n$  与  $z$  轴正向的夹角为  $\gamma$ , 则在无穷小的范围内可以认为

$$d\sigma = \cos \gamma dS = dS / \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2},$$

于是

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \text{曲面的 } \frac{\partial z}{\partial s} = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy. \quad (5)$$

(5) 就是曲面面积元的公式. 利用式(5)得

$$S = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy. \quad (6)$$

例 4 求球面  $x^2+y^2+z^2=a^2$  ( $a>0$ ) 的面积  $S$ .

解 只需考虑上半球面  $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ . 因

$$z_x = -x/z, z_y = -y/z,$$

故

$$\begin{aligned} S &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} dx dy \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx dy \\ &= 2a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = 4\pi a^2. \end{aligned}$$

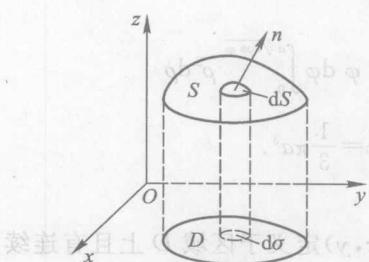


图 10-23

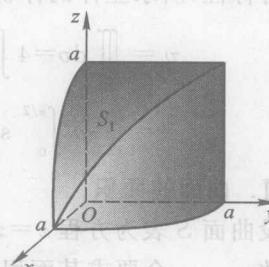


图 10-24

例 5 求柱面  $x^2+y^2=a^2$  与  $x^2+z^2=a^2$  ( $a>0$ ) 所围立体的表面积  $S$ .

解 由对称性,  $S=16S_1$ ,  $S_1$  为图 10-24 所示的一块面积, 该曲面块的方程为  $z=\sqrt{a^2-x^2}$ , 它在  $xy$  平面上的投影  $D$  是四分之一圆盘.

因  $z_x = -x/z$ ,  $z_y = 0$ , 故依公式(6)有

$$S = 16 \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2}} dx dy = 16a \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= 16a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = 16a^2.$$

### 10.4.2 物理应用

#### I. 质量

在 § 6.1 中已经得出: 具有面密度  $\mu(x, y)$  的平面薄板的总质量  $M$  可表为:

$$M = \iint_D \mu(x, y) d\sigma. \quad (7)$$

类似地, 若一立体  $V$  的密度为  $\mu(x, y, z)$ , 则其总质量  $M$  可表为

$$M = \iiint_V \mu(x, y, z) dv. \quad (8)$$

**例 6** 设  $V$  是曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与  $z = 6 - x^2 - y^2$  所围区域,  $V$  中任一点的密度  $\mu$  等于该点到  $z$  轴的距离, 求其质量  $M$ .

**解** 由题设知  $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$ . 在柱面坐标下,  $V$  的边界曲面为  $z = r$  与  $z = 6 - r^2$ , 由  $r = 6 - r^2$  解出  $r = 2$ , 于是依公式(8)有

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dv = \iint_{r \leq 2} r^2 dr d\theta \int_r^{6-r^2} dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 (6 - r^2 - r) dr = \frac{56\pi}{5}. \end{aligned}$$

#### II. 重心

设平面区域  $D$  的面密度为  $\mu$ , 质量为  $M$ , 今要求其重心  $(\bar{x}, \bar{y})$ .  $D$  对  $y$  轴的矩为  $M\bar{x}$ ; 另一方面, 在  $D$  中任一点  $(x, y)$  处取一面积为  $d\sigma$  的微区域, 其中的质量对  $y$  轴的矩近似地为  $\mu x d\sigma$ , 这就得到

$M\bar{x} = \iint_D \mu x \, d\sigma$ . 同理, 关于  $\bar{y}$  亦有类似公式. 于是有

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D \mu x \, d\sigma, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D \mu y \, d\sigma \quad (9)$$

类似地, 若立体  $V$  有密度  $\mu$ , 则其重心  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  的坐标为:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V \mu x \, dv, \\ \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_V \mu y \, dv, \\ \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V \mu z \, dv, \end{cases} \quad (10)$$

其中  $M$  是  $V$  的质量.

若  $\mu = \text{常数}$ , 则用公式(9)或(10)时可设  $\mu = 1$ , 求得的重心仅与  $D$  或  $V$  的几何形状有关(也称为形心), 计算时应充分利用区域的对称性.

**例 7** 设  $D$  是圆域  $x^2 + y^2 \leq a^2$  ( $a > 0$ ),  $D$  中每点的密度  $\mu$  等于该点到点  $(a, 0)$  的距离, 求  $D$  的重心  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

解 由题设知  $\mu = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ . 由对称性直接得出  $\bar{y} = 0$ . 为求  $\bar{x}$ , 作变量代换:  $x - a = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 因此  $D$  的边界为  $r = -2a \cos \theta$  ( $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ ),  $\mu = r$ ,  $d\sigma = r dr d\theta$ . 于是

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \mu \, d\sigma = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \int_0^{-2a \cos \theta} r^2 dr \\ &= -\frac{8a^3}{3} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^3 \theta \, d\theta \\ &= -\frac{8a^3}{3} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) d \sin \theta = \frac{32a^3}{9}; \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D \mu x \, d\sigma$$

$$= \frac{1}{M} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \int_0^{-2a \cos \theta} (a + r \cos \theta) r^2 dr$$

$$=\frac{4a^4}{3M} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (3\cos^5 \theta - 2\cos^3 \theta) d\theta$$

$$(t = \sin \theta) \quad = \frac{3a}{8} \int_{-1}^1 (-1 + 4t^2 - 3t^4) dt = -\frac{a}{5},$$

故所求重心为  $(-a/5, 0)$ .

**例 8** 设匀质立体  $V$  由一半径为  $a$  的半球  $V_1$  接一半径为  $a$  的圆柱体  $V_2$  构成, 重心在球心上, 求圆柱体的高  $h$ .

**解** 如图 10-25 放置坐标系, 由题设原点是重心. 于是依公式(10)有

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_V z dv = \iiint_{V_1} z dv + \iiint_{V_2} z dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^a \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &\quad + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_0^h zdz \\ &= -\frac{1}{4}\pi a^4 + \frac{1}{2}\pi a^2 h^2, \end{aligned}$$

由此解出  $h = a/\sqrt{2}$ .

由公式(10)推出

$$\iiint_V x dv = \bar{x} \iiint_V dv = \bar{x}v, \quad (11)$$

这个公式可用来计算左端的积分.

**例 9** 设  $V$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq x$ , 求  $I = \iiint_V x dv$ .

**解**  $V$  是以  $(1/2, 0, 0)$  为心、以  $1/2$  为半径的球, 其体积  $v = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}$ , 于是依式(11)有

$$I = \bar{x}v = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

### III. 转动惯量

设  $D$  是  $xy$  平面上的区域, 其面密度为  $\mu$ . 在  $D$  上任一点  $(x, y)$  处

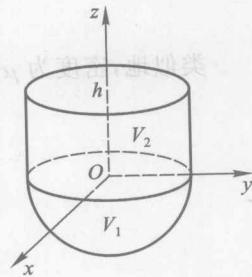
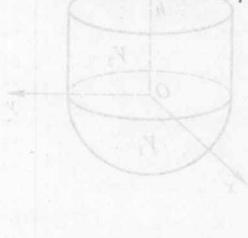


图 10-25

取一微区域,设其面积为  $d\sigma$ ,则它对  $x$  轴与  $y$  轴的转动惯量分别为  $\mu y^2 d\sigma$  与  $\mu x^2 d\sigma$ .于是  $D$  对  $x$  轴与  $y$  轴的转动惯量  $J_x, J_y$  为

$$J_x = \iint_D \mu y^2 d\sigma, \quad J_y = \iint_D \mu x^2 d\sigma. \quad (12)$$

类似地,密度为  $\mu$  的立体  $V$  对各坐标轴的转动惯量为:



$$\begin{cases} J_x = \iiint_V \mu(y^2 + z^2) dv, \\ J_y = \iiint_V \mu(x^2 + z^2) dv, \\ J_z = \iiint_V \mu(x^2 + y^2) dv. \end{cases} \quad (13)$$

**例 10** 设  $V$  是半径为  $a$ ,高为  $h$  的匀质圆柱体,求  $V$  对过重心且垂直于母线的轴的转动惯量  $J$ .

**解** 将  $V$  的重心作为坐标原点,且使  $z$  轴平行于  $V$  的母线,则  $V$  可表为:  $x^2 + y^2 \leq a^2, |z| \leq h/2; J = J_x$ . 因密度  $\mu =$  常数,故依公式 (13) 有

$$\begin{aligned} J &= \mu \iiint_V (y^2 + z^2) dv \\ (11) \quad &= \mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{-h/2}^{h/2} (r^2 \sin^2 \theta + z^2) dz \\ &= \frac{\mu h}{12} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (12r^3 \sin^2 \theta + h^2 r) dr \\ &= \frac{a^2 \mu h}{24} \int_0^{2\pi} (6a^2 \sin^2 \theta + h^2) d\theta \\ &= \frac{1}{12} \mu \pi a^2 h (3a^2 + h^2). \end{aligned}$$

#### \* IV. 引力

设立体  $V$  的密度为  $\mu$ ,一质量为  $m$  的质点位于点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ,今要求  $V$  对质点的引力  $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ .

在  $V$  中任一点  $P(x, y, z)$  处取一微立体,设其体积为  $dv$ ,它对质点

$P_0$  的引力为  $dF$ , 则

$$|dF| = \frac{km\mu}{r^2} dv, \quad r = |P_0 P|,$$

其中  $k$  为引力常数.  $dF$  的方向与  $\overrightarrow{P_0 P}$  一致, 故其方向余弦为  $(x - x_0)/r, (y - y_0)/r, (z - z_0)/r$ , 于是

$$\begin{cases} F_x = km \iiint_V \mu \frac{x - x_0}{r^3} dv, \\ F_y = km \iiint_V \mu \frac{y - y_0}{r^3} dv, \\ F_z = km \iiint_V \mu \frac{z - z_0}{r^3} dv. \end{cases} \quad (14)$$

例 11 设  $V$  是匀质球壳  $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$  ( $0 < a < b$ ), 求  $V$  对位于点  $(0, 0, c)$  ( $c > b$ ) 的单位质点的引力  $F$ .

解 由对称性,  $F$  必指向原点, 即  $F_x = F_y = 0$ , 只需求  $F_z$ . 因密度  $\mu = \text{常数}$ , 故由公式(14)有

$$\begin{aligned} F_z &= k\mu \iiint_V \frac{z - c}{r^3} dv \\ &= k\mu \iiint_V \frac{z - c}{[x^2 + y^2 + (z - c)^2]^{3/2}} dv \\ (\text{用球面坐标}) &= k\mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \rho^2 d\rho \int_0^\pi \frac{(\rho \cos \varphi - c) \sin \varphi}{(\rho^2 - 2c\rho \cos \varphi + c^2)^{3/2}} d\varphi \\ &= \frac{k\mu\pi}{c^2} \int_a^b \rho d\rho \int_{-\rho}^{\rho} \frac{\rho^2 - c^2 - u^2}{u^2} du \\ &= -\frac{4k\mu\pi}{c^2} \int_a^b \rho^2 d\rho = \frac{4k\mu\pi(a^3 - b^3)}{3c^2}, \end{aligned}$$

其中用了代换  $u = \sqrt{\rho^2 - 2c\rho \cos \varphi + c^2}$ . 因  $V$  的质量  $M$  为:

$$M = \mu \iiint_V dv = \frac{4\mu\pi(b^3 - a^3)}{3},$$

故  $F_z = -kM/c^2$ . 这就得出:  $V$  对质点的引力如同  $V$  的质量  $M$  集中在原点处一样.



## 习题 10.4

1. 求区域  $D$  的面积, 若  $D$  为:

- (1) 由抛物线  $y = \sqrt{4Rx}$  ( $R > 0$ )、直线  $x + y = 3R$  及  $x$  轴所围成;
- (2) 由曲线  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $y = x$  及  $y = 0$  所围成;
- (3) 由曲线  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$  所围成, 其中  $a, b, c > 0$ .

2. 求立体  $V$  的体积, 若  $V$  为:

- (1) 由抛物面  $y^2 + z^2 = 4ax$ 、抛物柱面  $y^2 = ax$  与平面  $x = 3a$  所围成;
- (2) 圆柱体  $x^2 + y^2 \leq a^2$  为平面  $z = 0$  及  $z = mx$  所截得的两个楔形体 ( $a, m > 0$ );

(3) 由平面  $y = 0$ ,  $y = 3x$ ,  $z = 0$  以及球心在原点, 半径为  $R$  的上半球面所围成的立体在第一卦限内的部分;

- (4) 由圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、圆柱面  $x^2 + y^2 - y = 0$  以及  $xy$  平面三者所围成.

3. 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  含在圆柱面  $x^2 + y^2 = ay$  内的那部分的面积.

4\*. 求由曲面  $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ ,  $x + y + z = 2$  所围成的立体的体积和表面积.

5. 一旋转抛物面形的反射镜, 镜深 2 m, 口径为 6 m, 求其表面积.

6. 一物体由抛物面  $z = x^2 + y^2 + 1$  与平面  $z = 5$  所围成, 已知物体每点处的密度与该点到  $xy$  平面的距离成正比, 且抛物面顶点处密度为 2, 求此物体的质量.

7. 设平面薄片所占的区域  $D$  是由两条直线  $x = 0$ ,  $y = x$  和两个圆周  $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ ,  $x^2 + (y - b)^2 = b^2$  ( $0 < a < b$ ) 所围成, 它的密度  $\mu(x, y) = 2xy$ , 求此薄片的质量.

8. 一匀质圆锥体由曲面  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z = 1$  所围成, 求其重心.

9. 求由曲线  $r = a(1 + \cos \theta)$  所围成图形的一半的形心 ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).

10. 求直线  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 与坐标轴围成的三角形对  $x$  轴的转动惯量, 并求以过原点且与三角形所在的平面垂直的直线为轴的转动惯量, 假定密度  $\mu$  为常数.

11. 计算半球体  $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  对  $y$  轴的转动惯量 (密度  $\mu = 1$ ).

12. 一水箱其底部为半球, 直径为 24 m, 上部为同直径的圆柱形, 高为 10 m, 当水面在顶下 2 m 时, 求侧面及底面所受的总压力.

# 第十一章

## 曲线积分与曲面积分

上一章将定积分推广到了二维(或三维)区域上的积分,即重积分. 定积分的另一推广,是沿“弯曲图形”——曲线与曲面——的积分,这就是本章所要讨论的曲线积分与曲面积分. 本章将依次介绍这两种积分的实际背景、定义、性质和计算方法,并建立沟通各类积分联系的三大积分公式——Green 公式、Gauss 公式与 Stokes 公式. 最后介绍场论的基本概念,并运用场论的语言给出本章主要结论的直观解释.

### § 11.1 第一型曲线积分

#### 11.1.1 定义与性质

首先考虑一个导致第一型曲线积分概念的典型问题——曲线的质量问题. 设  $L$  是一条有限长的空间曲线, 沿  $L$  分布有某种物质,  $L$  上任一点  $(x, y, z)$  处的线密度为  $\mu(x, y, z)$ , 假定函数  $\mu(x, y, z)$  在  $L$  上连续, 现在要求  $L$  的质量  $M$ . 这是定积分应用中“线段质量问题”的推广.

我们仍然按照定积分的微元法思想来解此问题. 以任意方式将  $L$  分成  $n$  小段:  $L_1 = \widehat{M_0 M_1}, L_2 = \widehat{M_1 M_2}, \dots, L_n = \widehat{M_{n-1} M_n}$  (图 11-1), 以  $\Delta s_i$  记  $L_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 的弧长, 令  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i$ . 在每一小段  $L_i$  上任取一点  $P_i$ , 将  $L_i$  上的质量分布看作均匀的, 即视线密度为常数  $\mu(P_i)$ , 则  $L_i$  的质量近似为  $\mu(P_i) \Delta s_i$ , 这就得到近似公式

$$(8) \quad M \approx \sum_{i=1}^n \mu(P_i) \Delta s_i.$$

直观上看来,  $\lambda$  愈小(这意味着曲线  $L$  分得愈细), 上式就愈准确. 于是有理由认为

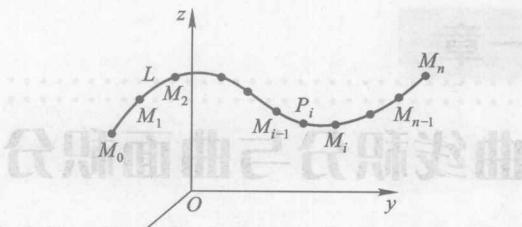


图 11-1

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(P_i) \Delta s_i \quad (1)$$

形如(1)的和式极限不仅用于曲线质量的计算,还广泛出现在其他许多科学问题中。于是作以下定义:

**定义 1** 设  $L$  是空间中一条有限长的分段光滑曲线,  $f(x, y, z)$  是定义于  $L$  上的有界函数。以任意方式将  $L$  分成  $n$  小段  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , 以  $\Delta s_i$  记  $L_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 的弧长, 令  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i$ 。在每一小段  $L_i$  上任取一点  $P_i$ , 构成和式  $\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i$ 。若极限存在, 且与  $L$  的分法及  $P_i$  的取法无关, 则称  $I$  为  $f(x, y, z)$  沿曲线  $L$  的第一型曲线积分(亦称为“对弧长的曲线积分”), 记作  $\int_L f(x, y, z) ds$  (或简写作  $\int_L f ds$ , 若  $L$  为闭曲线, 则记为  $\oint_L f ds$ ), 即

$$\int_L f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i, \quad (2)$$

其中  $f(x, y, z)$  叫做被积函数,  $L$  称为积分弧段。上述定义亦适合于  $L$  为平面曲线的情况, 此时积分记作

$$M = \int_L f(x, y) ds.$$

利用定义 1, 现在可将表示曲线质量的公式(1)改写为

$$(2) M = \int_L \mu(x, y, z) ds. \quad (3)$$

类似于定积分, 若函数  $f$  在  $L$  上连续(或分段连续), 则积分  $\int_L f ds$  存在. 特别, 取  $f(x, y, z) \equiv 1$ , 由式(2)得出表示  $L$  的弧长(记为  $s$ ) 的公式



$$s = \int_L ds. \quad (4)$$

公式(4)是许多不同形式的弧长计算公式.

将上面的定义与定积分的定义对照看出, 第一型曲线积分可看作是定积分的推广. 这就不难理解, 定积分的许多性质可推广到第一型曲线积分. 今将其主要性质列举如下.

设  $L$  是有限长的分段光滑曲线,  $f, g$  在  $L$  上连续, 则有以下主要性质.

1°(线性性质) 对任何常数  $\alpha, \beta$  有

$$\int_L (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_L f ds + \beta \int_L g ds.$$

2°(可加性) 若  $L$  由两段弧  $L_1, L_2$  构成, 则

$$\int_L f ds = \int_{L_1} f ds + \int_{L_2} f ds.$$

3°(中值公式) 设  $s$  是  $L$  的弧长, 则存在  $L$  上一点  $P$ , 使得

$$\int_L f ds = sf(P).$$

### 11.1.2 化为定积分

(8) 计算积分  $\int_L f ds$  的主要方法是通过引进  $L$  的参数方程而化为定积分, 其基本结论如下:

(9) 定理 1 设曲线  $L$  由以下参数方程给定:

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t) (\alpha \leq t \leq \beta),$$

其中  $x(t), y(t), z(t)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上有连续导数, 且  $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$ . 若  $f(x, y, z)$  在  $L$  上连续, 则

$$\int_L f ds = \int_a^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \quad (5)$$

注意公式(5)中的  $\alpha, \beta$  必须满足  $\alpha < \beta$ .

下面给出公式(5)的一个粗略的推导 (严格证明从略). 在  $L$  上取一微弧段, 它对应参数区间  $[t, t+dt]$ , 弧长  $\Delta s$  近似为以  $dx, dy, dz$  为边的长方体的对角线  $ds$  (图 11-2). 因此

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

即

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt, \quad (6)$$

于是

$$f(x, y, z) ds = f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

由此得到式(5).

公式(5)表明, 要将曲线积分  $\int_L f ds$  化为定积分, 只需将  $\int_L$  换成  $\int_a^\beta$ , 然后分别以  $x(t), y(t), z(t)$  代换  $f(x, y, z)$  中的  $x, y, z$ , 且以式(6)代换  $ds$ .

称由式(6)表示的  $ds$  为曲线  $L$  的弧微分. 当坐标系或方程形式变化时, 它依以下方式变化.

若  $L$  是  $xy$  平面上的曲线  $x=x(t), y=y(t), z=0$ , 则

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (7)$$

若  $L$  是  $xy$  平面上的曲线  $y=y(x)$ , 则

$$ds = \sqrt{1+y'^2(x)} dx. \quad (8)$$

若  $L$  是极坐标平面上的曲线  $r=r(\theta)$ , 则

$$ds = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta. \quad (9)$$

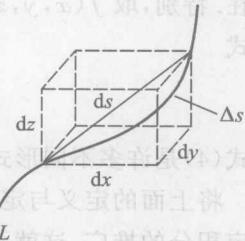


图 11-2

若  $L$  是空间柱面坐标系  $(r, \theta, z)$  上的曲线  $\begin{cases} r=r(\theta) \\ z=z(\theta) \end{cases}$ , 则

$$ds = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta) + z'^2(\theta)} d\theta. \quad (10)$$

**例 1** 求  $I = \int_L \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $L$  为螺旋线  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ),  $a, b > 0$ .

解 由公式(6)得  $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt$ .  
其次,  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 t^2$ . 于是依公式(5)有

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \arctan \frac{2b\pi}{a}.$$

**例 2** 求  $I = \int_L xy ds$ ,  $L$  是圆周  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 在第一象限内的部分.

解 因为  $L$  可表示为:  $x = a \cos t, y = a \sin t$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ), 依式(7)有  $ds = adt$ , 所以

$$I = \int_0^{\pi/2} a \cos t \cdot a \sin t \cdot adt = \frac{a^3}{2}.$$

**例 3** 求  $I = \oint_L \frac{|y|}{x^2 + y^2 + z^2} ds$ , 其中  $L$  是:  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, \\ x^2 + y^2 = 2ax, \end{cases}$

$z \geq 0, a > 0$ .

解 曲线  $L$  的图形如图 11-3 所示. 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ , 则  $L$  的柱面坐标方程为

$$r = 2a \cos \theta,$$

$$z = \sqrt{4a^2 - r^2} = 2a \sin \theta \left( -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

由公式(10), 有

$$ds = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta) + z'^2(\theta)} d\theta$$

$$= 2a \sqrt{1 + \cos^2 \theta} d\theta.$$

利用对称性, 得

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin \theta \cos \theta}{4a^2} \cdot 2a \sqrt{1 + \cos^2 \theta} d\theta$$

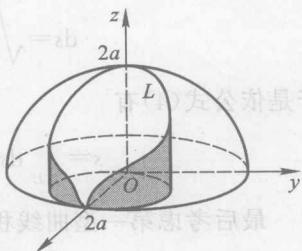


图 11-3

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \theta} d(1 + \cos^2 \theta)$$

$$(0) = - \frac{2}{3} (1 + \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

例 4 求  $I = \oint_L |y| ds$ ,  $L$  是双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ,  $a > 0$ .

解 令  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 则  $L$  的极坐标方程为  $r = a \sqrt{\cos 2\theta}$  ( $|\theta| \leq \pi/4$  及  $|\theta - \pi| \leq \pi/4$ ). 于是依公式(9)有

$$ds = \sqrt{a^2 \cos 2\theta + \frac{a^2 \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}} d\theta = \frac{ad\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{a^2 d\theta}{r}.$$

由曲线的对称性及被积函数的奇偶性, 只需考虑在第一象限内的部分:

$$I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \sin \theta \frac{a^2 d\theta}{r} = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta = 2a^2(2 - \sqrt{2}).$$

下面考虑应用公式(4)来计算弧长. 若  $L$  是  $xy$  平面上的平面曲线, 则弧长的计算在定积分中已讨论过. 下面举一个求空间曲线弧长的例子.

例 5 设  $L$  是曲线  $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ \frac{y}{x} = \tan z \end{cases}$  在第 I 卦限内从原点到点  $(x_0, y_0, 1)$  的一段, 求  $L$  的弧长  $s$ .

解 在柱面坐标  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$  下, 曲线  $L$  可表示为  $r = \sqrt{\theta}$ ,  $z = \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ). 由公式(10), 有

$$ds = \sqrt{\theta + \frac{1}{4\theta} + 1} d\theta = \frac{1+2\theta}{2\sqrt{\theta}} d\theta.$$

于是依公式(4)有

$$s = \int_L ds = \int_0^1 \left( \frac{1}{2\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta} \right) d\theta = \frac{5}{3}.$$

最后考虑第一型曲线积分的物理应用.

设空间曲线  $L$  的线密度为  $\mu$ , 质量  $M = \int_L \mu ds$ , 类似于空间立体的重心坐标公式和立体对坐标轴的转动惯量公式, 曲线  $L$  的重心坐标

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  和  $L$  对坐标轴的转动惯量  $I_x, I_y, I_z$  分别有公式

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_L \mu x \, ds, \bar{y} = \frac{1}{M} \int_L \mu y \, ds, \bar{z} = \frac{1}{M} \int_L \mu z \, ds. \quad (11)$$

$$I_x = \int_L (y^2 + z^2) \mu \, ds, I_y = \int_L (z^2 + x^2) \mu \, ds, I_z = \int_L (x^2 + y^2) \mu \, ds. \quad (12)$$

关于平面曲线  $L$  的重心坐标  $(\bar{x}, \bar{y})$  和  $L$  对坐标轴的转动惯量  $I_x, I_y$ , 其公式可以类比写出.

**例 6** 设心脏线  $L$  的极坐标方程为  $r = a(1 - \cos \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  (图 11-4), 线密度为常数  $\mu$ . 求(1)  $L$  的重心坐标  $(\bar{x}, \bar{y})$ ; (2)  $L$  对坐标轴的转动惯量  $I_x, I_y$ .

解 依公式(9)有

$$ds = a \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta \quad \text{图 11-4}$$

$$= 2a \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta. \quad (3)$$

$$(1) \text{ 质量 } M = \int_L \mu \, ds = 2a\mu \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta (\theta = 2t) \quad (4)$$

$$= 4a\mu \int_0^\pi |\sin t| dt = 4a\mu \int_0^\pi \sin t dt = 8a\mu. \quad (5)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_L \mu x \, ds = \frac{1}{8a} \int_0^{2\pi} a(1 - \cos \theta) \cos \theta \cdot 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta \quad (6)$$

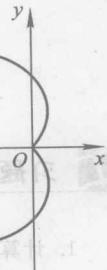
$$= \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \left( 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin^3 \frac{\theta}{2} d\theta \quad (7)$$

$$= a \int_0^\pi (\sin^3 t - 2\sin^5 t) dt = -\frac{4}{5}a, \quad (8)$$

由于  $\mu$  为常数,  $L$  关于  $x$  轴对称, 因此  $\bar{y} = 0$ , 可见所求重心为

$$\left( -\frac{4}{5}a, 0 \right).$$

$$(2) I_x = \int_L \mu y^2 \, ds = 2a^3 \mu \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 \sin^2 \theta \sin \frac{\theta}{2} d\theta \quad (9)$$



$$\begin{aligned}
 &= 32a^3\mu \int_0^{2\pi} \sin^7 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta \\
 &= 64a^3\mu \int_0^\pi (\sin^7 t - \sin^9 t) dt = \frac{2048}{315}\mu a^3. \\
 (11) \quad I_y &= \int_L \mu x^2 ds = 2a^3\mu \int_0^{2\pi} (1-\cos \theta)^2 \cos^2 \theta \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\
 &= 8a^3\mu \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 \sin^5 \frac{\theta}{2} d\theta \\
 &= 16a^3\mu \int_0^\pi (\sin^5 t - 4\sin^7 t + 4\sin^9 t) dt = \frac{3328}{315}\mu a^3.
 \end{aligned}$$



## 习题 11.1

1. 计算下列第一型曲线积分：

- (1)  $\int_L (x+y) ds$ , 其中  $L$  是以  $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$  为顶点的三角形围线；
- (2)  $\oint_L (x^2+y^2) ds$ , 其中  $L$  是圆周  $x^2+y^2=R^2$ ；
- (3)  $\int_L y^2 ds$ , 其中  $L$  是摆线  $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t) (0 \leq t \leq 2\pi), a>0$ ；
- (4)  $\oint_L |y| ds$ , 其中  $L$  是圆周  $x^2+y^2=4$ ；
- (5)  $\oint_L xy ds$ , 其中  $L$  是正方形回路  $|x|+|y|=1$ ；
- (6)  $\int_L \frac{ds}{x^2+y^2+5}$ , 其中  $L$  是连结  $O(0,0)$  与  $A(1,2)$  的直线段；
- (7)  $\oint_L z^2 ds$ , 其中  $L$  是圆周  $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$ ；
- (8)  $\int_L (x+y) ds$ , 其中  $L$  是从  $A(1,0)$  到  $B(1,2)$  的直线段.

2. 求曲线  $x=at, y=\frac{a}{\sqrt{2}}t^2, z=\frac{a}{3}t^3 (0 \leq t \leq 1)$  的一段弧的质量, 其密度为  $\mu =$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}y}{a}} (a>0).$$

3. 求密度均匀的摆线  $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t) (0 \leq t \leq \pi)$  的一段弧的重心坐标 ( $a>0$ ).

4. 将圆  $x^2 + (y-b)^2 = a^2$  ( $b > a > 0$ ) 绕  $x$  轴旋转一周得圆环体, 求其全表面积.

## § 11.2 第二型曲线积分

### 11.2.1 定义与性质

首先考虑导致第二型曲线积分概念的典型问题——变力沿曲线作功的力学问题.

设一质点在力  $\mathbf{F}$  作用下沿光滑曲线  $L$  从点  $A$  移动至点  $B$ , 力  $\mathbf{F}$  随点而变化, 即  $\mathbf{F}$  是定义在  $L$  上的矢量函数.

$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} = \{P, Q, R\}$   
其中  $P, Q, R$  在  $L$  上连续, 要计算质点在力  $\mathbf{F}$  作用下沿光滑曲线  $L$  从点  $A$  移动至点  $B$  所作的功  $W$ .

我们用微元法思想来解此问题. 在  $L$  上取一个与  $L$  方向一致的微小弧段  $\Delta s$ , 其弧长近似为  $ds$ , 则质点在力  $\mathbf{F}$  作用下沿  $\Delta s$  所作的功  $\Delta W$  近似为质点在力  $\mathbf{F}$  作用下沿单位切矢量  $\tau$  移动距离为  $ds$  所作的微功  $dW = \mathbf{F} \cdot \tau ds$  (图 11-5), 于是所求功  $W$  为线积分

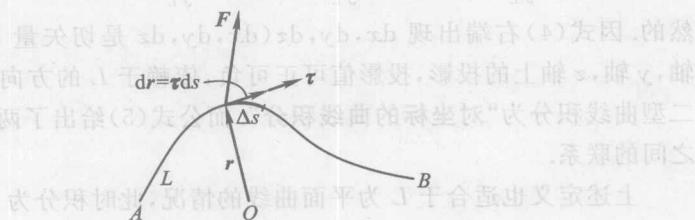


图 11-5

$$W = \int_L dW = \int_L \mathbf{F} \cdot \tau ds. \quad (1)$$

形如(1)的积分不仅可用于功的计算, 还广泛出现在其他许多科学

问题中.因此引入以下概念.

**定义 1** 设  $P, Q, R$  是定义于分段光滑有向曲线  $L$  上的有界函数,

$\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ .若积分  $\int_L \mathbf{F} \cdot \tau ds$  存在,则称它为函数组  $P, Q, R$ (或矢量函数  $\mathbf{F}$ )沿曲线  $L$  的第二型曲线积分,记作  $\int_L \mathbf{F} \cdot dr$ ,即

$$\int_L \mathbf{F} \cdot dr = \int_L \mathbf{F} \cdot \tau ds, \quad (2)$$

其中  $P, Q, R$  叫做被积函数,  $L$  称为积分弧段或积分路径.

以  $r$  记  $L$  上动点的矢径,以  $\tau$  记  $L$  的单位切矢量,其方向与  $L$  的方向一致.以  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  记  $\tau$  的方向余弦.令  $r = \{x, y, z\}$ ,则  $dr = \{dx, dy, dz\}$ .因  $dr$  与  $\tau$  同向且  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2$ ,故  $dr = \tau ds$ (图 11-5 所示).于是

$$\begin{aligned} \int_L P dx + Q dy + R dz &= \int_L \mathbf{F} \cdot dr = \int_L \mathbf{F} \cdot \tau ds \\ &= (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\int_L \mathbf{F} \cdot dr = \int_L P dx + Q dy + R dz. \quad (4)$$

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds. \quad (5)$$

可见,将积分  $\int_L \mathbf{F} \cdot dr$  写成  $\int_L \mathbf{F} \cdot \tau ds$  或  $\int_L P dx + Q dy + R dz$  是很自然的.因式(4)右端出现  $dx, dy, dz$ ( $dx, dy, dz$  是切矢量  $dr$  分别在  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴上的投影,投影值可正可负,依赖于  $L$  的方向),故也称第二型曲线积分为“对坐标的曲线积分”.而公式(5)给出了两类曲线积分之间的联系.

上述定义也适合于  $L$  为平面曲线的情况,此时积分为

$$\int_L \mathbf{F} \cdot dr = \int_L P dx + Q dy.$$

可以看出,对矢量函数  $\mathbf{F}$  的第二型曲线积分只不过是对数量函数  $\mathbf{F} \cdot \tau$  的第一型曲线积分.因此,可将第一型曲线积分的结论转移到第二型曲线积分.另一方面,由于积分  $\int_L \mathbf{F} \cdot \tau ds$  依赖于  $\tau$ ,因而第二型曲线积分也有一些与  $L$  方向相关的性质.简述于下.

