离散数学Chapter 4：代数系统

- 4.1 代数运算
  - 一、代数运算的概念
    - n 元运算,运算的阶或元数,运算符,二元运算,一元运算
      - 设 S 为非空集合，函数 f：S^n → S 称为 S 上的一个 n 元运算，n 称为该运算的阶或元数，f 称为运算符。
      - 当 n = 2 时，函数 f：$A^2 \to A$ 称为 A 上的二元运算。
      - 当 n = 1 时，函数 f：A → A 称为 A 上的一元运算。
    - 例：
      - 减法运算不是正整数集 Z+ 和非负整数集 N 上的二元运算
      - 求倒数的运算不是实数集 R 上的一元运算。数的除法运算不是实数集 R 上的二元运算。
      - 在所有 n 阶实可逆矩阵构成的集合上
        - 矩阵的乘法运算是该集合上的二元运算。
        - 矩阵的转置运算和求逆运算是该集合上的一元运算。
        - 矩阵的加法和减法运算不是该集合上的二元运算。
    - 注意：上面定义的运算与通常的数的运算相比有如下特点：
      - 运算必须与某个集合联系在一起。所谓集合 S 上的 n 元运算，**要求 n 个运算对象必须是 S 中的元素，运算结果也必须在 S 中**，即运算是封闭的。
      - 运算的对象已被推广。运算对象和运算结果都可以不是数而是任何个体。
      - 运算的含义更为抽象、广泛。只要能从集合 S^n 到集合 S 之间建立一个函数关系，那么 S^n 的元素与 S 的元素之间的对应关系就是一个 n 元运算
    - 运算表：

当 S 是有限集时，S 上的一元运算 ~ 和二元运算 $*$ 有时采用运算表的方式来定义。

a_i	$\sim(a_i)$
a_1	$\sim(a_1)$
a_2	$\sim(a_2)$
⋮	⋮
a_n	$\sim(a_n)$

$*$	a_1	a_2	…	a_n
a_1	$*(a_1, a_1)$	$*(a_1, a_2)$	…	$*(a_1, a_n)$
a_2	$*(a_2, a_1)$	$*(a_2, a_2)$	…	$*(a_2, a_n)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_n	$*(a_n, a_1)$	$*(a_n, a_2)$	…	$*(a_n, a_n)$

    - 封闭
      - 设∘是集合 S 上的一个 n 元运算，H 是 S 的非空子集，若对于每一个 (a1，a2，…，an) ∈ Hn，都有∘(a1，a2，…，an) ∈H，则称运算∘在子集 H 上是封闭的。
      - 定理：

- 设∘是集合 S 上的一个 n 元运算，且在 S 的两个子集合S1 和 S2 上均封闭，则∘在 S1 ∩ S2 上也是封闭的

- 二、二元运算的性质
  - 可交换的，交换律
    - 若对任意的 x，y ∈ S，有 x ∗ y = y ∗ x，则称运算 ∗ 在 S 上是可交换的，或称运算 ∗ 在 S 上满足交换律。
  - 可结合的，结合律
    - 若对任意的 x，y，z ∈ S，有 (x ∗ y) ∗ z = x ∗ (y ∗ z)，则称运算 ∗ 在 S 上是可结合的，或称运算 ∗ 在 S 上满足结合律，常记作没有括号的 x ∗ y ∗ z
  - 可分配的，分配律
    - 如果运算∗对运算∘既是左可分配的又是右可分配的，则称运算∗对运算∘是可分配的，或称运算∗对运算∘在 S 上满足分配律。
      - x ∗ (y ∘ z) = (x ∗ y) ∘ (x ∗ z)，则称运算 ∗ 对运算 ∘ 是左可分配的，或称运算 ∗ 对运算 ∘ 在 S 上满足左分配律；
      - (y ∘ z) ∗ x = (y ∗ x) ∘ (z ∗ x)，则称运算 ∗ 对运算 ∘ 是右可分配的，或称运算 ∗ 对运算 ∘ 在 S 上满足右分配律；
  - n 次幂，指数
    - 若运算 ∗ 在集合 S 上是可结合的二元运算，则对任意的x ∈ S 和任意正整数 n，定义 x 的 n 次幂为$x^1 = x$，$x^{n+1} = x^n * x$ （$n \in Z^+$),并称 n 为 x 的指数
- 三、特殊元素
  - 1.单位元
    - 单位元，幺元
      - 设 ∗ 是集合 S 上的二元运算，
        - 若存在一元素 e_l ∈ S，使得对任意的 x ∈ S，有e_l ∗ x = x，则称e_l是 S 中运算 ∗ 的左单位元。
        - 若存在一元素 e_r ∈ S，使得对任意 x ∈ S，有 x ∗ e_r = x，则称 e_r是 S 中运算 ∗ 的右单位元。
        - 若存在一元素 e ∈ S，使得对任意 x ∈ S，有 e ∗ x = x ∗ e = x，则称 e 是 S 中运算 ∗ 的单位元，又称为幺元
        - 注意：
          - 单位元是集合中的“中性”元素，它与别的元素进行运算所产生的作用为零。
  - 2.零元
    - 左零元，右零元，零元
      - 设 ∗ 是集合 S 上的二元运算，
        - 若存在元素 θ_l ∈ S，使得对任意的 x ∈ S，有 θ_l ∗ x =θ_l，则称θ_l 是 S 中运算 ∗ 的左零元；

