离散数学

- **离散数学Chapter 1： 集合**
  - **1.1 集合的基本概念**
    - **一、集合和元素**
      - **1.定义**
        - **集合,元素**
          - 把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来看待时，这个整体便称为一个集合。组成集合的那些个体称为集合的元素。
      - **2.特征**
        - 确定性
          - **集合中的元素是确定的。**一个个体，要么在集合中，要么不在集合中，两者必居其一。
        - 互异性
          - **集合中的元素之间是彼此不同的。**如{a，b} 中a与b是有区别的。
        - 不重复性
          - **集合中的元素是不重复的。**如{a，b，b，c} 与{a，b，c} 是一样的。
        - 无序性
          - **集合中的元素没有先后次序。**如{a，b，c} 与{c，b，a} 是一样的。
        - 抽象性
          - **集合中的元素是抽象的，甚至可以是集合。**如{1，2，{1，2}} 中元素{1，2}本身也是一个集合。
      - **3．常用集合的表示符号**
        - **数集**
          - Z或I：所有整数的集合。
            - Z*或N：所有自然数（包括0）即非负整数的集合。
            - Z+：所有正整数的集合。
            - Z−：所有负整数的集合。
            - N_{even}：非负偶数的集合。
            - N_{odd}：非负奇数的集合。
          - Q：所有有理数的集合。
          - R：所有实数的集合。
          - C：所有复数的集合。j为虚数单位。
        - **空集,全集**
          - 不含任何元素的集合称为空集，记为Φ或{}。

            - 一个包含了研究问题中涉及的所有对象的集合称为该问题的全域集合，简称全集，记作U或E。
            - **约定：**本书所讨论的集合一般不是空集。
    - ### 二、集合的表示方法

      集合由它所包含的元素完全确定。表示一个集合的方法很多。

        - #### 1．列举法
            - 通过将集合中的全部元素或部分元素置于花括号内而元素之间用逗号隔开来表示集合的方法，又称为枚举法。
                - 例如A={2，a，b，9}，B={0，1，4，9，16，…，n^2，…}。
            - 注意：
                - 当一个集合仅含有有限个元素或元素之间有明显关系时，常常采用列举法表示该集合。
                - 列举法必须将元素的全体都列出来，而不能遗漏任何一个。
                - 在能清楚表示集合成员之间关系的情况下可使用省略号，省略掉的元素能由列举出的元素以及它们前后的关系确定。
                - 列举法是显式法，其优点是表示集合简单明了，具有透明性。
        - #### 2．描述法
            - 通过集合中元素所具有的共同性质来表示该集合的方法。
            - 一般形式为A = {a | P(a)}。其中，符号P(x) 表示不同对象x共同具有性质P。
            - **注意：**
                - 用描述法表示一个集合的方式一般不唯一。如E={1，2，3，4} 可描述为{a| a ∈Z+，a ≤4} 或{a| a ∈Z+，a < 6，a| 12}。
                - 描述法是隐式法，其优点是原则上不要求列出集合中的全部元素。同时可以利用集合中元素的共性来研究该集合。
        - #### 3．递归定义法
            - 通过计算规则定义集合中的元素的方法。
                - 例如设a_0= 1，a_1= 1，a_{i+1} = a_i+ a_{i-1} （i≥1），集合F = {a_0，a_1，a_2，…} = {a_k| k ≥0}
        - #### 4．维恩图法
            - 一种利用平面上点的集合做成的对集合的图解方法，又称文氏图法。
            - 一般用平面上的圆形或方形表示一个集合。
    - ### 三、集合的基数
        - #### 基数,势,有限集,无限集
            - 集合A所含不同元素的个数称为A的基数或势，记作# A或 |A| 或card(A)。
            - 若# A是有限数，则称A为有限集，否则称A为无限集。
- ## 1.2 集合间的关系

- 一、集合的包含
  - 子集,包含集,真子集,包含关系,真包含关系
    - 设有集合A、B，如果A 的每一个元素都是B 的元素，则称A 是B 的子集或B 是A 的包含集，记作$A \subseteq B$或$B \supseteq A$。
    - 如果A 不是B 的子集，即A中至少有一个元素不属于B，则记作$A \nsubseteq B$或$B \nsupseteq A$。
    - 若$A \subseteq B$，且B 中至少有一个元素不属于A，则称A 是B 的真子集，记作$A \subset B$或$B \supset A$。
    - 若A 不是B 的真子集，则记作$A \not\subset B$或$B \not\supset A$。
    - 称$\subseteq$（或$\supseteq$）为包含关系，$\subset$（或$\supset$）为真包含关系。
    - **注意:**
      - （1）个体与集合的属于关系和集合与集合的包含关系是两种不同的关系，不能混淆。包含关系由属于关系定义。
      - （2）对集合A、B，可能同时有$A \in B$和$A \subseteq B$成立。
  - **定理1.1**
    - 集合的包含关系具有如下性质:
      - （1）对任意的集合A，有$\Phi \subseteq A$。
      - （2）对任意的集合A，有$A \subseteq A$。
      - （3）对任意的集合A，B，C，若$A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$。
- 二、集合的相等
  - 相等,不相等
    - 设有集合A，B，若$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A 与B 相等，记作$A = B$。否则称集合A 与B 不相等，记作$A \neq B$。
    - **注意:**
      - （1）$A = B$当且仅当A 与B具有完全相同的元素。
      - （2）$A \neq B$当且仅当$A \nsubseteq B$或$B \nsubseteq A$。
      - （3）$A \subset B$当且仅当$A \subseteq B$且$A \neq B$。
    - **定理1.2**
      - 空集是唯一的。
- 三、维恩图
  - 维恩图是集合论（或者类的理论）中在不太严格的意义下用以表示集合（或类）的一种草图。又称文氏图。
  - **注意:**
    - 维恩图适合用来表示集合（或类）之间的“大致关系”，也常常被用来帮助推导（或理解推导过程）关于集合运算（或类运算）的一些规律。
  - **在维恩图中，以一个矩形框（的内部区域）表示全集U，U 的各个子集用位于该矩形框内的圆/ 椭圆（的内部区域）来表示。**

- 两个圆/椭圆相交，其相交部分表示两个集合的公共元素。
- 两个圆/椭圆不相交（相离），则说明这两个集合没有公共元素。
- 在维恩图中两个圆/椭圆相切无意义，因为集合是以图形的内部区域来表示的。

- **四、幂集**
  - **幂集**
    - 由集合A的所有子集组成的集合称为A的幂集，记作P(A) 或2^A，即
    - $2^A = \{S|S \subseteq A\}$。
    - **注意:**
      - $x \in 2^A$ 当且仅当 $x \subseteq A$
  - **集合族**
    - 常称所有元素都是集合的集合为集合族。
    - 显然，集合的幂集为一个集合族。
  - **定理1.3**
    - 设A是有限集，则$\#(2^A) = 2^{\#A}$
- **五、有限集合幂集元素的编码表示**
  - 为便于在计算机中表示有限集合，可**对集合中的元素规定一种次序**，在集合和二进制数之间建立起一一对应的关系。
  - 设规定次序后的有限集合$A = \{a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n\}$，其中元素的下标代表着该元素在集合A中的次序
    - 对A的任意子集B，使之对应于一个n 位二进制数$b_1 b_2 \ldots b_n$，其中b_i= 1当且仅当a_i∈B。
    - 反之，对任意的n 位二进制数$b_1 b_2 \ldots b_n$，使之对应于A 的一个子集B= {$a_i | b_i$= 1}。
  - 含n个元素的集合的子集个数与n位二进制数的个数相同，这也说明了定理1.3的正确性。
  - **编码表示**