1° 若  $L$  为分段光滑有限长的有向曲线,  $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$  是  $L$  上的分段连续的矢量函数, 则曲线积分  $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  存在.

2° 若记  $-L$  为  $L$  的反向曲线, 则有

$$\int_{-L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

这是第二型曲线积分区别于第一型曲线积分的一个重要特征.

3° 设  $\mathbf{F} = a\mathbf{G} + b\mathbf{H}$ , 则

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = a \int_L \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} + b \int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}.$$

4° 设  $L = L_1 + L_2$  (方向保持一致), 则

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{L_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

5° 若在  $L$  上, 处处有  $\mathbf{F} \perp \tau$ , 则  $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ .

$$6° \int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L P dx + \int_L Q dy + \int_L R dz.$$

以上结论有助于简化第二型曲线积分的计算.

### 11.2.2 化为定积分

积分  $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  的计算公式可以通过第一型曲线积分公式导出.

**定理 1** 设曲线  $L$  由以下参数方程给定:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (t \in I),$$

其中  $x(t), y(t), z(t)$  在闭区间  $I$  上有连续导数, 且  $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$ ;  $I$  的端点  $\alpha$  与  $\beta$  分别对应  $L$  的起点与终点(这是要点, 注意不必  $\alpha < \beta$ !). 若  $P, Q, R$  在  $L$  上连续, 则

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_{\alpha}^{\beta} [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)] dt, \quad (6)$$

其中右端的  $P$  是  $P(x(t), y(t), z(t))$  的简写;  $Q, R$  仿此.

**证** 令  $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ ,  $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ . 不妨设  $\alpha \leq t \leq \beta$  ( $\alpha > \beta$  的情况可通过性质 2° 推出), 因为

$$\tau = \frac{\{x'(t), y'(t), z'(t)\}}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}},$$

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt,$$

于是有

$$\begin{aligned} & \int_L P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_L \mathbf{F} \cdot \tau ds \\ &= \int_a^\beta [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)] dt. \end{aligned}$$

公式(6)表明,要将曲线积分  $\int_L P dx + Q dy + R dz$  化为定积分,只需将  $\int_L$  换成  $\int_a^\beta$ ,然后分别以  $x(t), y(t), z(t)$  代换被积表达式中的  $x, y, z$ ,以  $x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt$  代换  $dx, dy, dz$  即可.由于不出现弧微分  $ds$ ,故比第一型曲线积分简单一些.

公式(6)也适合于平面曲线  $L: x=x(t), y=y(t), (t \in I)$  上矢量函数  $F=\{P, Q\}$  的曲线积分:

$$\int_L P dx + Q dy = \int_a^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

**例 1** 求  $I = \int_L y dx - x dy$ ,  $L$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上从点  $(a, 0)$  到点  $(0, b)$  的一段,  $a, b > 0$ .

解  $L$  可表示为参数方程:  $x = a \cos t, y = b \sin t (0 \leq t \leq \pi/2)$ , 于是

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a \sin^2 t - a b \cos^2 t) dt = -\frac{\pi ab}{2}.$$

**例 2** 求  $I = \int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ ,  $L$  是抛物线  $y = x^2$  上从点  $(-1, 1)$  到点  $(1, 1)$  的一段.

(a) 解  $L$  可表示为参数方程:  $x = x, y = x^2 (-1 \leq x \leq 1)$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 [x^2 - 2x \cdot x^2 + (x^4 - 2x \cdot x^2) 2x] dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^2 - 4x^4) dx = -\frac{14}{15}. \end{aligned}$$

**例 3** 求  $I = \int_L ydx + zdy + xdz$ ,  $L$  是螺旋线  $x = a\cos t$ ,  $y = a\sin t$ ,  $z = bt$  上从  $t=0$  到  $t=2\pi$  的一段.

**解** 直接用公式(6):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin^2 t + abt \cos t + ab \cos t) dt \\ &= -a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + ab \int_0^{2\pi} t \cos t dt = -\pi a^2. \end{aligned}$$

**例 4** 设一质点在平面力场  $\mathbf{F}$  作用下沿曲线  $L: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  ( $a>0$ ) 从点  $(a, 0)$  移动至点  $(0, a)$ ,  $\mathbf{F}$  与  $\mathbf{r} = xi + yj$  垂直且指向逆时针方向(图 11-6),  $|\mathbf{F}|$  与  $r = |\mathbf{r}|$  成正比. 求  $\mathbf{F}$  对质点所作的功  $W$ .

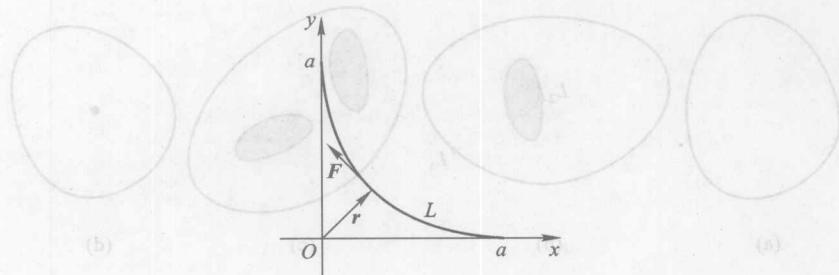


图 11-6

**解** 令  $\mathbf{A} = -yi + xj$ , 则  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = 0$ , 且  $\mathbf{A}$  指向逆时针方向,  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{r}|$ . 因此  $\mathbf{F} = k\mathbf{A}$ ,  $k$  是正常数. 于是依公式(1)有

$$W = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = k \int_L -ydx + xdy.$$

取  $L$  的如下参数方程:  $x = a\cos^3 t$ ,  $y = a\sin^3 t$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ), 则

$$\begin{aligned} W &= 3ka^2 \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^4 t) dt \\ &= 3ka^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \frac{3ka^2}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{3k\pi a^2}{16}. \end{aligned}$$

### 11.2.3 Green 公式

本小节建立平面曲线积分与二重积分之间的联系.为此,需要首先对平面区域及其边界的某些几何性质作刻画.

设  $D$  是一平面区域.若  $D$  内任何闭曲线可不越过  $D$  的边界而连续地缩为一点,则称  $D$  为单连通区域(这一定义亦适合空间区域),否则称  $D$  为复连通区域(或多连通区域).直观上,若  $D$  是单连通的,则其边界曲线内部全部属于  $D$ ;复连通区域则是从单连通区域挖去若干个“洞”而得的区域.在图 11-7 中,(a)是单连通区域,(b)~(d)是复连通区域.

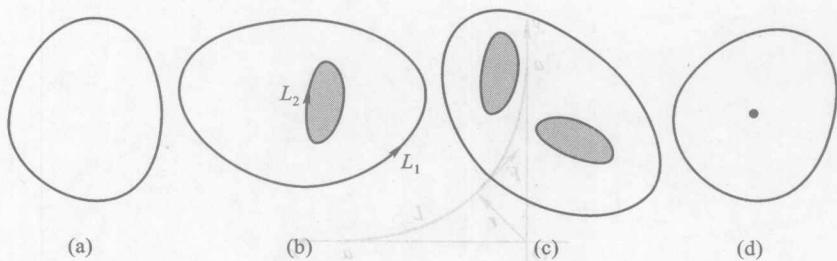


图 11-7

设平面闭曲线  $L$  围住区域  $D$ .若观察者沿  $L$  行进时  $D$  在它附近的部分总保持在左边,则称行进的方向为  $L$  正向,而称相反的方向为负向.取负向的  $L$  通常记作  $L^-$  或  $-L$ .若  $L$  围住单连通区域  $D$ ,则  $L$  的正向也就是“逆时针方向”.若区域  $D$  是边界曲线  $L_1$  及  $L_2$  所围成的复连通区域(图 11-7(b)),作为  $D$  的正向边界,  $L_1$  的正向是“逆时针方向”,而  $L_2$  的正向是“顺时针方向”.为了简便起见,下面称分段光滑且自身不相交的闭曲线为简单闭曲线.

**定理 2(Green 公式)** 设区域  $D$  由  $xy$  平面上的简单闭曲线  $L$  围成,函数  $P, Q$  在  $D$  上(包括边界!)有连续的一阶偏导数,则成立如下的“Green 公式”:

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy, \quad (7)$$

其中左端积分是沿  $L$  的正向取的.

**证** 等式(7)是以下两等式相加的结果:

$$\oint_L P dx = - \iint_D P_y dx dy;$$

$$\oint_L Q dy = \iint_D Q_x dx dy.$$

下面证其中第一式(第二式可类似证明).首先设  $D$  是  $x$  型区域(图 11-8),即  
可表示成

$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b.$$

则由二重积分化为逐次积分公式,有

$$\begin{aligned} \iint_D P_y dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} P_y dy \\ &= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx. \end{aligned}$$

再由曲线积分分段积分公式,有

$$\begin{aligned} \oint_L P dx &= \int_{\widehat{AB}} P dx + \int_{BC} P dx + \int_{\widehat{CD}} P dx + \int_{DA} P dx \\ &= \int_{\widehat{AB}} P dx + \int_{\widehat{CD}} P dx \\ &= \int_a^b P(x, y_1(x)) dx + \int_b^a P(x, y_2(x)) dx \\ &= \int_a^b P(x, y_1(x)) dx - \int_a^b P(x, y_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))] dx, \end{aligned}$$

即

$$\oint_L P dx = - \iint_D P_y dx dy.$$

若  $D$  不是  $x$  型区域,是一般单连通区域,则适当添加辅助线将  $D$  划分为若干个  $x$  型区域来分块考虑.例如,在图 11-9 的情况下(依图中的记号)有

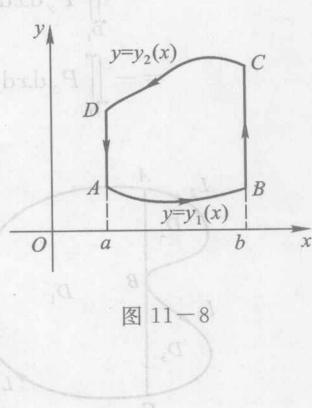


图 11-8

$$\begin{aligned}
 \oint_L P dx &= \left( \int_{L_1} P dx + \int_{AC} P dx \right) + \left( \int_{BA} P dx + \int_{L_2} P dx \right) \\
 &\quad + \left( \int_{CB} P dx + \int_{L_3} P dx \right) \\
 &= - \iint_{D_1} P_y dxdy - \iint_{D_2} P_y dxdy - \iint_{D_3} P_y dxdy \\
 &= - \iint_D P_y dxdy.
 \end{aligned}$$

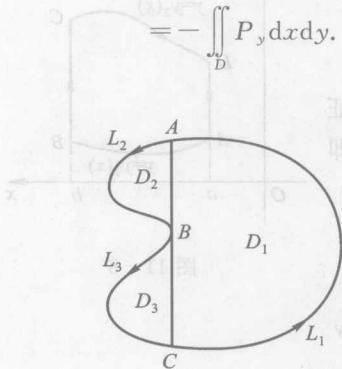


图 11-9

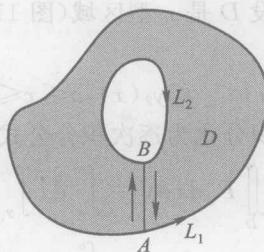


图 11-10

若  $D$  是复连通区域, 则设想用剪刀沿辅助线把  $D$  剪开, 这样剪开的区域就没有“洞”了, 即剪开后的区域为单连通区域. 例如, 在图 11-10 的情况下有

$$\begin{aligned}
 \oint_L P dx &= \oint_{L_1} P dx + \int_{AB} P dx + \oint_{L_2} P dx + \int_{BA} P dx \\
 &= - \iint_D P_y dxdy. \quad \square
 \end{aligned}$$

Green 公式主要用于将闭曲线上的曲线积分化为二重积分来计算. 试看两例.

**例 5** 求  $I = \int_L x^2 y dx - xy^2 dy$ ,  $L$  是正向圆周  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ).

**解** 直接由 Green 公式有

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (-y^2 - x^2) dx dy$$

$$= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = -\frac{\pi a^4}{2}.$$

例 6 求  $I = \int_L (x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy$ ,  $L$  是曲线  $|x| + |y| = 1$  的正向.

解 仍用 Green 公式:

$$I = \iint_{|x|+|y|\leq 1} (3x^2 + 3y^2) dx dy$$

$$= 6 \iint_{|x|+|y|\leq 1} x^2 dx dy \quad (\text{利用对称性})$$

$$= 24 \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} dy = 2.$$

利用 Green 公式(7)时, 务必注意以下基本条件:

1°  $L$  是简单闭曲线;

2°  $P, Q$  在  $L$  上及其内部有连续的一阶偏导数. 若这些条件不满足, 则不能直接应用公式(7).

不过, 在不能直接应用公式(7)的情况下, 仍可考虑某些变通办法. 例如, 若  $L$  不是闭曲线, 则用添加辅助线段的方法可以将  $L$  补成闭曲线. 如在图 11-11 的情况下, 有

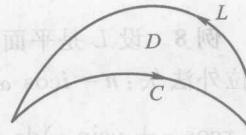


图 11-11

$$\int_L P dx + Q dy = \oint_{L+C} P dx + Q dy - \int_C P dx + Q dy. \quad (8)$$

所加曲线为平行于坐标轴的线段时较为有利.

例 7 求  $I = \int_L (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2 \sin y) dy$ ,  $L$  是抛物线  $y = x^2$  从点  $A(-1, 1)$  到点  $B(1, 1)$  的一段.

解 如图 11-12, 补入有向线段  $C: y=1 (-1 \leq x \leq 1)$ , 与  $L$  围成区域  $D: x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1$ . 于是由公式(8)有

$$I = \iint_D (-2x - 2(x+y)) dx dy - \int_C (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2 \sin y) dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_D (-4x - 2y) dx dy - \int_C (x+1)^2 dx = 1 \\
 &= -2 \iint_D y dx dy + \int_{-1}^1 (x+1)^2 dx = 1 \\
 &= |v| = +2 \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y dy + \frac{8}{3} = \frac{16}{15}. \quad \text{得 } |v| = 1
 \end{aligned}$$

对某些特殊的第一型曲线积分亦可用 Green 公式. 试看一例.

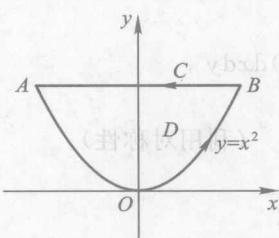


图 11-12

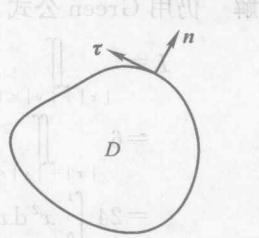


图 11-13

**例 8** 设  $L$  是平面区域  $D$  的正向边界曲线,  $D$  有面积  $\sigma$ ,  $n$  是  $L$  的单位外法矢:  $n = i \cos \alpha + j \sin \alpha$ , 证明  $\tau = \{-\sin \alpha, \cos \alpha\}$ , 并求  $I = \oint_L (x \cos \alpha + y \sin \alpha) ds$ .

解 由图 11-13 知,  $n, \tau, k$  成右手系, 故

$$(8) \quad \tau = k \times n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{vmatrix} = \{-\sin \alpha, \cos \alpha, 0\}.$$

又  $n = \tau \times k$ , 若记  $F = \{x, y, 0\}$ , 则  $k \times F = \{-y, x, 0\}$ , 于是

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_L F \cdot n ds = \oint_L F \cdot (\tau \times k) ds \\
 &= \oint_L (k \times F) \cdot \tau ds = \oint_L \{-y, x, 0\} \cdot \tau ds \\
 &= \oint_L -y dx + x dy = \iint_D 2 d\sigma = 2\sigma.
 \end{aligned}$$

从例 8 中可归纳出一个较一般的公式:

$$\oint_L \{P, Q\} \cdot n ds = \int_L \{-Q, P\} \cdot \tau ds = \int_L -Q dx + P dy, \quad (9)$$

其中  $n$  是  $L$  的单位外法矢,  $\tau$  是  $L$  的正向单位切矢量.

Green 公式常被用来证明某些含曲线积分与二重积分的等式,以下是一典型例子.

**例 9** 设  $L, D, n$  如例 8, 函数  $u$  在  $D$  及  $L$  上有连续的二阶偏导数, 证明

$$\iint_D (u_x^2 + u_y^2) d\sigma = \oint_L u \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iint_D u \Delta u d\sigma,$$

其中  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ .

**证** 注意方向导数  $\partial u / \partial n = \text{grad } u \cdot n = (iu_x + ju_y) \cdot n$ , 结合式(9)有

$$\begin{aligned} \oint_L u \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_L \{uu_x, uu_y\} \cdot n ds \\ &= \oint_L \{-uu_y, uu_x\} \cdot \tau ds \\ &= \iint_D [(uu_x)_x + (uu_y)_y] dx dy \\ &= \iint_D (u_x^2 + u_y^2 + u \Delta u) dx dy. \end{aligned}$$

由此显然得出所要证明的等式.

在少数特殊情况下, 可用 Green 公式将二重积分化为曲线积分来计算. 例如, 在式(7)中令  $Q=x, P=-y$ , 便得面积计算公式

$$\sigma = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \int_L x dy - y dx, \quad (10)$$

其中  $\sigma$  即为  $D$  的面积.

**例 10** 求椭圆域  $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 (a, b > 0)$  的面积.

**解** 以  $L$  记  $D$  的边界正向, 则椭圆  $L$  有参数方程:  $x = a \cos t, y = b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ , 于是依公式(10)有

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab.$$

#### 11.2.4 平面曲线积分与路径无关的条件

在引力场和电场中,一个物体或一个电荷从一点移动到另一点所作功仅依赖于物体移动的起点和终点,不依赖这两点间的路径.本小节将从数学上分析这一现象的本质,但仅限于考虑平面曲线积分,以便应用Green公式这一深刻结果.

设  $D$  是  $xy$  平面上的区域,  $P, Q$  是定义于  $D$  内的连续函数.若对  $D$  内任何两条共起点与终点的分段光滑曲线  $L_1$  与  $L_2$  (图 11-14) 都有

$$\int_{L_1} P dx + Q dy = \int_{L_2} P dx + Q dy,$$

则说积分  $\int_L P dx + Q dy$  在  $D$  内与路径无关.

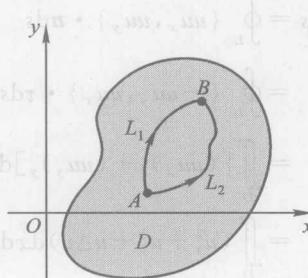


图 11-14

下面定理给出曲线积分与路径无关的一系列等价条件.

**定理 3** 设  $D$  是平面单连通区域,  $P, Q$  在  $D$  内有连续的一阶偏导数, 则以下条件相互等价:

(i) 曲线积分  $\int_L P dx + Q dy$  在  $D$  内与路径无关;

(ii) 存在可微函数  $u$  使  $du = P dx + Q dy$ ;

(iii) 在  $D$  内  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ;  $P dx + Q dy = ab$  满足  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  且同  
时  $\int_L P dx + Q dy = ab$  由 (iii)  $\Leftrightarrow$  (ii).

(iv) 对  $D$  内任何分段光滑闭曲线  $C$ , 有  $\oint_C P dx + Q dy = 0$ .

**证** 只要证 (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv)  $\Rightarrow$  (i).

证 (i)  $\Rightarrow$  (ii). 设积分  $\int_L P dx + Q dy$  在  $D$  内与路径无关. 取定  $(x_0, y_0) \in D$ , 定义二元函数 (亦称为变终点的曲线积分):

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy, (x, y) \in D,$$

其中积分路径是  $D$  内从点  $A(x_0, y_0)$  到点  $B(x, y)$  的任一分段光滑闭曲线  $L$ . 直接计算有 (参考图 11-15)

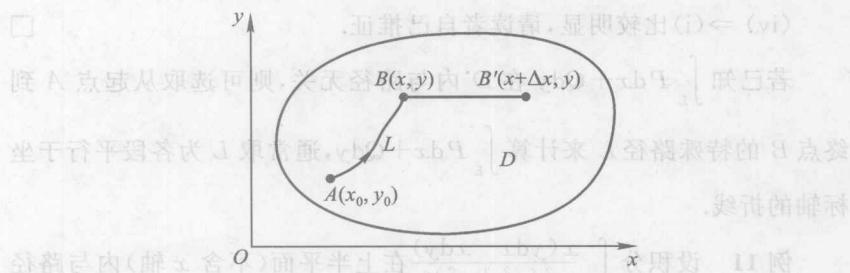


图 11-15

$$u_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{(x_0, y_0)}^{(x+\Delta x, y)} P dx + Q dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)} P dx + Q dy$$

$$(沿水平线段) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt$$

$$(定积分中值定理) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} P(x + \theta \Delta x, y) \cdot \Delta x \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

$$= P(x, y).$$

同理  $u_y = Q$ , 因此  $du = Pdx + Qdy$ .

证(ii)  $\Rightarrow$  (iii). 由  $du = Pdx + Qdy$  有  $u_x = P$ ,  $u_y = Q$ , 于是

$$u_{xy} = P_y, u_{yx} = Q_x.$$

又因为  $P, Q$  在  $D$  内有连续的一阶偏导数, 亦即两个二阶混合偏导数  $u_{xy}$  和  $u_{yx}$  都在  $D$  内连续, 从而二者相等, 即在  $D$  内  $Q_x = P_y$ .

证(iii)  $\Rightarrow$  (iv). 设在  $D$  内  $Q_x \equiv P_y$ ,  $C$  是  $D$  内的分段光滑闭曲线, 它围住区域  $G$ . 因  $D$  是单连通的, 故  $G$  必含于  $D$  内, 因此可在  $G$  上用 Green 公式:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_G (Q_x - P_y) dxdy = 0.$$

(iv)  $\Rightarrow$  (i) 比较明显, 请读者自己推证.  $\square$

若已知  $\int_L Pdx + Qdy$  在  $D$  内与路径无关, 则可选取从起点  $A$  到终点  $B$  的特殊路径  $L$  来计算  $\int_L Pdx + Qdy$ , 通常取  $L$  为各段平行于坐标轴的折线.

例 11 设积分  $\int_L \frac{x(ydx - xdy)}{y^2(x^2 + y^2)^a}$  在上半平面(不含  $x$  轴)内与路径无关, 求  $a$  与  $I = \int_{(1,1)}^{(0,2)} \frac{x(ydx - xdy)}{y^2(x^2 + y^2)^a}$ .

解 将被积式记为  $Pdx + Qdy$ , 则依定理 3 有  $Q_x \equiv P_y$ . 算出

$$Q_x = \frac{2(ax^3 - x^3 - xy^2)}{y^2(x^2 + y^2)^{a+1}};$$

$$P_y = -\frac{x^3 + (2a+1)xy^2}{y^2(x^2 + y^2)^{a+1}}.$$

于是

$$2(ax^3 - x^3 - xy^2) \equiv -x^3 - (2a+1)xy^2,$$

或

$$(2a-1)(x^3 + xy^2) \equiv 0 (y > 0),$$

由此推出  $a=1/2$ . 取  $L$  为从点  $(1,1)$  经点  $(0,2)$  的折线(图 11-16), 得

$$I = \int_L \frac{x(ydx - xdy)}{y^2(x^2 + y^2)^a}$$

$$= \int_1^0 \left( \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = 1 - \sqrt{2}.$$

由定理 3 推出, 若  $L$  是分段光滑闭曲线,  $P, Q$  在  $L$  上及其内部有连续的一阶偏导数, 且  $Q_x \equiv P_y$ , 则  $\oint_L P dx + Q dy = 0$ . 但若上述条件不完全满足, 例如  $P$  或  $Q$  在  $L$  内部某点不连续或  $D$  为复连通区域, 则以上结果不再适用. 在这种情况下, 可用以下结论:

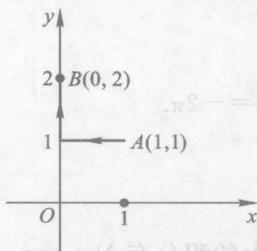


图 11-16

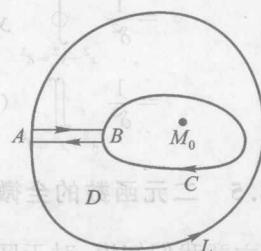


图 11-17

**定理 4** 设除点  $M_0$  以外,  $P, Q$  处处有连续的一阶偏导数, 且  $Q_x \equiv P_y$ . 则对任何包围点  $M_0$  的正向简单闭曲线  $L$ , 积分  $\oint_L P dx + Q dy$  取同一值(即与环路路径无关).

**证** 设  $L, C$  是包围点  $M_0$  的两条简单闭曲线, 不妨设  $C$  在  $L$  的内部. 作一辅助线段  $AB$ , 从点  $A$  出发沿  $L$  的正向绕行一周, 然后从  $A$  经线段  $AB$  至  $B$ , 沿  $C$  之负向绕行一圈到  $B$ , 再经  $BA$  回到  $A$  (图 11-17). 这样构成一闭曲线  $\Gamma$ , 在  $\Gamma$  上及其内部  $Q_x = P_y$ , 因而

$$\oint_{\Gamma} = \oint_L + \int_{AB} - \oint_C + \int_{BA} = 0 \quad (\text{省去的被积式为 } P dx + Q dy),$$

故  $\oint_L P dx + Q dy = \oint_C P dx + Q dy$ .  $\square$

例 12 求  $\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ ,  $L$  是闭曲线  $|x| + |y| = 1$  的正向.

解 除原点以外可验证

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

取  $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 作圆周  $C: x^2 + y^2 = \delta^2$ , 则  $C$  包含在  $L$  内部, 于是由

定理 4 有

$$\begin{aligned} I &= \oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \oint_{x^2 + y^2 = \delta^2} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{\delta^2} \oint_{x^2 + y^2 = \delta^2} ydx - xdy \\ &= \frac{1}{\delta^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq \delta^2} (-2) dx dy = -2\pi. \end{aligned}$$

### 11.2.5 二元函数的全微分求积

在第六章我们知道, 对于区间  $[a, b]$  上的积分有 Newton - Leibniz 公式

$$\int_a^b df(x) = f(b) - f(a).$$

那么, 对曲线上的积分是否也有类似的公式呢?

由上节定理 3 知道, 若  $P, Q$  满足定理 3 的条件以及式(11), 则二元函数

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy, (x, y) \in D \quad (12)$$

的微分恰为  $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$  的被积表达式:

$$du(x, y) = P dx + Q dy. \quad (13)$$

式(13)表明,  $P dx + Q dy$  是  $u(x, y)$  的全微分. 这就好像,  $u(x, y)$  是  $P dx + Q dy$  的“原函数”. 由此得知, 在条件(11)成立时, 与一元函数的原函数相仿, 我们称  $u(x, y)$  为  $P dx + Q dy$  的原函数, 此时称  $P dx + Q dy$  为全微分或恰当微分, 而公式(12)就是所谓的二元函数全微分的求积

公式.

由此我们可导出与 Newton - Leibniz 公式类似的公式.

**定理 5** 设  $D$  是平面单连通区域,  $P, Q$  在  $D$  内有连续的一阶偏导数, 且在  $D$  内  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 若我们能找到某一函数  $v(x, y)$  (不论用什么方法找到), 使

$$dv(x, y) = Pdx + Qdy,$$

则

$$\begin{aligned} \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy &= v(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \\ &= v(x_1, y_1) - v(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (14)$$

**证** 仍用式(12)表示  $u(x, y)$ , 于是式(13)成立, 因此

$$du = dv \quad \text{或} \quad d(u - v) = 0.$$

于是

$$u - v \equiv C,$$

其中  $C$  为某一常数. 则

$$u(x_1, y_1) - v(x_1, y_1) = C, \quad u(x_0, y_0) - v(x_0, y_0) = C.$$

两式相减, 移项, 即有

$$u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) = v(x_1, y_1) - v(x_0, y_0),$$

注意到  $u(x_1, y_1) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy$ ,  $u(x_0, y_0) = 0$ , 上式便是式(14).

□

公式(14)与 Newton - Leibniz 公式

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (15)$$

之间的类似是明显的. 但必须强调指出, 与连续的一元函数恒有原函数不同,  $Pdx + Qdy$  并非总有类似的“原函数” $v(x, y)$ , 即使原则上已知  $Pdx + Qdy$  存在原函数, 要实际求出它也比求一元函数的原函数困难. 不过, 只要  $Q_x = P_y$  成立的范围是单连通区域, 就可以考虑用公式(14). 下面看一些例子.

**例 13** 求  $I = \int_L (x^2 + y) dx + (x - y^2) dy$ , 其中  $L$  是圆周  $x^2 + y^2$

$=1$  上从点  $(1,0)$  到点  $(0,1)$  的一段.

解 因为  $P=x^2+y$ ,  $Q=x-y^2$ , 故

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

这表明原函数  $v(x,y)$  存在. 下面用三种方法求  $v(x,y)$ .

曲线积分法: 取  $v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$ ,  $(x,y) \in D$ . 并选平行于坐标轴的直线连成的折线作为积分路径,  $(x_0,y_0)$  为原点, 则

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x-y^2) dy \\ (11) \quad &= \frac{1}{3}(x^3 + 3xy - y^3). \end{aligned}$$

不定积分法: 要找  $v$  使得  $dv=Pdx+Qdy$ , 即

$$\frac{\partial v}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = Q.$$

$$\text{即} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = x^2 + y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x - y^2,$$

从第一式对  $x$  求不定积分(把  $y$  暂时看作常数)有

$$v(x,y) = \int (x^2 + y) dx = \frac{1}{3}x^3 + xy + C(y),$$

这里  $C(y)$  起不定积分中的积分常数的作用. 然后再将此式对  $y$  求偏导数有

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x + C'(y),$$

与  $\frac{\partial v}{\partial y} = x - y^2$  比较有

$$C'(y) = -y^2,$$

从而可得  $C(y) = -\frac{1}{3}y^3$  (不加积分常数不影响曲线积分的值), 于是

$$v(x,y) = \frac{1}{3}(x^3 + 3xy - y^3).$$

凑微分法: 因为

$$(x^2 + y) dx + (x - y^2) dy$$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 dx + (y dx + x dy) - y^2 dy \\
 &= d\left(\frac{1}{3}x^3\right) + d(xy) - d\left(\frac{1}{3}y^3\right) \\
 &= \frac{1}{3}d(x^3 + 3xy - y^3), \\
 \text{于是 } v(x, y) &= \frac{1}{3}(x^3 + 3xy - y^3).
 \end{aligned}$$

最后,由公式(14)有

$$I = \frac{1}{3}(x^3 + 3xy - y^3) \Big|_{(1,0)}^{(0,1)} = -\frac{2}{3}.$$

在上例求原函数  $v(x, y)$  的方法中凑微分法比较常用. 在凑微分过程中可能用到以下公式:

$$\begin{aligned}
 d(xy) &= y dx + x dy; \\
 d(y/x) &= (xdy - ydx)/x^2; \\
 d \ln(x^2 + y^2) &= \frac{2(xdx + ydy)}{x^2 + y^2}.
 \end{aligned}$$

由曲线积分的线性性质,如果  $Pdx + Qdy$  不是全微分,但其中某一部分是全微分,则可以利用公式(14)部分地简化积分计算,具体作法由以下例子说明.

**例 14** 求  $I = \int_L (12xy + e^y) dx + (xe^y - \cos y) dy$ ,  $L$  是沿  $y = x^2$  从点  $(-1, 1)$  到  $(0, 0)$ 、再沿  $x$  轴到点  $(2, 0)$  的曲线.

**解** 首先对被积表达式凑微分

$$\begin{aligned}
 &(12xy + e^y) dx + (xe^y - \cos y) dy \\
 &= (e^y dx + xe^y dy) - \cos y dy + 12xy dx \\
 &= d(xe^y) - d(\sin y) + 12xy dx.
 \end{aligned}$$

可见对  $d(xe^y - \sin y)$  可用公式(14). 于是

$$\begin{aligned}
 I &= (xe^y - \sin y) \Big|_{(-1,1)}^{(2,0)} + 12 \int_L xy dx \\
 &= 2 + e + \sin 1 + 12 \int_{-1}^0 x^3 dx
 \end{aligned}$$

所以  $I = e + 1 + \sin 1$ .

**例 15** 求  $I = \int_L (4x^3y^3 - 3y^2)dx + (3x^4y^2 - 2xy)dy$ ,  $L$  是曲线  $x - y^2 = 1$  上从点  $(1, 0)$  到点  $(2, 1)$  的一段.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \text{由于 } (4x^3y^3 dx + 3x^4y^2 dy) - (3y^2 dx + 6xy dy) + 4xy dy \\ &= d(x^4y^3) - d(3xy^2) + 4xy dy, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I &= (x^4y^3 - 3xy^2) \Big|_{(1,0)}^{(2,1)} + 4 \int_L xy dy \\ &= 10 + 4 \int_0^1 y(1+y^2) dy = 13. \end{aligned}$$

**例 16** 设平面力场  $\mathbf{F}$  指向原点,  $\mathbf{r} = xi + yj$ ,  $|\mathbf{F}|$  与  $r = |\mathbf{r}|$  成正比. 一质点沿椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  从点  $(a, 0)$  移动到点  $(0, b)$ , 求  $\mathbf{F}$  对质点所作的功  $W$ .

解 依题意有  $\mathbf{F} = -kr$ ,  $k$  是正的常数. 于是

$$\begin{aligned} W &= \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -k \int_L \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -k \int_L (xi + yj) \cdot (idx + jdy) \\ &= -k \int_L x dx + y dy = -k \int_L \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) \\ &= -\frac{k}{2} (x^2 + y^2) \Big|_{(a,0)}^{(0,b)} = \frac{k}{2} (a^2 - b^2). \end{aligned}$$

### 11.2.6 全微分方程

下面将求原函数的方法应用于求解某类一阶微分方程.

