离散数学Chapter 1：集合

- **1.1 集合的基本概念**
  - **一、集合和元素**
    - **1.定义**
      - **集合,元素**
        - 把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来看待时，这个整体便称为一个集合。组成集合的那些个体称为集合的元素。
    - **2.特征**
      - 确定性
        - **集合中的元素是确定的。**一个个体，要么在集合中，要么不在集合中，两者必居其一。
      - 互异性
        - **集合中的元素之间是彼此不同的。**如{a，b} 中a与b是有区别的。
      - 不重复性
        - **集合中的元素是不重复的。**如{a，b，b，c} 与{a，b，c} 是一样的。
      - 无序性
        - **集合中的元素没有先后次序。**如{a，b，c} 与{c，b，a} 是一样的。
      - 抽象性
        - **集合中的元素是抽象的，甚至可以是集合。**如{1，2，{1，2}} 中元素{1，2}本身也是一个集合。
    - **3．常用集合的表示符号**
      - **数集**
        - Z或I：所有整数的集合。
          - Z*或N：所有自然数（包括0）即非负整数的集合。
          - Z+：所有正整数的集合。
          - Z-：所有负整数的集合。
          - N_{even}：非负偶数的集合。
          - N_{odd}：非负奇数的集合。
        - Q：所有有理数的集合。
        - R：所有实数的集合。
        - C：所有复数的集合。j为虚数单位。
      - **空集,全集**
        - 不含任何元素的集合称为空集，记为Φ或{}。
        - 一个包含了研究问题中涉及的所有对象的集合称为该问题的全域集合，简称全集，记作U或E。

            - **约定：**本书所讨论的集合一般不是空集。
- **二、集合的表示方法**

  集合由它所包含的元素完全确定。表示一个集合的方法很多。

  - **1．列举法**
    - 通过将集合中的全部元素或部分元素置于花括号内而元素之间用逗号隔开来表示集合的方法，又称为枚举法。
      - 例如A= {2，a，b，9}，B= {0，1，4，9，16，…，n^2，…}。
    - 注意:
      - 当一个集合仅含有有限个元素或元素之间有明显关系时，常常采用列举法表示该集合。
      - 列举法必须将元素的全体都列出来，而不能遗漏任何一个。
      - 在能清楚表示集合成员之间关系的情况下可使用省略号，省略掉的元素能由列举出的元素以及它们前后的关系确定。
      - 列举法是显式法，其优点是表示集合简单明了，具有透明性。
  - **2．描述法**
    - 通过集合中元素所具有的共同性质来表示该集合的方法。
    - 一般形式为A = {a | P(a)}。其中，符号P(x) 表示不同对象x共同具有性质P。
    - **注意:**
      - 用描述法表示一个集合的方式一般不唯一。如E= {1，2，3，4} 可描述为 {a| a ∈Z+，a ≤4} 或{a| a ∈Z+，a < 6，a| 12}。
      - 描述法是隐式法，其优点是原则上不要求列出集合中的全部元素。同时可以利用集合中元素的共性来研究该集合。
  - **3．递归定义法**
    - 通过计算规则定义集合中的元素的方法。
      - 例如设a_0= 1，a_1= 1，$a_{i+1} = a_i + a_{i-1}$（i≥1），集合F = {a_0，a_1，a_2，…} = {a_k| k ≥0}
  - **4．维恩图法**
    - 一种利用平面上点的集合做成的对集合的图解方法，又称文氏图法。
    - 一般用平面上的圆形或方形表示一个集合。
- **三、集合的基数**
  - **基数,势,有限集,无限集**
    - 集合A所含不同元素的个数称为A的基数或势，记作# A或 |A| 或card(A)。
    - 若# A是有限数，则称A为有限集，否则称A为无限集。