因此，可以对有限集合幂集的元素进行编码表示。

若 $A = \{a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n\}$，则 A 的幂集为

$$2^A = \{B_i \mid i \in J\},$$

其中 $J = \{j \mid j$ 是 n 位二进制数且 $\underbrace{000\ldots0}_{n个0} \le j \le \underbrace{111\ldots1}_{n个1}\}$。

例如 若集合 $A = \{a, \ b, \ c\}$，则 A 的幂集为 $2^A = \{B_{000}, \ B_{001}, \ B_{010}, \ B_{011}, \ B_{100}, \ B_{101}, \ B_{110}, \ B_{111}\}$。

如 $B_{000} = \Phi$，$B_{011} = \{b, \ c\}$ 等。

编码的二进制数可转换成十进制数，如 $B_3 = B_{011} = \{b, \ c\}$ 等。

- **1.3 集合的运算和运算定律**
  - **一、集合的运算**
    - **并集,并运算,交集,交运算,不相交,**

- 设A，B 是全集U 的任意两个子集合，
  - （1）由属于A 或B 的所有元素组成的集合称为A 与B 的并集，记作A ∪B，即A ∪B= {u| u ∈A 或u ∈B}。称∪为并运算。
  - （2）由既属于A 又属于B 的所有元素组成的集合称为A 与B 的交集，记作A ∩B，即A ∩B= {u| u ∈A 且u ∈B}。称∩为交运算。
  - 若A∩B= Φ，则称A 与B 不相交。
- **相对补集,差集,绝对补集,补运算**
  - （3）由属于A 而不属于B 的所有元素组成的集合，称为B 关于A 的相对补集，也称为A 与B 的差集，记作A –B，即A –B = {u| u ∈A 但u ∉B}。称–为r。
  - 集合A 关于全集合U 的相对补集，称为A 的绝对补集，简称为A 的补集，记作A′，即A′= U–A= {u| u ∈U， u ∉A} = {u| u∉A}。称′为补运算。
- **对称差,环和,对称差运算,环和运算,环积**
  - 由属于A 而不属于B 以及属于B 而不属于A 的所有元素组成的集合，称为A 与B 的对称差或环和，记作A ⊕B，即A ⊕B= (A –B)∪(B –A)。称⊕为对称差运算或环和运算。

    相当于异或运算（XOR）
    - $A \oplus B=(A \cup B)-(A \cap B)$
    - $A \oplus B=(A–B) \cup (B–A)=(A \cap B') \cup (A' \cap B)$
  - 称(A ⊕B)′为A 与B 的环积，记为A ⊗B，即A ⊗B= (A ⊕B)′。称⊗为环积运算。
- **定理1.4**
  - 对于全集U 的任意子集A、B、C，有
    - （1）A ⊆A ∪B，B ⊆A ∪B。
    - （2）A ∩B⊆A，A ∩B⊆B。
    - （3）A –B⊆A。
    - （4）A –A=Φ，A –Φ=A，A –U=Φ。
    - （5）A –B=A ∩B′，A –B=A–(A ∩B)。
    - （6）(A′)′= A，U′= Φ，Φ′= U。
    - （7）若A ⊆C，B⊆C，则A ∪B⊆C，A ∩B⊆C。
    - （8）若A ⊆B，A⊆C，则A ⊆B ∩C，A ⊆B ∪C。
    - （9）若A ⊆B，则B′⊆A′。反之也成立。
    - （10）A ⊆B，A ∪B=B，A ∩B=A，A –B=Φ相互等价。

二、集合运算的定律

1．集合并、交、补运算的十条定律

- **定理1.5**
  - 对于全集U 的任意子集A、B、C，有

- 交换律:
  - A ∪B= B ∪A
  - A ∩B= B ∩A
- 结合律:
  - A∪(B∪C) = (A∪B) ∪C
  - A∩(B∩C) = (A∩B) ∩C
- 分配律:
  - A∩(B∪C) = (A∩B) ∪(A∩C)
  - A∪(B∩C) = (A∪B) ∩(A∪C)
- 同一律:
  - A∪Φ= A
  - A∩U= A
- 互补律:
  - A ∪A′= U——排中律
  - A ∩A′= Φ——矛盾律
- 对合律:
  - (A′) ′= A——双重否定律
- 幂等律:
  - A∪A= A ,
  - A∩A= A
- 零一律:
  - A∪U= U
  - A∩Φ= Φ
- 吸收律:
  - A∪(A∩B) = A
  - A∩(A∪B)= A
- 德•摩根律:
  - (A∪B)′= A′∩B′
  - (A∩B)′= A′∪B′

- **注意:**
  - 有了结合律，多个集合做并运算（交运算），括号可以去掉，如A∪(B∪C) 记为A∪B∪C。
  - 引入记号:

注意：有了结合律，多个集合做并运算（交运算），括号可以去掉，如 $A\cup(B\cup C)$ 记为 $A\cup B\cup C$。

引入记号

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup\cdots\cup A_n = \{x \mid \exists k, k=1,2,\cdots,n, x\in A_k\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap\cdots\cap A_n = \{x \mid \forall k, k=1,2,\cdots,n, x\in A_k\}$$

分配律的推广

$$B\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i) \quad B\cup(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(B\cup A_i)$$

42

- **2．与环和、环积运算有关的性质**
  - **定理1.6**
    - 对于全集合U 的任意子集A、B、C，有
      - 交换律：
        - A ⊕B= B⊕A
        - A ⊗B= B⊗A
      - 结合律：
        - (A ⊕B) ⊕C= A ⊕(B⊕C)
        - (A ⊗B) ⊗C= A ⊗(B⊗C)
      - 同一律：
        - A⊕Φ= A，A⊕U= A′
        - A⊗U= A，A⊗Φ= A′
      - 零一律：
        - A⊕A= Φ，A⊕A′= U
        - A⊗A= U，A⊗A′= Φ
      - 其他律：
        - A ⊕B= A′⊕B′，A ⊗B= A′⊗B′
        - A′⊕B= A⊕B′= A⊗B
  - **3.小结**
    - 由性质A–B=A∩B′知，A⊕B=(A∩B′)∪(B∩A′)，故
      - 并、交、差、补、环和、环积运算化为并、交、补运算
    - 再由德•摩根律知，A∪B=(A′∩B′)′，A∩B=(A′∪B′)′，故
      - 并、交、补运算化为并、补运算或者交、补运算
    - 要求熟练掌握集合并、交、补的十条运算定律，了解与集合的环和、环积运算有关的性质。
    - 集合运算的优先级从高到低为：补；交，并；差
      - 可以使用圆括号控制集合运算的优先级，它具有最高的优先级。
      - 同级的并、交运算可按出现的先后顺序处理。
      - 例如 A–A ∩B，A∩B′–A∪B∩C′。