有时, 将一阶微分方程写成关于  $x, y$  对称的形式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (16)$$

更有利于求解. 若方程(16)的左端为全微分, 即存在函数  $u$  使  $du = Pdx + Qdy$ , 则称(16)为全微分方程, 此时它的通解就是

$$u(x, y) = C. \quad (17)$$

由上节讨论知, 若  $P, Q$  在平面单连通区域  $D$  内有连续的一阶偏

导数,则(16)是全微分方程的充要条件是在  $D$  内  $Q_x = P_y$ . 此时通解为

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C \quad (18)$$

或

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x P(x, y) dx = C \quad (19)$$

其中  $(x_0, y_0)$  为  $D$  中适当选定的点. 不过, 在很多情况下, 原函数  $u$  可由凑微分法求出.

例 17 求以下方程的通解:

$$(1) e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0;$$

$$(2) (xy^2 + 1) dx + (x^2 y + 1 + y^2) dy = 0.$$

解 (1) 曲线积分法: 令  $P = e^y$ ,  $Q = xe^y - 2y$ , 则  $Q_x = e^y = P_y$ , 可见原方程为全微分方程. 取  $x_0 = y_0 = 0$ , 由公式(19)得

$$u(x, y) = \int_0^x e^y dx + \int_0^y (-2y) dy = xe^y - y^2.$$

故所求通解为  $xe^y - y^2 = C$ .

(2) 用凑微分法: 因为

$$\begin{aligned} & (xy^2 + 1) dx + (x^2 y + 1 + y^2) dy \\ &= (xy^2 dx + x^2 y dy) + dx + (1 + y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} d(x^2 y^2) + d(x + y + \frac{1}{3} y^3), \end{aligned}$$

由此得方程的通解为  $3x^2 y^2 + 6x + 6y + 2y^3 = C$ .

当方程(16)本身不是全微分方程, 但能找到一个非零因子  $\mu = \mu(x, y)$ , 使得

$$\mu P(x, y) dx + \mu Q(x, y) dy = 0 \quad (20)$$

是全微分方程, 则问题归结为解与(16)等价的方程(20), 称如上的  $\mu$  为方程(16)的积分因子. 只要  $P, Q$  有连续偏导数, 就可证明方程(16)必存在积分因子. 但只在少数特殊情况下, 才容易求出积分因子. 下面是求积分因子的例子, 所用方法是 11.2.5 中求原函数方法的某种改进, 这种方法能同时求出方程的通解.

例 18 求以下方程的通解:

$$(1) y dx - (x^2 + y^2 + x) dy = 0;$$

$$(2) (y^2 - xy) dx + (2xy^3 + xy + x^2) dy = 0.$$

解 (1) 逐步变换方程左端:

$$\begin{aligned} \text{方程左端} &= (ydx - xdy) - (x^2 + y^2)dy \\ &= (x^2 + y^2) \left( \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} - dy \right) \\ &= (x^2 + y^2) \left[ \frac{(ydx - xdy)/y^2}{1 + (x/y)^2} - dy \right] \\ &= (x^2 + y^2) \left[ \frac{d(x/y)}{1 + (x/y)^2} - dy \right] \\ &= (x^2 + y^2) d(\arctan(x/y) - y). \end{aligned}$$

可见,以积分因子  $\mu = 1/(x^2 + y^2)$  乘原方程两端,可将方程化为  $d(\arctan(x/y) - y) = 0$ ,从而得出通解  $\arctan(x/y) - y = C$ .

(2) 用类似的方法:

$$\begin{aligned} \text{方程左端} &= (y^2 dx + xy dy) - (xy dx - x^2 dy) + 2xy^3 dy \\ &= xy^2 \left[ \left( \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \right) - \frac{ydx - xdy}{y^2} + d(y^2) \right] \\ &= xy^2 d \left( \ln |xy| - \frac{x}{y} + y^2 \right). \end{aligned}$$

于是得通解  $\ln |xy| - (x/y) + y^2 = C$ ,而  $1/(xy^2)$  是积分因子.



## 习题 11.2

1. 计算下列第二型曲线积分:

(1)  $\int_L xy dy$ , 其中  $L$  是曲线  $x^2 = y$  自  $A(-1,1)$  到  $B(1,1)$  的一段弧;

(2)  $\int_L (x^2 + y) dx + (x^2 + y) dy$ , 其中  $L$  是曲线  $y = x^2$  自  $O(0,0)$  到  $A(2,4)$  的一段弧;

(3)  $\oint_L (x+y) dx + (x-y) dy$ , 其中  $L$  是取逆时针方向的椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;

(4)  $\oint_L \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  是取逆时针方向的圆周  $x^2 + y^2 = R^2$ ;

(5)  $\oint_L \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ , 其中  $L$  是取逆时针方向的正方形回路  $|x| + |y| = 1$ ;

(6)  $\int_L x dy + y dx + (xz - y) dz$ , 其中  $L$  是从  $O(0,0,0)$  到  $A(1,2,4)$  的直线段;

(7)  $\int_L y^2 dx + x^2 dy$ , 其中  $L$  是依逆时针方向的下半椭圆  $x = a \cos t, y = b \sin t$  ( $\pi \leq t \leq 2\pi$ );

(8)  $\int_L 2xe^{x^2-y} dx + ye^{x^2-y} dy$ , 其中  $L$  是从  $A(1,0)$  沿  $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$  至  $B(0,\sqrt{2})$  的曲线段。

2. 设  $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ , 求力  $\mathbf{F}$  使物体沿曲线  $r(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 移动所作的功。

3. 设在  $xy$  平面上有一力场, 其中力的方向为  $y$  轴的负方向, 力的大小为作用点横坐标的平方, 求沿抛物线  $1-x=y^2$  从  $A(1,0)$  到  $B(0,1)$  时, 场力所作的功。

4. 计算下列积分:

(1)  $\oint_L (-y-x)dx + (x-y)dy$ , 其中  $L$  是取顺时针方向的椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;

(2)  $\int_L (my - e^x \sin y)dx + (m - e^x \cos y)dy$ , 其中  $L$  是依顺时针方向的下半圆周  $x^2 + y^2 = ax$  ( $y \leq 0$ );

(3)  $\int_L f(xy)[ydx + xdy]$ , 其中  $L$  是任意光滑闭曲线,  $f(u)$  具有一阶连续导数。

5. 验证下列曲线积分与路径无关, 并求其值:

(1)  $\int_{(0,1)}^{(-1,-1)} xdx + ydy$ ;  $= 0 - b(\xi^2 - \eta^2) + b(\eta^2 - \xi^2)$  (1)

(2)  $\int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 + y^2)(xdx + ydy)$ ;  $= 0 - b^2(\eta^2 - \xi^2) + b(\eta^2 - \xi^2)$  (2)

(3)  $\int_{(1,2)}^{(1,0)} (2xe^y + y)dx + (x^2e^y + x - 2y)dy$ ;  $= 0 - b^2(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi}) + b(\eta^2 - \xi^2)$  (3)

(4)  $\int_{(0,0)}^{(1,1)} e^x(\cos y dx - \sin y dy)$ .  $= 0 - b^2(\eta^2 - \xi^2) + b(\eta^2 - \xi^2)$  (4)

6. 利用曲线积分计算曲线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 所围区域的面积。

7. 证明积分  $\int_L \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  在右半平面  $x > 0$  内与路径无关, 并计算

$$I = \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

8. 计算  $I = \oint_L \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2}$ , 其中

(1)  $L$  是取逆时针方向的圆周  $x^2 + y^2 = 2y$ ; (9)

(2)  $L$  是取逆时针方向的曲线  $|x| + |y| = 2$ .

9. 计算  $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2}$ , 其中  $L$  为任一不经过原点的正向简单闭曲线.

10. 在椭圆  $x = a \cos t, y = b \sin t$  上每一点  $M$  都有作用力  $\mathbf{F}$ , 其大小等于点  $M$  到原点的距离, 方向指向原点. 求质点  $P$  (质量为  $m$ ) 沿椭圆在第一象限中的弧移动时(起点为  $(a, 0)$ )  $\mathbf{F}$  所作的功.

11. 设  $P(x, y), Q(x, y)$  都是有二阶连续偏导数的二元函数, 且使曲线积分  $\int_L Qdx + Pdy$  与路径无关, 试证明: 积分  $\int_L \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial x} dy$  也与路径无关.

12. 一质点沿曲线  $x=0, y=t, z=t^2$  从  $(0, 0, 0)$  移动到  $(0, 1, 1)$ , 求在此过程中, 力  $\mathbf{F} = \{\sqrt{1+x^4}, -y, 1\}$  所作的功.

13. 在椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的右焦点  $(c, 0)$  处有一质量为  $M$  的固定质点, 另一质量为  $m$  的质点沿椭圆正向从  $A(a, 0)$  运动到  $B(0, b)$ , 求引力对质点  $m$  所作的功.

14. 设质点从原点沿直线运动到椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  上的点  $M(x_1, y_1, z_1)$  处 ( $x_1 > 0, y_1 > 0, z_1 > 0$ ). 求在此运动过程中力  $\mathbf{F} = yzi + xzj + xyk$  所作的功  $W$ , 并确定  $M$  使  $W$  取得最大值.

15. 判定下列方程中哪些是全微分方程, 并对全微分方程求其通解:

(1)  $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$ ; (1)

(2)  $(x \cos y + \cos x)y' = y \sin x - \sin y$ ; (1)

(3)  $y(x - 2y)dx - x^2 dy = 0$ ; (1)

(4)  $xydx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right)dy = 0$ . (1)

16. 求下列方程的通解:

(1)  $(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0$ ; (1)

(2)  $ydx - xdy = (x^2 + y^2)dx$ ; (1)

(3)  $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$ ; (1)

(4)  $\frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{2xydy - y^2dx}{x^2}$ . (1)

17. 观察出下列微分方程的积分因子, 并求其通解:

(1)  $ydx - xdy + y^2 xdx = 0$ ; (1)

(2)  $xdy = y(xy - 1)dx$ ; (1)

$$(3) y^2(x-3y)dx + (1-3xy^2)dy = 0;$$

$$(4) (x^4 e^x - 2xy^2)dx + 2x^2 ydy = 0.$$

## § 11.3 第一型曲面积分

如同曲线积分是定积分的直接推广一样,曲面积分是二重积分的直接推广.因此,本节的内容一方面可以与第一型曲线积分相对照,同时也可以与二重积分相互参照.

### 11.3.1 定义与性质

首先考虑一个导致第一型曲面积分概念的典型问题——曲面质量问题.设  $S$  是一块具有有限面积的曲面,沿  $S$  分布有某种物质, $S$  上任一点  $(x, y, z)$  处的面密度为  $\mu(x, y, z)$ ,假定函数  $\mu$  在  $S$  上连续,要求计算  $S$  的质量  $M$ .显然,这是“平面薄板质量问题”的推广.

仿照 10.1.1 或 11.1.1 中的做法,以任意方式将  $S$  分划为  $n$  个小块  $S_1, S_2, \dots, S_n$ ,以  $\Delta S_i$  记  $S_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 的面积,在每个  $S_i$  上任取一点  $P_i$ ,则曲面  $S$  的质量应为

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(P_i) \Delta S_i, \quad (1)$$

其中  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(S_i)$ ,  $d(S_i)$  记  $S_i$  的直径.

形如(1)的和式极限还出现于其他许多问题中,因此引入以下概念.

**定义 1** 设  $S$  是具有有限面积的曲面,  $f(x, y, z)$  是定义于  $S$  上的有界函数.以任意方式将  $S$  分划为  $n$  小块  $S_1, S_2, \dots, S_n$ ,以  $\Delta S_i$  记  $S_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 的面积,令  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(S_i)$ .在每个  $S_i$  上任取一点  $P_i$ ,构成

和式  $\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i$ .若极限

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i$$

存在,且与  $S$  的分法及  $P_i$  的取法无关,则称  $I$  为  $f(x, y, z)$  在  $S$  上的第

一型曲面积分(亦称为“对面积的曲面积分”,记作  $\iint_S f(x, y, z) dS$ (或

$\iint_S f dS$ ,若  $S$  为封闭曲面,则记为  $\oint_S f dS$ ),即

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i. \quad (2)$$

利用定义 1,现在可将表示曲面质量的公式(1)改写为

$$M = \iint_S \mu(x, y, z) dS. \quad (3)$$

类似于二重积分,若  $f$  在  $S$  上连续,则积分  $\iint_S f dS$  存在. 特别,取  $f(x, y, z) \equiv 1$ ,得

$$S \text{ 的面积} = \iint_S dS. \quad (4)$$

若  $S$  是  $xy$  平面上的有界闭区域,则  $\iint_S f dS$  就是 10.1.1 所定义的二重积分. 可见二重积分只是第一型曲面积分的特殊情况.

二重积分的性质都可以推广于第一型曲面积分. 以下列出一些性质而省略证明.

1° (线性性质) 设  $a, b$  为常数, 则

$$\iint_S (af + bg) dS = a \iint_S f dS + b \iint_S g dS.$$

2° (区域可分性) 设  $S$  分割为  $S_1$  和  $S_2$ , 则  $\iint_S f dS = \iint_{S_1} f dS + \iint_{S_2} f dS$ .

3° (中值定理) 若  $f$  在  $S$  上连续, 则存在  $P \in S$ , 使得  $\iint_S f dS = f(P) \sigma$ , 其中  $\sigma$  记  $S$  的面积.

### 11.3.2 化为二重积分

前面 § 11.1 介绍过, 沿平面曲线  $L: y = y(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) 的曲线积分可以化为定积分计算:

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1+y'^2(x)} dx. \quad (5)$$

对于曲面积分,也可以建立一个类似的公式,化为二重积分计算.

**定理 1** 设曲面  $S$  由方程  $z=z(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ ) 给定,  $z=z(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上定义且有连续的一阶偏导数. 若  $f(x, y, z)$  在  $S$  上连续, 则

$$\iint_S f dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \quad (6)$$

其中  $z_x$  记  $z_x(x, y)$ ,  $z_y$  记  $z_y(x, y)$ .

公式(6)成立的理由可简要说明如下(严格的证明从略). 在  $S$  上取一微曲面块, 其面积近似于相应切平面上的面积, 记作  $dS$ , 它对应  $Oxy$  平面区域  $D$  内一微区域, 其面积记作  $d\sigma$ . 由于(见 § 10.4)

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} d\sigma, \quad (7)$$

于是

$$f(x, y, z) dS = f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} d\sigma,$$

由此即得到式(6).

公式(6)表明, 要将  $\iint_S f dS$  化为二重积分, 只需将  $\iint_S$  换成  $\iint_D$ , 然后以  $z(x, y)$  代  $f(x, y, z)$  中的  $z$ , 并以式(7)代换面积元  $dS$ .

当  $S$  由方程  $x=x(y, z)$  或  $y=y(x, z)$  表示时, 有类似于(6)的公式, 读者应能自己写出.

**例 1** 求  $I = \iint_S z^2 dS$ ,  $S$  是锥面  $z^2 = x^2 + y^2$  介于平面  $z=1$  与  $z=2$

之间的部分.

解  $S$  在  $xy$  平面上的投影是圆环域  $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  (图 11-18). 在等式  $z^2 = x^2 + y^2$  两端分别对  $x, y$  求偏导数得  $zz_x = x, zz_y = y$ , 于是

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} d\sigma = \sqrt{2} dx dy,$$

从而  $I = \iint_S z^2 dS = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy$

$$(2) \quad \iint_D z dxdy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^3 dr = \frac{15\sqrt{2}\pi}{2}.$$

解 代入二式并用公式  $\iint_D z dxdy = \iint_D z dS$ , 得球面  $S$  的面积为

$S = \iint_D \sqrt{1+z^2} dxdy = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dxdy$ .

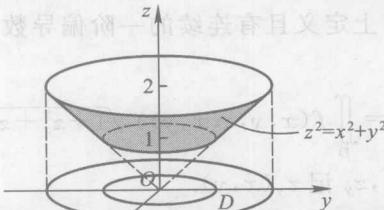


图 11-18

(3)

锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  的面积元公式  $dS = \sqrt{2} dx dy$  经常用到, 应当记住.

例 2 求  $I = \iint_S zdS$ ,  $S$  是球面  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  ( $a > 0$ ) 与锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  所围立体的表面.

解 分别以  $S_1$  与  $S_2$  记  $S$  的球面部分与锥面部分. 在柱面坐标下,  $S_1$  与  $S_2$  的方程分别为  $z = \sqrt{a^2 - r^2}$  与  $z = r$ . 由等式  $\sqrt{a^2 - r^2} = r$  解出  $r = a/\sqrt{2}$ , 故  $S_1, S_2$  在  $xy$  平面上的投影是圆域  $D: r \leq a/\sqrt{2}$  (图 11-19). 对于  $S_2$  由上例知  $dS = \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} r dr d\theta$ ; 对于  $S_1$  有

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-2y}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2} d\sigma \\ &= \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} dx dy = \frac{a}{z} dx dy. \end{aligned}$$

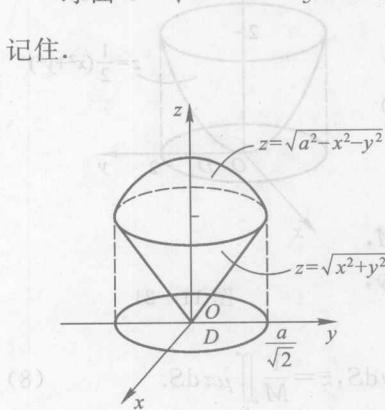
于是

$$I = \iint_{S_1} zdS + \iint_{S_2} zdS = \iint_D a dx dy + \iint_{r \leq a/\sqrt{2}} r \cdot \sqrt{2} r dr d\theta$$

$$= \frac{a^3 \pi}{2} + \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a/\sqrt{2}} r^2 dr = \frac{5a^3 \pi}{6}.$$

球面  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  ( $a > 0$ ) 的面积元公式  $dS = \frac{a}{z} dx dy$  也应当

记住。



(8)

图 11-19

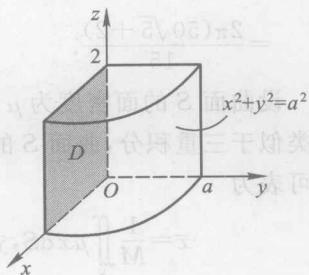


图 11-20

**例 3** 求  $I = \iint_S xyz dS$ ,  $S$  是柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 介于平面  $z=0$  与  $z=2$  之间且在第一卦限内的部分。

**解**  $S$  可表为  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq z \leq 2$ , 将  $S$  投影到  $zx$  平面上, 其投影是矩形域  $D: 0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq z \leq 2$  (图 11-20);

$$dS = \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = (a/y) dx dz.$$

于是

$$I = \iint_D xyz \cdot \frac{a}{y} dx dz = a \int_0^a x dx \int_0^2 z dz = a^3.$$

**例 4** 设  $S$  是曲面  $2z = x^2 + y^2$  在平面  $z=2$  以下的部分,  $S$  上的每点的面密度  $\mu$  等于该点到  $z$  轴距离的平方, 求  $S$  的质量。

**解** 在柱面坐标下,  $S$  的方程为  $z = r^2/2$ . 由等式  $r^2/2 = 2$  解出  $r = 2$ , 因此  $S$  在  $xy$  平面上的投影为圆域  $D: r \leq 2$  (图 11-21). 其次,

$$dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \sqrt{1 + r^2} r dr d\theta.$$

由题设有  $\mu = x^2 + y^2 = r^2$ , 于是依公式(3)与(6)有

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \mu dS = \iint_D r^2 \cdot \sqrt{1+r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{1+r^2} r^3 dr \\ &= 2\pi \int_1^{\sqrt{5}} t^2(t^2-1) dt \quad (t=\sqrt{1+r^2}) \\ &= 2\pi(50\sqrt{5}+2). \end{aligned}$$

设曲面  $S$  的面密度为  $\mu$ , 质量为  $M$ , 则类似于三重积分, 曲面  $S$  的重心  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  可表为

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S \mu x dS, \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_S \mu y dS, \bar{z} = \frac{1}{M} \iint_S \mu z dS. \quad (8)$$

**例 5** 求均匀半球面  $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  ( $a > 0$ ) 的重心  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

解 可设面密度  $\mu = 1$ , 于是质量  $M = 2\pi a^2$ . 因  $dS = (a/z) dx dy$ ,

故

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iint_S \mu z dS = \frac{1}{M} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} a dx dy = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2} = \frac{a}{2}.$$

其次, 由对称性有  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ , 因此所求重心为  $(0, 0, a/2)$ .



### 习题 11.3

- 计算  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ , 其中  $S$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被平面  $z = 1$  所截部分.
- 计算  $\iint_S \frac{1}{z} dS$ , 若
  - $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  被平面  $z = h$  ( $0 < h < a$ ) 所截下的上部球冠;
  - $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z > 0$ ) 与  $z = h$  ( $0 < h < a$ ) 所围空间区域的边界.
- 计算  $\iint_S (2xy - 2x^2 - x + z) dS$ , 其中  $S$  是平面  $2x + 2y + z = 6$  在第一卦限中的

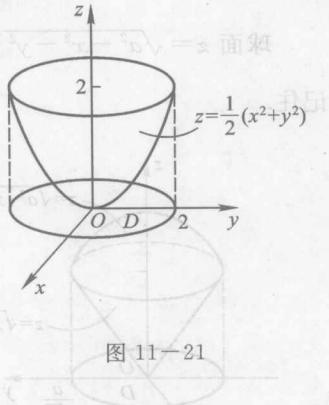


图 11-21

部分.

4. 计算  $\iint_S (xy + yz + zx) dS$ , 其中  $S$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  所截下的部分.
5. 设抛物面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 的面密度为  $\mu = z$ , 求其质量.

## § 11.4 第二型曲面积分

### 11.4.1 定义与性质

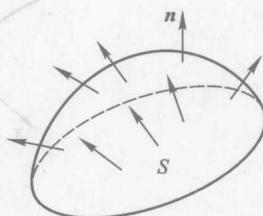
如同第二型曲线积分与曲线的定向有关一样, 本节将要讨论的第二型曲面积分与曲面的定向也有关. 因此, 必须首先介绍曲面的定向或“侧”的概念.

设  $S$  是一光滑曲面, 在  $S$  上任一点  $P$  处作曲面的单位法矢量  $n$ , 因而它确定了一个指向, 当  $P$  在  $S$  上连续移动(不越过曲面的边界)时,  $n$  也连续变动. 若  $P$  作任何连续移动回到起点时, 法矢量  $n$  与原先的法矢量指向相同, 则说  $S$  是可定向的, 且说  $n$  指定了  $S$  的一侧(图 11-22), 而  $-n$  指定了  $S$  的另一侧. 可定向曲面恰有两侧, 因此也称  $S$  为双侧曲面<sup>①</sup>. 已指定一侧的双侧曲面称为定向曲面.

以下总假定  $S$  是分片光滑的定向曲面,  $n$  是  $S$  的单位法矢量, 它指向  $S$  的指定一侧, 其方向余弦为  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ . 若  $S$  由方程  $z = z(x, y)$  给出, 则

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \{-z_x, -z_y, 1\}$$

指向  $S$  的上侧, 相反的一侧是下侧. 类似地可解释左侧和右侧、前侧和后侧. 若  $S$  是包围区域  $V$  的闭曲面, 则  $n$  指向  $V$  内部时称  $S$  取内侧, 相反的一侧是外侧.



<sup>①</sup> 实际上存在着单侧曲面, 比如著名的 Möbius 带, 可参看任何一本数学分析教材.

现在考虑一个导致第二型曲面积分概念的典型问题——流量问题。设某种不可压缩的流体经曲面  $S$  的一侧流向另一侧, 其流速  $\mathbf{V}$  为:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= \{P, Q, R\}\end{aligned}$$

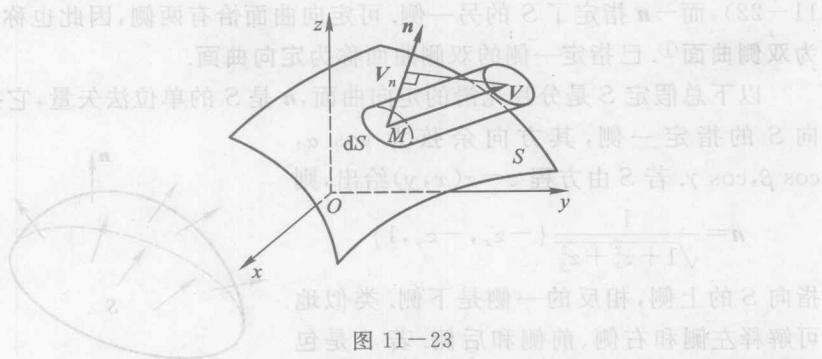
$\mathbf{V}$  虽逐点变化但与时间无关(称这种流动为稳定流动), 要求计算在单位时间内流向曲面  $S$  给定一侧的流量  $\Phi$ .

用微元法处理: 在  $S$  上任取一微曲面块  $\Delta S$ , 其面积近似于相应切平面上的面积, 记作  $dS$ . 在无穷小范围内, 将微曲面块  $\Delta S$  看作切平面, 在  $\Delta S$  上的流速看作常流速  $\mathbf{V}(M)$ , 则在单位时间内流经微曲面块  $\Delta S$  流量的近似值——微流量  $d\Phi$  是以底面积为  $dS$ , 斜高为  $|\mathbf{V}|$  的斜柱体的体积(图 11-23), 即

$$d\Phi = |\mathbf{V}_n| \cdot dS = (|\mathbf{V}| \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{V} \rangle) \cdot dS = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS.$$

于是得到

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \quad (1)$$



将形如(1)式的积分一般化, 就得到以下概念.

**定义 1** 设  $S$  是分片光滑的定向曲面, 指定了  $S$  一侧上的单位法

线舞对长学本一阶引言卷回, 带 and M 曲名幕吸出, 面曲课单登古特士洞之 ①

矢量为  $n, P, Q, R$  是定义于  $S$  上的有界函数,  $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ , 若积分  $\iint_S \mathbf{F} \cdot n dS$  存在, 则称它为函数组  $P, Q, R$  (或矢量函数  $\mathbf{F}$ ) 在曲面  $S$  指定一侧上的第二型曲面积分, 也记作  $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS$ .

因  $\mathbf{F} \cdot n = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ , 而  $dS \cos \alpha, dS \cos \beta, dS \cos \gamma$  分别为  $dS$  在  $yz$  平面、 $zx$  平面与  $xy$  平面上的投影, 分别记为  $dy dz$ ,  $dz dx$ ,  $dx dy$ , 这就自然将积分  $\iint_S \mathbf{F} \cdot n dS$  表成

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot n dS &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy.\end{aligned}\quad (2)$$

因此, 也称第二型曲面积分为“对坐标的曲面积分”.

要注意, 式(2)中  $dx dy$  与二重积分中的记号  $dx dy$  的含义完全不同. 在二重积分中, 面积元  $dx dy$  恒为正, 而这里的  $dx dy$  象征曲面元素  $dS$  (虽然它永远为正的) 在  $xy$  平面上的投影, 其符号与  $\cos \gamma$  一致, 可正可负!  $dy dz, dz dx$  的含义仿此.

可以看出, 第二型曲面积分  $\iint_S \mathbf{F} \cdot n dS$  实际上是数量函数  $\mathbf{F} \cdot n$  在  $S$  上的第一型曲面积分, 故关于第一型曲面积分的一些结论可以转移到第二型曲面积分. 由于积分  $\iint_S \mathbf{F} \cdot n dS$  依赖于  $n$ , 因而第二型曲面积分也有一些与  $S$  的侧相关的性质 (与 11.2.1 中所述的第二型曲线积分的性质对照), 简述于下:

1° 若  $S$  为分片光滑有有限面积的定向曲面,  $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$  是  $S$  上分片连续的矢量函数, 则曲面积分  $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS$  存在.

2° (线性性质) 设  $\mathbf{F} = a\mathbf{G} + b\mathbf{H}$  ( $a, b$  为常数), 则

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot dS = a \iint_S \mathbf{G} \cdot dS + b \iint_S \mathbf{H} \cdot dS.$$

3° (分块积分) 设  $S$  分割为  $S_1$  和  $S_2$  (定向保持一致), 则

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

4° 若记  $-S$  为  $S$  的反向曲面, 则

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{-S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

5° 若在  $S$  上处处有  $\mathbf{F} \perp \mathbf{n}$ , 则

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

$$6° \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S P dy dz + \iint_S Q dz dx + \iint_S R dx dy.$$

以上结论有助于简化第二型曲面积分的计算.

### 11.4.2 化为二重积分

如同第一型曲面积分一样, 计算积分  $\iint_S \mathbf{F} \cdot n dS$  的基本方法是化为二重积分. 以下结果可与 §11.3 定理 1 相对照.

**定理 1** 设曲面  $S$  由方程  $z = z(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ ) 给定, 函数  $z = z(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上有连续的一阶偏导数;  $R(x, y, z)$  在  $S$  上连续, 则

$$\iint_S R(x, y, z) dxdy = \pm \iint_D R(x, y, z(x, y)) dxdy, \quad (3)$$

当取  $S$  上侧(下侧)时, 右端积分前取正(负)号.

**证** 不妨设积分是取  $S$  上侧. 设  $\gamma$  是曲面法矢  $\mathbf{n}$  与  $z$  轴正向的夹角, 则由于

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} d\sigma,$$

故

$$\iint_S R dxdy = \iint_S R \cos \gamma dS$$

$$= \iint_D R(x, y, z(x, y)) dxdy. \quad \square$$

公式(3)右端“±”的确定与曲面  $S$  取定的侧有关,不可疏忽。至于右端的被积函数,形式上不过是将  $z$  代以  $z(x, y)$ , 注意及此,就是很容易记住公式(3)。

适当调换字母,可建立关于积分  $\iint_S P dy dz$  与  $\iint_S Q dz dx$  的类似公式。再利用性质 6°,就可将积分  $\iint_S \mathbf{F} \cdot n dS$  化为若干二重积分之和。

**例 1** 求  $I = \iint_S x^2 z^2 dx dy$ ,  $S$  是上半球面  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  ( $a > 0$ )

的上侧。

解  $S$  在  $xy$  平面上的投影为圆域  $D: x^2 + y^2 \leq a^2$ . 因为曲面  $S$  取上侧,所以二重积分前面取正号,于是将  $S$  换作  $D$ ,被积函数中  $z$  用球面方程代之便有

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 (a^2 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^a r^3 (a^2 - r^2) dr \\ &= \frac{\pi a^6}{12}. \end{aligned}$$

**例 2** 求  $I = \iint_S xy dy dz$ ,  $S$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  在  $y \geq 0, z \leq 1$  部分

的下侧(图 11-24)。

解 分散投影法:此方法是将

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot n dS = \iint_S P dy dz + \iint_S Q dz dx + \iint_S R dx dy$$

右端三个积分的积分曲面分别向各坐标面投影求投影区域,化为计算三个二重积分。

对于此题,将锥面  $S$  分为两块  $S_1$  与  $S_2$ ,其方程分别为  $x = \sqrt{z^2 - y^2}$  与  $x = -\sqrt{z^2 - y^2}$ ,二者在  $yz$  平面上的投影都是

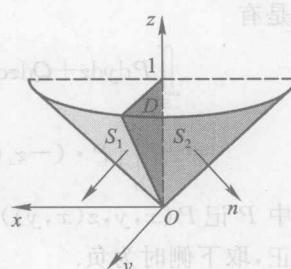


图 11-24

三角形域  $D: 0 \leq y \leq z, 0 \leq z \leq 1$ . 于是由类似于(3)的公式有

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S_1} xy dy dz + \iint_{S_2} xy dy dz \\ &= \iint_D \sqrt{z^2 - y^2} y dy dz - \iint_D (-\sqrt{z^2 - y^2}) y dy dz \\ &= 2 \iint_D \sqrt{z^2 - y^2} y dy dz = 2 \int_0^1 dz \int_0^z \sqrt{z^2 - y^2} y dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 z^3 dz = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

统一投影法:此方法是将  $\iint_S \mathbf{F} \cdot n dS = \iint_S P dy dz + \iint_S Q dz dx + \iint_S R dx dy$  右端三个积分转化为同一坐标面上的二重积分.

例如,设曲面  $S$  由方程  $z = z(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ ) 给定,  $S$  上单位法矢量  $n$  为

$$n = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \{-z_x, -z_y, 1\}$$

由于  $dy dz = \cos \alpha dS, dz dx = \cos \beta dS, dx dy = \cos \gamma dS$ ,

故  $dy dz = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \cos \gamma dS = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dx dy = -z_x(x, y) dx dy$ ,

$dz dx = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \cos \gamma dS = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} dx dy = -z_y(x, y) dx dy$ ,

于是有

$$\begin{aligned} &\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \pm \iint_D [P \cdot (-z_x(x, y)) + Q \cdot (-z_y(x, y)) + R] dx dy. \end{aligned} \tag{4}$$

其中  $P$  记  $P(x, y, z(x, y))$ ,  $Q, R$  仿此, 积分号前的符号当  $S$  取上侧时为正, 取下侧时为负.

回到本题, 因  $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ , 将积分转换为  $S$  在  $xy$  平面上的投影

域  $D: y \leq \sqrt{1-x^2}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 上的二重积分, 应用公式(4)有

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S xy dy dz = - \iint_D (xy) \cdot (-z_x) dx dy \\
 &= \iint_D \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr \\
 &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta \cos \theta = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

例 3 求  $I = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ ,  $S$  是曲面  $z = x^2 + y^2$  在  $x, y \geq 0, z \leq 1$  部分的上侧(图 11-25).