1.2 集合间的关系

- **一、集合的包含**
  - **子集,包含集,真子集,包含关系,真包含关系**

    - 设有集合A、B，如果A的每一个元素都是B的元素，则称A是B的子集或B是A的包含集，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$。
    - 如果A不是B的子集，即A中至少有一个元素不属于B，则记作$A\nsubseteq B$或$B\nsupseteq A$。
    - 若$A\subseteq B$，且B中至少有一个元素不属于A，则称A是B的真子集，记作$A\subset B$或$B\supset A$。
    - 若A不是B的真子集，则记作$A\not\subset B$或$B\not\supset A$。
    - 称$\subseteq$（或$\supseteq$）为包含关系，$\subset$（或$\supset$）为真包含关系。
    - **注意:**
      - （1）个体与集合的属于关系和集合与集合的包含关系是两种不同的关系，不能混淆。包含关系由属于关系定义。
      - （2）对集合A、B，可能同时有$A\in B$和$A\subseteq B$成立。
  - **定理1.1**
    - 集合的包含关系具有如下性质:
      - （1）对任意的集合A，有$\Phi\subseteq A$。
      - （2）对任意的集合A，有$A\subseteq A$。
      - （3）对任意的集合A，B，C，若$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。
- **二、集合的相等**
  - **相等,不相等**
    - 设有集合A，B，若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则称A与B相等，记作$A=B$。否则称集合A与B不相等，记作$A\neq B$。
    - **注意:**
      - （1）$A=B$当且仅当A与B具有完全相同的元素。
      - （2）$A\neq B$当且仅当$A\nsubseteq B$或$B\nsubseteq A$。
      - （3）$A\subset B$当且仅当$A\subseteq B$且$A\neq B$。
    - **定理1.2**
      - 空集是唯一的。
- **三、维恩图**
  - 维恩图是集合论（或者类的理论）中在不太严格的意义下用以表示集合（或类）的一种草图。又称文氏图。
  - **注意:**
    - 维恩图适合用来表示集合（或类）之间的“大致关系”，也常常被用来帮助推导（或理解推导过程）关于集合运算（或类运算）的一些规律。
  - **在维恩图中，以一个矩形框（的内部区域）表示全集U，U的各个子集用位于该矩形框内的圆/椭圆（的内部区域）来表示。**
    - 两个圆/椭圆相交，其相交部分表示两个集合的公共元素。
    - 两个圆/椭圆不相交（相离），则说明这两个集合没有公共元素。

        - 在维恩图中两个圆/椭圆相切无意义，因为集合是以图形的内部区域来表示的。
- 四、幂集
    - 幂集
        - 由集合A的所有子集组成的集合称为A的幂集，记作P(A) 或2^A，即
        - $2^A = \{S|S \subseteq A\}$。
        - **注意:**
            - $x \in 2^A$当且仅当$x \subseteq A$
    - 集合族
        - 常称所有元素都是集合的集合为集合族。
        - 显然，集合的幂集为一个集合族。
    - **定理1.3**
        - 设A是有限集，则$\#(2^A) = 2^{\#A}$
- 五、有限集合幂集元素的编码表示
    - 为便于在计算机中表示有限集合，可**对集合中的元素规定一种次序**，在集合和二进制数之间建立起一一对应的关系。
    - 设规定次序后的有限集合$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，其中元素的下标代表着该元素在集合A中的次序
        - 对A的任意子集B，使之对应于一个n 位二进制数$b_1 b_2 \ldots b_n$，其中b_i= 1 当且仅当a_i∈B。
        - 反之，对任意的n 位二进制数$b_1 b_2 \ldots b_n$，使之对应于A 的一个子集B= {a_i|b_i= 1}。
    - 含n个元素的集合的子集个数与n位二进制数的个数相同，这也说明了定理1.3的正确性。
    - 编码表示

因此，可以对有限集合幂集的元素进行编码表示。

若 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，则 A 的幂集为

$$2^A = \{B_i \mid i \in J\},$$

其中 $J = \{j \mid j$ 是 n 位二进制数且 $\underbrace{000\ldots0}_{n\text{个}0} \le j \le \underbrace{111\ldots1}_{n\text{个}1}\}$。

例如 若集合 $A = \{a, b, c\}$，则 A 的幂集为 $2^A = \{B_{000}, B_{001}, B_{010}, B_{011}, B_{100}, B_{101}, B_{110}, B_{111}\}$。

如 $B_{000} = \Phi$，$B_{011} = \{b, c\}$ 等。

编码的二进制数可转换成十进制数，如 $B_3 = B_{011} = \{b, c\}$ 等。

- 1.3 集合的运算和运算定律
    - 一、集合的运算
        - 并集,并运算,交集,交运算,不相交,
            - 设A，B 是全集U 的任意两个子集合，

- （1）由属于A 或B 的所有元素组成的集合称为A 与B 的并集，记作A ∪B，即A ∪B= {u| u ∈A 或u ∈B}。称∪为并运算。
- （2）由既属于A 又属于B 的所有元素组成的集合称为A 与B 的交集，记作A ∩B，即A ∩B= {u| u ∈A 且u ∈B}。称∩为交运算。
- 若A∩B= Φ，则称A 与B 不相交。