- 三、集合恒等式的证明方法
  - 1．根据定义证明
    - **要证明集合A= B，只需证明A⊆B 与B⊆A 同时成立。**
    - 等式“A–B= A∩B′”常被用于将集合的差运算转化为交运算与补运算。
  - 2．利用已有的集合恒等式证明
    - 例如假设交换律、分配律、同一律和零一律都成立，则可以证明吸收律A∩(A∪B)=A也成立。
  - 3.利用集合成员表证明
- 四、包含排斥原理
  - 根据集合运算的定义，对有限集合U 的任意子集A，B，显然以下各式成立。
    - （1）若A、B不相交，则# (A ∪B) = # A+ # B。
    - （2）max(# A，# B) ≤# (A ∪B) ≤# A+ # B。
    - （3）#(A ∩B) ≤min(# A，# B)。
    - （4）# A–# B≤# (A –B) ≤# A。
    - （5）若A ⊆B，则
      - # A≤# B；
      - #(B –A) = # B–# A。
    - （6）# A′= # U–# A。
      - 一般地，# (B –A) ≠# B–# A。
      - 反例：考虑集合A= {1，2}，B= {2，3}。
  - **定理1.7（包容排斥原理）**
    - 设A，B 为有限集合U的任意子集，则#(A ∪B) = # A+ # B–#(A ∩B)
    - **推论1.1**
      - 设A，B 为有限集合U的任意子集，则#(A ⊕B) = # A + #B–2#(A ∩B)。
    - **推论1.2：**
      - 设A1，A2，…，An为有限集合U的任意子集，则

$$
\begin{aligned}
\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = &\sum_{i=1}^{n} \# A_i - \sum_{1 \le i < j \le n} \#(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots \\
&+ (-1)^{n-1} \#(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)
\end{aligned}
$$

- 1.4 集合成员表
- 一、并、交和补集的成员表
  - 借助于数字0和1分别表示u∉A和u∈A，得到集合A和B的并、交运算后集合A∪B与A∩B的成员表如下。

$A \cup B$ 的成员表

A	B	$A \cup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$A \cap B$ 的成员表

A	B	$A \cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

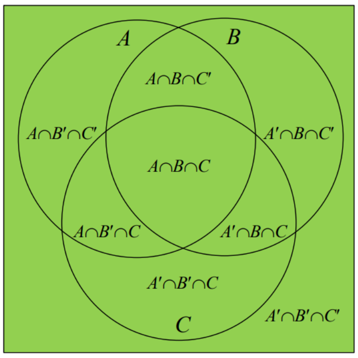
- **二、有限个集合产生的集合的成员表**
  - **产生的集合**
    - 设A_1，A_2，…，A_r是全集U的子集，对这些集合以及Φ和U有限次地施加补、并、交运算所得集合称为是由A_1，A_2，…，A_r产生的集合
- **三、利用集合成员表证明集合恒等式**
  - 在成员表中，若某列的各计入值全为0，则该列所标记的集合是空集Φ；反之，若全为1，则该列所标记的集合是全集U。
  - 如果成员表中标有S和T的两列中S的任何一个计入值为1的行都有T的计入值也为1（即∀u∈S都有u∈T），那么S⊆T。
  - 如果成员表中标有S和T的两列是恒同的（即S和T的列中任何一行的计入值都相等），那么S= T。
  - 因此可以由成员表来证明两个由全集U的子集所产生的集合是否相等。

- **1.5 集合的覆盖与分划**
  - **覆盖，覆盖块,分划，分划块**
    - A是非空集合，H = {A_1，A_2，…，A_m}，其中A_i⊆A且A_i≠Φ（i= 1，2，…，m）。
    - （1）若$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$，则称H是A的一个覆盖，每一个$A_i$（i= 1，2，…，m）称为该覆盖的一个覆盖块。
    - （2）若当i≠j时A_i∩A_j= Φ，则称覆盖H是A的一个分划或划分，每一个A_i（i= 1，2，…，m）称为该分划的一个分划块
    - 注意：
      - （1）集合A的分划要求A的每一个元素在且只在其中的一个分划块中。
      - （2）集合的一个分划一定是该集合的一个覆盖，但覆盖不一定是分划。
  - **细分，真细分**
    - 设S= {A_1，A_2，…，A_m}和T= {B_1，B_2，…，B_n}都是非空集合A的分划，如果T中的每个分划块都含于S的某个分划块中，即∀B_i ∈T，都存在A_j ∈S，使得B_i⊆A_j，则称分划T是分划S的一个细分。
    - 如果T是S的一个细分，且T中至少有一个分划块为S中某个分划块的真子集，则称T是S的真细分
    - **每个分划都是其自身的一个细分，但不是真细分。**

- **注意：** 在文氏图上，
    - 分划集合A 的过程可看作是在表示A 的区域上划出分界线。
    - 如果分划T 的分界线是在分划S 已有的分界线上至少加上了一根新的分界线所组成的，则T 就是S的真细分。
- **1.6 集合的标准形式**
  - **一、最小集标准形式**
    - **最小集**
      - 设A_1，A_2，...，A_r是全集U 的子集，形如$\bigcap_{i=1}^{r} S_i = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_r$的集合称为由$A_1$，$A_2$，...，Ar所产生的最小集，其中每个$S_i$为$A_i$或$A_i{}'$（i= 1，2，...，r）
      - 注意：
        - 最小集是包含所有r 个子集（A_i或$A_i{}'$，i= 1，2，...，r）的交集。
        - 由A_1，A_2，...，Ar所产生的最小集共有2^r个。
        - 最小集可能为空集。
        - 任意两个不同的最小集不相交
      - **例如：**

        例如 设 A，B，C 是全集 U 的子集，其产生的全部最小集为

        $A \cap B \cap C$
        $A \cap B \cap C'$
        $A \cap B' \cap C$
        $A \cap B' \cap C'$
        $A' \cap B \cap C$
        $A' \cap B \cap C'$
        $A' \cap B' \cap C$
        $A' \cap B' \cap C'$

        它们都不是空集。
        所有最小集的集合构成了全集 U 的一个划分。
      - **例如：**
        - 集合(A'∩B'∩C) ∪(A'∩B ∩C) ∪(A ∩B ∩C') ∪(A ∩B ∩C)的成员表为

$$(A' \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C') \cup (A \cap B \cap C)$$

A B C	$A' \cap B' \cap C = m_{001}$	$A' \cap B \cap C = m_{011}$	$A \cap B \cap C' = m_{110}$	$A \cap B \cap C = m_{111}$	$\cup m$
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	1	0	0	0	1
0 1 0	0	0	0	0	0
0 1 1	0	1	0	0	1
1 0 0	0	0	0	0	0
1 0 1	0	0	0	0	0
1 1 0	0	0	1	0	1
1 1 1	0	0	0	1	1