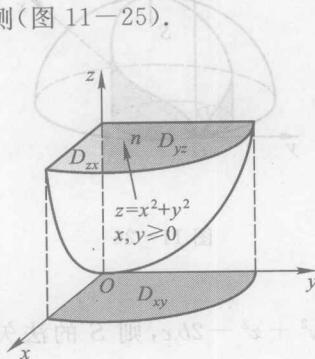


图 11-25

解 因  $S$  在  $xy$  平面上的投影是扇形域  $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0$ ,  $z_x = 2x, z_y = 2y$ , 于是由统一投影法得

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} [x \cdot (-2x) + y \cdot (-2y) + (x^2 + y^2)] dx dy \\
 &= - \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = - \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^3 dr = -\frac{\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

计算积分  $\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$  的另一途径是:首先利用公式(2)将其写成第一型曲面积分,然后再依上节公式(6)化为二重积分.

试看下例.

**例 4** 求  $I = \iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$ ,  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2bx (z \geq 0)$  含于柱面  $x^2 + y^2 = 2ax (0 < a < b)$  内部分的上侧(图 11-26).

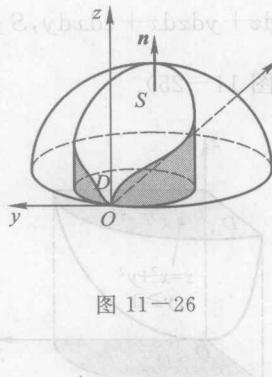


图 11-26

解 记  $F = x^2 + y^2 + z^2 - 2bx$ , 则  $S$  的法矢为  $\frac{1}{2} \{F_x, F_y, F_z\} = \{x-b, y, z\}$ , 单位外法矢为  $n = \frac{1}{b} \{x-b, y, z\}$ . 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \{y-z, z-x, x-y\} \cdot n dS \\ &= \iint_S \left[ (y-z) \cdot \frac{x-b}{b} + (z-x) \cdot \frac{y}{b} + (x-y) \cdot \frac{z}{b} \right] dS \\ &= \iint_S (z-y) dS = \iint_S z dS \quad (\text{由对称性知 } \iint_S y dS = 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 2ax} b dx dy = \pi a^2 b. \end{aligned}$$

其中用到公式  $dS = (b/z) dx dy$ .

例 5 求  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ , 其中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax (z \geq 0)$  的上半部分.



## 习题 11.4

1. 计算  $\iint_S (x^2 + y^2) dx dy$ , 其中  $S$  是上半球面  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  的下侧.
2. 计算  $\iint_S xz^2 dy dz$ , 其中  $S$  是上半球面  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  的上侧.
3. 计算  $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , 其中  $S$  是半球面  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  的下侧.
4. 计算  $\iint_S (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$ , 其中  $S$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被平面  $z = h$  所截部分的上侧.
5. 计算  $\iint_S \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , 其中  $S$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和平面  $z = 1, z = 2$  所围立体表面的外侧.
6. 求矢量  $A = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$  沿上侧穿过球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  在第一卦限部分的流量.

## || § 11.5 Gauss 公式与 Stokes 公式 ||

在 § 11.2 中我们已看到, 关于平面曲线积分的 Green 公式对于积分的计算与理论分析起重要作用. 本节对空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分以及空间曲线积分与曲面积分建立类似的公式. 这些公式在矢量记号下表达最为简单, 故首先介绍矢量函数的微分运算, 它们在物理、力学等领域有广泛的应用.

### 11.5.1 散度与旋度

设  $u, P, Q, R$  是定义于某空间区域  $\Omega$  内的函数. 称

$$\mathbf{F} = \{P, Q, R\} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k},$$

为定义于  $\Omega$  上的矢量函数. 称  $\mathbf{F}$  可微, 若  $P, Q, R$  均可微, 称  $\mathbf{F}$  有连续偏导数, 若  $P, Q, R$  有连续偏导数.

定义 1 分别称

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z \quad (1)$$

与

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \{R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y\} \quad (2)$$

为  $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$  的散度与旋度.

注意  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  是数量, 而  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  是矢量. 为了便于记忆, 引入一个“符号矢量” $\nabla$ :

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\},$$

称  $\nabla$  为 Hamilton 算子. 将  $\nabla$  与  $\mathbf{F}$  形式上作“点积”与“叉积”, 就得出  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  与  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{F};$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{F}.$$

其次, 梯度  $\operatorname{grad} u$  形式上可看作是“数量  $u$  乘矢量  $\nabla$ ”:

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} u = \nabla u.$$

这样, 梯度  $\nabla u$ 、散度  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  与旋度  $\nabla \times \mathbf{F}$  就统一于对“矢量” $\nabla$  的某种乘法, 它们具有微分运算与矢量运算两方面的特性. 作为微分运算, 它们满足通常的微分规则:

### I. 线性规则:

$$\begin{cases} \nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v, \\ \nabla \cdot (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{F} + \beta \nabla \cdot \mathbf{G}, \\ \nabla \times (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha \nabla \times \mathbf{F} + \beta \nabla \times \mathbf{G}. \end{cases} \quad (3)$$

### II. 积规则 (Leibniz 规则):

$$\begin{cases} \nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v, \\ \nabla \cdot (u \mathbf{F}) = \nabla u \cdot \mathbf{F} + u \nabla \cdot \mathbf{F}, \\ \nabla \times (u \mathbf{F}) = \nabla u \times \mathbf{F} + u \nabla \times \mathbf{F}, \\ \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}). \end{cases} \quad (4)$$

### III. 链规则:

$$\nabla f(u) = f'(u) \nabla u. \quad (5)$$

以上公式中,  $u, v, f$  是数量函数,  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  是矢量函数,  $\alpha, \beta$  是常数. 这些公式的验证是容易的, 从略.

其次, 将运算符 **grad**, **div**, **rot** 组合起来有以下公式:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0, \\ \nabla \times \nabla u = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}. \end{cases} \quad (6)$$

通常记  $\nabla^2 u$  为  $\Delta u$ , 称  $\Delta$  为 Laplace 算子, 这里假定  $\mathbf{F}$  与  $u$  有连续的二阶偏导数.

设  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , 则有以下常用公式:

$$\nabla r = \frac{1}{r} \mathbf{r}, \nabla \cdot \mathbf{r} = 3, \nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

**例 1** 证明公式(6).

**证**  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F})$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{div}\{R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y\} \\ &= R_{yy} - Q_{zz} + P_{zz} - R_{xx} + Q_{xx} - P_{yy} = 0; \\ \nabla \times (\nabla u) &= \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \operatorname{rot}\{u_x, u_y, u_z\} \\ &= \{u_{yz} - u_{zy}, u_{zx} - u_{xz}, u_{xy} - u_{yx}\} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \nabla u &= \nabla \cdot \{u_x, u_y, u_z\} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \Delta u. \end{aligned}$$

**例 2** 设  $\mathbf{F} = \{xy, yz, zx\}$ , 求  $\nabla \times \mathbf{F}$ .

$$\text{解 } \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} = -\{y, z, x\}.$$

**例 3** 设  $f$  二次可微, 求  $\nabla f(r)$ ,  $\nabla \cdot (f(r)\mathbf{r})$ ,  $\nabla \times (f(r)\mathbf{r})$ , 其中  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ .

**解 I** 依定义计算有

$$\nabla f(r) = \left\{ \frac{\partial f(r)}{\partial x}, \frac{\partial f(r)}{\partial y}, \frac{\partial f(r)}{\partial z} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= f'(r) \cdot \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \{x, y, z\} = \frac{f'(r)}{r} \mathbf{r}; \\
 \nabla \cdot (f(r) \mathbf{r}) &= \nabla \cdot \{xf(r), yf(r), zf(r)\} \\
 &= \frac{\partial(xf(r))}{\partial x} + \frac{\partial(yf(r))}{\partial y} + \frac{\partial(zf(r))}{\partial z} \\
 &= 3f(r) + f'(r) \cdot \frac{x^2}{r} + f'(r) \cdot \frac{y^2}{r} + f'(r) \cdot \frac{z^2}{r} \\
 &= 3f(r) + f'(r)r; \\
 \nabla \times f(r) \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix} \\
 &= \left\{ \frac{\partial(zf(r))}{\partial y} - \frac{\partial(yf(r))}{\partial z}, \frac{\partial(xf(r))}{\partial z} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial(zf(r))}{\partial x}, \frac{\partial(yf(r))}{\partial x} - \frac{\partial(xf(r))}{\partial y} \right\} \\
 &= f'(r) \left\{ \frac{yz-yz}{r}, \frac{xz-xz}{r}, \frac{xy-xy}{r} \right\} = \mathbf{0};
 \end{aligned}$$

解 II 依公式(7)、(5)、(4)计算：

$$\begin{aligned}
 \nabla f(r) &= f'(r) \nabla r = r^{-1} f'(r) \mathbf{r}; \\
 \nabla \cdot f(r) \mathbf{r} &= \nabla f(r) \cdot \mathbf{r} + f(r) \nabla \cdot \mathbf{r} \\
 &= r^{-1} f'(r) \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 3f(r) \\
 &= rf'(r) + 3f(r); \\
 \nabla \times f(r) \mathbf{r} &= \nabla f(r) \times \mathbf{r} + f(r) \nabla \times \mathbf{r} \\
 &= r^{-1} f'(r) \mathbf{r} \times \mathbf{r} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.
 \end{aligned}$$

### 11.5.2 Gauss 公式

Green 公式表达了平面闭区域上的二重积分与其边界上的平面曲线积分之间的关系。同样，也有联系空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分的公式——Gauss 公式：

**定理 1** 设空间闭区域  $V$  由分片光滑曲面  $S$  所围成，函数  $P, Q, R$

在  $V$ (包括边界!)上有连续的一阶偏导数,  $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ , 则成立如下的“Gauss 公式”:

$$\oint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dv, \quad (8)$$

即  $\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_V (P_x + Q_y + R_z) dv, \quad (9)$

其中曲面积分取  $S$  的外侧,  $\mathbf{n}$  为  $S$  的外单位法矢量.

**证** 等式(9)是三个等式相加的结果:

$$\iint_S P dy dz = \iiint_V P_x dv;$$

$$\iint_S Q dz dx = \iiint_V Q_y dv;$$

$$\iint_S R dx dy = \iiint_V R_z dv.$$

今证最后一等式(其余两式可类似证明). 不妨设  $V$  可表为

$$z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D,$$

$D$  是  $V$  在  $xy$  平面上的投影(图 11-27),  $z_i(x, y)$  ( $i=1, 2$ ) 在  $D$  上有连续的一阶偏导数(若  $V$  不是以上类型, 可将  $V$  作适当分划, 参照 Green 公式的证明). 以  $S_i$  记曲面  $z = z_i(x, y)$  ( $i=1, 2$ ) ( $S_1$  取下侧,  $S_2$  取上侧), 则

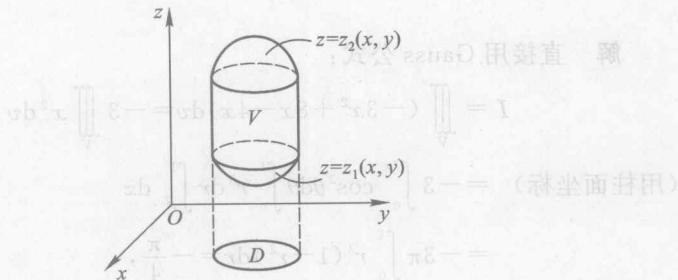


图 11-27

$$\begin{aligned}
 \iint_S R dxdy &= \iint_{S_2} R dxdy + \iint_{S_1} R dxdy \\
 (8) \quad &= \iint_D [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dxdy \\
 (9) \quad &= \iint_D dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} R_z dz = \iiint_V R_z dv. \quad \square
 \end{aligned}$$

Gauss 公式主要用于化曲面积分为三重积分.

**例 4** 求  $I = \iint_S (1-x^3) dydz + 8xydxdz - 4xz dxdy$ ,  $S$  是曲面  $z=x^2+y^2$  与平面  $z=1$  所围立体  $V$  的外表面(图 11-28).

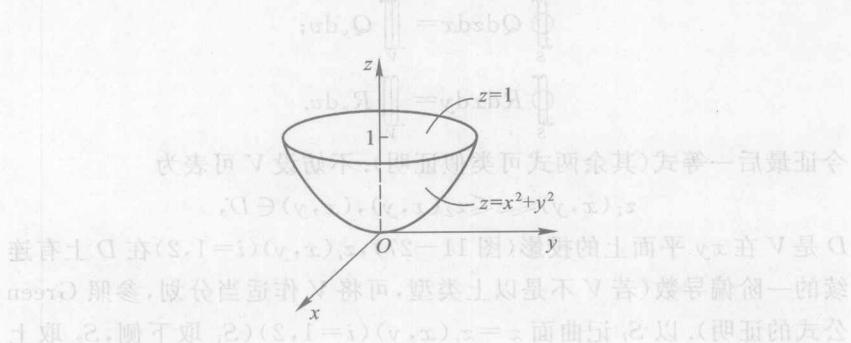


图 11-28

解 直接用 Gauss 公式:

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_V (-3x^2 + 8x - 4x) dv = -3 \iiint_V x^2 dv \\
 (\text{用柱面坐标}) &= -3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr \int_{r^2}^1 dz \\
 &= -3\pi \int_0^1 r^3 (1-r^2) dr = -\frac{\pi}{4},
 \end{aligned}$$

其中用到  $\iiint_V x dv = 0$ , 这由对称性得出.

例 5 求  $I = \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy$ ,  $S$  是立方体“ $V: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ ”的外表面.

解 仍用 Gauss 公式:

$$\begin{aligned} I &= 2 \iiint_V (x+y+z) dV \\ &= 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x+y+z) dz \\ &= 2 \int_0^a dx \int_0^a \left( ax + ay + \frac{a^2}{2} \right) dy \\ &= 2 \int_0^a (a^2 x + a^3) dx = 3a^4. \end{aligned}$$

若  $S$  不是闭曲面, 则不能直接用 Gauss 公式, 此时可考虑用添加辅助曲面的方法将  $S$  补成闭曲面; “补块”是平行于坐标平面的平面块较为有利.

例 6 求  $I = \iint_S 4xz dydz - 2z dzdx + (1-z^2) dx dy$ ,  $S$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被平面  $z=2$  截下部分的上侧.

解 设  $S_1$  是圆盘  $z=2, x^2 + y^2 \leq 4$  的下侧, 则  $S$  与  $S_1$  一起构成闭曲面  $S_2$  的内侧,  $S_2$  围住立体  $V: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 4$ . 用 Gauss 公式:

$$\begin{aligned} \iint_S + \iint_{S_1} - \iint_{S_2} &= \iint_S 4xz dydz - 2z dzdx + (1-z^2) dx dy \\ &= - \iint_V 2z dv, \end{aligned}$$

于是  $I = - \iint_V 2z dv - \iint_{S_1} (1-z^2) dx dy$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_r^2 2z dz - 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 4} dx dy \\ &= -8\pi - 12\pi = -20\pi. \end{aligned}$$

其中用到  $\iint_{S_1} 4xz \, dy \, dz = \iint_{S_1} 2z \, dz \, dx = 0$ , 这是因为  $S_1$  与  $yz$  平面和  $zx$  平面垂直.

**例 7** 求  $I = \iint_S (x^3 - yz) \, dy \, dz + z \, dx \, dy$ ,  $S$  是圆柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 介于平面  $z=0, z=1$  之间部分的外侧.

解  $S$  加上、下底  $S_1, S_2$  后围成圆柱体  $V$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (3x^2 + 1) \, dv - \iint_{S_1} dx \, dy \\ &= 3 \iiint_V x^2 \, dv + \pi a^2 - \pi a^2 \end{aligned}$$

$$(\text{用柱面坐标}) = 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^a r^3 \, dr \int_0^1 dz = \frac{3\pi a^4}{4}.$$

这里用到  $\iint_{S_2} (x^3 - yz) \, dy \, dz + z \, dx \, dy = 0$ ,  $\iint_{S_1} (x^3 - yz) \, dy \, dz = 0$ .

某些特殊的第一型曲面积分亦可用 Gauss 公式, 试看一例.

**例 8** 求  $I = \iint_S h \, dS$ ,  $S$  是椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ( $a, b, c > 0$ ),  $h$  是原点到  $S$  的切平面之距离.

解 以  $V$  记  $S$  所围区域, 以  $n$  记  $S$  的单位外法矢, 令  $r = \{x, y, z\}$ , 则  $h = r \cdot n$  (这是要点!), 由于椭球体的体积为  $\frac{4}{3}\pi abc$ , 于是用 Gauss 公式得

$$I = \iint_S r \cdot n \, dS = \iiint_V (\nabla \cdot r) \, dv = 3 \iiint_V \, dv = 4\pi abc.$$

Gauss 公式常用来证明某些含曲面积分与三重积分的公式, 试看一例.

**例 9** 设  $S, V, n$  如定理 1,  $u$  在  $V$  及  $S$  上有连续的二阶偏导数, 则

$$\iiint_V |\nabla u|^2 \, dv = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} \, dS - \iiint_V u \Delta u \, dv$$

(此公式称之为 Green 第一公式).

证 由方向导数的计算公式有  $\partial u / \partial n = \text{grad } u \cdot n = (\nabla u) \cdot n$ , 用 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}
 \oint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \oint_S u (\nabla u) \cdot n dS \\
 &= \iiint_V \nabla \cdot (u \nabla u) dv \\
 &= \iiint_V \nabla \cdot \{uu_x, uu_y, uu_z\} dv \\
 &= \iiint_V [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})] dv \\
 &= \iiint_V (\nabla u \cdot \nabla u + u \Delta u) dv \\
 &= \iiint_V |\nabla u|^2 dv + \iiint_V u \Delta u dv,
 \end{aligned}$$

由此推出所要证的等式.

### 11.5.3 Stokes 公式

本节对积分  $\oint_L P dx + Q dy + R dz$  给出类似于 Green 公式的结果, 此处  $L$  是某曲面  $S$  的边界. 如同在建立 Green 公式之前所要作的一样, 首先应描述  $S$  与  $L$  的某些几何特性. 若  $S$  内任一闭曲线可不越过边界而连续地缩为一点, 则说  $S$  是单连通的. 若一人立于  $S$  的指定一侧沿  $L$  行进时,  $S$  的指定一侧总在左侧(如图 11-29), 则说  $L$  与  $S$  的定向一致. 以下设  $S$  为分片光滑的定向曲面,  $n$  是  $S$  的单位法矢量, 它指向  $S$  的指定一侧, 其方向余弦为  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ . 如同 § 11.2 中一样, “简单闭曲线”意指分段光滑且自身不相交的闭曲线.

**定理 2(Stokes 公式)** 设分片光滑的定向曲面  $S$  以分段光滑的有向闭曲线  $L$  为边界,  $L$  与  $S$  的定向一致; 函数  $P, Q, R$  在  $S$ (包括边界!)

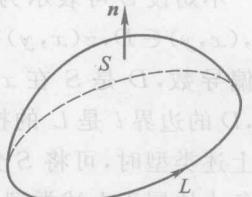


图 11-29

上有连续的一阶偏导数,  $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ , 则成立如下的“Stokes 公式”

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (10)$$

或改成坐标形式

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S (R_y - Q_z) dy dz + (P_z - R_x) dz dx \\ + (Q_x - P_y) dx dy. \quad (11)$$

为了便于记忆, 利用行列式记号将 Stokes 公式(11)写成

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (12)$$

证 等式(11)是以下三等式相加的结果:

$$\oint_L P dx = \iint_S P_z dz dx - P_y dx dy;$$

$$\oint_L Q dy = \iint_S Q_x dx dy - Q_z dy dz;$$

$$\oint_L R dz = \iint_S R_y dy dz - R_x dz dx.$$

以下证其中第一等式(其余两式可类似证明).

不妨设  $S$  可表示为方程  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ ,  $z(x, y)$  在  $D$  上有连续的偏导数,  $D$  是  $S$  在  $xy$  平面上的投影,  $D$  的边界  $l$  是  $L$  的投影(当  $S$  不属于上述类型时, 可将  $S$  分成若干小块, 使各小块属于上述类型, 参照 Green 公式的证明). 设  $S, L, l$  的定向如图 11-30 所示, 则由统一投影法(§ 11.4 式(4))

$$\iint_S P_z dz dx - P_y dx dy = \iint_D (-z_y P_z - P_y) dx dy.$$

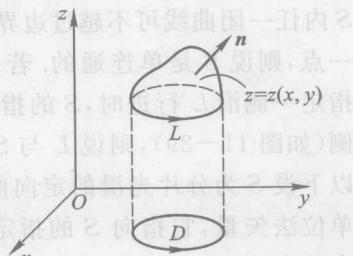


图 11-30

又因为  $P(x, y, z(x, y))$  在曲线  $l$  上点  $(x, y)$  的值与  $P(x, y, z)$  在曲线  $L$  上点  $(x, y, z)$  的值是相等的, 两曲线上的对应小弧段在  $x$  轴上的投影也一样, 则根据曲线积分的定义与 Green 公式, 有

$$\oint_L P dx = \oint_l P(x, y, z(x, y)) dx = \iint_D (-z_y P_z - P_y) dx dy.$$

故证得  $\oint_L P dx = \iint_S P_z dz dx - P_y dx dy$ .  $\square$

注意, 若  $S$  在  $xy$  平面上, 则公式(11)成为 Green 公式. 可见, Stokes 公式是 Green 公式的推广.

利用 Stokes 公式, 可将某些曲线积分的计算转化为曲面积分的计算.

**例 10** 求  $I = \oint_L y dx + z dy + x dz$ ,  $L$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与平面  $x + y + z = 0$  之交线, 从  $z$  轴正向看去,  $L$  为反时针方向.

解  $L$  围住平面  $x + y + z = 0$  上一半径为  $a$  的圆盘  $S$ , 取上侧的  $S$  的单位法矢为  $n = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1, 1, 1\}$ ,  $F = \{y, z, x\}$ ,  $\nabla \times F = \{-1, -1, -1\}$ .

依公式(10), 有

$$I = - \iint_S \sqrt{3} dS = -\sqrt{3} \pi a^2.$$

**例 11** 求  $I = \oint_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$ ,  $L$  是球面三角形 “ $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \geq 0$ ” 的边界, 从  $z$  轴正向看去,  $L$  为反时针方向.

解 设  $S$  在  $xy$  平面上的投影为  $D: x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0$ . 用公式(12):

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = -2 \iint_S (y+z) dy dz + (z+x) dz dx + (x+y) dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= -6 \iint_S (x+y) dx dy = -6 \iint_D (x+y) dx dy \\
 &= -12 \iint_D x dx dy = -4.
 \end{aligned}$$

上面用了等式

$$\begin{aligned}
 \iint_S (y+z) dy dz &= \iint_S (z+x) dz dx = \iint_S (x+y) dx dy; \\
 \iint_D x dx dy &= \iint_D y dx dy.
 \end{aligned}$$

因  $S$  关于  $x, y, z$  对称,  $D$  关于  $x, y$  对称, 这些等式是明显的.

利用 Stokes 公式, 可将 § 11.2.4 定理 3 推广于下:

**定理 3** 设  $\Omega$  是单连通的空间区域, 函数  $P, Q, R$  在  $\Omega$  内有连续的一阶偏导数, 则以下条件相互等价:

- (i) 曲线积分  $\int_L P dx + Q dy + R dz$  在  $\Omega$  内与路径无关(即只决定于  $L$  的起点与终点);
- (ii) 存在可微函数  $u$  使  $du = P dx + Q dy + R dz$ , 即  $P dx + Q dy + R dz$  是全微分;
- (iii) 在  $\Omega$  内  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ , 即  $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ ,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};$$

- (iv) 对  $\Omega$  内任何分段光滑闭曲线  $C$ , 有  $\oint_C P dx + Q dy + R dz = 0$ .

单连通定义参见 11.2.3, 本定理的证明类似于 § 11.2.4 定理 3 的证明, 从略.

#### 11.5.4 场论初步

若对空间或其中某一区域  $\Omega$  中的每一点  $M$ , 都对应一数量(或矢量), 则称在  $\Omega$  上构成一个数量场(或矢量场). 如空间各点的温度和空间某物体内每一点处的密度都形成数量场——温度场和密度场, 又如一团流动着的流体各点的速度形成一矢量场——速度场, 还有引力场、磁场等.

借助于空间直角坐标系,一数量场或矢量场可以表示一个数量函数  $u = u(M) = u(x, y, z)$  或矢量函数  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ .

给定矢量场  $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ , 其中  $P, Q, R$  有连续的偏导数,  $L$  为此矢量场中一条曲线. 若  $L$  上每一点  $M$  处的切线方向都与矢量函数  $\mathbf{F}$  在该点的方向一致, 即

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

则称曲线  $L$  为矢量场的矢量线(或流线). 如磁力线、电力线等都是矢量线.

下面结合前面所讲的梯度、散度、旋度等概念给出几个重要的场以及它们的性质.

设  $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$  与  $u$  分别为空间区域  $\Omega$  内的矢量场与数量场, 假定下面出现的偏导数皆存在.

**定义 2** 若存在函数  $v$ , 使  $\mathbf{F} = \text{grad } v$ , 则称  $\mathbf{F}$  为梯度场或有势场, 称  $v$  为其势函数; 若存在矢量场  $\mathbf{G}$ , 使  $u = \text{div } \mathbf{G}$ , 则称  $u$  为散度场; 若  $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$ , 则称  $\mathbf{F}$  为旋度场. 若  $\text{div } \mathbf{F} = 0$ , 则称  $\mathbf{F}$  为无源场; 若  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ , 则称  $\mathbf{F}$  为无旋场.

**定义 3** 设  $L$  是  $\Omega$  内的分段光滑闭曲线,  $S$  是  $\Omega$  内的分片光滑定向曲面, 分别称

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{与} \quad \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$$

为  $\mathbf{F}$  沿  $L$  的环量(或环流量)与穿过  $S$  的流量(或通量).

利用以上术语, 可将定理 1~3 解释为:

**定理 1'** 在定理 1 的条件下,  $\mathbf{F}$  穿过  $S$  的流量等于散度  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  在  $V$  上的三重积分.

**定理 2'** 在定理 2 的条件下, 旋度场  $\text{rot } \mathbf{F}$  穿过曲面  $S$  的流量等于  $\mathbf{F}$  沿  $S$  边界之环量.

**定理 3'** 在定理 3 的条件下, 以下结论互相等价:(i) 在  $\Omega$  内积分  $\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  与路径无关; (ii)  $\mathbf{F}$  是梯度场; (iii)  $\mathbf{F}$  是无旋场; (iv)  $\mathbf{F}$  沿  $\Omega$

内任何分段光滑闭曲线的环量为零.

注意  $\mathbf{F} = \nabla u \Leftrightarrow \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = du$ , 因此  $\mathbf{F}$  是梯度场  $\Leftrightarrow \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  为全微分.

利用以上结果, 可给出散度的一个直观解释. 取定  $\Omega$  内一点  $M$ , 任取一个包含点  $M$  的小区域  $V$ , 以  $S$  记  $V$  的边界的外侧, 以  $v$  记  $V$  的体积, 以  $\lambda$  记  $V$  的直径. 在  $V$  上应用 Gauss 公式得

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot n dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dv.$$

由三重积分中值定理, 上式右端可表为  $v \operatorname{div} \mathbf{F}(M')$ ,  $M' \in V$ . 当  $\lambda \rightarrow 0$  时  $M' \rightarrow M$ , 于是

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(M) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{v} \iiint_S \mathbf{F} \cdot n dS. \quad (13)$$

因  $\frac{1}{v} \iiint_S \mathbf{F} \cdot n dS$  表示  $\mathbf{F}$  从  $V$  的单位体积内流出  $V$  的流量, 故式(13)表明,  $\operatorname{div} \mathbf{F}(M)$  刻画了  $\mathbf{F}$  在点  $M$  处“涌出”或“发散”的强度. 因此, 称之为“散度”是恰如其分的. 注意, 若  $\operatorname{div} \mathbf{F}(M) < 0$ , 则  $\operatorname{div} \mathbf{F}(M)$  表示  $\mathbf{F}$  在点  $M$ “吸入”的强度.

基于对散度的以上解释, 自然可将  $\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dv$  理解为  $\mathbf{F}$  在  $V$  内的“总发散量”(或从  $V$  内各点涌出的“流体”之总量). 而定理 1' 无非是说, 从  $V$  内涌出的总发散量等于从边界流出的总流量. 从直观上看, 这是理所当然的.

利用 Gauss 公式, 容易证明一个可与定理 3' 对照的结果:

**定理 4** 设  $\Omega$  是面单连通区域(即  $\Omega$  内任何闭曲面所围成的区域在  $\Omega$  中), 则  $\mathbf{F}$  穿过  $\Omega$  内任何分片光滑闭曲面的流量为零的充要条件是  $\mathbf{F}$  为无源场.

从散度的物理解释看来, 以上结论是很自然的.

在  $\Omega$  内取定一曲面  $S$ , 则  $\mathbf{F}$  穿过  $S$  的流线形成一个矢量管(图 11-31), 即由矢量线围成的管状的曲面. 用断面  $S_1, S_2$  截它, 以  $S_3$  表示所截出的管的表面,  $S$  为由  $S_1, S_2, S_3$  所围成的闭曲面. 若  $\mathbf{F}$  是无源场, 则由定理 4 知  $\mathbf{F}$  穿出  $S$  的流量为零. 由于矢量线与曲面  $S_3$  的法线

正交,所以  $\mathbf{F}$  穿出  $S_3$  的流量为零,从而  $\mathbf{F}$  沿流线穿过  $S_1$  与  $S_2$  的流量相等,这说明流体通过矢量管的任意断面的流量是相同的,如同水管中的水流一样.因此,也称无源场为管形场.

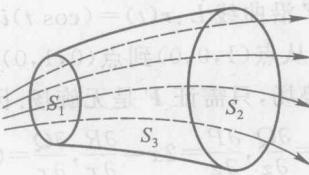


图 11-31

以上分析表明,利用场论观点所富有的物理上的启发性,能更好地理解由积分公式所表达的数学结论.

现在来看一些具体例子.

**例 12** 对任给连续函数  $f$ ,证明  $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$  是有势场,并求其势函数,其中  $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  (下面保持此记号)

解 取定  $r_0 > 0$ ,令

$$u = \varphi(r) = \int_{r_0}^r t f(t) dt \quad (r > 0), \quad (14)$$

则

$$\nabla u = \{u_x, u_y, u_z\} = \left\{ \varphi'(r) \frac{\partial r}{\partial x}, \varphi'(r) \frac{\partial r}{\partial y}, \varphi'(r) \frac{\partial r}{\partial z} \right\}$$

$$= \varphi'(r) \left\{ \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\} = rf(r) \cdot \frac{1}{r} \mathbf{r} = f(r) \mathbf{r},$$

可见  $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$  是有势场,且  $u$  是势函数.

**例 13** 求引力场  $\mathbf{F} = -mr^{-3}\mathbf{r}$  的势函数.

解 由例 12,在任何不包含原点的区域内, $\mathbf{F}$  是有势场,其势函数可用公式(14)求出.下面用另一方法求其势函数:因

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = xdx + ydy = \frac{1}{2} d(r^2) = rdr,$$

故

量函数  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -mr^{-3}\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = -mr^{-3}rdr = d\left(\frac{m}{r}\right)$ ,  
于是  $\mathbf{F} = \nabla(m/r)$ , 即  $u = m/r$  是  $\mathbf{F}$  的势函数.

**例 14** 设  $\mathbf{F} = \{2xz+1, 2yz+2y, x^2+y^2+3z^2\}$ , 证明  $\mathbf{F}$  是有势场, 求势函数, 并计算  $\mathbf{F}$  沿曲线  $L: \mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\sin 2t)\mathbf{k}$  (见 8.5.2 图 8-38) 上从点  $(1, 0, 0)$  到点  $(0, 1, 0)$  的曲线积分.

**解** 要证  $\mathbf{F}$  是有势场, 只需证  $\mathbf{F}$  是无旋场. 因为

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 2x = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

所以, 由定理 3 知  $\mathbf{F}$  是有势场. 下面用两种方法求势函数  $u$  (可与 11.2.5 例 13 对照).

**解 I (曲线积分法)** 势函数  $u$  就是变终点的曲线积分:

$$\begin{aligned} u &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (2xz+1)dx + (2yz+2y)dy + (x^2+y^2+3z^2)dz \\ &= \int_0^x dx + \int_0^y 2y dy + \int_0^z (x^2+y^2+3z^2) dz \\ &= x + y^2 + x^2 z + y^2 z + z^3. \end{aligned}$$

**解 II (凑微分法)** 因为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= (2xz+1)dx + (2yz+2y)dy + (x^2+y^2+3z^2)dz \\ &= dx + 2ydy + 3z^2dz + (2xzdx + x^2dz) + (2yzdy + y^2dz) \\ &= d(x+y^2+z^3) + d(x^2z) + d(y^2z) \\ &= d(x+y^2+z^3+x^2z+y^2z), \end{aligned}$$

故势函数  $u = x + y^2 + z^3 + x^2z + y^2z$ .

最后, 由于曲线积分与路径无关, 于是

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (x+y^2+z^3+x^2z+y^2z) \Big|_{(1,0,0)}^{(0,1,0)} = 0.$$

**例 15** 设  $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$  是无源场,  $f$  是可微函数, 求  $f$ .

**解** 由例 3 有  $\nabla \cdot \mathbf{F} = rf'(r) + 3f(r)$ . 因  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ , 故  $rf'(r) + 3f(r) = 0$ , 即

$$\frac{df(r)}{f(r)} = -\frac{3dr}{r}.$$

上式两边积分得  $f(r) = Cr^{-3}$ ,  $C$  是任意常数.