- 若存在元素 $\theta_r \in$ S，使得对任意的 x ∈ S，有 x * $\theta_r = \theta_r$，则称θr 是 S 中运算 * 的右零元；
- 若存在元素 θ ∈ S，使得对任意 x ∈ S，有 θ * x = x * θ = θ，则称 θ 是 S 中运算 * 的零元。
- 注意：
  - （1）在实数集合 R 上，数的加法运算没有零元，数的乘法运算有零元 0。
  - （2）在所有 n 阶实矩阵的集合 Mn(R) 上，矩阵加法没有零元，零矩阵是矩阵乘法的零元。
  - （3）在非空集合 A 上所有关系构成的集合 S 上，空关系 OA 是关系复合运算的零元
- 二元运算的左（右）零元不一定存在，若存在可以不是唯一的
- 定理：
  - 设 * 是 A 上的二元运算，θl 和 θr 分别是 * 的左零元和右零元，则 θl = θr = θ，且 θ 是 * 唯一的零元。
    - 定理说明：二元运算若同时存在左、右零元，则它们必相等且唯一
  - 设 * 是集合 S 上的二元运算，且 # S > 1。若运算 * 有单位元 e 和零元 θ，则 e ≠ θ
- 3.幂等元
  - 幂等元,幂等律
    - 设 * 是集合 S 中的二元运算，若 x ∈ S 且 x * x = x，则称 x 是 S 中关于运算 * 的幂等元。
    - 如果 S 中所有元素都是幂等元，则称运算 * 在 S 上满足幂等律。
    - 对任何二元运算，（左、右）单位元和（左、右）零元（若存在）是幂等元。（取$x = e_l$）
    - 一个集合关于运算的幂等元（若存在）不一定唯一
- 4.逆元
  - 左逆元，右逆元，逆元
    - 设 * 是集合 S 上具有单位元 e 的二元运算，对于元素a ∈ S，
      - 若存在 a_l^{-1} ∈ S，使得a_l^{-1} * a = e，则称 a 关于运算 * 是左可逆的，称 a_l^{-1} 是 a 的左逆元；
      - 若存在 a_r^{-1} ∈ S，使得 a * a_r^{-1}= e，则称 a 关于运算 * 是右可逆的，称 a_r^{-1} 是 a 的右逆元；
      - 若存在一元素 a^{-1} ∈ S，使得 a^{-1} * a = a * a^{-1} = e，则称 a 关于运算 * 是可逆的，称 a^{-1}是 a 的逆元
    - 注意：
      - 对于任何二元运算，单位元是可逆的，其逆元就是其自身。

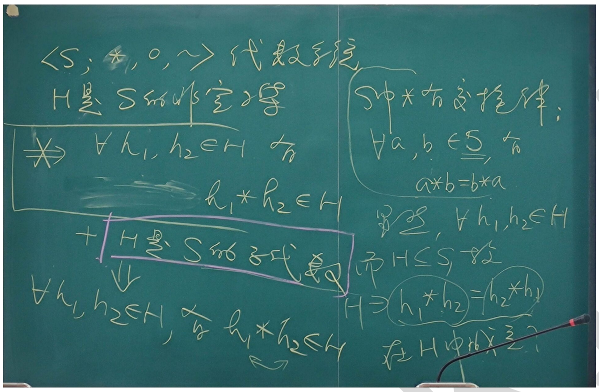
- 对于集合 S 上的二元运算 ⋆，
  - 单位元 e 和零元 θ 是全局的概念，它们是对 S 上的所有元素而言的。
  - 幂等元和逆元是局部的概念，它们只针对 S 中的某元素而言的
- 一个元素的左、右逆元不一定存在，若同时存在可以不是唯一的

*	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	e	c	a
b	b	a	c	c	b
c	c	e	a	b	c
d	d	a	b	b	b