其中：$\cup m = m_{001} \cup m_{011} \cup m_{110} \cup m_{111}$

      - 在上表中，最小集 $m_{011}=A'\cap B\cap C$，当且仅当 $x\in A'$，$x\in B$，$x\in C$ 时，$x\in m_{011}$，即 m_{011} 所标记的列仅在行 011 处取 1，而在其它各行处均为 0 。
      - 再考察由 $A_1,A_2,...,A_r$ 产生的任意k $(1\le k\le 2^r)$ 个不同最小集的并集 $m_{\delta_{11}\delta_{12}\cdots\delta_{1r}}\cup m_{\delta_{21}\delta_{22}\cdots\delta_{2r}}\cup\cdots\cup m_{\delta_{k1}\delta_{k2}\cdots\delta_{kr}}$ 和它的成员表。
      - **作出其列为 $A_1,A_2,...,A_r,m_{\delta_{11}\delta_{12}\cdots\delta_{1r}},m_{\delta_{21}\delta_{22}\cdots\delta_{2r}},...,m_{\delta_{k1}\delta_{k2}\cdots\delta_{kr}}$ 和 $m_{\delta_{11}\delta_{12}\cdots\delta_{1r}}\cup m_{\delta_{21}\delta_{22}\cdots\delta_{2r}}\cup\cdots\cup m_{\delta_{k1}\delta_{k2}\cdots\delta_{kr}}$ 所标记的成员表。**
      - 上述并集所标记的列仅在 $\delta_{11}\delta_{12}...\delta_{1r}$，$\delta_{21}\delta_{22}...\delta_{2r}$，...，$\delta_{k1}\delta_{k2}...\delta_{kr}$ 这 k 行处为 1，在其它各行处为 0 。
  - **定理1.8**
    - 由A_1，A_2，...，A_r所产生的所有非空最小集的集合构成U 的一个分划。
    - 若定义$\delta_i=\begin{cases}1, & S_i=A_i\\0, & S_i=A_i'\end{cases}$，则最小集$S_1\cap S_2\cap...\cap S_r$可编码表示为$m_{\delta_1\delta_2...\delta_1}$。
  - **定理1.9**
    - 由A_1，A_2，...，Ar产生的每个集合S 或为空集或为由A_1，A_2，...，Ar 产生的不同最小集的并集
  - **最小集范式**
    - 当一个集合被表示为不同最小集的并集的形式时，此形式称为该集合的最小集标准形式或最小集范式。
    - **每一个非空集合必能表示成这种形式。**
- **二、最大集标准形式**
  - **最大集**
    - 设A_1，A_2，...，Ar是全集U 的子集，形如$\bigcup\limits_{i=1}^{r}S_i=S_1\cup S_2\cup...\cup S_r$的集合称为由$A_1$，$A_2$，...，Ar所产生的最大集，其中每个$S_i$为$A_i$或$A_i$'（i=1，2，...，r）。
    - **注意：**
      - 最大集是包含所有r 个子集（A_i或A_i'，i=1，2，...，r）的并集。
      - 由A_1，A_2，...，Ar所产生的最大集共有2^r个。
      - 最大集可能为全集。
      - 由A_1，A_2，...，Ar所产生的最大集的集合不构成U 的分划。因为两个不同的最大集可能相交。
        - 例如当集合B 非空时，(A'∪B) ∩(A∪B) = (A'∩A) ∪B= Φ∪B=B
  - **定理1.10**

- 由A_1，A_2，…，Ar产生的任一集合或为全集合U 或为由A_1，A_2，…，Ar产生的不同最大集的交集
- 最大集范式
  - 当一个集合被表示为不同最大集的交的形式时，此形式称为该集合的最大集标准形式或最大集范式。
  - **每个非全集的集合必能表示成这种形式。**
- **三、集合范式的说明**
  - **每一个集合都能表示为最小集范式和最大集范式。**
  - 一般地，若集合S的最小集和最大集范式分别为：
    $S = m_{\delta_{11}\delta_{12}\cdots\delta_{1r}} \cup m_{\delta_{21}\delta_{22}\cdots\delta_{2r}} \cup \cdots \cup m_{\delta_{h1}\delta_{h2}\cdots\delta_{hr}}$
    $S = M_{\delta'_{11}\delta'_{12}\cdots\delta'_{1r}} \cap M_{\delta'_{21}\delta'_{22}\cdots\delta'_{2r}} \cap \cdots \cap M_{\delta'_{k1}\delta'_{k2}\cdots\delta'_{kr}}$
  - 则行集合$\{\delta_{11}\delta_{12}\ldots\delta_{1r},\quad \delta_{21}\delta_{22}\ldots\delta_{2r},\ldots,\quad \delta_{h1}\delta_{h2}\ldots\delta_{hr}\}$与列集合$\{\delta_{11}'\delta_{12}'\ldots\delta_{1r}',\quad \delta_{21}'\delta_{22}'\ldots\delta_{2r}',\ldots,\delta_{k1}'\delta_{k2}'\ldots\delta_{kr}'\}$是不相交的，它们的并等于 S 的成员表中所有 2^r 个行的集合。因此, 如果 S 的最小集范式是 h 个最小集的并, 则最大集范式 就是 $k=2^r-h$ 个最大集的交。
  - 由此，如果S的最小集范式与最大集范式中有一种范式已知，则另一种范式便可直接构造出来。
  - **定理1.11**
    - 设S是由A1，A2，…，Ar产生的集合，若不计最小集（最大集）的排列次序，则S的最小集（最大集）范式唯一。
  - **推论1.3**
    - 由A1，A2，…，Ar产生的两个集合相等的充分必要条件是它们最小集（最大集）范式相同。
- **1.7 多重集合**
  - **多重集合，多重集，元素，重复度**
    - 由一些确定但可重复出现的事物构成的整体称为多重集合，简称多重集，其中的每一个事物称为该多重集的一个元素。
    - 若元素x 在多重集S 中出现k（≥0）次，则称x 在S 中的重复度为k。
  - 设有多重集合A和B
    - A 和B 的并集记作A∪B，其中每个元素的重复度为该元素在A 和B 中的重复度的最大值。
    - A 和B 的交集记作A∩B，其中每个元素的重复度为该元素在A 和B 中的重复度的最小值。
    - B 对A 的补集记作A–B，其中当某元素在A 中的重复度减去在B 中的重复度的差为正数时，就令该正数为此元素在A–B 中的重复度，否则为零。
- **离散数学Chapter 2： 关系**
  - **2.1 笛卡尔积与关系**
    - 一、笛卡尔积

- 1. 序偶
  - 序偶，有序对，分量，坐标
    - 由两个具有给定次序的个体 a，b 组成的序列称为序偶或有序对，记作 (a，b) 或 <a，b>，其中 a，b 常称为该序偶的第 1 个和第 2 个分量或坐标。a，b 可以相同。
  - 序偶相等，序偶不相等
    - 设 (a，b) 和 (c，d) 是两个序偶，若 a = c 与 b = d 同时成立，则称这两个序偶相等，并记作 (a，b) = (c，d)。否则，称这两个序偶不相等，记为 (a，b) ≠(c，d)。
  - 有序n元组，分量，坐标
    - 由 n 个具有给定次序的个体 a1，a2，…，an 组成的序列称为有序 n 元组，记作 (a1，a2，…，an)，其中第 i 个元素 ai常称为该有序 n 元组的第 i 个分量或坐标。
  - 有序n元组相等
    - 设 (a1，a2，…，an) 和 (b1，b2，…，bn) 是两个有序 n 元组，若 a1 = b1，a2 = b2，…，an = bn 同时成立，则称这两个有序 n 元组相等，并记作 (a1，a2，…，an) = (b1，b2，…，bn)。
- 2. 笛卡尔积
  - 笛卡尔积的定义，n阶笛卡尔积

    定义 2.5 设 A，B 为任意集合，称集合
    $$\{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$
    为 A 与 B 的**笛卡尔积**，也称**直积**或**叉积**，记作 $A \times B$。

    注意：
    （1）两集合的笛卡尔积仍然是一个集合。
    （2）两集合的笛卡儿积的元素为序偶，序偶的第一个分量必在第一个集合中，第二个分量必在第二个集合中。

    定义 2.6 设 A_1，A_2，…，A_n 为任意集合，称集合
    $$\{(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$
    为 A_1，A_2，…，A_n 的 **n 阶笛卡儿积**，记为 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$。
    特别将 $A \times A \times \ldots \times A$（$n$ 个 A）简记为 A^n。
  - 笛卡尔积的性质