由以上结论得出: 引力场  $\mathbf{F} = -mr^{-3}\mathbf{r}$  是无源场. 另一方面, 由例 3 得出, 对任何可微函数  $f$ ,  $f(r)\mathbf{r}$  是无旋场. 因此, 引力场既是无源场又是无旋场.

**例 16** 设  $S$  是包围原点的分片光滑闭曲面,  $\mathbf{F}$  是在原点以外处处有定义的无源场, 证明  $\mathbf{F}$  穿过  $S$  流出的流量  $\Phi$  是一常数(与 11.2.4 定理 4 对照).

**证** 设  $S_1$  是以原点为中心半径充分小的球面,  $\pi$  是  $xy$  平面上介于  $S$  与  $S_1$  之间的部分(见图 11-32), 其中  $S$  已被切开),  $S$  被  $\pi$  分为两部分  $S'$ ,  $S''$ , 同样  $S_1$  被分为  $S'_1$ ,  $S''_1$ . 因  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ , 故有

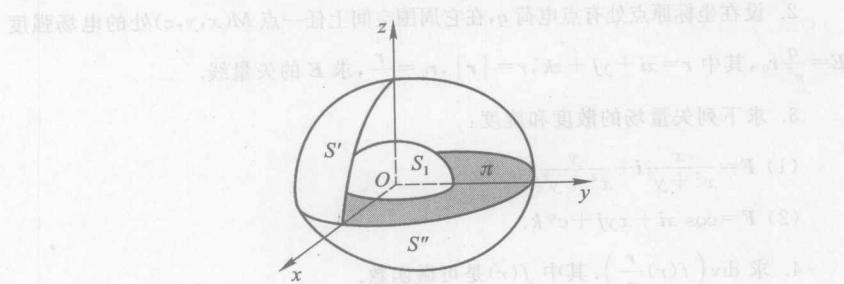


图 11-32

$$\iint_{S'} - \iint_{\pi} - \iint_{S'_1} = 0, \quad \iint_{S''} + \iint_{\pi} - \iint_{S''_1} = 0,$$

其中每个积分号下省略了  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ ,  $\iint$  取在  $\pi$  的上侧, 其余积分都取在所给曲面外侧. 于是两式相加得到

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

可见  $\mathbf{F}$  穿过  $S$  与  $S_1$  的流量相等. 由此显然推出,  $\mathbf{F}$  穿过任意两个包围原点的闭曲面的流量相等.

**例 17** 求引力场  $\mathbf{F} = -mr^{-3}\mathbf{r}$  穿过包围原点的闭曲面  $S$  流出的流

量  $\Phi$ .

解 因在原点之外  $\mathbf{F}$  是无源场, 故可应用例 16 的结论. 取  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 则球面的单位外法矢  $\mathbf{n} = \mathbf{r}$ , 于是

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -m \iint_S \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot r dS = -m \iint_S dS = -4m\pi.$$

$\Phi < 0$  表明, 实际上流量是纯流进  $S$  之内的.



## 习题 11.5

1. 求电位场  $f(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$  的等值面, 其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
2. 设在坐标原点处有点电荷  $q$ , 在它周围空间上任一点  $M(x, y, z)$  处的电场强度  $E = \frac{q}{r^2} \mathbf{r}_0$ , 其中  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$ , 求  $E$  的矢量线.
3. 求下列矢量场的散度和旋度:
  - (1)  $\mathbf{F} = \frac{x}{x^2 + y^2} i + \frac{y}{x^2 + y^2} j$ ;
  - (2)  $\mathbf{F} = \cos x i + xyj + e^{xy} k$ .
4. 求  $\operatorname{div}\left(f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}\right)$ . 其中  $f(r)$  是可微函数.
5. 证明:
  - (1) 当且仅当  $f(r) = Cr^{-3}$  ( $C$  为常数) 时,  $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{r}) = 0$ ;
  - (2)  $\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}$  是常矢量.
6. 判定  $\mathbf{F}$  是否为有势场, 若是, 求出势函数:
  - (1)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + 1)i + 2y(z + 1)j + (x^2 + y^2 + 3z^2)k$ ;
  - (2)  $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy^2 i + (x^2 z^2 + z \cos yz) j + (2x^2 yz + y \cos yz) k$ ;
  - (3)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + y)i + (4y + x + 2z)j + (2y - 6z)k$ ;
  - (4)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^y + y)i + (z + e^x)j + (y - 2ze^y)k$ .
7. 证明  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  是调和函数; 而  $g(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$  不是调和函数.
8. 设  $\mathbf{F} = Pi + Qj + Rk$ ,  $\mathbf{G} = Lj + Mj + Nk$ , 其中  $P, Q, R, L, M, N$  为可微函数, 证明:
$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}.$$

9. 设  $f, g$  有二阶连续偏导数, 试证:  $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$ .
10. 计算  $\oint_L (x-y) dx + (x^3 + yz) dy - 3xy^2 dz$ , 其中  $L$  是曲面  $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$  与平面  $z=0$  的交线且取正向.
11. 计算  $\oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ , 其中  $L$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  和圆柱面  $x^2 + y^2 = ax$  的交线 ( $a > 0, z \geq 0$ ), 从  $x$  轴正向看去是逆时针方向.
12. 流体在空间流动, 流体的密度  $\mu$  处处相同(设  $\mu=1$ ), 已知流速  $v = xz^2 i + yx^2 j + zy^2 k$ , 求流体在单位时间内沿曲线  $L: x^2 + y^2 + z^2 = 2z, z=1$  的环流量( $L$  的方向从  $z$  轴正向看是逆时针方向).
13. 计算  $\int_L 2xe^{-y} dx + (\cos z - x^2 e^{-y}) dy - y \sin z dz$ , 其中  $L$  是连结点  $A(-1, 0, 1)$  与点  $B(1, 2, \pi/3)$  的曲线弧.
14. 验证下列各式为某个函数  $u(x, y, z)$  的全微分, 并求函数  $u(x, y, z)$ :
- (1)  $(y^2 + 2xz^2) dx + (2xy - z) dy + (2x^2 z - y + 2z) dz$ ;
  - (2)  $(3x^2 + y^2 + z^2) dx + 2xy dy + 2xz dz$ .
15. 计算  $\iint_S xy dy dz + yz dz dx + xz dx dy$ , 其中  $S$  是由平面  $x=0, y=0, z=0$  及  $x+y+z=1$  所围立体的边界曲面的外侧.
16. 计算  $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , 其中  $S$  是由锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与  $z=1$  所围立体表面的外侧.
17. 计算  $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$ , 其中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  的外侧.
18. 设  $l$  为常矢量,  $n$  是简单闭曲面  $S$  的单位外法矢量, 证明  $\iint_S \cos(n, l) dS = 0$ .
19. 设有常密度为  $\mu=50$  的流体, 流速为  $v = xi + yj + zk$ , 求单位时间内沿球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  的外法线方向流出的流体之质量.

(8) (建议回见) ... + 1 + 1 + 1 = 3

(8) (建议回见) ... +  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

## 第十二章

# 无穷级数

在科学中,经常需要将一较复杂的量( $Q$ )分解为一系列较简单量( $q_1, q_2, \dots$ )的叠加( $Q = \sum q_n$ ),以便于进行定性分析或数值计算.这个很自然的想法导致无穷级数概念的引入.本章主要介绍形式上较简单且应用上最重要的幂级数与Fourier级数.为了给这两类级数的讨论奠定一个坚实的理论基础,在本章头两节简要介绍有关数项级数与函数项级数的一般理论.

### § 12.1 数项级数

#### 12.1.1 级数的概念与性质

给定一列实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , 称

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

为一个数项级数,简称为级数,记作  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ;当无需明确指出  $n$  的变化范围时(如对于收敛性问题),也简写作  $\sum a_n$ .称  $a_n$  为级数(1)的通项,称  $a_1$  为级数(1)的首项,亦可以其他整数作为首项下标(如考虑级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ 或者 } \sum_{n=2}^{\infty} a_n. \quad (1)$$

以下是几个最常见的级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots \quad (\text{几何级数}); \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \quad (p \text{ 级数}); \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad (\text{调和级数}). \quad (4)$$

称

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (5)$$

为级数(1)的部分和, 它构成一数列  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ . 反之, 任给一数列  $\{S_n\}$ , 令  $a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1} (n=2, 3, \dots)$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  恰以  $S_n$  为其部分和. 级数与数列的这种相互对应关系对于级数的研究与应用有重要意义. 下面就通过级数的部分和序列来定义级数的收敛性.

**定义 1** 设  $S_n$  为级数(1)的部分和. 若存在极限  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , 则称  $S$  为级数(1)的和, 写作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad (6)$$

当  $S$  有限时说级数(1)收敛, 或说级数(1)收敛于和  $S$ , 且称

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad (6)$$

为级数的余项. 若级数(1)不收敛, 则说它发散.

简言之, 级数(1)收敛(或发散)即其部分和序列  $\{S_n\}$  收敛(或发散).

**例 1** 判定级数(2)的敛散性.

解 首先求出其部分和  $S_n = \sum_{k=0}^n r^k$ :

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, & r \neq 1, \\ n+1, & r=1. \end{cases}$$

由此可以直接看出: 若  $r \leq -1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  不存在, 级数发散且没有和; 若

$|r| < 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1/(1-r)$ , 级数收敛且和为  $1/(1-r)$ ; 若  $r \geq 1$ , 则

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$ , 级数发散, 和为  $\pm \infty$ .

**例 2** 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  的敛散性.

(1) 解 利用分解式  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  求出部分和:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

由此直接看出, 级数收敛且其和为 1.

能像例 1, 2 一样通过求出部分和直接判定敛散性的级数并不多. 更实用的级数收敛判别法将在以下两小节介绍, 此处只给出级数收敛的一个必要条件.

**定理 1** 若级数(1)收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

证 设  $S$  为级数(1)的和,  $S_n$  为级数(1)的部分和, 则  $a_n = S_n - S_{n-1}$  ( $n > 1$ ). 由于级数(1)收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \square$$

由定理 1, 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  不成立时, 级数(1)必发散. 这一事实常用来判定一级数发散. 例如, 当  $|r| \geq 1$  时,  $r^n$  不收敛于 0, 因此级数  $\sum r^n$  发散 (对照例 1). 但须注意, 即使  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 级数(1)也未必收敛, 例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$
 由于部分和

$$\begin{aligned} S_n &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1, \end{aligned}$$

所以  $S_n \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 即此级数是发散的. 但是  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

下面概述收敛级数的基本性质, 这些性质在后面将反复用到. 以下

设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  皆收敛, 其和分别为  $A$  与  $B$ .

**性质 I** 对任何常数  $\alpha, \beta$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  收敛, 且其和为  $\alpha A + \beta B$ .

**性质 II** 若  $a_n \leq b_n (n=1, 2, \dots)$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**性质 III(结合律)** 在和式  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  中可任意地加括号而不影响其收敛性与和.

**性质 IV** 改变(或增减)级数  $\sum a_n$  的有限项, 不影响其收敛性(但其和可能改变).

**性质 I, II** 直接由定义 1 及数列极限的相应性质推出(参照 § 2.1 定理 2, 4). 设在和式  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  中加括号后得到一新级数  $\sum c_n$ , 以  $C_n$  记其部分和,  $S_n$  依式(5), 则  $\{C_n\}$  显然是  $\{S_n\}$  的一个子列, 于是由 § 2.1 定理 7 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

这表明性质 III 为真. 其次, 设改变级数  $\sum a_n$  的有限项得到新级数  $\sum d_n$ , 其部分和为  $D_n$ . 取定  $m$ , 使得  $\forall n > m$ , 有  $d_n = a_n$ , 则当  $n > m$  时,

$$S_n - D_n = \sum_{k=1}^m (a_k - d_k)$$

与  $n$  无关, 因此  $\{D_n\}$  与  $\{S_n\}$  同时收敛. 这就证明了性质 IV.

**注 1** 若级数  $\sum a_n$  发散, 则改变(或增减)其有限项后它仍然发散(否则由性质 IV 将推出原级数收敛!). 这样, 性质 IV 可改述成: 改变(或增减)级数的有限项不影响其敛散性. 因此, 为判定  $\sum a_n$  的敛散性, 只需考察下标充分大的那些  $a_n$  的性质. 下文将多次用到这一点.

### 12.1.2 正项级数

若  $a_n \geq 0 (n=1, 2, \dots)$ , 则称  $\sum a_n$  为正项级数. 正项级数  $\sum a_n$  的显著特点是, 其部分和  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$  随  $n$  单调增加, 因此  $\sum a_n$  收敛  $\Leftrightarrow \{A_n\}$  的极限存在  $\Leftrightarrow \{A_n\}$  有界(参考 § 2.1 定理 6). 这样, 为判定正项级数

$\sum a_n$  收敛, 仅需判定其部分和序列  $\{A_n\}$  有界, 后者相对来说是较容易的问题, 因此, 正项级数的收敛判别法较为完备. 最基本的收敛判别法是如下的“比较判别法”(注意与 § 6.3 定理 1 对照!):

**定理 2** 设  $\sum a_n$  与  $\sum b_n$  为正项级数.

(i) (一般形式的比较判别法) 若从某项起有  $a_n \leq b_n$ , 则当  $\sum b_n$  收敛时  $\sum a_n$  收敛; 或等价地, 当  $\sum a_n$  发散时  $\sum b_n$  发散.

(ii) (极限形式的比较判别法) 若  $b_n \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = l$ , 则当  $0 < l < \infty$  时  $\sum a_n$  与  $\sum b_n$  的敛散性相同; 当  $l = 0$  且  $\sum b_n$  收敛时  $\sum a_n$  收敛; 当  $l = \infty$  且  $\sum b_n$  发散时  $\sum a_n$  发散.

**证** 令  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ .

(i) 不妨设  $\forall n \geq 1$  有  $a_n \leq b_n$  (参看注 1), 于是  $A_n \leq B_n$  ( $\forall n \geq 1$ ). 若  $\sum b_n$  收敛, 则  $\{B_n\}$  有界, 从而  $\{A_n\}$  亦有界, 于是  $\sum a_n$  收敛.

(ii) 若  $l < \infty$ , 取实数  $\beta > l$ , 则当  $n$  充分大时有  $a_n/b_n < \beta$  (上册 § 2.1 定理 3), 从而  $a_n < \beta b_n$ . 于是当  $\sum b_n$  收敛 ( $\sum \beta b_n$  亦必收敛) 时, 由已证之(i) 推出  $\sum a_n$  收敛. 若  $l > 0$ , 取  $\beta \in (0, l)$ , 则当  $n$  充分大时  $a_n/b_n > \beta$ , 即  $a_n > \beta b_n$ . 于是当  $\sum b_n$  发散时, 由(i) 推出  $\sum a_n$  发散.  $\square$

为应用定理 2 判定某个正项级数  $\sum a_n$  的敛散性, 通常需选定已知其敛散性的标准级数作为比较对象. 几何级数 (参看例 1) 就是一个适用于用作比较对象的标准级数. 与几何级数相比较, 得出以下更实用 (与定理 2 比较) 的收敛判别法.

**定理 3** 设  $\sum a_n$  为正项级数.

(i) **比值法:** 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , 则级数  $\sum a_n$  当  $l < 1$  时收敛; 当  $l > 1$  时发散.

(ii) **根值法:** 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ , 则级数  $\sum a_n$  当  $l < 1$  时收敛; 当  $l > 1$  时发散.

**证** (i) 若  $l < 1$ , 取  $r \in (l, 1)$ , 则  $\exists m \geq 1$ ,  $\forall n \geq m: a_{n+1}/a_n < r$ , 即  $a_{n+1} < ra_n$ . 于是

$$a_n < r a_{n-1} < r^2 a_{n-2} < \cdots < r^{n-m} a_m \quad (n > m).$$

因  $\sum r^n$  收敛 (例 1), 从而  $\sum_{n=m}^{\infty} r^{n-m} a_m$  收敛, 故由定理 2 知  $\sum a_n$  收敛.

若  $l > 1$ , 则当  $n$  充分大时  $a_{n+1}/a_n > 1$ , 即  $a_{n+1} > a_n$ . 可见  $a_n$  必不收敛于 0, 因此  $\sum a_n$  发散.

(ii) 若  $l < 1$ , 取  $r \in (l, 1)$ , 则当  $n$  充分大时  $\sqrt[n]{a_n} < r$ , 即  $a_n < r^n$ , 于是由  $\sum r^n$  收敛推出  $\sum a_n$  收敛.

若  $l > 1$ , 则当  $n$  充分大时  $\sqrt[n]{a_n} > 1$ , 从而  $a_n > 1$ , 于是级数  $\sum a_n$  发散. □

例 3 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的敛散性, 若

$$(1) a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{3^n n!}; \quad (2) a_n = n! \left(\frac{x}{n}\right)^n \quad (x > 0);$$

$$(3) a_n = \frac{n^2}{2^n};$$

$$(4) a_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}.$$

解 (1) 用比值法:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{3n+3} \rightarrow \frac{2}{3} < 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

可见级数收敛.

(2) 仍用比值法:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = x \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow \frac{x}{e} \quad (n \rightarrow \infty),$$

可见级数当  $0 < x < e$  时收敛; 当  $x > e$  时发散; 若  $x = e$ , 则因  $(1 + n^{-1})^n < e$ , 故  $a_{n+1}/a_n > 1$ , 即  $a_{n+1} > a_n$ ,  $\{a_n\}$  不收敛于 0, 于是级数发散.

(3) 用根值法:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2 = \frac{1}{2} < 1, \quad (1)$$

可见级数收敛.

(4) 仍用根值法:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{(2n-1)/n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3n-1} \right)^2 \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{-1/n}$$

$$= \frac{1}{9} < 1,$$

可见级数收敛. 注意:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{-1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{1}{n} \right)^{1/n} = 1$ .

一般说来, 比值法适用于通项  $a_n$  含  $n$  个因子的连乘积(如阶乘)的情况; 而根值法则适用于  $a_n$  含  $n$  次幂的情况.

若定理 3 中的  $l=1$ , 则级数  $\sum a_n$  可能收敛亦可能发散(参看下面例 4 中讨论的  $p$ -级数). 在这种情况下, 比值法与根值法失效, 需要求助于更敏锐的判别法. 下面就来建立两个新的判别法.

**定理 4(积分判别法)** 设  $f(x)$  在区间  $[1, \infty)$  上非负且单调减,  $a_n = f(n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 则级数  $\sum a_n$  收敛当且仅当反常积分  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

**证** 因在区间  $[k-1, k]$  上  $a_k \leq f(x) \leq a_{k-1}$ , 故

$$a_k \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq a_{k-1} \quad (k \geq 2).$$

对  $k=2, 3, \dots, n$  求和得出

$$A_n - a_1 \leq \int_1^n f(x) dx \leq A_{n-1},$$

其中  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . 可见  $A_n$  有界  $\Leftrightarrow \int_1^n f(x) dx$  有界, 从而  $\sum a_n$  收敛

$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

**例 4** 判定级数  $\sum a_n$  的敛散性, 若

$$(1) a_n = \frac{1}{n^p} \quad (n \geq 1, p > 0);$$

$$(2) a_n = 1/(n \ln^q n) \quad (n \geq 2).$$

**解** (1)  $f(x) = x^{-p}$  在  $[1, \infty)$  上单调减; 积分  $\int_1^{+\infty} x^{-p} dx$  在  $p > 1$  时收

敛,在  $p \leq 1$  时发散. 由定理 4, 级数  $\sum n^{-p}$  在  $p > 1$  时收敛, 在  $p \leq 1$  时发散.

(2)  $f(x) = 1/(x \ln^q x)$  对充分大的  $x$  单调减(实际上, 易验证当  $x > \max\{1, e^{-q}\}$  时  $(x \ln^q x)' > 0$ ). 若  $q \neq 1$ , 则

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \frac{1}{(1-q)(\ln x)^{q-1}} \Big|_2^{+\infty}.$$

可见积分  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x}$  当  $q > 1$  时收敛, 当  $q < 1$  时发散. 若  $q = 1$ , 则

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty.$$

于是由定理 4 知级数  $\sum \frac{1}{n \ln^q n}$  当  $q > 1$  时收敛, 当  $q \leq 1$  时发散.

值得注意的是, 对  $a_n = n^{-p}$  ( $n \geq 1$ ), 恒有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)^{-p} = 1.$$

可见比值法与根值法均无法判定  $p$  级数的敛散性.

鉴于  $p$ -级数通项形式简单且其敛散性已经确定, 现在可用它作为比较标准而建立新的收敛判别法.

**定理 5** 设  $\sum a_n$  是一正项级数,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = l$ . 则级数  $\sum a_n$  当  $p > 1$  且  $0 \leq l < \infty$  时收敛, 当  $p \leq 1$  且  $0 < l \leq \infty$  时发散.

证 结合定理 2(ii) 与例 4 的结论即得. □

若在定理 5 中  $0 < l < \infty$ , 则依 2.3.2 中的记号有  $a_n = O(n^{-p})$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 这意味着  $a_n$  关于  $1/n$  为  $p$  阶无穷小(假定  $p > 0$ ). 因此, 也称定理 5 为比阶判别法. 具体应用时, 通常应求出  $a_n$  关于  $1/n$  的无穷小主部, 从而确定  $a_n$  关于  $1/n$  的阶  $p$ , 然后依  $p > 1$  与  $p \leq 1$  决定  $\sum a_n$  收敛与发散. 下面用例子说明.

**例 5** 判定级数  $\sum a_n$  的敛散性, 若

$$(1) a_n = \frac{4n-1}{n^2+n}; \quad (2) a_n = \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right);$$

$$(3) a_n = 1 - \cos \frac{\pi}{n}; \quad (4) a_n = 1/n^{1+\frac{1}{n}}.$$

$$(5) a_n = \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n^p} \right), p > 0.$$

解 (1) 因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{4n-1}{n^2+n} = 4,$$

故由定理 5 知级数发散.

(2) 因当  $n \rightarrow \infty$  时  $\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n}$ , 故由定理 5 知级数  $\sum a_n$  发散.

(3) 由  $1 - \cos x \sim x^2/2 (x \rightarrow 0)$  知  $a_n \sim \pi^2/2n^2$ . 于是  $a_n = O(n^{-2})$ , 故级数  $\sum a_n$  收敛.

(4) 因  $n^{-1} \ln n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 故

$$\begin{aligned} a_n &= \exp \left[ -\left( 1 + \frac{1}{n} \right) \ln n \right] \\ &= \frac{1}{n} \exp \left( -\frac{\ln n}{n} \right) \sim \frac{1}{n} (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

因此级数  $\sum a_n$  发散.

(5) 利用  $\ln(1+x) \sim x$  与  $\tan x \sim x (x \rightarrow 0)$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \ln \frac{1 + \tan n^{-p}}{1 - \tan n^{-p}} = \ln(1 + \tan n^{-p}) - \ln(1 - \tan n^{-p}) \\ &= \tan n^{-p} + o(\tan n^{-p}) - [-\tan n^{-p} + o(\tan n^{-p})] \\ &= 2\tan n^{-p} + o(\tan n^{-p}) = O(n^{-p}), \end{aligned}$$

可见级数  $\sum a_n$  当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  时发散.

**例 6** 设  $a_n > 0$ ,  $\sum a_n$  收敛,  $b_n = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n}$ , 证明  $\sum b_n$  收敛.

证 因  $\sum a_n$  收敛, 故必  $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ . 算出

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2\sqrt{1+a_n} + 2}{2a_n^2} \quad (\text{令 } x = a_n) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2\sqrt{1+x} + 2}{2x^2} \quad (\text{L'Hospital 法则}) \end{aligned}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4x} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) \quad (1)$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{4x} = \frac{1}{8}. \quad (2)$$

于是由定理 2 知  $\sum b_n$  收敛.

### 12.1.3 变号级数

若  $a_n \leq 0 (n=1, 2, \dots)$ , 则  $\sum (-a_n)$  是正项级数, 因而可应用上小节的结果. 若当  $n$  充分大时  $a_n$  不变号, 则亦可将正项级数收敛判别法用于  $\sum a_n$  或  $\sum (-a_n)$ . 余下只要考虑那些正项与负项均有无限多个的级数, 称这种级数为“变号级数”.

首先考虑正负项交替出现的交错级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots, \quad (7)$$

其中  $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ .

**定理 6 (Leibniz 判别法)** 若  $\{a_n\}$  单调减且收敛于零, 则级数(7)收敛, 且其和  $S \leq a_1$ , 余项  $R_n$  (依式(6)) 满足

$$|R_n| \leq a_{n+1}. \quad (8)$$

**证** 以  $S_n$  记级数(7)的部分和. 因  $\{a_n\}$  单调减, 故

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

单调增. 由

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1 \quad (9)$$

知  $\{S_{2n}\}$  有上界, 因此  $\{S_{2n}\}$  收敛于某个极限  $S$ . 因  $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 故  $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \rightarrow S (n \rightarrow \infty)$ , 因此  $S_n \rightarrow S (n \rightarrow \infty)$ , 即级数(7)收敛. 由式(9)推出  $S \leq a_1$ . 同理

$$|R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + \dots \leq a_{n+1}. \quad \square$$

**注 2** 在定理 6 中, 若  $\{a_n\}$  严格单调减, 则可以说明  $S < a_1$ ,  $|R_n| < a_{n+1}$ . 若只假定  $\{a_n\}$  从某项起单调减, 则收敛性结论仍成立, 但不一定有  $S \leq a_1$ ,  $|R_n| \leq a_{n+1}$ .

**例 7** 判定级数  $\sum (-1)^{n-1} a_n$  的敛散性, 若

- (1)  $a_n = 1/n$ ; (2)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ;  
 (3)  $a_n = 1/(n - \ln n)$ ; (4)  $a_n = n^{-1} \ln n$ .

解 (1) 直接看出  $1/n$  单调减且收敛于零, 故由定理 6 知级数  $\sum (-1)^{n-1} a_n$  收敛.

(2) 由  $a_n = 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$  看出级数收敛.

(3) 令  $f(x) = x - \ln x$ , 则  $f'(x) = 1 - x^{-1} \geq 0 (x \geq 1)$ . 可见  $n - \ln n (n \geq 1)$  单调增, 从而  $\{a_n\}$  单调减. 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} / \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = 0,$$

因此级数  $\sum (-1)^{n-1} a_n$  收敛.

(4) 令  $f(x) = x^{-1} \ln x$ , 则  $f'(x) = x^{-2}(1 - \ln x) < 0 (x > e)$ , 可见当  $n \geq 3$  时  $\{a_n\}$  单调减. 其次易知  $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 故级数收敛.

例 8 已知  $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ . 用此级数近似计算  $\ln 2$ , 取多少项可保证误差  $< 0.01$ ?

解 由定理 6(顾及注 2),  $|R_n| < \frac{1}{n+1}$ . 因  $\frac{1}{n+1} \leq 0.01 \Leftrightarrow n \geq 99$ , 故取 99 项可保证误差  $< 0.01$ .

以上例子表明用级数  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  来计算  $\ln 2$  是不合适的. 因为所需项太多, 且精度不高, 效率较低.

定理 7 若绝对值级数  $\sum |a_n|$  收敛, 则级数  $\sum a_n$  必收敛.

证 若  $\sum |a_n|$  收敛, 则由不等式  $0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|$  及比较判别法(定理 2)知  $\sum (|a_n| + a_n)$  收敛, 从而

$$\sum a_n = \sum (|a_n| + a_n - |a_n|)$$

亦收敛.  $\square$

定理 7 反过来不成立, 例如  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  是收敛的, 但是  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  是发散的( $p$ -级数,  $p=1$ ).

定义 2 若  $\sum |a_n|$  收敛, 则说级数  $\sum a_n$  绝对收敛; 若  $\sum |a_n|$  发散而  $\sum a_n$  收敛, 则说级数  $\sum a_n$  条件收敛.

定理 7 意味着绝对收敛级数必收敛.

例 9 判定级数  $\sum a_n$  的绝对收敛性与条件收敛性, 若

(1)  $a_n = (-1)^n n^{-p}$  ( $p > 0$ );

(2)  $a_n = e^{-nx} \sin nx$  ( $x > 0$ );

(3)  $a_n = \sin(\pi \cdot \sqrt{n^2 + 1})$ .

解 (1) 结合例 4 的结论与定理 6 得出, 级数  $\sum a_n$  当  $p > 1$  时绝对收敛, 当  $0 < p \leq 1$  时条件收敛.

(2) 因  $|a_n| \leq e^{-nx} = (e^{-x})^n$ , 而当  $x > 0$  时  $e^{-x} < 1$ , 故  $\sum e^{-nx}$  收敛 (公比小于 1 的等比级数), 从而  $\sum |a_n|$  亦收敛, 即  $\sum a_n$  绝对收敛.

(3) 由  $\sin x = (-1)^n \sin(x - n\pi)$ , 有

$$a_n = (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi)$$

$$= (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n}.$$

令  $\varphi_n = \pi / (\sqrt{n^2 + 1} + n)$ , 则  $\varphi_n$  单调减且收敛于零, 故  $\sin \varphi_n$  亦单调减且收敛于零. 因此由定理 6 知级数  $\sum a_n$  收敛. 另一方面, 当  $n \rightarrow \infty$  时有

$$|a_n| = \left| \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \right| \sim \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \sim \frac{\pi}{2n},$$

可见  $\sum |a_n|$  发散 (定理 5). 因此  $\sum a_n$  条件收敛.

下面不加证明地陈述关于绝对收敛级数的一个重要结论.

定理 8 设级数  $\sum a_n$  与  $\sum b_n$  均绝对收敛, 其和分别为  $A, B$ , 则将  $a_m b_n$  ( $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ) 按任何顺序相加而得之级数  $\sum a_m b_n$  绝对收敛, 且其和为  $AB$ . 特别地, 以下等式成立:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{\infty} b_m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} a_k b_l. \quad (10)$$

必须指出, 以上结论不适用于条件收敛级数. 条件收敛级数与绝对收敛级数还有其他一些重大差别. 因此, 在应用变号级数时必须注意区分这两种不同的收敛性.



## 习题 12.1

1. 写出下列级数的部分和, 并判定其敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n};$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2};$$

2. 判定下列级数的敛散性：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n = 0.001, n=1, 2, 3, \dots);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{6};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2n^2 + n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

3. 设正项级数  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  收敛，证明级数  $u_1 + u_3 + \dots + u_{2n+1} + \dots$  也收敛。

4. 用比较法判定下列级数的敛散性：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$(9) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^k};$$

$$(11) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)};$$

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)};$$

$$(15) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1};$$

$$(17) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2;$$

$$(19) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}};$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} (a > 0);$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n+1};$$

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{n-1}};$$

$$(14) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1});$$

$$(16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{4/3}};$$

$$(18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2 - 2};$$

$$(20) \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

5. 已知  $\lim n^2 a_n = l$  ( $0 < l < \infty$ ), 问级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的敛散性如何? (E)

6. 设  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$  ( $n=1, 2, \dots, a_n > 0, b_n > 0$ ), 证明: (E)

(1) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; (D)

(2) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散. (D)

7. 用比值法判定下列级数的敛散性: (E)

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ ; (E)

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$  ( $a > 0, a \neq e$ ); (E)

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$ ; (D)

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$ ; (D)

(5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n 2^n}$ ; (D)

(6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^n}$ ; (D)

(7)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{7^n - 5^n}$ ; (D)

(8)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} \left(\frac{19}{9}\right)^n$ ; (D)

(9)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n}$ ; (D)

(10)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(2n+1)!}$ ; (D)

(11)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ ; (D)

(12)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{3^n n!}$ ; (D)

(13)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$ ; (D)

(14)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$ . (D)

8. 能否用比值法判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n}$  的敛散性? 若不能, 应如何判定其敛散性? (E)

9. 证明下列极限:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ ; (D)

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$ ; (D)

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$  ( $a > 1, k$  为常数); (D)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^n}{((1+n)(1-n))^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^n}{(1-n)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n}{1-n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^n = e^2$$
 (D)

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  ( $a > 1$ ). (D)

10. 用根值法判定下列级数的敛散性:

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ ; (E)

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$ ; (E)

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{3^n - 1} \right)^{2n-1}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]}{3^n}.$$

11. 用积分判别法判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}; \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n};$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}; \quad (4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2};$$

$$(5) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}.$$

12. 判定下列级数的敛散性,若收敛,指明是绝对收敛还是条件收敛:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2};$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3 + 2^n}; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n!};$$

$$(7) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\pi^n} \sin \frac{\pi}{n}; \quad (8) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left( 1 - n \sin \frac{1}{n} \right);$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}; \quad (10) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right);$$

$$(11) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{4n+3}{5n+4} \right)^n; \quad (12) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( n\pi + \frac{1}{\ln n} \right);$$

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+10}; \quad (14) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan(\ln n) \right];$$

$$(15) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}; \quad (16) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n};$$

$$(17) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}}; \quad (18) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2 + (-1)^n}{n^{5/4}}.$$

13. 设  $\sum a_n$  是收敛正项级数, 证明以下级数收敛:

$$(1) \sum \sqrt{a_n a_{n+1}}; \quad (2) \sum \frac{1}{n} \sqrt{a_n}; \quad (3) \sum \ln(1+a_n).$$

## || § 12.2 函数项级数

给定定义于区间  $I$  上的一列函数  $u_n(x) (n=1, 2, \dots)$ , 称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

为  $I$  上的一个函数项级数. 若对  $x_0 \in I$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  收敛, 则称  $x_0$  为级数(1)的收敛点; 称(1)的全体收敛点所构成的集合  $B$  为(1)的收敛域. 对每个  $x \in B$ , 以  $S(x)$  记级数(1)的和, 则  $S(x)$  是定义于收敛域  $B$  上的一个函数, 称它为级数(1)的和函数. 设  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  是级数(1)的部分和, 则  $S_n(x)$  是定义于  $I$  上的函数, 但余项(参看 § 7.1 (6))

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \quad (2)$$

仅在集  $B$  上有定义.