- **相对补集,差集,绝对补集,补运算**
  - （3）由属于A 而不属于B 的所有元素组成的集合，称为B 关于A 的相对补集，也称为A 与B 的差集，记作A –B，即A –B = {u| u ∈A 但u ∉B}。称–为r。
  - 集合A 关于全集合U 的相对补集，称为A 的绝对补集，简称为A 的补集，记作A′，即A′= U–A= {u| u ∈U，u ∉A} = {u| u∉A}。称′为补运算。
- **对称差,环和,对称差运算,环和运算,环积**
  - 由属于A 而不属于B 以及属于B 而不属于A 的所有元素组成的集合，称为A 与B 的对称差或环和，记作A ⊕B，即A ⊕B= (A –B)∪(B –A)。称⊕为对称差运算或环和运算。

    相当于异或运算（XOR）
    - $A \oplus B=(A \cup B)-(A \cap B)$
    - $A \oplus B=(A–B) \cup(B–A)=(A \cap B') \cup(A' \cap B)$
  - 称(A ⊕B)′为A 与B 的环积，记为A ⊗B，即A ⊗B= (A ⊕B)′。称⊗为环积运算。
- **定理1.4**
  - 对于全集U 的任意子集A、B、C，有
    - （1）A ⊆A ∪B，B ⊆A ∪B。
    - （2）A ∩B⊆A，A ∩B⊆B。
    - （3）A –B⊆A。
    - （4）A –A=Φ，A –Φ=A，A –U=Φ。
    - （5）A –B=A ∩B′，A –B=A–(A ∩B)。
    - （6）(A′)′= A，U′= Φ，Φ′= U。
    - （7）若A ⊆C，B⊆C，则A ∪B⊆C，A ∩B⊆C。
    - （8）若A ⊆B，A⊆C，则A ⊆B ∩C，A ⊆B ∪C。
    - （9）若A ⊆B，则B′⊆A′。反之也成立。
    - （10）A ⊆B，A ∪B=B，A ∩B=A，A –B=Φ相互等价。

二、集合运算的定律

1．集合并、交、补运算的十条定律

- **定理1.5**
  - 对于全集U 的任意子集A、B、C，有
    - 交换律:
      - A ∪B= B ∪A
      - A ∩B= B ∩A

- 结合律:
  - A∪(B∪C) = (A∪B) ∪C
  - A∩(B∩C) = (A∩B) ∩C
- 分配律:
  - A∩(B∪C) = (A∩B) ∪(A∩C)
  - A∪(B∩C) = (A∪B) ∩(A∪C)
- 同一律:
  - A∪Φ= A
  - A∩U= A
- 互补律:
  - A ∪A′= U——排中律
  - A ∩A′= Φ——矛盾律
- 对合律:
  - (A′) ′= A——双重否定律
- 幂等律:
  - A∪A= A,
  - A∩A= A
- 零一律:
  - A∪U= U
  - A∩Φ= Φ
- 吸收律:
  - A∪(A∩B) = A
  - A∩(A∪B)= A
- 德•摩根律:
  - (A∪B)′= A′∩B′
  - (A∩B)′= A′∪B′

- **注意:**
  - 有了结合律，多个集合做并运算（交运算），括号可以去掉，如A∪(B∪C) 记为A∪B∪C。
  - 引入记号:

注意：有了结合律，多个集合做并运算（交运算），括号可以去掉，如 $A \cup (B \cup C)$ 记为 $A \cup B \cup C$。

引入记号

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid \exists k, k = 1, 2, \cdots, n, x \in A_k\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid \forall k, k = 1, 2, \cdots, n, x \in A_k\}$$

分配律的推广

$$B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i) \quad B \cup (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (B \cup A_i)$$

- **2．与环和、环积运算有关的性质**
  - **定理1.6**
    - 对于全集合U 的任意子集A、B、C，有
      - 交换律：
        - $A \oplus B = B \oplus A$
        - $A \otimes B = B \otimes A$
      - 结合律：
        - $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
        - $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
      - 同一律：
        - $A \oplus \Phi = A$，$A \oplus U = A'$
        - $A \otimes U = A$，$A \otimes \Phi = A'$
      - 零一律：
        - $A \oplus A = \Phi$，$A \oplus A' = U$
        - $A \otimes A = U$，$A \otimes A' = \Phi$
      - 其他律：
        - $A \oplus B = A' \oplus B'$，$A \otimes B = A' \otimes B'$
        - $A' \oplus B = A \oplus B' = A \otimes B$
  - **3.小结**
    - 由性质$A-B=A \cap B'$知，$A \oplus B=(A \cap B') \cup (B \cap A')$，故
      - 并、交、差、补、环和、环积运算化为并、交、补运算
    - 再由德•摩根律知，$A \cup B=(A' \cap B')'$，$A \cap B=(A' \cup B')'$，故
      - 并、交、补运算化为并、补运算或者交、补运算
    - 要求熟练掌握集合并、交、补的十条运算定律，了解与集合的环和、环积运算有关的性质。
    - 集合运算的优先级从高到低为：补；交，并；差
      - 可以使用圆括号控制集合运算的优先级，它具有最高的优先级。
      - 同级的并、交运算可按出现的先后顺序处理。
      - 例如 $A-A \cap B$，$A \cap B'-A \cup B \cap C'$。
- **三、集合恒等式的证明方法**
  - **1．根据定义证明**
    - **要证明集合$A=B$，只需证明$A \subseteq B$ 与$B \subseteq A$ 同时成立。**
    - 等式“$A-B=A \cap B'$”常被用于将集合的差运算转化为交运算与补运算。
  - **2．利用已有的集合恒等式证明**
    - 例如假设交换律、分配律、同一律和零一律都成立，则可以证明吸收律$A \cap (A \cup B)=A$也成立。