    视两个集合的笛卡儿积为一种运算，它有如下的性质。
    - 不满足交换律 $A \times B \neq B \times A$（$A \neq B$ 且 A、B 都不是空集）
    - 不满足结合律 $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$（$A$、$B$、$C$ 均非空）
    - $A \times B = \Phi$ 当且仅当 $A = \Phi$ 或 $B = \Phi$。
    - $A \times B \subseteq C \times D$ 当且仅当 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$。
    - $A \times B = C \times D$ 当且仅当 $A = C$ 且 $B = D$。

    A、B、C、D 都不是空集
    - 若 $C \neq \Phi$，则 $A \subseteq B$ 当且仅当 $A \times C \subseteq B \times C$ 当且仅当 $C \times A \subseteq C \times B$。

    不封闭!
  - 与笛卡尔积有关的一些恒等式

- $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$。
- $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$。
- $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$。
- $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$。
- $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$。
- $(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$。

- 笛卡尔积的基数

由笛卡尔积的定义和排列组合知识可得如下结论。

定理 2.2 当 A，B 均是有限集时，$A\times B$ 必为有限集，且

$$\#(A\times B)=\#A\cdot\#B$$

注意：

- 当**非空集合** A 和 B 中有一个是无限集时，$A\times B$ 必为无限集。
- 定理的结论可推广到有限个有限集的情形。

- 二、关系的基本概念
  - 1．关系的定义
    - 二元关系，n元关系，有关系，没关系。（简称二元关系为关系）

定义 2.7 设 A，B 为任意集合，集合 $A\times B$ 的任意一个子集称为一个**由 A 到 B 的二元关系**。当 $A=B$ 时称为 **A 上的二元关系**。

定义 2.8 设 A_1，A_2，…，A_n 为任意集合，集合 $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ 的任意一个子集称为**由 A_1，A_2，…，A_{n-1} 到 A_n 的一个 n 元关系**。

当 $A_1=A_2=\ldots=A_n=A$ 时称为 **A 上的 n 元关系**。

本章以研究二元关系为主，简称二元关系为**关系**。

定义 2.9 设 R 是由集合 A 到 B 的关系，若 $(a,b)\in R$，则称 **a 与 b 有关系 R**，又记作 $a\,R\,b$。

若 $(a,b)\notin R$，则称 **a 与 b 没有关系 R**，又记作 $a\,R'\,b$。

- 二元关系的个数

由有限集 A 到有限集 B 的二元关系的个数为

$$\#(2^{A\times B})=2^{\#(A\times B)}=2^{\#A\cdot\#B}$$

- 注意：

（1） a 与 b 没有关系 R，不能说明 a 与 b 没有关系，可能有其他关系。

例如 设 $R_1=\{(a, 2), (a, 8), (b, 2)\}$，$R_2=\{(a, 5), (b, 2), (b, 5)\}$ 是由集合 $A=\{a, b\}$ 到 $B=\{2, 5, 8\}$ 的关系，显然 $a R_1' 5$ 但 $a R_2 5$。

（2） 数学上抽象定义的关系，有的在直观上已无法再用自然语言来描述了。

- 2．几种特殊的关系
  - 空关系，全关系，普遍关系，恒等关系

定义 2.10 对任意的集合 A 与 B，

- 称空集 Φ 为**空关系**。
- 称 $A\times B$ 为**由 A 到 B 的全关系**或**普遍关系**。
- 称 $A\times A$ 为 **A 上的全关系**或**普遍关系**。
- 常将 $A\times A$ 记作 $U_A=\{(a_i, a_j) \mid a_i, a_j \in A\}$。
- 称集合 $\{(a, a) \mid a\in A\}$ 为 **A 上的恒等关系**，记为 I_A。

- 3．关系的定义域和值域

dom for domain,ran for range

  - 定义域domR，值域ranR，前域，后域

定义 2.11 设 R 是一个由集合 A 到 B 的关系，

（1） R 中所有序偶的第一个分量构成的集合称为 R 的**定义域**，记作 dom$R$，即

$$\mathrm{dom}R=\{a \mid a\in A \text{ 且存在 } b\in B\text{，使得 } a R b\}$$

（2） R 中所有序偶的第二个分量构成的集合称为 R 的**值域**，记作 ran$R$，即

$$\mathrm{ran}R=\{b \mid b\in B \text{ 且存在 } a\in A\text{，使得 } a R b\}$$

显然有

$$\mathrm{dom}R\subseteq A,\quad \mathrm{ran}R\subseteq B$$

此时，A 称为关系 R 的**前域**，B 称为关系 R 的**后域**。

2.2 关系的表示方法

- 一、集合表示法
  - 用表示集合的列举法或描述法来表示关系
  - 不足：
    - 不能直观地看出关系的特点和性质
    - 不便于计算机处理
- 二、矩阵表示法
  - 关系矩阵，布尔矩阵

定义 2.12 设 A，B 都是有限集，$A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$，由 A 到 B 的关系 R 可用一个 $n\times m$ 的矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 来表示，$\boldsymbol{M}_R$ 的 (i, j) 项元素即第 i 行第 j 列交叉处元素 r_{ij} 取值如下：

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & 若 a_i\, R\, b_j \\ 0, & 若 a_i\, R'\, b_j\end{cases} \quad i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, m$$

称矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 为 R 的关系矩阵。

关系矩阵是一个 0-1 矩阵，称为布尔矩阵。

- 注意：
  - 关系矩阵依赖于集合元素的排序！集合 A，B 的元素需要先规定一种次序。
- 三、关系图表示法
  - 定义：
    - 关系图由结点和边组成：
      - 用小圆圈代表集合中的元素，在图中称为结点。
      - 用从结点 a 指向结点 b 的有向单边表示序偶 (a，b)。
      - 特别当 A = B 时，用绕结点 a 且指向自身的带箭头的小圆圈表示序偶 (a，a)，其中方向任意。
  - 注意：
    - 用矩阵来表示关系，为计算机处理关系带来了极大的方便。
    - 用关系图的方式表示关系，便于关系的直观。
    - 表示 (a，a) 的单边，如例2.10的关系图中 (1，1) 等，被称为自环。
    - 在画关系图时：
      - 结点位置的排列、边的长短及形状均无关紧要。
      - 如果 A ≠ B，则需要将 A 和 B 中的元素都画出来
      - 如果 A = B，则只需画出 A 中的所有元素即可
- **2.3 关系的运算**
  - 一、关系的并、交、差、补运算
    - 定义：$R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2$， $R_1 - R_2, (R_1)'$

若 R_1 和 R_2 都是由集合 A 到 B 的关系，则

$$R_1 \subseteq A\times B,\quad R_2 \subseteq A\times B$$

于是

$$R_1\cup R_2,\ R_1\cap R_2,\ R_1-R_2,\ (R_1)'=A\times B-R_1\subseteq A\times B$$

因此 $R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$，R_1-R_2 和 $(R_1)'$ 也都是由 A 到 B 的关系。

关系是一种特殊的集合，因此可对它进行集合的所有基本运算（并、交、差、补等）而产生新的关系。

以前有关集合运算的一些结论在关系中也同样适用。

  - 二、关系的逆运算
    - 1.逆关系的定义
      - 逆关系，关系的逆运算

定义 2.13 设 A，B 是两个集合，R 是由 A 到 B 的关系，则由 B 到 A 的关系

$$\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

称为关系 R 的**逆关系**，记为 R^{-1}。

这种由关系 R 得到逆关系 R^{-1} 的运算称为**关系的逆运算**。

- 显然
  - $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{ran}(R)$，$\mathrm{ran}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$。
  - 逆关系 R^{-1} 的关系矩阵是 R 的关系矩阵的转置。
  - 逆关系 R^{-1} 的关系图是将 R 的关系图中的有向边改变方向。