本节主要讨论和函数  $S(x)$  的分析性质——连续性及有关微分与积分的性质, 所有这些性质都依赖于下面介绍的“一致收敛”概念.

### 12.2.1 一致收敛性

本节的一个中心问题是: 若  $u_n(x) (n=1, 2, \dots)$  都是  $I$  上的连续(或可微)函数, 问级数(1)的和函数  $S(x)$  是否为收敛域  $B$  上的连续(或可微)函数? 鉴于任意有限个连续(或可微)函数的和仍为连续(或可微)函数, 人们可能以为函数项级数亦有此性质. 但下面的简单例子说明事情并非如此.

**例 1** 考虑级数  $x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ .  
直接看出其部分和为  $S_n(x) = x^n$ . 由此知级数(3)在区间  $(-1, 1]$  上收

敛于和函数

$$S(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

级数(3)的每项都是足够好的函数,在区间 $(-1, 1]$ 内部及其端点处都无任何异常之处. 但和函数  $S(x)$  在  $x=1$  处有一间断. 为考察造成这一现象的原因, 我们在图 12-1 中画出了  $S_n(x) = x^n$  在区间 $[0, 1]$  上的图形. 从图形看出, 随着  $n$  的增大, 曲线  $y=x^n$  的大部分很快贴近  $x$  轴, 但靠近  $x=1$  的一段则明显滞后. 这表明,  $S_n(x)$  在  $[0, 1]$  上各点处并非以同样的速度收敛于  $S(x)$ . 正是这种收敛速度的“不一致”造成了  $S(x)$  在  $x=1$  处的间断.

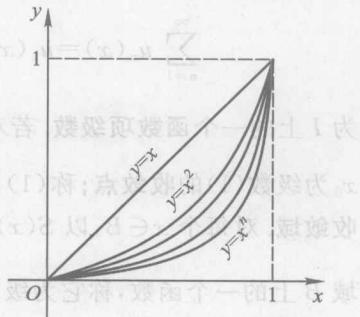


图 12-1

再回到一般的级数(1), (1) 在  $B$  上收敛意味着:

$$\forall x \in B, \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N: |R_n(x)| < \epsilon, \quad (4)$$

其中  $R_n(x)$  依式(2). 通常, (4) 中的  $N$  不仅依赖于  $\epsilon$ , 而且也依赖于  $x$ . 正是  $N$  对  $x$  的依赖反映了“收敛速度”与点  $x$  有关. 若能找到与  $x$  无关的  $N$ , 则可以说收敛速度对各点一致. 于是作定义:

**定义 1** 设级数(1)在点集  $A$  上收敛. 若

$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, \forall x \in A: |R_n(x)| < \epsilon$ ,  $\quad (5)$

则说级数(1)在  $A$  上一致收敛. 式(5)意味着, 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 存在  $N > 0$ , 使得不等式  $|R_n(x)| < \epsilon$  对一切  $n \geq N$  与  $x \in A$  一致成立. 因  $|R_n(x)| < \epsilon$  相当于

$$S(x) - \epsilon < S_n(x) < S(x) + \epsilon,$$

故在几何上  $|R_n(x)| < \epsilon$  ( $n \geq N, x \in A$ ) 意味着, 当  $n \geq N$  时曲线  $y = S_n(x)$  ( $x \in A$ ) 介于曲线  $y = S(x) - \epsilon$  与  $y = S(x) + \epsilon$  之间(图 12-2).

若取  $S_n(x) = x^n$ ,  $A = [0, 1]$ , 则式(5)不能满足. 否则对于  $\epsilon = 1/2$ ,  $\exists N > 0, \forall n \geq N, \forall x \in [0, 1]: |x^n - 0| = x^n < 1/2$ ; 特别  $\forall x \in [0, 1]:$

□

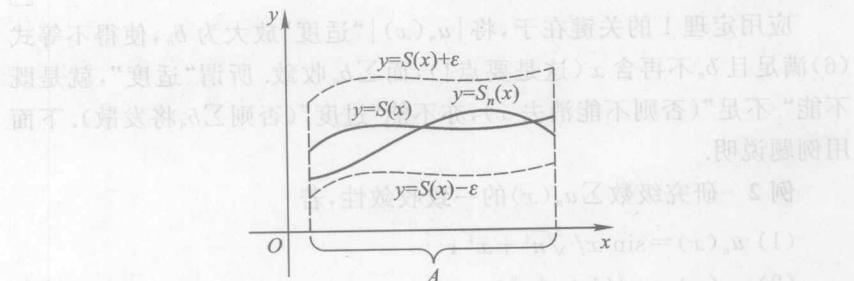


图 12-2

$x^N < 1/2$ . 令  $x \rightarrow 1$  (注意  $N$  与  $x$  无关!) 得  $1 < 1/2$ , 得出矛盾. 这表明级数(3)在  $[0, 1]$  上非一致收敛. 另一方面, 若  $r \in (0, 1)$ , 则对任给  $\epsilon > 0$ , 取  $N > \ln \epsilon / \ln r$ , 当  $n \geq N$  时,

$$\forall x \in [0, r] : x^n \leq r^n \leq r^N < \epsilon,$$

这表明级数(3)在  $[0, r]$  上一致收敛. 可见, 一函数项级数是否一致收敛与所考虑的区间有关.

直接用定义 1 来判定一致收敛性显然是不方便的. 下面介绍一个简单且实用的一致收敛判别法.

**定理 1 (Weierstrass 判别法)** 若存在一个收敛的正项级数  $\sum b_n$ , 使得

$$|u_n(x)| \leq b_n \quad (x \in A, n=1, 2, \dots), \quad (6)$$

则级数(1)在  $A$  上绝对收敛且一致收敛.

(证) 关于“绝对收敛”的结论直接由比较判别法得出.  $\forall \epsilon > 0$ , 由

$\sum b_n$  收敛推出  $\exists N > 0$ ,  $\forall n \geq N$ :  $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k < \epsilon$ . 于是

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k < \epsilon \quad (\forall x \in A), \end{aligned}$$

这表明级数(1)在  $A$  上一致收敛。  $\square$

应用定理 1 的关键在于, 将  $|u_n(x)|$  “适度”放大为  $b_n$ , 使得不等式(6)满足且  $b_n$  不再含  $x$ (这是要点!), 而  $\sum b_n$  收敛. 所谓“适度”, 就是既不能“不足”(否则不能消去  $x$ ), 亦不能“过度”(否则  $\sum b_n$  将发散). 下面用例题说明.

**例 2** 研究级数  $\sum u_n(x)$  的一致收敛性, 若

$$(1) \quad u_n(x) = \sin x / \sqrt[3]{n^4 + x^4};$$

$$(2) \quad u_n(x) = x / (1 + n^4 x^2);$$

解 (1) 直接看出  $|u_n(x)| \leq n^{-4/3}$  ( $|x| < \infty$ ), 而  $\sum n^{-4/3}$  收敛, 故  $\sum u_n(x)$  在  $(-\infty, \infty)$  上一致收敛.

(2) 利用不等式  $1 + n^4 x^2 \geq 2n^2 |x|$ , 得

$$|u_n(x)| \leq 1/2n^2 (n=1, 2, \dots),$$

故级数在  $(-\infty, \infty)$  上一致收敛.

### 12.2.2 和函数的分析性质

利用一致收敛概念, 现在已可建立本节的中心结果, 即在某种一致收敛条件下, 关于级数(1)有“逐项求导”与“逐项积分”公式:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x); \quad (7)$$

$$\int_a^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\beta} u_n(x) dx. \quad (8)$$

设  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ , 则式(7), (8)可改写成

$$S'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x); \quad (9)$$

$$\int_a^{\beta} S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\beta} S_n(x) dx. \quad (10)$$

**定理 2** 设级数(1)在区间  $I$  上一致收敛于和函数  $S(x)$ ,  $u_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 在  $I$  上连续, 则  $S(x)$  亦在  $I$  上连续, 且对任何  $[\alpha, \beta] \subset I$ , 公式(8)成立.

证 1° 证  $S(x)$  在  $I$  上任一点  $x_0$  连续.  $\forall \epsilon > 0$ , 由一致收敛性, 必有

自然数  $n$ , 使得

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon/3 (\forall x \in I). \quad (11)$$

固定上述的  $n$ . 因  $S_n(x)$  在  $x_0$  连续, 故存在  $x_0$  的邻域  $N(x_0)$  (当  $x_0$  是  $I$  的端点时用单侧邻域), 使得

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \epsilon/3 (\forall x \in N(x_0)). \quad (12)$$

结合式(11),(12)得出, 对任何  $x \in N(x_0)$  有

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &\leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| \\ &\quad + |S_n(x_0) - S(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

这表明  $S(x)$  在  $x_0$  连续.

2° 证等式(10)(它与(8)相当). 取定  $[\alpha, \beta] \subset I$ ,  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $N > 0$ , 使当  $n > N$  时对任何  $x \in I$ , 有

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon/(\beta - \alpha).$$

于是当  $n > N$  时有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^\beta S_n(x) dx - \int_a^\beta S(x) dx \right| &= \left| \int_a^\beta [S_n(x) - S(x)] dx \right| \\ &\leq \int_a^\beta |S_n(x) - S(x)| dx \leq (\beta - \alpha) \cdot \frac{\epsilon}{\beta - \alpha} = \epsilon, \end{aligned}$$

这表明公式(10)成立.  $\square$

**定理 3** 设级数(1)在区间  $I$  上收敛于和函数  $S(x)$ ,  $u_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 在  $I$  上有连续导数, 且  $\sum u'_n(x)$  在  $I$  上一致收敛, 则  $S(x)$  在  $I$  上可微, 且在  $I$  上公式(7)成立.

**证** 只需证公式(9). 取定  $\alpha \in I$ ,  $\forall x \in I$ , 因  $\sum u'_n(x)$  一致收敛, 故由已证的定理 2 有

$$\begin{aligned} S(x) &= S(\alpha) + \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(x) - S_n(\alpha)] \\ &= S(\alpha) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\alpha^x S'_n(t) dt \\ &= S(\alpha) + \int_\alpha^x \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(t) dt. \end{aligned}$$

因  $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(t)$  连续(定理 2), 故用 § 6.2 定理 1 得

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x).$$

**注** 仔细考察定理 2,3 的证明过程可以看出: 将条件“在  $I$  上一致收敛”减弱为“在  $I$  内任何闭区间上一致收敛”, 则定理 2,3 的结论仍在  $I$  内成立.



## 习题 12.2

判定下列级数在给定区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^4 + x^4}}, -\infty < x < \infty;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)^n, 0 \leq x \leq 1;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-e^{-nx})}{n^2 + x^2}, 0 \leq x < \infty;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(1+x^2)^n}, -\infty < x < \infty;$$

$$(6) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, -1 < x < 1;$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n, 0 \leq x \leq 1.$$

## || § 12.3 幂 级 数 ||

本节主要考虑形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (1)$$

的级数, 所得结论可自然地推广到更一般的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + \cdots + a_n (x-x_0)^n + \cdots. \quad (2)$$

(1) 与 (2) 都称为幂级数, 称  $a_n$  ( $n \geq 0$ ) 为其系数.

幂级数作为特殊的函数项级数，自然沿袭上节的所有概念与结论。另一方面，幂级数在形式上特别简单，因而有一系列独特的性质，这使它在微积分学的理论与应用上有特殊的重要性。

### 12.3.1 收敛区间与收敛半径

**定理 1(阿贝尔(Abel)定理)** 如果级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  当  $x=x_0$  ( $x_0 \neq 0$ )

时收敛，则该级数在区间  $(-|x_0|, |x_0|)$  上绝对收敛。如果级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  当  $x=x_0$  时发散，则对  $|x|>|x_0|$  的  $x$  级数发散。

**证** 先设  $x_0$  是幂级数(1)的收敛点，即级数

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots$$

收敛。则由级数收敛的必要条件，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0,$$

于是存在一个常数  $M$ ，使得

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

于是

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n,$$

因为当  $|x| < |x_0|$  时，等比级数  $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$  收敛（公比  $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ ），所以

级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  收敛，也就是级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  绝对收敛。

其次，设幂级数(1)当  $x=x_0$  时发散但却有一点  $x_1$  适合  $|x_1| > |x_0|$  使级数收敛，则由已证部分，级数当  $x=x_0$  时应收敛，这与假设矛盾，定理得证。

定理 1 表明，如果幂级数(1)在  $x=x_0$  处收敛，则对于开区间  $(-|x_0|, |x_0|)$  内的任何  $x$ ，幂级数都收敛；如果幂级数(1)在  $x=x_0$  处发散，则对于闭区间  $[-|x_0|, |x_0|]$  外的任何  $x$ ，幂级数都发散。

设已给幂级数(1)在数轴上既有收敛点（不仅是原点）也有发散点。

现在从原点沿数轴向右方走,最初只遇到收敛点,然后就只遇到发散点.这两部分的界点可能是收敛点也可能是发散点.从原点沿数轴向左方走情形也是如此.两个界点  $P$  与  $P'$  在原点的两侧,且由定理 1 可以证明它们到原点的距离是一样的(图 12-3).

从上面的几何说明,得到下述重要推论:

**推论** 对每个给定的幂级数(1),都存在一个确定的  $R: 0 \leq R \leq \infty$ , 当  $R > 0$  时级数(1)在区间  $(-R, R)$  内绝对收敛; 当  $R < \infty$  时级数(1)在闭区间  $[-R, R]$  外发散.

称  $R$  为幂级数(1)的收敛半径. 开区间  $(-R, R)$  叫做幂级数(1)的收敛区间.

关于幂级数的收敛半径求法,有下面的定理.

**定理 2** 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho,$$

其中  $a_n, a_{n+1}$  是幂级数(1)的相邻两项的系数,则这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases} \quad (3)$$

**证** 考察幂级数(1)的各项取绝对值所成的级数

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots$$

相邻两项之比为

$$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|. \quad (1)$$

(1) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho (\rho \neq 0)$  存在,根据比值判别法,则当  $\rho |x| < 1$  即  $|x| < \frac{1}{\rho}$  时,级数(1)绝对收敛;当  $\rho |x| > 1$  即  $|x| > \frac{1}{\rho}$  时,从某一个  $n$  开始

$$|a_{n+1} x^{n+1}| > |a_n x^n|, \quad (1)$$

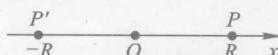


图 12-3

区间  $(-R, R)$  内绝对收敛;当  $R < \infty$  时级数(1)在闭区间  $[-R, R]$  外发散.

称  $R$  为幂级数(1)的收敛半径. 开区间  $(-R, R)$  叫做幂级数(1)的收敛区间.

关于幂级数的收敛半径求法,有下面的定理.

**定理 2** 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho,$$

其中  $a_n, a_{n+1}$  是幂级数(1)的相邻两项的系数,则这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases} \quad (3)$$

**证** 考察幂级数(1)的各项取绝对值所成的级数

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots$$

相邻两项之比为

$$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|. \quad (1)$$

(1) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho (\rho \neq 0)$  存在,根据比值判别法,则当  $\rho |x| < 1$  即  $|x| < \frac{1}{\rho}$  时,级数(1)绝对收敛;当  $\rho |x| > 1$  即  $|x| > \frac{1}{\rho}$  时,从某一个  $n$  开始

$$|a_{n+1} x^{n+1}| > |a_n x^n|, \quad (1)$$

因此一般项  $|a_n x^n|$  不能趋于零, 所以  $a_n x^n$  也不能趋于零, 从而级数(1)发散. 于是收敛半径  $R = \frac{1}{\rho}$ .

(2) 如果  $\rho=0$ , 则对任何  $x \neq 0$ , 有  $\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 所以绝对值级数收敛, 从而级数(1)绝对收敛. 于是  $R=+\infty$ .

(3) 如果  $\rho=+\infty$ , 则对于除  $x=0$  外的其他一切  $x$  值, 级数(1)必发散, 否则由定理 1 知道将有点  $x \neq 0$  使绝对值级数收敛. 于是  $R=0$ .

**定理 3** 如果幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R > 0$ , 则此级数在  $(-R, R)$  内的任一闭区间  $[a, b]$  上一致收敛.

**证** 记  $r = \max\{|a|, |b|\}$ , 则对  $[a, b]$  上的一切  $x$ , 都有  $|a_n x^n| \leq |a_n r^n|$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ),

而  $0 < r < R$ , 根据定理 1, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  绝对收敛, 由 Weierstrass 判别法即得所要证的结论.

**例 1** 求下列幂级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{n 3^n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{3^n + n^2}.$$

**解** (1) 用公式(3):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty,$$

故收敛域为  $(-\infty, \infty)$ .

(2)  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)/n = 1$ , 而级数  $\sum (-1)^{n-1}/n$  收敛,  $\sum (-1/n)$  发散, 故收敛域为  $(-1, 1]$ .

(3)  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} 3(n+1)/n = 3$ . 当  $x = -5$ , 即  $x+2 = -3$  时得发散级数  $-\sum (1/n)$ ; 当  $x=1$ , 即  $x+2=3$  时, 得收敛级数  $\sum (-1)^{n-1}/n$ , 故收敛域为  $(-5, 1]$ .

(4) 令  $y=x^2$ , 原级数可写成  $x \sum_{n=1}^{\infty} y^n / (3^n + n^2)$ . 关于  $y$  的幂级数  $\sum y^n / (3^n + n^2)$  的收敛半径为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + (n+1)^2}{3^n + n^2} = 3.$$

因  $3^n / (3^n + n^2) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ , 故当  $y=3$  (即  $|x|=\sqrt{3}$ ) 时级数  $\sum y^n / (3^n + n^2)$  发散, 因此原级数的收敛域为  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

以下的例 2 并不是幂级数, 但可用幂级数的方法来确定其收敛域.

**例 2** 求以下级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

解 (1) 显然幂级数  $\sum y^n$  的收敛域为  $|y| < 1$ , 因此原级数的收敛域为  $|\ln x| < 1$ , 即  $e^{-1} < x < e$ .

(2) 令  $y=(1-x)/(1+x)$ , 易求出幂级数  $\sum y^n / (2n+1)$  的收敛域为  $-1 \leq y < 1$ . 因此原级数的收敛域为

$$-1 \leq \frac{1-x}{1+x} < 1,$$

解此不等式得原级数的收敛域为  $x > 0$ .

**例 3** 设幂级数(2)在  $x=-1$  与  $x=5$  条件收敛, 求其收敛域与  $x_0$ .

解 由定理 3, 使级数(2)条件收敛的点只能在收敛区间的端点上. 因此, 由已知条件知所求收敛域为  $[-1, 5]$ , 收敛半径  $R=[5 - (-1)]/2=3$ ,  $x_0=5-3=2$ .

结合定理 1 与 § 12.2 中定理 2,3 得出:

**定理 4** 设幂级数(1)的收敛半径  $R>0$ , 则可在区间  $(-R, R)$  内逐项微分或从 0 到  $x (|x| < R)$  逐项积分任意次, 且逐项微分或积分后所得之幂级数仍以  $R$  为收敛半径.

**证** 令  $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 只需证

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} (|x| < R); \quad (4)$$

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} (|x| < R), \quad (5)$$

且两式右端的幂级数仍以  $R$  为收敛半径.

首先, 直接由定理 1 与 § 12.2 定理 2 知式(5)成立; 由此也推出, 式(5)右端级数之收敛半径不小于  $R$ .

任取  $r \in (0, R)$  与  $x \in (-r, r)$ , 有  $n|x/r|^n \rightarrow 0$  (参考 § 4.2 例 3). 因此  $\exists M > 0$ ,  $\forall n \geq 0$ :  $n|x/r|^{n-1} \leq M$ . 于是

$$|na_n x^{n-1}| = n \left| \frac{x}{r} \right|^{n-1} |a_n r^{n-1}| \leq \frac{M}{r} |a_n r^n|,$$

可见  $\sum |na_n x^{n-1}|$  收敛. 因  $r$  可任意接近  $R$ , 故式(4)右端之级数收敛半径不小于  $R$ . 从而由定理 1 与 § 12.2 定理 3 知式(4)成立.

因逐项微分与逐项积分均不会缩小收敛半径, 而微分与积分是互逆的, 故逐项微分与积分不改变收敛半径.  $\square$

公式(4)对  $x = \pm R$  不适用: 即使  $\sum a_n x^n$  在  $x = R$  (或  $x = -R$ ) 收敛, 式(4)右端的级数也可能在  $x = R$  (或  $x = -R$ ) 发散, 如级数  $\sum x^{2n}/n$  在  $x = \pm 1$  就是如此. 不过, 若级数(1)在收敛区间端点  $x = R$  (或  $x = -R$ ) 收敛, 则式(5)对  $x = R$  (或  $x = -R$ ) 也成立.

定理 4 亦适用于级数(2), 只需将  $(-R, R)$  换成  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , 将  $\int_0^x$  换成  $\int_{x_0}^x$  即可.

### 12.3.2 展开函数为幂级数

鉴于幂级数有极其良好的性质, 将函数展开为幂级数的问题就有重要意义. 给定函数  $f(x)$ , 若在某个区间  $(x_0 - R, x_0 + R)$  内成立

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (6)$$

则说  $f(x)$  在  $(x_0 - R, x_0 + R)$  内可展开为幂级数, 且称式(6)为  $f(x)$  的幂级数展开式. 若式(6)成立, 则逐项微分  $n$  次得出

$$(6) \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(x-x_0)^{k-n},$$

其中  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ . 取  $x = x_0$  得

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n \quad \text{或} \quad a_n = f^{(n)}(x_0)/n!. \quad (7)$$

以式(7)代入(6)得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (|x-x_0| < R). \quad (8)$$

由此可见,如果  $f(x)$  能展开为幂级数,则其展开式必定有如(8)的形式. 这引导出以下定义:

**定义 1** 设  $f(x)$  在点  $x_0$  处任意次可微. 称由式(7)表示的  $a_n (n \geq 0)$  为  $f(x)$  在  $x_0$  的 Taylor 系数, 称式(8)右端的级数为  $f(x)$  在  $x_0$  的 Taylor 级数(当  $x_0 = 0$  时也称为 Maclaurin 级数).

必须强调指出, 定义 1 并未涉及 Taylor 级数的收敛性, 更未假定式(8)成立. 事实上,  $f(x)$  的 Taylor 级数即使收敛, 其和函数亦可能不等于  $f(x)$ . 下面就是一个例子.

**例 4** 设  $f(x) = \exp(-1/x^2) (x \neq 0)$ ,  $f(0) = 0$ , 则可证明  $f^{(n)}(0) = 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$ . 于是  $f(x)$  在  $x = 0$  的 Taylor 级数是

$$0 + 0 \cdot x + \cdots + \frac{0}{n!} x^n + \cdots,$$

它的和函数是零,而不是  $f(x)$ .

这就发生一个问题:  $f(x)$  应具备什么条件, 其 Taylor 级数才收敛于  $f(x)$ ?

设  $f(x)$  在  $(x_0 - R, x_0 + R)$  内任意次可微. 由 Taylor 定理, 对任何  $n \geq 1$  与  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \quad (9)$$

其中  $R_n(x)$  为余项, 在 Lagrange 形式下,

$$(10) \quad R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1},$$

其中  $\theta \in (0, 1)$ . 将式(8)与(9)对照看出, 展开式(8)成立的充要条件是式(9)中的余项  $R_n(x)$  满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (|x - x_0| < R). \quad (10)$$

下面据此来求出几个最常用的展开式.

**例 5** 证明  $f(x) = e^x$  在  $x=0$  有展开式:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (|x| < \infty). \quad (11)$$

证 由 Taylor 定理有

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (|x| < \infty),$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 因级数  $\sum x^n/n!$  的收敛半径为  $+\infty$  (见例 1), 故  $\forall x \in (-\infty, \infty)$ , 有  $x^n/n! \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ . 因此

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq e^{|x|} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

可见条件(10)满足, 从而展开式(11)成立.

**例 6** 证明:  $f(x) = \sin x$  在  $x=0$  有展开式

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|x| < \infty). \quad (12)$$

证 由 Taylor 定理有

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x \quad (|x| < \infty),$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 因

$$|R_{2n-1}(x)| = |R_{2n}(x)| \leq \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

故条件(10)满足, 从而展开式(12)成立.

**例 7** 对任意实常数  $\alpha$  有展开式

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x| < 1) \quad (13)$$

其中  $\binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n!$ , 约定  $\binom{\alpha}{0} = 1$ . 注意, 若  $\alpha = m$  为自然数, 则当  $n \leq m$  时  $\binom{m}{n} = C_m^n$ , 当  $n > m$  时  $\binom{m}{n} = 0$ . 可见此时式(13)与

熟知的“Newton 二项展开式”一致. 式(13)的证明较繁, 从略.

在式(13)中分别取  $\alpha = -1, 1/2, -1/2$ , 从而得到:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (|x| < 1); \quad (14)$$

$$(11) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n \quad (|x| \leq 1); \quad (15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \quad (-1 < x \leq 1). \quad (16)$$

注 1 若  $0 < R < \infty$ , 在  $(-R, R)$  内有展开式:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

且当  $x=R$  (或  $x=-R$ ) 时上式右端(左端)收敛,  $f(x)$  在  $(-R, R]$  (或  $[-R, R)$ ) 上连续, 则必有  $f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  (或  $f(-R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ ). 上面的展开式(15), (16) 已用到这一点.

将已知的展开式(11)~(13)进行适当组合, 或逐项微分与积分, 可求得更多的展开式. 展开函数为幂级数的问题, 主要通过这种间接途径解决. 试看以下例题.

例 8 在  $x=0$  展开  $\frac{1}{(1-x)^2}, \cos x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$  为幂级数.

解 由式(14)有  $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$ , 于是

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad (|x| < 1).$$

利用式(12)得

$$(17) \quad \cos x = (\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x| < \infty).$$

利用式(11)得

$$(18) \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x| < \infty);$$

$$(19) \quad \operatorname{sh} x = (\operatorname{ch} x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|x| < \infty).$$

例 9 求函数  $\ln(1+x)$  与  $\arctan x$  在  $x=0$  的幂级数展开式.

解 当  $|x|<1$  时利用式(14)并逐项积分得:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}; \quad (20)$$

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned} \quad (21)$$

由注 1, 式(20)在  $x=1$ , 式(21)在  $x=\pm 1$  也成立.

例 10 求  $f(x)$  在  $x=0$  的幂级数展开式, 若

$$(1) f(x)=1/(2+x-x^2); \quad (2) f(x)=\sin^2 x;$$

$$(3) f(x)=x \ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

解 (1) 分解为部分分式后再套用(14):

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-(x/2)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left[ (-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^n \quad (|x|<1).\end{aligned}$$

(2) 利用倍角公式与式(17):

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x|<\infty).\end{aligned}$$

(3) 首要的考虑是通过求导化简  $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ :

$$\begin{aligned}f(x) &= x \int_0^x [\ln(t+\sqrt{t^2+1})]' dt = x \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \\ &= x \int_0^x \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt\end{aligned}$$

$$=x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \quad (|x| \leq 1).$$

设幂级数  $\sum a_n x^n$  与  $\sum b_n x^n$  的收敛半径分别为  $R_1, R_2$ ,  $R = \min\{R_1, R_2\} > 0$ , 则两级数都在  $(-R, R)$  内绝对收敛. 于是由级数乘法规则(§ 12.1(10))有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k+l=n} a_k b_l \right) x^n \quad (|x| < R). \quad (22)$$

利用公式(22)可求出某些展开式.

**例 11** 求  $f(x) = e^x / (1-x)$  在  $x=0$  的幂级数展开式.

解 利用公式(22)及(11), (14)有:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{k!}, \quad b_l = 1, \\ f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k+l=n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \right) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) x^n \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

由于乘积级数的系数  $\sum_{k+l=n} a_k b_l$  难以化简, 故公式(22)的应用很受限, 通常应优先考虑其他方法. 例如对  $f(x) = \sin 2x \cos x$ , 最好化为  $(\sin 3x + \sin x)/2$ , 然后套用公式(12), 而不宜用级数乘法.

只需用代换  $x = x_0 + t$  (即  $t = x - x_0$ ), 就可将求在  $x = x_0$  的展开式转化为求在  $t = 0$  的展开式. 看一个例子.

**例 12** 求  $\ln x$  在  $x=3$  处的幂级数展开式.

解 令  $x = 3 + t$ , 则

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln(3+t) = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{t}{3}\right) \\ &= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{t}{3}\right)^n \quad \left(-1 < \frac{t}{3} \leq 1\right) \\ &= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 3^n} (x-3)^n \quad (0 < x \leq 6). \end{aligned}$$

一旦熟练之后, 可不必明显写出代换  $x = x_0 + t$ .

### 12.3.3 级数求和

本小节主要考虑幂级数的求和, 不过所用的某些方法(如逐项微分与积分)亦可用于其他类型级数的求和.

“幂级数求和”与“求幂级数展开式”可看作是一对互逆的运算. 鉴于此, 每个求展开式的方法倒过来用时就是一个求和的方法. 特别, 每个展开式倒过来用时就是一个求和公式. 例如, 由式(11)得到求和公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad (|x| < \infty).$$

展开式(12)~(21)都可如此使用. 将已知的求和公式进行适当的组合, 或运用逐项微分与积分, 就可获得更多的求和公式. 试看下面的例子.

**例 13** 求以下级数的和函数  $S(x)$ :

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} nx^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n nx^{2n+1}.$$

解 此题可以利用求和公式  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x) \quad (|x| < 1)$ .

$$\begin{aligned} (1) S(x) &= x \left( \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) = x \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' \\ &= x \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

(2) 利用  $n^2 = (n+1)n - n$ :

$$\begin{aligned} S(x) &= x \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)nx^{n-1} - x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= x \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \right)'' - x \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' \\ &= x \left( \frac{1}{1-x} - 1 - x \right)'' - x \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right)' \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

(3) 利用(1)的结果:

$$S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} n(-x^2)^n = \frac{-x^3}{(1+x^2)^2} \quad (|x| < 1).$$

**例 14** 求下列级数的和函数  $S(x)$ :

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}; \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}; \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

解 (1) 利用公式(20):

$$S(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-x^2)^n}{n} = -\ln(1-x^2) \quad (|x| < 1).$$

(2) 利用分解式  $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$  及式(20):

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + x = (x-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + x \\ &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-x)^n}{n} + x \\ &= (1-x) \ln(1-x) + x \quad (-1 \leq x < 1). \end{aligned} \quad (1)$$

其次, 当  $x=1$  时可直接求出

$$S(1) = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

(3) 当  $x \neq 0$  时, 有

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} dt = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} \\ &= \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1, x \neq 0). \end{aligned}$$

其次, 直接看出  $S(0)=1$ .

**例 15** 求下列级数的和函数  $S(x)$ :

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+1)}{n! 2^n} x^n.$$

解 当系数分母含  $n!$  时通常套用公式(11).

$$(1) S(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = x \exp(-x^2) \quad (|x| < \infty).$$

(2) 利用  $n^2 = n(n-1) + n$ :

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)+n+1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\
 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-2} \\
 &\quad + \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\
 &= \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1\right) e^{x/2} \quad (|x| < \infty).
 \end{aligned}$$

**例 16** 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{2n}$  的和函数  $S(x)$ .

解 令  $y = (1+x)/(1-x)$ . 先求出

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} y^{2n} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} y^{2n} + \frac{y}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{2n-1}}{2n-1} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-y^2} - 1 \right) + \frac{y}{2} \int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} dt \\
 &= \frac{y^2}{2(1-y^2)} + \frac{y}{2} \int_0^y \frac{dt}{1-t^2} \\
 &= \frac{y^2}{2(1-y^2)} + \frac{y}{4} \ln \frac{1+y}{1-y} \quad (|y| < 1),
 \end{aligned}$$

由  $-1 < y = (1+x)/(1-x) < 1$  解出  $x < 0$ , 以  $y = (1+x)/(1-x)$  代入得

$$S(x) = -\frac{(1+x)^2}{4x} - \frac{1+x}{4(1-x)} \ln|x| \quad (x < 0).$$

**例 17** 求级数  $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$  的和函数.

解 令  $y = x^2$ , 先求出级数  $1 + \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} + \dots + \frac{y^n}{(2n)!} + \dots$  的收敛半径  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} = +\infty$ , 故原级数的收敛半径亦为  $+\infty$ , 收敛域

为  $(-\infty, +\infty)$ . 设所求和函数为  $S(x)$ , 则

$$S'(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad (2)$$

$$S''(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots, \quad (3)$$

故有  $S''(x) = S(x)$ , 求解该方程得

$$S(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

又  $S(0) = 1, S'(0) = 0$ , 可确定  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ , 从而有

$$S(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

在求和公式  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$  中代以  $x$  的适当特殊值, 可得出一定数项级数的和.

例 18 求  $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n(n+1) 2^{-n}$ .

解 首先注意

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n x^n \Big|_{x=-1/2},$$

于是

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \right)'' \Big|_{x=-1/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} - 1 - x \right)'' \Big|_{x=-1/2} \\ &= -\frac{1}{(1-x)^3} \Big|_{x=-1/2} = -\frac{8}{27}. \end{aligned}$$



### 习题 12.3

1. 求下列级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} x^{n-1};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (x+1)^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 4^n} (x-5)^{2n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) (x+2)^n;$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} (a>0, b>0);$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n};$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left( \frac{x}{2x+1} \right)^n.$$

2. 将下列函数在指定点  $x_0$  处展开为幂级数:

$$(1) f(x) = \frac{1}{3-x}, x_0 = -1; \quad (2) f(x) = \frac{x}{x^2+x-2}, x_0 = 0;$$

$$(3) f(x) = \ln(1-x-2x^2), x_0 = 0;$$

$$(4) f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3+x^4), x_0 = 0;$$

$$(5) f(x) = (x+1)2^x, x_0 = 0;$$

$$(6) f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x-1}{x} \right), x_0 = 0;$$

$$(7) f(x) = \int_0^x \sin t^2 dt, x_0 = 0;$$

$$(8) f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}, x_0 = 0;$$

$$(9) f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}, x_0 = 0;$$

$$(10) f(x) = \frac{1}{x^2}, x_0 = 2.$$

3. 求下列幂级数的收敛域与和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{2n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}(x-1)^{2n-2};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1}; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}x^n;$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n}; \quad (8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1};$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}x^{2n+1}; \quad (10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{n3^n}x^n;$$

$$(11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}x^{2n}; \quad (12) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

4. 求下列数项级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2-n+1}{2^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}; \quad (4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}.$$

5. 求  $\cos 10^\circ$  的近似值, 使误差不超过  $10^{-4}$ .