- **3.利用集合成员表证明**
- **四、包含排斥原理**
  - 根据集合运算的定义，对有限集合U 的任意子集A，B，显然以下各式成立。
    - （1）若A、B不相交，则$\#(A \cup B) = \#A + \#B$。
    - （2）$\max(\#A, \#B) \le \#(A \cup B) \le \#A + \#B$。
    - （3）$\#(A \cap B) \le \min(\#A, \#B)$。
    - （4）$\#A - \#B \le \#(A - B) \le \#A$。
    - （5）若$A \subseteq B$，则
      - $\#A \le \#B$；
      - $\#(B - A) = \#B - \#A$。
    - （6）$\#A' = \#U - \#A$。
      - 一般地，$\#(B - A) \ne \#B - \#A$。
      - 反例：考虑集合A={1，2}，B={2，3}。
  - **定理1.7（包容排斥原理）**
    - 设A，B 为有限集合U的任意子集，则$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$
    - **推论1.1**
      - 设A，B 为有限集合U的任意子集，则$\#(A \oplus B) = \#A + \#B - 2\#(A \cap B)$。
    - **推论1.2：**
      - 设A1，A2，…，An为有限集合U的任意子集，则

$$\begin{aligned}\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} \#A_i - \sum_{1 \le i < j \le n} \#(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} \#(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)\end{aligned}$$

- **1.4 集合成员表**
- **一、并、交和补集的成员表**
  - 借助于数字0和1分别表示$u \notin A$和$u \in A$，得到集合A和B的并、交运算后集合$A \cup B$与$A \cap B$的成员表如下。

$A \cup B$ 的成员表

A	B	$A \cup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$A \cap B$ 的成员表

A	B	$A \cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- **二、有限个集合产生的集合的成员表**
  - **产生的集合**

        - 设A_1，A_2，…，A_r是全集合U 的子集，对这些集合以及Φ 和U 有限次地施加补、并、交运算所得集合称为是由A_1，A_2，…，A_r产生的集合
    - **三、利用集合成员表证明集合恒等式**
        - 在成员表中，若某列的各计入值全为0，则该列所标记的集合是空集Φ；反之，若全为1，则该列所标记的集合是全集U。
        - 如果成员表中标有S 和T 的两列中S 的任何一个计入值为1 的行都有T 的计入值也为1（即∀u∈S都有u∈T），那么S⊆T。
        - 如果成员表中标有S 和T 的两列是恒同的（即S 和T 的列中任何一行的计入值都相等），那么S= T。
        - 因此可以由成员表来证明两个由全集U 的子集所产生的集合是否相等。
- **1.5 集合的覆盖与分划**
    - **覆盖，覆盖块,分划，分划块**
        - A是非空集合，H = {A_1，A_2，…，A_m}，其中A_i⊆A且A_i≠Φ（i= 1，2，…，m）。
        - （1）若$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$，则称H 是A 的一个覆盖，每一个$A_i$（i= 1，2，…，m）称为该覆盖的一个覆盖块。
        - （2）若当i≠j 时A_i∩A_j = Φ，则称覆盖H 是A 的一个分划或划分，每一个A_i（i= 1，2，…，m）称为该分划的一个分划块
        - 注意:
            - （1）集合A 的分划要求A 的每一个元素在且只在其中的一个分划块中。
            - （2）集合的一个分划一定是该集合的一个覆盖，但覆盖不一定是分划。
    - **细分，真细分**
        - 设S= {A_1，A_2，…，A_m}和T= {B_1，B_2，…，B_n}都是非空集合A 的分划，如果T 中的每个分划块都含于S 的某个分划块中，即∀B_i ∈T，都存在A_j∈S，使得B_i⊆A_j，则称分划T 是分划S 的一个细分。
        - 如果T 是S 的一个细分，且T 中至少有一个分划块为S 中某个分划块的真子集，则称T 是S 的真细分
        - **每个分划都是其自身的一个细分，但不是真细分。**
        - **注意：**在文氏图上，
            - 分划集合A 的过程可看作是在表示A 的区域上划出分界线。
            - 如果分划T 的分界线是在分划S 已有的分界线上至少加上了一根新的分界线所组成的，则T 就是S的真细分。
- **1.6 集合的标准形式**
    - **一、最小集标准形式**
        - **最小集**
        - **定理1.9**
        - **最小集范式**