- 2.关系逆运算的性质

定理 2.3 设 R_1，R_2 都是由集合 A 到 B 的关系，则下列各式成立：

（1）$(R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1)^{-1} \cup (R_2)^{-1}$。

（2）$(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1)^{-1} \cap (R_2)^{-1}$。

（3）$(R_1 - R_2)^{-1} = (R_1)^{-1} - (R_2)^{-1}$。

（4）$((R_1)')^{-1} = ((R_1)^{-1})'$。

（5）$((R_1)^{-1})^{-1} = R_1$。

（6）若 $R_1 \subseteq R_2$，则 $(R_1)^{-1} \subseteq (R_2)^{-1}$。

（7）若 $R_1 = R_2$，则 $(R_1)^{-1} = (R_2)^{-1}$。

- 给出（3）的证明：

$$(R_1 - R_2)^{-1} = (R_1)^{-1} - (R_2)^{-1}。$$

对任意的 (x, y)，

$$
\begin{aligned}
& (x, y) \in (R_1 - R_2)^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & (y, x) \in R_1 - R_2 \\
\Leftrightarrow\ & (y, x) \in R_1 \text{ 但 } (y, x) \notin R_2 \\
\Leftrightarrow\ & (x, y) \in (R_1)^{-1} \text{ 但 } (x, y) \notin (R_2)^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & (x, y) \in (R_1)^{-1} - (R_2)^{-1}
\end{aligned}
$$

- 三、关系的复合运算
  - 1.复合关系的有关定义
    - 复合关系，关系的复合运算

定义 2.14 设 A，B，C 是三个集合，R_1 是由 A 到 B 的关系，R_2 是由 B 到 C 的关系，则 R_1 和 R_2 的**复合关系**，记为 $R_1 \circ R_2$（简记为 R_1R_2），是一个由 A 到 C 的关系，且

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{且存在 } b \in B, \text{使得 } a R_1 b, b R_2 c\}$$

这种由 R_1 和 R_2 求复合关系 $R_1 \circ R_2$ 的运算称为**关系的复合运算**。

- 注意：

注意：

（1）关系 R_1 与 R_2 能复合的前提是：$\mathrm{ran}R_1$ 与 $\mathrm{dom}R_2$ 是同一个集合 B 的子集。

（2）若 $\mathrm{ran}R_1 \cap \mathrm{dom}R_2 = \Phi$，则对任意的 $a \in A$ 及 $c \in C$，不存在 $b \in B$，使得 $a\,R_1\,b$ 与 $b\,R_2\,c$ 同时成立，因而复合关系 $R_1 \circ R_2$ 是空关系。

（3）$R_1 \circ \Phi = \Phi \circ R_2 = \Phi$。

（4）$\mathrm{dom}(R_1 \circ R_2) \subseteq \mathrm{dom}R_1 \subseteq A$，$\mathrm{ran}(R_1 \circ R_2) \subseteq \mathrm{ran}R_2 \subseteq C$。

求复合关系 $R_1 \circ R_2$ 中的序偶时，可简单地只考虑 R_1 与 R_2 中序偶。

- 一般，关系的复合运算不满足交换律。

- R的n次幂

定义 2.15 设 R 是集合 A 上的关系，则 *R 的 n 次幂*定义为

$$R^0 = I_A,\quad R^{n+1} = R^n \circ R\ (n \in \mathbf{N})$$

定理 2.7 设 R 是集合 A 上的二元关系，则对任意的 m，$n \in \mathbf{N}$，

（1）$R^m \circ R^n = R^{m+n}$。

（2）$(R^m)^n = R^{mn}$。

48

- 2.关系复合运算的性质
  - 与恒等关系复合
    - 设 R 是由集合 A 到 B 的关系，则 $I_A \circ$ R = R $\circ\, I_B$ = R
    - 注意：恒等关系在关系的复合运算中不起作用
  - 结合律：
    - 设 R1 是由集合 A 到 B 的关系，R2 是由集合 B 到 C 的关系，R3 是由集合 C 到 D 的关系，则有 (R1∘ R2) ∘ R3 = R1∘ (R2∘ R3)
  - 一般的：

一般地，若 R_1 是一由集合 A_1 到 A_2 的关系，R_2 是一由集合 A_2 到 A_3 的关系，…，R_n 是一由集合 A_n 到 A_{n+1} 的关系，则不加括号的表达式 $R_1 \circ R_2 \circ \ldots \circ R_n$ 唯一地表示一由集合 A_1 到 A_{n+1} 的关系。在计算这一关系时，可以运用结合律将其中任意两个相邻的关系先结合。

  - **分配律**

定理 2.8 设 R_1 是由集合 A 到 B 的关系，R_2 和 R_3 都是由集合 B 到 C 的关系，R_4 是由集合 C 到 D 的关系，则

（1）$R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$。

（2）$(R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4)$。

关系的复合运算对并运算具有分配律

（3）$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$。

（4）$(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$。

关系的复合运算对交运算不具有分配律

  - 子集关系（即关系的复合运算对交运算）

定理 2.8 设 R_1 是由集合 A 到 B 的关系，R_2 和 R_3 都是由集合 B 到 C 的关系，R_4 是由集合 C 到 D 的关系，则

（3）$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$。

（4）$(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$。

  - 逆关系
    - 原性质：$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$
    - 推论：

推论 2.1 设 R_1，R_2，…，R_n 是集合 A 上的关系，则有

$$(R_1 \circ R_2 \circ \ldots \circ R_n)^{-1} = R_n^{-1} \circ \ldots \circ R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$$

推论 2.2 设 R 是集合 A 上的关系，则对任意正整数 n，有

$$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$$

- 3.求复合关系的方法
  - 1）根据复合关系的定义求复合关系
    - 注意：该方法的优点是直观，但是如果关系中包含的序偶太多时，容易出错。
  - 2）运用关系矩阵的运算求复合关系
    - 布尔运算
      - 布尔加法，布尔乘法

布尔加法运算 $\vee$ 定义如下：

$$0 \vee 0 = 0，0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$$

布尔乘法运算 $\wedge$ 定义如下：

$$1 \wedge 1 = 1，0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0$$

例如 $(1 \wedge 0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) = 1$。

      - 注意：

在一个布尔加运算表达式中，当且仅当至少有一个加项为1（如全1作布尔乘：$1 \wedge 1 \wedge \cdots \wedge 1$）时，该表达式等于 1，否则为 0。

在一个布尔乘运算表达式中，当且仅当至少有一个乘项为0（如全0作布尔加：$0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0$）时，该表达式等于 0，否则为 1。

    - 关系矩阵的布尔加法

定义 2.16 设 $\boldsymbol{M}_1$，$\boldsymbol{M}_2$ 是 $(i，j)$ 项元素分别为 $r_{ij}^{(1)}$ 和 $r_{ij}^{(2)}$ 的 $m \times n$ 关系矩阵，则 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 的**布尔加法**，记为 $\boldsymbol{M}_1 \vee \boldsymbol{M}_2$，是一个 $m \times n$ 矩阵，其 $(i，j)$ 项元素为

$$r_{ij} = r_{ij}^{(1)} \vee r_{ij}^{(2)}，\ i = 1，2，\ldots，m；\ j = 1，2，\ldots，n$$