6. 求  $\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx$  的近似值, 使误差不超过  $10^{-3}$ .  $\int_0^{\pi} \sin \frac{l}{x} dx = \frac{1}{x} \left[ -\cos \frac{l}{x} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{x} (\cos 0 - \cos \frac{l}{\pi}) = \frac{1}{x} (1 - \cos \frac{l}{\pi})$  (8)

: 奇数项系数为零, 等于零的项数不等于 3

## § 12.4 Fourier 级数

本节主要考虑形如

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

的三角级数, 所得结论自然地推广到更一般的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (2)$$

如同幂级数一样, 三角级数也是表示函数的重要工具. 而且, 三角级数可以表示可微性程度不高的函数, 而级数的各项又是周期函数, 因而具有特殊的价值.

### 12.4.1 Fourier 级数及其收敛性

设  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上可积. 若在  $[-\pi, \pi]$  上成立

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (3)$$

且右端之级数一致收敛, 则右端各项同乘以  $\cos mx$  或  $\sin mx$  后仍一致收敛. 于是可逐项积分:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx = \pi a_0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) dx = \pi a_m;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx) dx = \pi b_m,$$

其中  $m=1, 2, \dots$ . 以上三式的计算用到以下结果:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases}$$

其中  $m, n = 1, 2, \dots$ . 以上结果不难通过直接计算验证(该结果表明函数系  $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$  为“正交系”. 关于正交系将在后续课程中详细讨论). 于是, 我们得到:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx (n = 1, 2, \dots). \end{array} \right. \quad (4)$$

**定义 1** 若  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积, 则称由式(4)表示的  $a_n, b_n$  为  $f(x)$  的 Fourier 系数. 当  $a_n, b_n$  是  $f(x)$  的 Fourier 系数时, 称级数(1)为  $f(x)$  的 Fourier 级数, 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (5)$$

读者当已注意到, 此处所用的导入法与 Taylor 级数的导入颇为类似: 只要  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积, 就可以定义它的 Fourier 级数. 至于这个 Fourier 级数是否收敛于  $f(x)$ , 甚至是否收敛, 都完全未作定论. 能够肯定的是, 若在  $[-\pi, \pi]$  上展开式(3)成立且右端级数一致收敛, 则(3)之右端必为  $f(x)$  的 Fourier 级数.

于是如同对 Taylor 级数一样, 必须解决以下问题: 在什么条件下  $f(x)$  的 Fourier 级数收敛于  $f(x)$ ? 为此引进以下术语.

**定义 2** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有定义. 若

(1)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续或只有有限个第一类间断点,

(2)  $f(x)$  在  $(a, b)$  内至多有有限个极值点,

则说  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足 Dirichlet 条件.

**定理 1** 若  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上满足 Dirichlet 条件, 则它的 Fourier 级数处处收敛, 其和函数  $S(x)$  是以  $2\pi$  为周期的函数, 它在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式为:

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 连续}, \\ \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, & x \in (-\pi, \pi) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 间断}, \\ \frac{f((-\pi)^+) + f(\pi^-)}{2}, & x = \pm \pi. \end{cases} \quad (6)$$

定理的证明已超出本课程的范围,从略.

定理 1 表明,即使  $f$  满足 Dirichlet 条件,也仅在  $f$  的连续点才可将式(5)中的符号“~”换成等号,因而一般不可将和函数  $S(x)$  等同于  $f(x)$ . 而且,无论  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  之外是否有定义,或  $f(x)$  是否为周期函数,只要  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上满足 Dirichlet 条件,它的 Fourier 级数就存在且处处收敛,其和函数  $S(x)$  是  $(-\infty, \infty)$  上以  $2\pi$  为周期的函数. 当然,在  $[-\pi, \pi]$  之外谈不上  $S(x) = f(x)$ ,除非  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数. 另外,此处并不要求  $f(x)$  可微,较之 Taylor 级数展开式的要求低很多.

### 12.4.2 展开函数为 Fourier 级数

现在考虑求函数 Fourier 展开式的具体步骤. 问题的典型提法是:

给定函数  $f(x)$  (它在  $[-\pi, \pi]$  或更大的区间上有定义,并不要求它是以  $2\pi$  为周期的函数),在区间  $[-\pi, \pi]$  上展开  $f(x)$  为 Fourier 级数.

问题的解答应包括两部分:(A) 依公式(4)求出 Fourier 系数  $a_n$ ,  $b_n$  并写出式(5);(B) 依公式(6)写出所得 Fourier 级数之和函数  $S(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式. 至于  $f(x)$  是否满足 Dirichlet 条件,在具体问题中往往显而易见,无需特别提及.

**例 1** 设  $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$  在  $[-\pi, \pi]$  上展开  $f(x)$  为 Fourier 级数.

**解** 直接应用公式(4)得:  

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx$$

$$= \left( \frac{x \sin nx}{n\pi} + \frac{\cos nx}{n^2\pi} \right) \Big|_0^\pi = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} (n \geq 1);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx$$

$$= \left( \frac{-x \cos nx}{n\pi} + \frac{\sin nx}{n^2\pi} \right) \Big|_0^\pi = \frac{(-1)^{n-1}}{n} (n \geq 1).$$

因  $f(x)$  在  $(-\pi, \pi)$  内连续,  $[f((-\pi)^+) + f(\pi^-)]/2 = \pi/2$ , 故

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \right] \\ &= \begin{cases} f(x), & |x| < \pi, \\ \pi/2, & |x| = \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

上例中 Fourier 级数之和函数  $S(x)$  的图形如图 12-4.

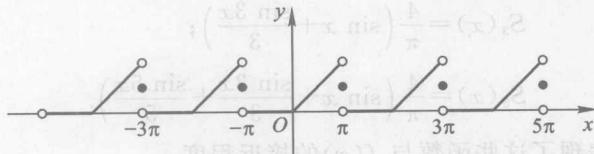


图 12-4

若  $f(x)$  是  $[-\pi, \pi]$  上的奇函数, 则  $f(x)\cos nx$  与  $f(x)\sin nx (n \geq 0)$  在  $[-\pi, \pi]$  上分别为奇函数与偶函数. 于是由公式(4)有

$$a_n = 0, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx (n \geq 0); \quad (7)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (8)$$

类似地, 若  $f(x)$  是  $[-\pi, \pi]$  上的偶函数, 则

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx, b_n = 0 (n \geq 0); \quad (9)$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (10)$$

式(8)与(10)中的级数分别称为正弦级数与余弦级数.

例 2 设  $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$  在  $[-\pi, \pi]$  上展开  $f(x)$  为 Fourier 级数.

解 只要改  $f(0)$  为 0 (这一改动不影响由积分算出的 Fourier 系数),  $f(x)$  就是奇函数. 因此由式(7)有

$$a_n = 0(n \geq 0), b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx dx = \frac{2[1 - (-1)^n]}{n\pi} (n \geq 1);$$

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} f(x), & 0 < |x| < \pi, \\ 0, & x = 0, \pm \pi. \end{cases}$$

若以  $S_n(x)$  记上式中级数的部分和, 则

$$S_1(x) = \frac{4}{\pi} \sin x;$$

$$S_3(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right);$$

$$S_5(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right).$$

图 12-5 表现了这些函数与  $f(x)$  的接近程度.

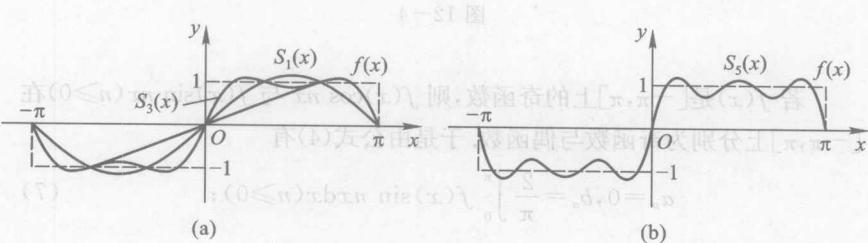


图 12-5

(9) 值得注意的是, 对于奇函数  $f(x)$ , 无论  $f(0), f(\pm\pi)$  的值如何, 恒有  $S_n(0) = S(0) = S_n(\pm\pi) = S(\pm\pi) = 0(n \geq 1)$ .

例 3 在  $[-\pi, \pi]$  上展开  $f(x) = x^2$  为 Fourier 级数.

解 因  $f(x)$  是偶函数, 故用公式(9), (10),

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left( x^2 \sin nx + \frac{2x \cos nx}{n} - \frac{2 \sin nx}{n^2} \right) \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2};$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \quad (|x| \leq \pi). \quad (11)$$

在上式中依次令  $x=0, \pi$ , 得出重要的求和公式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (12)$$

上例中 Fourier 级数的和函数  $S(x)$  之图形如图 12-6. 注意  $S(x)$  是  $(-\infty, \infty)$  上的连续周期函数, 仅在  $[-\pi, \pi]$  上  $S(x) = x^2$ .

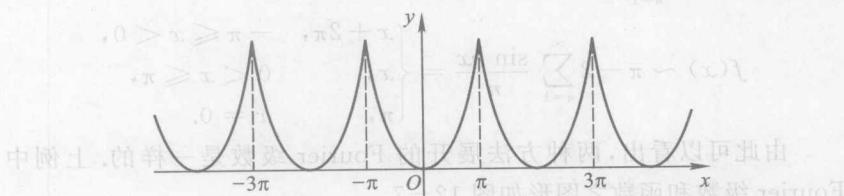


图 12-6

**例 4** 设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的函数, 在  $[0, 2\pi]$  上  $f(x) = x$ . 在  $[0, 2\pi]$  上展开  $f(x)$  为 Fourier 级数.

**解** 此例虽未给出  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式, 但  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期这一条件使我们可将公式(4)中的积分区间换成  $[0, 2\pi]$ . 于是

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx = 0 \quad (n \geq 1);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n} \quad (n \geq 1).$$

因此

$$f(x) \sim \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} x, & 0 < x < 2\pi, \\ \pi, & x = 0, 2\pi. \end{cases}$$

此题也可以将  $f(x)$  展开于  $[-\pi, \pi]$  上: 利用周期性写出  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式(观察图 12-7):

$$(11) \quad f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

为计算方便, 我们将  $f(x)$  纵向平移  $\pi$  个单位. 这样  $f(x) - \pi$  在  $[-\pi, \pi]$  上为奇函数. 算出

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi) \sin nx dx = -\frac{2}{n},$$

得  $f(x) - \pi \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ . 于是

$$f(x) \sim \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 < x \leq \pi, \\ \pi, & x = 0. \end{cases}$$

由此可以看出, 两种方法展开的 Fourier 级数是一样的. 上例中 Fourier 级数和函数之图形如图 12-7.

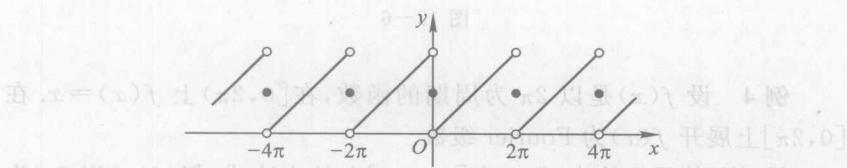


图 12-7

在某些特殊情况下, 不用直接计算 Fourier 系数, 就可以得出 Fourier 展开式. 下例就是如此.

例 5 求  $f(x) = 4\sin^2 x(1 + \sin x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的 Fourier 展开式.

解 由三角公式有

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(1 - \cos 2x)(1 + \sin x) \\ &= 2 + 2\sin x - 2\cos 2x - 2\cos 2x \sin x \\ &= 2 + 3\sin x - 2\cos 2x - \sin 3x, \end{aligned}$$

这就是所要求的 Fourier 展开式, 它仅含有限个非零项.

### 12.4.3 Fourier 级数的其他形式

式(3)是标准的 Fourier 展开式. 在实际问题中, 还需用到某些其他形式的 Fourier 展开式, 这些形式均可通过适当途径从标准形式转化过来.

假定下面所涉及的函数都在所讨论的区间上满足 Dirichlet 条件.

问题 1 在  $[0, \pi]$  上展开  $f(x)$  为正弦级数.

分析 正弦级数只能表示奇函数, 因此作  $f(x)$  的奇延拓  $F(x)$ :

$$(M) \quad F(x) = \begin{cases} -f(-x), & -\pi < x < 0, \\ f(x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

所求的正弦展开式实际上是  $F(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的 Fourier 展开式, 因此可用公式(7), (8).

解法 依公式(7)求出  $b_n$ , 然后写出结果:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \\ &= \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 连续,} \\ \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, & x \in (0, \pi) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 间断,} \\ 0, & x = 0, \pi. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

注意, 具体演算时并不要写出奇延拓  $F(x)$ .

例 6 在  $[0, \pi]$  上展开  $f(x) = x + 1$  为正弦级数.

解 直接应用公式(7)得

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x + 1) \sin nx dx$$

$$=\left[ -\frac{2(x+1)\cos nx}{n\pi} + \frac{2\sin nx}{n^2\pi} \right] \Big|_0^\pi$$

$$=\frac{2}{n\pi} [1-(\pi+1)(-1)^n] \quad (n \geq 1).$$

于是依式(13)有

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(\pi+1)(-1)^n}{n} \sin nx$$

$$= \begin{cases} x+1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x=0, \pi. \end{cases}$$

**问题 2** 在  $[0, \pi]$  上展开  $f(x)$  为余弦级数.

**解法** 类似于问题 1, 只需直接应用公式(9)求出  $a_n$  ( $n \geq 0$ ), 然后即可写出:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$= \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 连续,} \\ \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, & x \in (0, \pi) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 间断,} \\ f(0^+), & x=0, \\ f(\pi^-), & x=\pi. \end{cases} \quad (14)$$

**例 7** 在  $[0, \pi]$  上展开  $f(x)=x+1$  为余弦级数.

**解** 依公式(9)有

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x+1) dx = \pi + 2;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x+1) \cos nx dx$$

$$= \left[ \frac{2(x+1)\sin nx}{n\pi} + \frac{2\cos nx}{n^2\pi} \right] \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi} \quad (n \geq 1).$$

于是依式(14)有

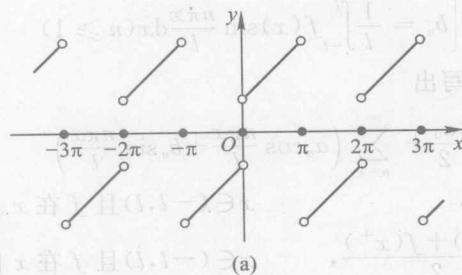
$$f(x) = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

在上式中取  $x=0$  得到一个有用的求和公式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (15)$$

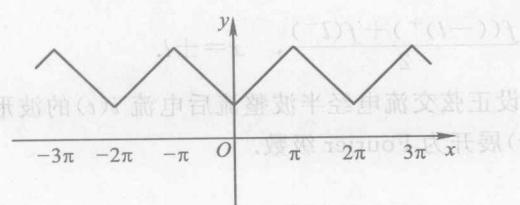
以上两例所得展开式的和函数之图形分别绘于图 12-8 的(a), (b) 中。注意两者在  $(0, \pi)$  内表同一函数，而在  $(0, \pi)$  之外相差甚远。

(a)



(a)

(b)



(b)

图 12-8

**问题 3** 在  $[-l, l]$  ( $l > 0$ ) 上展开  $f(x)$  为形如(2)的级数(称之为  $f(x)$  在  $[-l, l]$  上的 Fourier 级数)。

**分析** 若令  $x = lt/\pi$  并记  $\varphi(t) = f(lt/\pi)$ , 则在  $[-\pi, \pi]$  上

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

以  $t = \pi x/l$  代回  $x$ , 即得所要的展开式.

(a) 解法 直接依公式

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx (n \geq 0), \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx (n \geq 1) \end{cases} \quad (16)$$

求出  $a_n, b_n$ , 然后写出

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$= \begin{cases} f(x), & x \in (-l, l) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 连续}, \\ \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, & x \in (-l, l) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 间断}, \\ \frac{f((-l)^+) + f(l^-)}{2}, & x = \pm l. \end{cases} \quad (17)$$

例 8 设正弦交流电经半波整流后电流  $i(t)$  的波形如图 12-9 所示, 试将  $i(t)$  展开为 Fourier 级数.

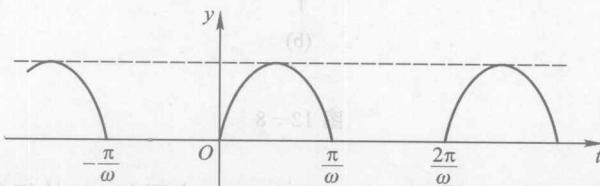


图 12-9

解 问题为求  $i(t)$  在  $[-l, l]$  上的 Fourier 展开式,  $l = \pi/\omega$ . 因

$$i(t) = \begin{cases} 0, & -l \leq t < 0, \\ I_m \sin \omega t, & 0 \leq t \leq l, \end{cases}$$

故依公式(16)有

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} I_m \sin \omega t \, dt = \frac{2I_m}{\pi}; \\
 a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} I_m \sin \omega t \cos n\omega t \, dt \\
 &= \frac{\omega I_m}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [\sin((n+1)\omega t) - \sin((n-1)\omega t)] \, dt \\
 &= \begin{cases} 0, & n=1, \\ \frac{[(-1)^{n-1} - 1]I_m}{(n^2-1)\pi}, & n \geq 2; \end{cases} \\
 b_n &= \frac{\omega I_m}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} \sin \omega t \sin n\omega t \, dt \\
 &= \frac{\omega I_m}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [\cos((n-1)\omega t) - \cos((n+1)\omega t)] \, dt \\
 &= \begin{cases} I_m/2, & n=1, \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

于是依式(17)有(注意  $i(t)$  处处连续且以  $2\pi/\omega$  为周期)

$$i(t) = \frac{I_m}{\pi} + \frac{I_m \sin \omega t}{2} - \frac{2I_m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega t}{4n^2-1} \quad (|t|<\infty).$$

在  $[0, l]$  上展开  $f(x)$  为正弦级数或余弦级数的问题完全类似于问题 1 或 2, 即依公式

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n \geq 1) \quad (18)$$

或

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n \geq 0) \quad (19)$$

求出  $b_n$  或  $a_n$ , 然后写出

$$\begin{aligned}
 f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \\
 &= \begin{cases} f(x), & x \in (0, l) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 连续,} \\ \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, & x \in (0, l) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 间断,} \\ 0, & \text{出界 } x=0, l \text{ 时.} \end{cases} \quad (20)
 \end{aligned}$$

或

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$
$$= \begin{cases} f(x), & x \in (0, l) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 连续,} \\ \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, & x \in (0, l) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 间断,} \\ f(0^+), & x = 0, \\ f(l^-), & x = l. \end{cases} \quad (21)$$

例 9 设  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$  在  $[0, 2]$  上展开  $f(x)$  为正弦级数.

解 取  $l=2$ , 应用公式(18)得

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} (n \geq 1).$$

因  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续且  $f(0)=f(2)=0$ , 故由式(20)有

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} \quad (0 \leq x \leq 2).$$

问题 4 在  $[a, b]$  ( $a < b$ ) 上展开  $f(x)$  为 Fourier 级数.

分析 令  $2l=b-a$ , 则  $f(x)$  能以唯一的方式延拓为  $(-\infty, \infty)$  上的周期函数  $F(x)$ , 周期为  $2l$ . 由(17), 有

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

其中  $a_n, b_n$  依式(16). 以  $l=(b-a)/2$  代入上式右端, 即得  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的 Fourier 展开式.

解法 直接依公式(它由式(16)导出)

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx & (n \geq 0), \\ b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx & (n \geq 1) \end{cases} \quad (22)$$

求出  $a_n, b_n$ , 然后写出

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a} \right)$$

$$= \begin{cases} f(x), & x \in (a, b) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 连续}, \\ \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, & x \in (a, b) \text{ 且 } f \text{ 在 } x \text{ 间断}, \\ \frac{f(a^+) + f(b^-)}{2}, & x = a, b. \end{cases} \quad (23)$$

例 10 在  $[1, 3]$  上展开  $f(x) = x$  为 Fourier 级数.

解 I 直接用公式(22)得

$$a_0 = \int_1^3 x dx = 4; \quad (1)$$

$$a_n = \int_1^3 x \cos n\pi x dx = 0; \quad (2)$$

$$b_n = \int_1^3 x \sin n\pi x dx = \frac{2(-1)^{n-1}}{n\pi}; \quad (3)$$

于是由式(23)有

$$f(x) \sim 2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin n\pi x}{n} = \begin{cases} x, & 1 < x < 3, \\ 2, & x = 1, 3. \end{cases} \quad (24)$$

解 II 将  $f(x)$  延拓为以 2 为周期的函数  $F(x)$ , 则在  $(-1, 1)$  上  $F(x) = x + 2$  (观察图 12-10). 因在  $[-1, 1]$  上

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \quad b_n = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \frac{2(-1)^{n-1}}{n\pi},$$

故

$$F(x) \sim 2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin n\pi x}{n},$$

这同样得出式(24).

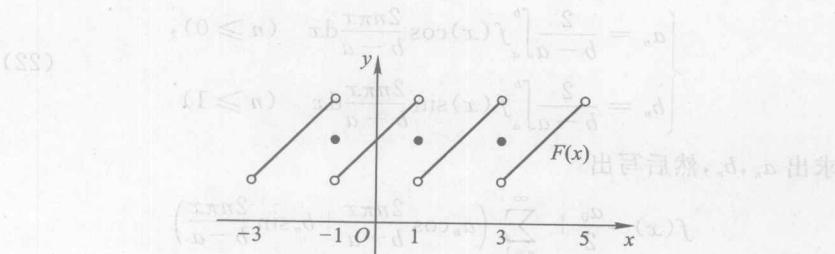


图 12-10



## 习题 12.4

1. 将下列函数展开成周期为  $2\pi$  的 Fourier 级数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |x| \leq \pi; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

并求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$  之和;

$$(4) f(x) = |\sin x|; \quad (5) f(x) = (\pi - x)/2, 0 \leq x \leq 2\pi.$$

2. 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的函数, 且在  $[-\pi, \pi]$  上满足 Dirichlet 条件. 证明: 若  $f(x-\pi) = f(x)$ , 则  $f(x)$  的 Fourier 系数  $a_{2n-1} = 0, b_{2n-1} = 0 (n=1, 2, \dots)$ .

3. 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx (-\pi \leq x \leq \pi)$ , 且  $\pi - x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx (0 < x \leq \pi)$ . 求  $b_n$  及  $S(x)$ .

4. 设  $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq \pi$ .

(1) 将  $f(x)$  展成周期为  $2\pi$  的正弦级数;

(2) 若将  $f(x)$  展成周期为  $\pi$  的 Fourier 级数, 记其和函数为  $S(x)$ , 求  $S(0), S(\pi)$ .

5. 设  $f(x) = x - 1 (0 \leq x \leq 2)$ , 分别展成周期为 4 的余弦级数与正弦级数.

6. 将  $f(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \leq x \leq 4, \\ x-6, & 4 < x \leq 8 \end{cases}$  展成周期为 8 的 Fourier 级数.

7. 将  $f(x) = 10 - x$  ( $5 \leq x \leq 15$ ) 展成周期为 10 的 Fourier 级数.

8. 将周期函数  $f(x) = x - [x]$  展成 Fourier 级数.

## 第八章

### § 8. 题目

8. 面平  $\pi$  干关:  $(\bar{c}, \bar{b}+, \bar{e}+)$ , 面平  $\pi$  干关:  $(\bar{c}-, \bar{b}-, \bar{e}-)$ , 面平  $\pi$  干关:  $(\bar{c}, \bar{b}-, \bar{e}-)$ , 面平  $\pi$  干关:  $(\bar{c}-, \bar{b}+, \bar{e}+)$ , 面平  $\pi$  干关:  $(\bar{c}-, \bar{b}-, \bar{e}+)$ , 面平  $\pi$  干关:  $(\bar{c}, \bar{b}+, \bar{e}-)$ , 面平  $\pi$  干关:  $(\bar{c}-, \bar{b}+, \bar{e}+)$ .

9.  $\sqrt{2}\bar{v}\bar{s}$ ,  $\sqrt{2}\bar{v}\bar{s}$ ,  $\sqrt{2}\bar{v}\bar{s}$  式限长离强解: 面平  $\pi$ , 面平  $\pi$  点题是  $\Delta$ ,  $\Delta$ .

10.  $(\bar{c}-, \bar{b}, 0)$ ,  $(\bar{c}, \bar{b}+, 0)$ ,  $(\bar{c}, \bar{b}-, 0)$ ,  $(\bar{c}-, \bar{b}+, 0)$ .

### § 8. 题目

$$\frac{\bar{a}-\bar{d}}{8}, \frac{\bar{d}+\bar{a}}{8}, \frac{\bar{d}-\bar{a}}{8}, \frac{\bar{d}+\bar{a}}{8} = 1$$

$$\left\{ \frac{\bar{v}\bar{s}\bar{v}}{8}, \frac{\bar{v}\bar{s}\bar{v}}{8}, \frac{\bar{v}\bar{s}\bar{v}}{8} \right\}, \frac{\bar{v}\bar{s}\bar{v}}{8} = \sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{8} = \sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$(\bar{c}-, \bar{b}, 0), (\bar{c}, \bar{b}+, 0)$$

11.  $(\bar{c}1, \bar{v}1, \bar{s}1, 0)$ ,  $(0, \bar{v}1, 11, 0)$  点面迎枝,  $\bar{v}1, \bar{s}1+$ ,  $\bar{v}1\bar{s}1 = 1$ ,  $\bar{v}1\bar{s}1 = 0$ .

$$(\bar{v}1\bar{s}1, 0, \bar{v}1\bar{s}1)$$

$$\bar{v}1\bar{s}1 + \bar{v}1 = \sqrt{2} \cos \bar{v}1, \bar{v}1\bar{s}1 = \sqrt{2} \cos \bar{s}1, \bar{v}1\bar{s}1 = \sqrt{2} \cos \bar{s}1$$

### § 8. 题目

$$\bar{v}1 \pm \bar{v}2, \bar{v}1 \pm \bar{v}3, \bar{v}1 \pm \bar{v}4, \bar{v}1 \pm \bar{v}5, \bar{v}1 \pm \bar{v}6, \bar{v}1 \pm \bar{v}7, \bar{v}1 \pm \bar{v}8, \bar{v}1 \pm \bar{v}9, \bar{v}1 \pm \bar{v}10, \bar{v}1 \pm \bar{v}11, \bar{v}1 \pm \bar{v}12, \bar{v}1 \pm \bar{v}13, \bar{v}1 \pm \bar{v}14, \bar{v}1 \pm \bar{v}15, \bar{v}1 \pm \bar{v}16, \bar{v}1 \pm \bar{v}17, \bar{v}1 \pm \bar{v}18, \bar{v}1 \pm \bar{v}19, \bar{v}1 \pm \bar{v}20$$

$$(\bar{v}1, \bar{v}2, \bar{v}3, \bar{v}4, \bar{v}5, \bar{v}6, \bar{v}7, \bar{v}8, \bar{v}9, \bar{v}10, \bar{v}11, \bar{v}12, \bar{v}13, \bar{v}14, \bar{v}15, \bar{v}16, \bar{v}17, \bar{v}18, \bar{v}19, \bar{v}20)$$

$$(\bar{v}1 \pm \bar{v}2, \bar{v}1 \pm \bar{v}3, \bar{v}1 \pm \bar{v}4, \bar{v}1 \pm \bar{v}5, \bar{v}1 \pm \bar{v}6, \bar{v}1 \pm \bar{v}7, \bar{v}1 \pm \bar{v}8, \bar{v}1 \pm \bar{v}9, \bar{v}1 \pm \bar{v}10, \bar{v}1 \pm \bar{v}11, \bar{v}1 \pm \bar{v}12, \bar{v}1 \pm \bar{v}13, \bar{v}1 \pm \bar{v}14, \bar{v}1 \pm \bar{v}15, \bar{v}1 \pm \bar{v}16, \bar{v}1 \pm \bar{v}17, \bar{v}1 \pm \bar{v}18, \bar{v}1 \pm \bar{v}19, \bar{v}1 \pm \bar{v}20)$$

$$(\bar{v}1 \pm \bar{v}2, \bar{v}1 \pm \bar{v}3, \bar{v}1 \pm \bar{v}4, \bar{v}1 \pm \bar{v}5, \bar{v}1 \pm \bar{v}6, \bar{v}1 \pm \bar{v}7, \bar{v}1 \pm \bar{v}8, \bar{v}1 \pm \bar{v}9, \bar{v}1 \pm \bar{v}10, \bar{v}1 \pm \bar{v}11, \bar{v}1 \pm \bar{v}12, \bar{v}1 \pm \bar{v}13, \bar{v}1 \pm \bar{v}14, \bar{v}1 \pm \bar{v}15, \bar{v}1 \pm \bar{v}16, \bar{v}1 \pm \bar{v}17, \bar{v}1 \pm \bar{v}18, \bar{v}1 \pm \bar{v}19, \bar{v}1 \pm \bar{v}20)$$

$$(\bar{v}1 \pm \bar{v}2, \bar{v}1 \pm \bar{v}3, \bar{v}1 \pm \bar{v}4, \bar{v}1 \pm \bar{v}5, \bar{v}1 \pm \bar{v}6, \bar{v}1 \pm \bar{v}7, \bar{v}1 \pm \bar{v}8, \bar{v}1 \pm \bar{v}9, \bar{v}1 \pm \bar{v}10, \bar{v}1 \pm \bar{v}11, \bar{v}1 \pm \bar{v}12, \bar{v}1 \pm \bar{v}13, \bar{v}1 \pm \bar{v}14, \bar{v}1 \pm \bar{v}15, \bar{v}1 \pm \bar{v}16, \bar{v}1 \pm \bar{v}17, \bar{v}1 \pm \bar{v}18, \bar{v}1 \pm \bar{v}19, \bar{v}1 \pm \bar{v}20)$$

$$(\bar{v}1 \pm \bar{v}2, \bar{v}1 \pm \bar{v}3, \bar{v}1 \pm \bar{v}4, \bar{v}1 \pm \bar{v}5, \bar{v}1 \pm \bar{v}6, \bar{v}1 \pm \bar{v}7, \bar{v}1 \pm \bar{v}8, \bar{v}1 \pm \bar{v}9, \bar{v}1 \pm \bar{v}10, \bar{v}1 \pm \bar{v}11, \bar{v}1 \pm \bar{v}12, \bar{v}1 \pm \bar{v}13, \bar{v}1 \pm \bar{v}14, \bar{v}1 \pm \bar{v}15, \bar{v}1 \pm \bar{v}16, \bar{v}1 \pm \bar{v}17, \bar{v}1 \pm \bar{v}18, \bar{v}1 \pm \bar{v}19, \bar{v}1 \pm \bar{v}20)$$

$$(\bar{v}1 \pm \bar{v}2, \bar{v}1 \pm \bar{v}3, \bar{v}1 \pm \bar{v}4, \bar{v}1 \pm \bar{v}5, \bar{v}1 \pm \bar{v}6, \bar{v}1 \pm \bar{v}7, \bar{v}1 \pm \bar{v}8, \bar{v}1 \pm \bar{v}9, \bar{v}1 \pm \bar{v}10, \bar{v}1 \pm \bar{v}11, \bar{v}1 \pm \bar{v}12, \bar{v}1 \pm \bar{v}13, \bar{v}1 \pm \bar{v}14, \bar{v}1 \pm \bar{v}15, \bar{v}1 \pm \bar{v}16, \bar{v}1 \pm \bar{v}17, \bar{v}1 \pm \bar{v}18, \bar{v}1 \pm \bar{v}19, \bar{v}1 \pm \bar{v}20)$$

$$(\bar{v}1 \pm \bar{v}2, \bar{v}1 \pm \bar{v}3, \bar{v}1 \pm \bar{v}4, \bar{v}1 \pm \bar{v}5, \bar{v}1 \pm \bar{v}6, \bar{v}1 \pm \bar{v}7, \bar{v}1 \pm \bar{v}8, \bar{v}1 \pm \bar{v}9, \bar{v}1 \pm \bar{v}10, \bar{v}1 \pm \bar{v}11, \bar{v}1 \pm \bar{v}12, \bar{v}1 \pm \bar{v}13, \bar{v}1 \pm \bar{v}14, \bar{v}1 \pm \bar{v}15, \bar{v}1 \pm \bar{v}16, \bar{v}1 \pm \bar{v}17, \bar{v}1 \pm \bar{v}18, \bar{v}1 \pm \bar{v}19, \bar{v}1 \pm \bar{v}20)$$

# 习题答案

## 第八章

### 习题 8.1

- 关于  $xy$  平面:  $(3, -4, -5)$ ; 关于  $yz$  平面:  $(-3, -4, 5)$ ; 关于  $xz$  平面:  $(3, 4, 5)$ .
- 关于  $x$  轴:  $(3, 4, -5)$ ;  $y$  轴  $(-3, -4, -5)$ ,  $z$  轴:  $(-3, 4, 5)$ .
- $A$  与原点及  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的距离分别为  $5\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{34}$ ,  $\sqrt{41}$ , 5.
- $(0, 0, 14/9)$ ;
- $(0, 1, -2)$ .