- 二、最大集标准形式
  - 最大集
    - 设A_1，A_2，…，Ar是全集U的子集，形如$\bigcup_{i=1}^{r} S_i = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_r$的集合称为由$A_1$，$A_2$，…，Ar所产生的最大集，其中每个$S_i$为$A_i$或$A_i$'（i=1，2，…，r）。
    - **注意:**
      - 最大集是包含所有r个子集（A_i或A_i'，i=1，2，…，r）的并集。
      - 由A_1，A_2，…，Ar所产生的最大集共有2^r个。
      - 最大集可能为全集。
      - 由A_1，A_2，…，Ar所产生的最大集的集合不构成U的分划。因为两个不同的最大集可能相交。
        - 例如当集合B非空时，(A'∪B) ∩(A∪B) = (A'∩A) ∪B= Φ∪B=B
  - **定理1.10**
    - 由A_1，A_2，…，Ar产生的任一集合或为全集合U或为由A_1，A_2，…，Ar产生的不同最大集的交集
  - 最大集范式
    - 当一个集合被表示为不同最大集的交的形式时，此形式称为该集合的最大集标准形式或最大集范式。
    - **每个非全集的集合必能表示成这种形式。**
- 三、集合范式的说明
  - **每一个集合都能表示为最小集范式和最大集范式。**
  - 一般地，若集合S的最小集和最大集范式分别为：
    $S = m_{\delta_{11}\delta_{12}\cdots\delta_{1r}} \cup m_{\delta_{21}\delta_{22}\cdots\delta_{2r}} \cup \cdots \cup m_{\delta_{h1}\delta_{h2}\cdots\delta_{hr}}$
    $S = M_{\delta'_{11}\delta'_{12}\cdots\delta'_{1r}} \cap M_{\delta'_{21}\delta'_{22}\cdots\delta'_{2r}} \cap \cdots \cap M_{\delta'_{k1}\delta'_{k2}\cdots\delta'_{kr}}$
  - 则行集合$\{\delta_{11}\delta_{12}\ldots\delta_{1r},\quad \delta_{21}\delta_{22}\ldots\delta_{2r},\ldots,\quad \delta_{h1}\delta_{h2}\ldots\delta_{hr}\}$与列集合$\{\delta_{11}'\delta_{12}'\ldots\delta_{1r}',\quad \delta_{21}'\delta_{22}'\ldots\delta_{2r}',\ldots,\delta_{k1}'\delta_{k2}'\ldots\delta_{kr}'\}$是不相交的，它们的并等于 S 的成员表中所有 2^r 个行的集合。因此, 如果 S 的最小集范式是 h 个最小集的并, 则最大集范式 就是 $k = 2^r - h$ 个最大集的交。
  - 由此，如果S的最小集范式与最大集范式中有一种范式已知，则另一种范式便可直接构造出来。
  - **定理1.11**
    - 设S是由A1，A2，…，Ar产生的集合，若不计最小集（最大集）的排列次序，则S的最小集（最大集）范式唯一。
  - **推论1.3**
    - 由A1，A2，…，Ar产生的两个集合相等的充分必要条件是它们最小集（最大集）范式相同。
- 1.7 多重集合

- **多重集合，多重集，元素，重复度**
  - 由一些确定但可重复出现的事物构成的整体称为多重集合，简称多重集，其中的每一个事物称为该多重集的一个元素。
  - 若元素x 在多重集S 中出现k（≥0）次，则称x 在S 中的重复度为k。
- 设有多重集合A和B
  - A 和B 的并集记作A∪B，其中每个元素的重复度为该元素在A 和B 中的重复度的最大值。
  - A 和B 的交集记作A∩B，其中每个元素的重复度为该元素在A 和B 中的重复度的最小值。
  - B 对A 的补集记作A–B，其中当某元素在A 中的重复度减去在B 中的重复度的差为正数时，就令该正数为此元素在A–B 中的重复度，否则为零。