关系矩阵的布尔加法的运算法则与一般矩阵的加法是相同的，只是其中数的加法运算为布尔加。

显然，布尔矩阵 $\boldsymbol{M}$ 满足 $\boldsymbol{M} \vee \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}$。

    - 关系矩阵的布尔乘法

定义 2.17 设 $\boldsymbol{M}_1$ 是一个 $(i，k)$ 项元素为 $r_{ik}^{(1)}$ 的 $l \times m$ 关系矩阵，$\boldsymbol{M}_2$ 是一个 $(k，j)$ 项元素为 $r_{kj}^{(2)}$ 的 $m \times n$ 关系矩阵，则 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 的**布尔乘法**，记为 $\boldsymbol{M}_1 \circ \boldsymbol{M}_2$，是一个 $l \times n$ 矩阵，其 $(i，j)$ 项元素为

$$r_{ij} = \bigvee_{k=1}^{m} (r_{ik}^{(1)} \wedge r_{kj}^{(2)})，\ i = 1，2，\ldots，l；\ j = 1，2，\ldots，n$$

关系矩阵的布尔乘法的运算法则与一般矩阵的乘法是相同的，只是其中数的加法运算和乘法运算应改为布尔加和布尔乘。

    - 复合关系的关系矩阵
      - 布尔乘法

定理 2.9 设 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$，$C=\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ 均是有限集，R_1 是由 A 到 B 的关系，R_2 是由 B 到 C 的关系，它们的关系矩阵分别为$\boldsymbol{M}_{R_1}$和$\boldsymbol{M}_{R_2}$，则复合关系 $R_1 \circ R_2$ 的关系矩阵$\boldsymbol{M}_{R_1 \circ R_2} = \boldsymbol{M}_{R_1} \circ \boldsymbol{M}_{R_2}$。

推论 2.3 设 $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ 是有限集合，$R_1, R_2, \ldots, R_n$ 分别是由 A_1 到 A_2，由 A_2 到 A_3，…，由 A_n 到 A_{n+1} 的关系，它们的关系矩阵分别为$\boldsymbol{M}_{R_1}$，$\boldsymbol{M}_{R_2}$，⋯，$\boldsymbol{M}_{R_n}$，则有

$$\boldsymbol{M}_{R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_n} = \boldsymbol{M}_{R_1} \circ \boldsymbol{M}_{R_2} \circ \cdots \circ \boldsymbol{M}_{R_n}$$

推论 2.4 设 R 是有限集合 A 上的关系，$\boldsymbol{M}$ 为其关系矩阵，则有

$$\boldsymbol{M}_{R^n} = \boldsymbol{M}^n$$

- 3）利用关系图求复合关系 R^n
  - 方法

设 R 是有限集合 A 上的关系，则复合关系 R^n 也是 A 上的关系。

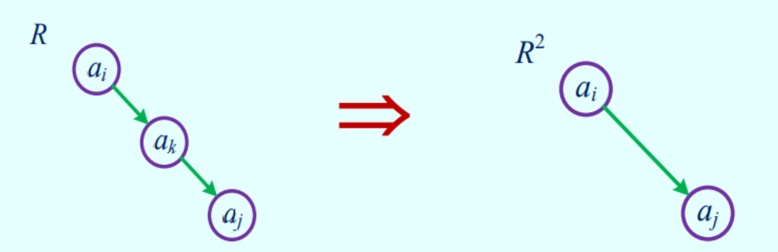
在 R^n 的关系图中，有边由结点 a_i 指向 $a_j \Leftrightarrow$

在 R 的关系图中，存在 $n-1$ 个结点a_{k_1}，a_{k_2}，⋯，$a_{k_{n-1}}$，使得有边由 a_i 指向a_{k_1}，由a_{k_1}指向a_{k_2}，…，由$a_{k_{n-1}}$指向 a_j。

对于关系图中结点 a_i 和 a_j，若存在 $n-1$ 个结点a_{k_1}，a_{k_2}，⋯，$a_{k_{n-1}}$，使得$a_i\ R\ a_{k_1}$，$a_{k_1}\ R\ a_{k_2}$，…，$a_{k_{n-1}}\ R\ a_j$时，则称从结点 a_i 到 a_j 有一条**长为 n 的路**（$n \geq 0$）。

根据 R 的关系图构造出 R^n 的关系图：

对于 R 的关系图中的每一结点 a_i，找出从 a_i 经过长为 n 的路能够到达的所有结点，这些结点在 R^n 的关系图中，边必须由 a_i 指向它们。



- **2.4 关系的性质**
  - 一、关系性质的定义
    - 自反、非自反、反自反

若对于所有的 $x \in A$，均有 $x\,R\,x$，则称 R 在 A 上是**自反的**。
否则 R 是**非自反的**。

若对于所有的 $x \in A$，均有 $x\,R'\,x$，则称 R 在 A 上是**反自反的**。

自反：所有；反自反对于任意（a,b）一定没有（b,a）；非自反不全都有（b,a）

- 例子：

【例 2.18】设集合 $A=\{0, 1, 2, 3\}$，判断下列关系是否为自反关系或反自反关系。

$R_1=\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ 自反

$R_2=\{(0, 0), (1, 2), (3, 3), (2, 2), (1, 1), (2, 3)\}$ 自反

$R_3=\{(2, 1), (0, 0), (3, 3)\}$ 非自反、非反自反

$R_4=\{(0, 1), (2, 3), (1, 2)\}$ 反自反

- 注意:
  - （1）集合 A 上的恒等关系是自反关系，但自反关系却不一定是恒等关系。
  - （2）反自反的关系一定是非自反的关系。反之不一定。
- 对称、非对称、反对称

对于所有的 $x, y \in A$，若每当有 $x\,R\,y$ 就必有 $y\,R\,x$，则称 R 在 A 上是**对称的**。否则 R 是**非对称的**。

对于所有的 $x, y \in A$，若每当有 $x\,R\,y$ 和 $y\,R\,x$ 就必有 $x=y$，则称 R 在 A 上是**反对称的**。

反对称：如果有两个关系，则相等

对称：如果有一个关系，则一定有另外一个关系；

- 例子:

【例 2.19】设集合 $A=\{0, 1, 2, 3\}$，判断下列关系是否为对称关系或反对称关系。

$R_1=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ 对称，非反对称

$R_2=\{(1, 2), (1, 1), (0, 2), (3, 1)\}$ 非对称，反对称

$R_3=\{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ 非对称，非反对称

$R_4=\{(0, 0), (2, 2), (1, 1)\}$ 对称，反对称

- 注意:
  - （1）若 R 是集合 A 上的反对称关系，则由定义知，在 R中 (x，y) 与 (y，x) 至多有一个出现，其中 x≠y。

【例 2.19】设集合 $A=\{0, 1, 2, 3\}$，判断下列关系是否为对称关系或反对称关系。

$R_1=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ 对称，非反对称

$R_2=\{(1, 2), (1, 1), (0, 2), (3, 1)\}$ 非对称，反对称

$R_3=\{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ 非对称，非反对称

$R_4=\{(0, 0), (2, 2), (1, 1)\}$ 对称，反对称

  - （2）对称关系与反对称关系没有联系。
  - （3）集合 A 上的恒等关系既是对称的也是反对称的。
- 可传递、不可传递

对于所有的 $x, y, z \in A$，若每当有 $x\,R\,y$ 和 $y\,R\,z$ 就必有 $x\,R\,z$，则称 R 在 A 上是**可传递的**。否则 R 是**不可传递的**。