### 习题 8.2

- $-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}, \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}, \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}, \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2}$ .
- $5\sqrt{2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{10}$ ,  $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos \gamma = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ,  $\left\{ \frac{3\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{5} \right\}$ .
- $3\sqrt{3}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ .
- $(10, 8, -5)$ .
- $\lambda = 7/2, -1/2, 1/5$ , 对应分点  $(32/9, 11/3, 0)$ ,  $(0, -7, 16)$ ,  $(7/3, 0, 11/2)$ .
- $\sqrt{21}$ ,  $\cos \alpha = 2/\sqrt{21}$ ,  $\cos \beta = 1/\sqrt{21}$ ,  $\cos \gamma = 4/\sqrt{21}$ .

### 习题 8.3

- $0, 0, 0$ .
- $-1, -15$ .
- 500 Nm.
- $\pm 3/5$ .
- $\{-4, 2, -4\}$ .
- $\{5, -3, 1\}, \{-5, 3, -1\}$ .
- $\pm(i - 3j - 5k)/\sqrt{35}$ .
- $\pm(4j - 3k)/5$ .
- $\sqrt{315}/2$ .
- 14.
- $\mathbf{w} = -\mathbf{u} + \frac{3}{2}\mathbf{v}$ .
- $68/3$ .

### 习题 8.4

1. (1)  $3x - 7y + 5z - 66 = 0$ ; (2)  $3x + y + 2z - 23 = 0$ ;
  - (3)  $3x + 5y + 7z - 100 = 0$ ; (4)  $14x + 15y + z = 0$ ;
  - (5)  $x + y + z - 4 = 0$ ; (6)  $5x + 3y + 2z - 30 = 0$ ;
  - (7)  $6x - 2y + 3z \pm 21 = 0$ .
2. 8. 3.  $(12, 0, 0)$  或  $(-\frac{2}{3}, 0, 0)$ .
5. (1)  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-4}{7}$ ; (2)  $\frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-8}{1}$ ;
  - (3)  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ ; (4)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$ .
  6.  $(-12, -4, 18)$ . 7.  $\sqrt{6}/2$ . 8.  $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{5}$ .
  9.  $11x - 17y - 19z + 10 = 0$ .
  10.  $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$  11.  $\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0, \\ 8x - 11y - 9z + 26 = 0. \end{cases}$
  12.  $6x - 5y + 4z + 13 = 0$ .
  13. (1)  $x + y + 3z - 6 = 0$ ; (2)  $8x - 9y - 22z - 59 = 0$ ;
  - (3)  $7x - 26y + 18z = 0$ .
  14.  $(8 \pm 4\sqrt{2})x - (4 \pm 4\sqrt{2})y + (4 \pm 4\sqrt{2})z - 5 \mp 8\sqrt{2} = 0$ .

### 习题 8.5

1.  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} + \frac{z^2}{75} = 1$ . 2.  $(x \pm 1)^2 + y^2 = 1$ .
3. (1)  $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = 11^2$ ;  
(2)  $(x-6)^2 + (y+8)^2 + (z-3)^2 = 10^2$ ;  
(3)  $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 5$ ;  
(4)  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ .
4.  $(x+5)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 11^2$ .
5.  $5y + 12z = 0$  或  $3y - 4z = 0$ .
6. (1) 圆; (2) 椭圆; (3) 抛物线.
7.  $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 1 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$  8.  $\begin{cases} z^2 + ax = a^2, \\ y = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} y^2 = -4x, \\ y^2 + (z-2)^2 = 4. \end{cases}$$

$$10. (1) y^2 + z^2 = k^2 x^2; (2) x^2 + y^2 + z^2 = 9;$$

$$(3) 4(x^2 + z^2) - 9y^2 = 36; (4) (\pm\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 9.$$

$$11. (1) 椭球面; (2) 椭圆抛物面;$$

$$(3) 单叶双曲面; (4) 双叶双曲面;$$

$$(5) 圆锥面; (6) 双曲抛物面.$$

$$12. x = \pm 2.$$

## 第九章

### 习题 9.1

3. (1)  $\{(x, y) \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\};$   
 (2)  $\{(x, y) \mid 2x < y^2 + 1\};$   
 (3)  $\{(x, y) \mid 2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi, k=0, 1, 2, \dots\};$   
 (4)  $\{(x, y) \mid x > 0, 1-x \leq y \leq 1+x\} \cup \{(x, y) \mid x < 0, 1+x \leq y \leq 1-x\};$   
 (5)  $\{(x, y) \mid x > 0, y > x+1\} \cup \{(x, y) \mid x < 0, x < y < x+1\};$   
 (6)  $\{(x, y) \mid x \leq x^2 + y^2 < 2x\}.$

$$4. (xy)^{xy}.$$

$$7. x^2(1-y)/(1+y).$$

$$8. (1) 1; (2) 2; (3) 0; (4) 0.$$

10. (1) 在全平面上连续; (2) 在平面上除(0,0)外连续.

11. (1) (0,0); (2) 直线  $x=y$  上的所有点;

(3) 锥面  $z^2 = x^2 + y^2$  上的所有点.

### 习题 9.2

1. (1)  $z_x = 4x^3 - 8xy^2, z_y = 4y^3 - 8x^2y;$   
 (2)  $z_x = y + y^{-1}, z_y = x - xy^{-2};$   
 (3)  $z_x = -2xy^{-1}\sin x^2, z_y = -y^{-2}\cos x^2;$   
 (4)  $z_x = 2xy^{-1}\sec^2(x^2/y), z_y = -x^2y^{-2}\sec^2(x^2/y);$   
 (5)  $z_x = yx^{y-1}, z_y = x^y \ln x;$   
 (6)  $z_x = 1/(1+x^2), z_y = 1/(1+y^2);$   
 (7)  $z_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z_y = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}};$

$$(8) u_x = \frac{z}{x} \left( \frac{x}{y} \right)^z, u_y = -\frac{z}{y} \left( \frac{x}{y} \right)^z, u_z = \left( \frac{x}{y} \right)^z \ln \frac{x}{y};$$

$$(9) u_x = -\frac{x}{r^3}, u_y = -\frac{y}{r^3}, u_z = -\frac{z}{r^3}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$(10) u_x = \frac{yu}{xz}, u_y = \frac{u \ln x}{z}, u_z = -\frac{yu \ln x}{z^2}.$$

$$2. 1 + \ln 4, 1. \quad 3. -1, 0. \quad 5. 5/4. \quad 6. \pi/4.$$

$$7. (1) (2x+y^2)dx+(2xy+\cos y)dy;$$

$$(2) y^{-2}(ydx-xdy);$$

$$(3) 2\cos(x^2+y^2)(xdx+ydy);$$

$$(4) \frac{-xzdx-yzdy+(x^2+y^2)dz}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

$$8. (1) z_x = z_y = 1/(x+y+z-1), dz = (dx+dy)/(e^2-1);$$

$$(2) z_x = yz/(z^2-xy), z_y = xz/(z^2-xy), dz = (yzdx+xzdy)/(z^2-xy);$$

$$(3) z_x = -(f'_1 + f'_2 + f'_3)/f'_3, z_y = -(f'_2 + f'_3)/f'_3,$$

$$dz = -[(f'_1 + f'_2 + f'_3)dx + (f'_2 + f'_3)dy]/f'_3$$

$$(4) z_x = -\frac{f'_1 + 2xf'_2}{f'_1 + 2zf'_2}, z_y = -\frac{f'_1 + 2yf'_3}{f'_1 + 2zf'_2},$$

$$dz = -\frac{(f'_1 + 2xf'_2)dx + (f'_1 + 2yf'_3)dy}{f'_1 + 2zf'_2}.$$

$$9. (1) 0, \frac{\pi}{2}(dx+dy); \quad (2) 2dy, dx+dy.$$

$$12. (1) 2t \tan t \ln t + t^{-1}(1+t^2) \tan t + (1+t^2) \sec^2 t \ln t.$$

$$(2) e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2);$$

$$(3) [\varphi(t) + t\varphi'(t)]f_1 + 2[t + \varphi(t)\varphi'(t)]f_2.$$

$$13. (1) \frac{2x}{y^2} \ln(3x-2y) + \frac{3x^2}{y^2(3x-2y)}, -\frac{2x^2}{y^3} \ln(3x-2y) - \frac{2x^2}{y^2(3x-2y)};$$

$$(2) yf_1 + 2xf_2, xf_1 + 2yf_2;$$

$$(3) f_1 + f_3 \varphi_x, f_2 + f_3 \varphi_y;$$

$$(4) (1+y+yz)f', (x+xz)f';$$

$$(5) f_1 + yf_2 + yzf_3, xf_2 + xzf_3.$$

$$14. 0. \quad 15. 2xf'(x^2+y^2+z^2). \quad 16. \frac{1}{2}e^{-xy} \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$$18. (1) z_x = z_y = 1/(e^z - 1); \quad (2) z_x = \frac{yz-1}{1-xy}, z_y = \frac{xz-1}{1-xy}.$$

$$19. (1) z_x = -\frac{F_1 + F_3}{F_2 + F_3}, z_y = -\frac{F_1 + F_2}{F_2 + F_3}; \quad (2) z_x = \left( \frac{x}{y} \right) \frac{\partial}{\partial x} = \text{arctan}(\frac{x}{y}) \quad (3)$$

$$(2) z_x = \frac{F_1 - F_3}{F_2 - F_3}, z_y = \frac{F_2 - F_1}{F_2 - F_3}; \quad (3) z_x = \text{arctan}(\frac{y}{x}), z_y = \text{arctan}(\frac{x}{y}) \quad (4)$$

$$(3) z_x = -\frac{F_1 + F_2 + F_3}{F_3}, z_y = -\frac{F_2 + F_3}{F_3}; \quad (4) z_x = \text{arctan}(\frac{y}{x}), z_y = \text{arctan}(\frac{x}{y}) \quad (5)$$

$$21. (1) \frac{dy}{dx} = \frac{z-x}{y-z}, \frac{dz}{dx} = \frac{x-y}{y-z}; \quad (2) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{vy - ux}{x^2 - y^2}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{uy - ux}{x^2 - y^2}; \quad (3) \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(v-u)} \quad (6)$$

22. -2. 23. 4, 0.

$$24. z_{xx} = \frac{1}{x^2} \ln y (\ln y - 1) y^{\ln x}; \quad (7)$$

$$z_{xy} = \frac{1}{xy} [1 + (\ln x)(\ln y)] y^{\ln x}; \quad (8)$$

$$z_{yy} = \frac{\ln x}{y^2} (\ln x - 1) y^{\ln x}. \quad (9)$$

$$25. z_{xx} = -2x(1+x^2)^{-2}, z_{xy} = 0.$$

$$26. 0. \quad 27. f_{11} + (x+y)f_{12} + xyf_{22} + f_{21} = 0. \quad (10)$$

### 习题 9.3

$$1. 1 - \sqrt{3}. \quad 2. 98/13, e^{(1+i)+1} abe^{(1+i)^2 - 1} + 1 abe^{(1+i)^2} \quad (11)$$

$$3. \sqrt{2} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right), \quad (12) (4\theta - 1) \cos \left( \theta - \frac{1}{4} \right) \quad (13)$$

$$(1) \{1, 1\}; \quad (2) \{-1, -1\}; \quad (3) \{1, -1\} \text{ 或 } \{-1, 1\}. \quad (14)$$

$$4. 2/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \quad 5. \pm \sqrt{2(a^2 + b^2)/ab}. \quad (15)$$

$$6. (1) 9i - 3j; \quad (2) i + 2j + 2k; \quad (3) -(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{-3/2} (x_0 i + y_0 j + z_0 k). \quad (16)$$

$$7. \pi/2. \quad (17) \lambda(x_0 + x), \lambda(y_0 + y), \lambda(z_0 + z) \quad (18)$$

### 习题 9.4

$$1. x + y = 1, y = 1/2; \quad x = z. \quad (19)$$

$$3. \frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1}, 16x + 9y - z - 24 = 0. \quad (20) \quad (1) - 4.0. = z = x \quad (21)$$

5.  $\cos \alpha = \pm 2/\sqrt{14}$ ,  $\cos \beta = \pm 1/\sqrt{14}$ ,  $\cos \gamma = \mp 3/\sqrt{14}$ .  
 6. (1)  $x+2y-z+5=0$ ,  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}$ ;  
 (2)  $4x+8y-z-18=0$ ,  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{8} = \frac{z+6}{-1}$ .  
 7.  $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ,  $\frac{x+(3/2)}{1} = \frac{y+(1/2)}{3} = \frac{z-(3/4)}{2}$ .  
 9.  $\lambda = \pm 2$ .

### 习题 9.5

1. (1) 在点(0,3)处有极小值-9;  
 (2) 在(1,1)处有极大值  $\sin 1 + \cos 1 + 1$ ;  
 (3) 在  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$  处有极大值  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .
2. 在点(-2,0)有极小值1,在点(16/7,0)有极大值8/7.
3. (1)  $(1/2, 1/2)$ ,  $z_{\max} = 1/4$ ;  
 (2)  $(-1/3, 2/3, -2/3)$ ,  $u_{\min} = -3$ ;
4.  $z(4,0) = -16$ . 5. 长、宽都为2 m, 高为3 m.
6. 三角形的顶点为(-3, ±1), (0, ±2), (3, ±1).
7. 正三角形. 8.  $\sqrt{7}/4\sqrt{2}$ .  
 9.  $z_{\max} = 4$ ,  $z_{\min} = 2$ . 10.  $\ln 3\sqrt{3}r^5$ . 11.  $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2)$ .

## 第十章

### 习题 10.1

1.  $\iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} |1-x-y| dx dy$ . 2.  $I < 0$ .  
 3. (1) 成立; (2) 不成立. 4.  $-8 \leq I \leq 2/3$ .

### 习题 10.2

1. (1)  $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy$ ,  $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y) dx$ ; (2)  $\frac{\pi}{8}$  (3)  $\frac{8\pi}{5}$  (4)  $\frac{8\pi}{5}$

$$(2) \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y) dy, \int_0^R dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_0^{x^3} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y) dy, \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{2-y} f(x,y) dx.$$

$$2. (1) \int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x,y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x,y) dx;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y) dx;$$

$$(3) \int_{1/2}^1 dx \int_{1/x}^2 f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_x^2 f(x,y) dy;$$

$$(4) \int_1^3 dx \int_x^{3x} f(x,y) dy.$$

$$4. (1) e^{-1}; (2) -\pi/16; (3) \ln(\sqrt{5} + \sqrt{10}) / (1 + \sqrt{6}); (4) p^5/21.$$

$$(3) \ln(\sqrt{5} + \sqrt{10}) / (1 + \sqrt{6}); (4) p^5/21.$$

$$5. (1) \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r^2 dr; (2) \int_0^{\sec \theta} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(r) r dr; (3) \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2R \sin \theta} f(r^2) r dr.$$

$$(2) \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(r) r dr; (3) \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2R \sin \theta} f(r^2) r dr.$$

$$6. (1) \frac{2}{3}\pi a^3; (2) -\pi; (3) \left(\frac{\pi}{8}\right)^2; (4) a^4/2; (5) 0.$$

$$7. \int_0^{2\pi} t f(t \cos \theta, t \sin \theta) d\theta.$$

$$8. (1) \frac{2}{3}\pi ab; (2) 9/4; (3) 8/3; (4) 2\pi; (5) 2/3.$$

$$10. \pi a^2/2. \quad 11. 6\pi. \quad 12. 5\pi/2.$$

$$13. (\ln 2)/2. \quad 14. \pi/|\delta|.$$

### 习题 10.3

$$1. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+4y^2}^{4-3x^2} f(x,y,z) dz. \quad 2. \frac{1}{180}.$$

$$3. (1) \frac{\pi}{6}; (2) \frac{16}{3}\pi; (3) \frac{59}{480}\pi R^5; (4) \frac{64(15\pi-16)}{225}.$$

$$4. (1) \frac{128}{5}\pi; (2) \frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3).$$

5.  $\frac{4}{5}\pi abc$ .      6.  $4\pi t^2 f(t^2)$ .      8.  $\frac{256}{3}\pi$ .

### 习题 10.4

1. (1)  $\frac{10}{3}R^2$ ; (2)  $\frac{3}{4}(2+\pi)$ ; (3)  $\frac{a^2 b^2}{2c^2}$ .
2. (1)  $(9\sqrt{3}+6\pi)a^3$ ; (2)  $\frac{4ma^3}{3}$ ; (3)  $\frac{R^3}{3}\arctan 3$ ; (4)  $\frac{4}{9}$ .
3.  $(2\pi-4)a^2$ .      4.  $\frac{8}{\sqrt{3}}\pi, (8\sqrt{3}+12)\pi$ .
5.  $\frac{49}{4}\pi(m^2)$ .      6.  $\frac{176\pi}{3}$ .
7.  $\frac{7}{6}(b^4-a^4)$ .      8.  $(0, 0, \frac{3}{4})$ .
9.  $(\frac{5a}{6}, \frac{16a}{9\pi})$ .      10.  $\frac{\mu ab^3}{12}, \frac{\mu}{12}ab(a^2+b^2)$ .
11.  $\frac{4}{15}\pi a^5$ .      12.  $4800\pi\mu$  ( $\mu$  为水的密度).

## 第十一章

### 习题 11.1

1. (1)  $1+\sqrt{2}$ ; (2)  $2\pi R^3$ ; (3)  $\frac{256a^3}{15}$ ;
- (4) 16; (5) 0; (6)  $\frac{\pi}{4\sqrt{5}}$ ;
- (7)  $\frac{2}{3}\pi a^3$ ; (8)  $4(\frac{\pi}{A} + \frac{b}{A})$ .
2.  $\frac{3}{4}a$ .      3.  $(\frac{4}{3}a, \frac{4}{3}a)$ .

### 习题 11.2

1. (1)  $4/5$ ; (2) 16; (3) 0; (4)  $-2\pi$ ;
- (5) 0; (6)  $10/3$ ; (7)  $4ab^2/3$ ; (8) 0.

2.  $17/18$ ; 3.  $-8/15$ ; 4. (1)  $-2\pi ab$ ; (2)  $m\pi a^2/8$ ; (3) 0.
5. (1)  $1/2$ ; (2) 6; (3)  $3-e^2$ ; (4)  $e \cos 1 - 1$ .
6.  $3\pi a^2/8$ ; 7. 9. 8. (1) 0; (2)  $-2\pi$ .
9. 0, 当  $L$  不包围原点时;  $\pi$ , 当  $L$  包围原点时.
10.  $\frac{a^2-b^2}{2}$ . 11.  $\frac{1}{2}$ . 13.  $kMm\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a-c}\right)$ .
14.  $x_1 y_1 z_1 ; M\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ .
15. (1)  $x^3 + 3xy - 3y^2 = C$ ; (2)  $y \cos x + x \cos y = C$ ; (3) 不是全微分方程; (4)  $x^2 y + 2 \ln y = C$ .
16. (1)  $x^4 + 4xy - 2y^2 = C$ ; (2)  $\arctan(x/y) = x + C$ ; (3)  $\sqrt{1+x^2+y^2} + \arctan(x/y) = C$ ; (4)  $\frac{x}{y} = \frac{y^2}{x} + C$ .
17. (1)  $\mu = \frac{1}{y^2}, \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$ ; (2)  $\mu = \frac{1}{(xy)^2}, \frac{1}{y} = -x(\ln x + C)$ ; (3)  $\mu = 1/y^2, x^2 - 6xy - 2/y = C$ ; (4)  $\mu = 1/x^4, e^x + x^{-2} y^2 = C$ .

### 习题 11.3

1.  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ .
2. (1)  $2\pi a \ln \frac{a}{h}$ ; (2)  $2\pi a \ln \frac{a}{h} + \frac{\pi}{h}(a^2 - h^2)$ .
3.  $-\frac{27}{4}$ . 4.  $\frac{64\sqrt{2}}{15}$ . 5.  $\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1)$ .

### 习题 11.4

1.  $-\frac{\pi R^4}{2}$ . 2.  $\frac{2}{15}\pi R^5$ . 3.  $-2\pi R^3$ . 4. 0.

5.  $2\pi e^2$ ; 6.  $\frac{3}{16}\pi$ . ; 答案 (D) ; 答案 (E) ; 答案 (A) ; 答案 (B) ; 答案 (C)

### 习题 11.5

1.  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $a = \frac{q}{4\pi\epsilon |c|}$ . ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (B) ; 答案 (A) ; 答案 (C)
  2. 所有从原点发出的射线. ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
  3. (1)  $0, 0$ ; (2)  $x - \sin x, \{xe^{xy}, -ye^{xy}, y\}$ . ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
  4.  $f'(r) + 2r^{-1}f(r)$ . ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
  6. (1) 是,  $u = x^2z + x + y^2(z+1) + z^3 + C$ ; ; 答案 (B) ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (A)
  - (2) 是,  $u = x^2yz^2 + \sin yz + C$ ; ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (B) ; 答案 (A) ; 答案 (C)
  - (3) 是,  $u = x^2 + xy + 2y^2 + 2yz - 3z^2 + C$ ; ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
  - (4) 不是. ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
10.  $16\pi$ . 11.  $-\pi a^3/4$ . 12. 0. 13.  $e^{-2}$ . ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C)
14. (1)  $xy^2 + x^2z^2 - yz + z^2 + C$ ; ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
- (2)  $x(x^2 + y^2 + z^2) + C$ . ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
15. 1/8. 16.  $\pi/2$ . 17.  $12\pi R^5/5$ . 19. 1 600 $\pi$ . ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)

## 第十二章

### 习题 12.1

1. (1)  $S_n = \ln(n+1)$ , 发散; ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
- (2)  $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$ , 收敛; ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
- (3)  $S_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ , 收敛; ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
- (4)  $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ , 收敛. ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
2. (1) 发散; (2) 发散; (3) 发散; (4) 收敛; ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
- (5) 发散; (6) 发散; (7) 发散. ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
4. (1) 发散; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 收敛; ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
- (5) 收敛; (6) 发散; (7) 收敛; ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
- (8)  $a > 1$  时收敛,  $0 < a \leq 1$  时发散; ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)
- (9) 发散; (10) 发散; (11) 收敛; (12) 收敛; ; 答案 (E) ; 答案 (D) ; 答案 (C) ; 答案 (B) ; 答案 (A)

- (13) 发散; (14) 收敛; (15) 收敛; (16) 收敛;  
 (17) 收敛; (18) 发散; (19) 收敛; (20) 收敛.

5. 收敛.

7. (1) 收敛; (2)  $a > e$  时收敛,  $a < e$  时发散;  
 (3) 收敛; (4) 收敛; (5) 发散; (6) 收敛;  
 (7) 收敛; (8) 收敛; (9) 发散; (10) 收敛;  
 (11) 收敛; (12) 收敛; (13) 发散; (14) 收敛.

8. 不能. 可用比较法判别: 原级数收敛.

10. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 收敛;  
 (5) 收敛; (6) 收敛.  
 11. (1) 发散; (2) 发散; (3) 发散; (4) 收敛;  
 (5) 收敛.

12. (1) 条件收敛; (2) 绝对收敛; (3) 条件收敛;  
 (4) 绝对收敛; (5) 绝对收敛; (6) 发散;  
 (7) 绝对收敛; (8) 绝对收敛; (9) 绝对收敛;  
 (10) 条件收敛; (11) 绝对收敛; (12) 条件收敛;  
 (13) 条件收敛; (14) 条件收敛; (15) 发散;  
 (16) 条件收敛; (17) 发散; (18) 绝对收敛.

## 第十二章

### 习题 12.2

(1)~(5)一致收敛; (6), (7)非一致收敛.

### 习题 12.3

1. (1)  $[-1, 1]$ ; (2)  $[-1/2, 1/2]$ ; (3)  $[-4/3, -2/3]$ ; (4)  $(3, 7)$ ;  
 (5)  $x=0$ ; (6)  $[-3, -1]$ ; (7)  $(-4, 4)$ ; (8)  $(-R, R)$ , 其中  $R = \max\{a, b\}$ .  
 (9)  $|x| > 1/2$ ; (10)  $x < -1, x > -1/3$ .

2. (1)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} (x+1)^n, -5 < x \leq 3$ ;  
 (2)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left[ -1 + \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right] x^n, |x| < 1$ ;  
 (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 2^n}{n} x^n, -1/2 \leq x < 1/2$ ;

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n}}{n}, -1 \leq x < 1;$$

$$(5) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln 2)^{n-1}}{(n-1)!} \left(1 + \frac{\ln 2}{n}\right) x^n, |x| < \infty;$$

$$(6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} x^n, |x| < \infty;$$

$$(7) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)! (4n+3)}, |x| < \infty;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}, |x| \leq 1;$$

$$(9) \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, -1 \leq x < 1;$$

$$(10) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+2}} (x-2)^n, 0 < x < 4.$$

$$3. (1) \frac{1}{(2-x)^2}, 0 < x < 2;$$

$$(2) \frac{x(1+x)}{(1-x)^2}, |x| < 1;$$

$$(3) \frac{2x^2}{(1-x^2)^3}, |x| < 1;$$

$$(4) \frac{2+(x-1)^2}{[2-(x-1)^2]^2}, |x-1| < \sqrt{2};$$

$$(5) -x - \ln(1-x), -1 \leq x < 1;$$

$$(6) S(x) = 1 + x^{-1}(1-x)\ln(1-x), -1 \leq x < 1 \text{ 且 } x \neq 0, S(0), S(1) = 1;$$

$$(7) -x \arctan x, |x| \leq 1;$$

$$(8) \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}, |x| < 1;$$

$$(9) S(x) = -x \ln(1-x^2) - \ln \frac{1+x}{1-x} + 2x, |x| < 1,$$

$$S(\pm 1) = \pm 2(1 - \ln 2);$$

$$(10) \ln \frac{3+x}{3-2x}, -3/2 \leq x < 3/2;$$

$$(11) e^{x^2} (2x^2 + 1) - 1, |x| < \infty;$$

$$(12) (\sin x + x \cos x)/2, |x| < \infty.$$

$$4. (1) 3; (2) 22/27; (3) 3e; (4) (5-6\ln 2)/8.$$

$$5. 0.98477. \quad 6. 0.4874.$$

### 习题 12.4

1. (1)  $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x) + \frac{1}{n} \sin nx \right]$   
 $= \begin{cases} f(x), & 0 < |x| \leq \pi, \\ \pi/2, & x = 0; \end{cases}$
- (2)  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi} \left( \frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \sin nx$   
 $= \begin{cases} f(x), & \pi/2 \neq |x| \leq \pi, \\ \pm \pi/4, & x = \pm \pi/2; \end{cases}$
- (3)  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x), |x| \leq \pi,$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8};$
- (4)  $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}, |x| < \infty;$
- (5)  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} f(x), & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & x = 0, 2\pi. \end{cases}$
3.  $b_n = \frac{2}{n}, S(x) = \begin{cases} -(x+\pi), & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \pi-x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$
4. (1)  $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\pi^2}{n} (-1)^{n+1} - \frac{2}{n^2} [1 - (-1)^n] \right\} \sin nx$   
 $= \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < \pi, \\ 0, & x = \pi; \end{cases}$
- (2)  $S(0) = S(\pi) = \frac{\pi^2}{2}.$
5. 余弦级数  $-\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} = x-1 (0 \leq x \leq 2);$
- 正弦级数  $-\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} x-1, & 0 < x < 2, \\ 0, & x = 0, 2. \end{cases}$
6.  $f(x) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{4}, 0 \leq x \leq 8.$
7.  $f(x) \sim \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{5} = \begin{cases} 10-x, & 5 < x < 15, \\ 0, & x = 5, 10. \end{cases}$
8.  $f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2n\pi x = \begin{cases} x - [x], & x \text{ 不为整数,} \\ 1/2, & x \text{ 为整数.} \end{cases}$

# 人名索引

- Bernoulli, J. (伯努利), 1667—1748, 瑞士数学家. 采  
Euler(欧拉), 1707—1783, 瑞士数学家.  
Gauss(高斯), 1777—1855, 德国数学家.  
Green(格林), 1793—1841, 英国数学家.  
Hamilton(哈密顿), 1805—1865, 爱尔兰数学家.  
Jacobi(雅可比), 1804—1851, 德国数学家.  
Lagrange(拉格朗日), 1736—1813, 法国数学家.  
Laplace(拉普拉斯), 1749—1827, 法国数学家.  
Leibniz(莱布尼茨), 1646—1716, 德国数学家.  
Newton(牛顿), 1642—1727, 英国大科学家.  
Stokes(斯托克斯), 1819—1903, 英国数学家.  
Taylor(泰勒), 1685—1731, 英国数学家.  
Wronsky(朗斯基), 1778—1853, 波兰数学家.

02	复数	318	间空集	a
03	复数向量	301	复数一	A
04	复数向式	103	复数二	B
05	复向式	103	复数三	C
06	复向式	311	复数四	D
07	复数表式	344	复数五	E
08	复数式	332	复数六	F
09	复数式	113	复数七	G
10	复数向量	130	复数八	H
11	复数向式	113	复数九	I
12	复数向式	334	复数十	J
13	复数向式	33	复数十一	K
14	复数向式	34	复数十二	L
15	复数向式	34	复数十三	M
16	复数向式	34	复数十四	N
17	复数向式	34	复数十五	O
18	复数向式	34	复数十六	P
19	复数向式	34	复数十七	Q
20	复数向式	34	复数十八	R
21	复数向式	34	复数十九	S
22	复数向式	34	复数二十	T
23	复数向式	34	复数二十一	U
24	复数向式	34	复数二十二	V
25	复数向式	34	复数二十三	W
26	复数向式	34	复数二十四	X
27	复数向式	34	复数二十五	Y
28	复数向式	34	复数二十六	Z

# 名词索引

名词后的数字表示该名词出现的页码

Dirichlet 条件	255	二元函数	52
Fourier 级数	255	二重积分	109
Fourier 系数	255	几何级数	218
Gauss 公式	203	三重积分	129
Green 第一公式	206	内点	49
Hamilton 算子	200	分段光滑曲线	85
Jacobi 行列式	123	切平面	88
Lagrange 函数	96	切矢量	85
Lagrange 乘数法	96	切线	86
Laplace 算子	201	双叶双曲面	44
Leibniz 判别法	227	双曲抛物面	45
Maclaurin 级数	244	双侧曲面	191
$n$ 维空间	50	双参数平面方程	31
$p$ -一级数	218	开区域	50
Stokes 公式	207	方向导数	81
Taylor 公式	103	方向余弦	10
Taylor 多项式	103	方向角	10
Taylor 级数	244	方向数	10
Taylor 系数	244	无界区域	50
Weierstrass 判别法	235	无旋场	211
$x$ 型区域	112		
$xy$ 型区域	130	半顶角	37
$y$ 型区域	113	右手系	1
1~4 画		右手法则	13
一致收敛	234	处处收敛	255
一般式方程	22	平面束	31
二次曲面	42		

## 5 画

平面束方程	令麻面曲面	30	连续	王因良	56
正弦级数	画	257	邻域	李振球	49
正项级数	221		间断点	周	56
母线	35		8 画	林伏清	
目标函数	96		阿贝尔(Abel)定理	袁学勤	239
矢径	5		势函数	画	211
矢量	4		单叶双曲面	袁早	43
矢量方程	38		单连通区域	量	166
矢量场	210		单参数平面束方程	面	31
矢量函数	85		卦限	史奇	1
矢量的数乘	7		参数方程	赵立	22
矢量线	211		和函数	孙	233
边界	49		奇延拓	魏	261
边界点	49		定向曲面	周	191
<b>6 画</b>			法平面	赵号	86
交错级数	227		法矢量	面	19
光滑曲线	85		法线	科学	88
全微分	64		环量	代	211
收敛点	233		变量代换公式	长	123
收敛域	233		<b>9 画</b>		
曲顶柱体	107		复连通区域		166
有界区域	50		柱面		35
约束条件	96		柱面坐标		135
闭区域	50		点向式方程		22
<b>7 画</b>			点法式方程		19
体积元	129		绝对收敛		228
余弦级数	257		重心		147
余项	219		<b>10 画</b>		
投影曲线	41		准线		35
条件收敛	228		圆柱螺旋线		41
极限	54		圆锥面		37
极值点	93		流量		211
求和公式	249				

积分因子	181	第二型曲面积分	野衣束面193
积分判别法	224	12 画	蝶类舞玉
通项	点218	隐函数	蝶类舞72
部分和	画8	幂级数	238
高阶偏导数	椭球(EdA)62	散度	蝶类舞200
118 11 画	蝶类舞	椭圆抛物面	蝶类舞44
偏导数	面曲双书59	椭圆锥面	蝶类舞45
基矢量	蝶类舞8	椭球面	蝶类舞42
旋转抛物面	野衣束面平缓37	等值线	蝶类舞53
旋度	200	13 画	蝶类舞关
旋度场	蝶类舞211	数项级数	蝶类舞218
梯度	83	数量	蝶类舞4
梯度场	蝶类舞211	数量场	蝶类舞210
混合积	面曲向16	数量积	蝶类舞12
混合偏导数	面平62	14 画	
球面	量大34	截面法	蝶类舞134
球面坐标	138	截距式方程	蝶类舞21
第一型曲线积分	154	管形场	蝶类舞213
第一型曲面积分	186		蝶类舞
第二型曲线积分	162		蝶类舞
188 188 画	蝶类舞	科封虹曲	
32	面卦	蝶类舞音	
188	蝶类舞卦	科封束面	
35	蝶类左向点	蝶类固	
19	蝶类右向点	画	
288	蝶类林学		
114	3重		
114 114 画	蝶类舞		
28	卷那		
14	蝶类舞卦圆		
33	面卦圆		
111	量蕊		

[General Information]  
书名=微积分学 (下册)  
SS号=12078138