  - 因为 e ⋆ e = e，所以 e 以自身为逆元。
  - 因为 c ⋆ a = e，a ⋆ b = e，所以 a 有左逆元 c，也有右逆元 b。
  - 因为 a ⋆ b = e，所以 b 有左逆元 a。但 b 没有右逆元。
  - 因为 c ⋆ a = e，所以 c 有右逆元 a。但 c 没有左逆元。
  - d 既没有左逆元，又没有右逆元
  - $(a,b)\circ(b,a)=(a,a)\neq(b,b)=(b,a)\circ(a,b)$
- 定理：
  - 设 ⋆ 是集合 S 上具有单位元 e 且可结合的二元运算，若元素 a ∈ S 有左逆元 a_l^{-1} 和右逆元 a_r^{-1}，则 a_l^{-1} =a_r^{-1}= a^{-1}且a^{-1} 是 a 唯一的逆元

- 4.2 代数系统与子代数
  - 一、代数系统的概念
    - 代数系统,域,有限代数系统
      - 非空集合 S 和定义在 S 上的若干个运算 o1，o2，…，on所组成的系统称为一个代数系统，记为 < S；o1，o2，…，on>，其中 S 称为该代数系统的域。
      - 当 S 为有限集时，称代数系统 < S；o1，o2，…，on > 为有限代数系统
      - 注意：
        - 代数系统中，运算 o1，o2，…，on 可以是任意有限阶的运算，运算的个数也可以是任意有限个。
        - 不同的代数系统可能具有一些共同的性质。
          - 可以把这组性质看作公理，研究满足这些公理的抽象的代数系统。
          - 在这样的代数系统中，由公理所推导出的任何结论（定理），对于满足这组公理的任何代数系统都是成立的
        - 研究用抽象的符号所表示的集合和运算这种代数系统。
        - 为简单起见，本章后面重点讨论**类型为 < S；o1，o2，~ > 的代数系统，其中 o1 和 o2 是二元运算，~ 是一元运算**。所引进的概念和讨论的结果都可以推广到任意类型的代数系统

- 为强调代数系统中二元运算特殊元（单位元、零元）的存在，可将这些特殊元列到系统的表达式中。如＜R；＋，×，0，1＞。在不发生混淆的情况下，也可以用域来标记一个代数系统

- 二、子代数的概念
  - 子代数或子系统，真子代数或真子系统
    - 设＜S；o1，o2，~＞是一个代数系统，H是S的一个**非空子集**，如果S上的每一个运算在H上都是封闭的，则称代数系统＜H；o1，o2，~＞是＜S；o1，o2，~＞的子代数系统，简称子代数或子系统。若H是S的真子集，则称代数系统<$H;o_1,o_2$~>是<$S;o_1,o_2$~>的真子代数或真子系统。
    - 设＜S；o1，o2，~＞，＜H；o1'，o2'，~'＞是代数系统，若o1'，o2'，~'分别为o1，o2，~在H上的限制，则称< H；o1'，o2'，~'＞为＜S；o1，o2，~＞的子代数
      - 

    - 注意：
      - （1）**子代数是一个代数系统**；代数系统是自身的一个子代数。
      - （2）**代数系统中运算所具有的性质在其子代数上依然成立**

- 4.3 代数系统的同态与同构
- 4.4 代数系统的积代数
  - 积代数，直积
    - 设有代数系统Vi＝＜Si；⋆i，∘i，~i＞，其中⋆i，∘i是二元运算，~i是一元运算，i＝1，2，…，n。V1，V2，…，Vn的积代数或直积是一个代数系统V＝＜S；⋆，∘，~＞，其中

$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in S_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$

对任意的 $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in S$,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) * (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 *_1 y_1, x_2 *_2 y_2, \ldots, x_n *_n y_n)$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \circ_1 y_1, x_2 \circ_2 y_2, \ldots, x_n \circ_n y_n)$$

$$\sim(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\sim_1(x_1), \sim_2(x_2), \ldots, \sim_n(x_n))。$$

V 一般表示为 $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$。

  - 定理：

- 设有代数系统 Vi = ，其中 ∗i，∘i 是二元运算，~i 是一元运算，i = 1，2，…，n，V = V1 × V2 × … × Vn = 其中 ∗ 和 ∘ 是二元运算，~ 是一元运算，则
  - ∗i 是可交换的运算，i = 1，2，…，n，则 ∗ 也是可交换的运算。
  - 若 ∗i 是可结合的运算，i = 1，2，…，n，则 ∗ 也是可结合的运算。
  - 若 ∗i 对 ∘i 是可分配的，i = 1，2，…，n，则 ∗ 对 ∘ 也是可分配的。
  - 若 ∗i 有单位元 ei，i = 1，2，…，n，则 ∗ 也有单位元 (e1，e2，…，en)。
  - 若 ∗i 有零元 θi，i = 1，2，…，n，则 ∗ 也有零元 (θ1，θ2，…，θn)。
  - 若元素 xi ∈ Si 对 ∗i 有逆元 xi−1，i = 1，2，…，n，则 (x1，x2，…，xn) ∈ S 对 ∗ 也有逆元 (x1−1，x2−1，…，xn−1)。
- 定理表明，与代数系统相联系的某些重要公理在这些系统的积代数中被保留