- 注意:
  - A 上的恒等关系是可传递关系。
- 二、关系性质的判断
- 1. 集合运算的方法

（1） R 在 A 上 自反 当且仅当 $I_A \subseteq R$。

（2） R 在 A 上 反自反 当且仅当 $R \cap I_A = \Phi$。

（3） R 在 A 上 对称 当且仅当 $R = R^{-1}$。

（4） R 在 A 上 反对称 当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。

（5） R 在 A 上 传递 当且仅当 $R \circ R \subseteq R$。

- 2．关系矩阵的方法

  反之也成立！

  - 设 R 为有限集合 A 上的关系，M 为 R 的关系矩阵。
    - 若 R 是自反的，则 M 的主对角线上所有元素均为 1。
    - 若 R 是反自反的，则 M 的主对角线上所有元素均为 0.
    - 若 R 是对称的，则 M 为对称矩阵。
    - 若 R 是反对称的，则在 M 中，关于主对角线对称的元素不同时为 1，即 i$\neq$j 时，r_{ij} 与 r_{ji} 这两个数中至多一个是 1，但允许两个均为 0，亦即 $r_{ij}=r_{ji}=0$。
    - 若 R 是可传递的，则在 M^2 中 1 所在的位置，M 中相应的位置上也是 1（因为 R∘R⊆R）。

- 3．关系图的方法
  - 设 R 为有限集合 A 上的关系，G 为 R 的关系图。
    - 若 R 是自反的，则 G 中每一结点引出一个指向自身的单边环。
    - 若 R 是反自反的，则 G 中每一结点均没有单边环。
    - 若 R 是对称的，则 G 中，若两结点之间存在有边，则必存在两条方向相反的边。
    - 若 R 是反对称的，则 G 中任意两个不同的结点间至多只有一条边。
    - 若 R 是可传递的，则 G 中，若每当有边由结点 ai 指向结点ak，且又有边由结点 ak 指向结点 aj，则必有一条边由结点 ai 指向结点 aj。

- 4．判别法小结
  - 关系性质的集合、关系矩阵和关系图判别法如表所示。

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表示	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \Phi$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是 1	主对角线元素全是 0	对称矩阵	当 $i \neq j$ 时，r_{ij} 与 r_{ji} 中至多有一个为 1，即 $r_{ij} \cdot r_{ji} = 0$	对 M^2 中 1 所在的位置，M 中相应的位置都是 1
关系图	每个结点都有单边环	所有结点都没有单边环	如果两个结点之间有边，则一定是一对方向相反的边（无单边）	如果两个结点之间有边，则一定是一条有向边（无双向边）	若有由结点 a_i 指向结点 a_k 的边，及由结点 a_k 指向结点 a_j 的边，则有一条由结点 a_i 指向结点 a_j 的边

  - 关系的性质与关系运算之间的联系

设 R_1 和 R_2 是 A 上具有共同性质的两个关系，则

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

- 5．关系的个数

3．设集合 $A=\{1，2，3\}$，则在集合 A 上可定义多少个

（1）自反的二元关系？

（2）反自反的二元关系？

（3）对称的二元关系？

（4）反对称的二元关系？

（5）既对称又反对称的二元关系？

【分析】考虑自反、反自反、对称、反对称二元关系的关系矩阵的特点。

- (1) (2) $2^{n\times n-n}=2^{n^2-n}$
- (3) $2^{\sum_{i=1}^{n-1} i}\times 2^n=2^{\frac{n^2+n}{2}}$
- (4) $3^{\sum_{i=1}^{n-1} i}\times 2^n=2^n\times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$
- (5) 2^n

- ## 2.5 关系的闭包
  - ### 一、关系闭包的定义
    - 闭包，闭包运算
      - 对集合 A 上给定的关系 R 和一种性质 P，包含 R 且满足性质 P 的最小关系称为 R 对于 P 的闭包，记作 P(R)。
      - 构造闭包的运算称为闭包运算。
    - 自反闭包

      r for reflexive
      - $r(R)=R\cup I_A$为 R 的自反闭包。
        - 性质

          设 R 是集合 A 上的关系，则 $\mathrm{r}(R)=R\cup I_A$ 具有以下性质：

          （1）$R\subseteq \mathrm{r}(R)$。（2）$\mathrm{r}(R)$ 是自反的。

          （3）对于 A 上任何关系 Q，若 Q 自反且 $R\subseteq Q$，则 $\mathrm{r}(R)\subseteq Q$。
    - 对称闭包

      s for Symmetrical
      - $s(R)=R\cup R^{-1}$为 R 的对称闭包。
        - 性质

设 R 是集合 A 上的关系，则 $s(R)=R\cup R^{-1}$ 具有以下性质：

（1）$R\subseteq s(R)$。　　（2）$s(R)$ 是对称的。

（3）对于 A 上任何关系 Q，若 Q 对称且 $R\subseteq Q$，则 $s(R)\subseteq Q$。

- 传递闭包

  t for Transitive

  - $t(R)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R_i=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$为 R 的传递闭包。
    - 性质

      设 R 是集合 A 上的关系，则 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$ 具有以下性质：

      （1）$R\subseteq t(R)$。　　（2）$t(R)$ 是可传递的。

      （3）对于 A 上任何关系 Q，若 Q 可传递且 $R\subseteq Q$，则 $t(R)\subseteq Q$。

    - 定理：

      定理 2.12 设 A 为非空有限集合，$\#A=n$，R 是 A 上的关系，则存在正整数 $k\le n$，使得 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^k$。

      【证明】对任意的 a，$b\in A$，若 $a\,t(R)\,b$ 成立，则存在正整数 p 使得 $a\,R^p\,b$，进而存在序列 $x_0=a$，x_1，x_2，…，x_{p-1}，$x_p=b$，使得对 $0\le i\le p-1$ 有 $x_i\,R\,x_{i+1}$。

      设满足上述条件的最小 p（记为 k）大于 n，则由 x_0，x_1，…，$x_p\in A$ 及假设 $\#A=n$ 知，在上述序列中必有 $0\le s<t\le k$，使得 $x_s=x_t$，因此序列可简缩为

      $$\underbrace{x_0Rx_1,\ x_1Rx_2,\ \ldots,\ x_{s-1}Rx_s}_{s}\ \underbrace{x_tRx_{t+1},\ \ldots,\ x_{k-1}Rx_k}_{k-t}$$

      这表明存在正整数 $q=s+k-t$，使得 $a\,R^q\,b$，而 $q=k-(t-s)<k$，此与 k（最小的 p）的假设矛盾，故 $k>n$ 不成立。

      从而命题得证。

      - 例题：

        【例 2.25】设集合 $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$，A 上的关系

        $$R=\{(a,\ b),\ (b,\ a),\ (b,\ c),\ (c,\ d)\},$$

        不是可传递的，计算得

        $$R^2=\{(a,\ a),\ (a,\ c),\ (b,\ b),\ (b,\ d)\},$$
        $$R^3=\{(a,\ b),\ (a,\ d),\ (b,\ a),\ (b,\ c)\},$$
        $$R^4=\{(a,\ a),\ (a,\ c),\ (b,\ b),\ (b,\ d)\},$$

        注意到 $R^4=R^2$，则 $R^5=R^3$，$R^6=R^4=R^2$，$R^7=R^5=R^3$，…

        故

        $$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=\bigcup_{i=1}^{3}R^i$$

        $=\{(a,\ a),\ (a,\ b),\ (a,\ c),\ (a,\ d),\ (b,\ a),\ (b,\ b),\ (b,\ c),\ (b,\ d),\ (c,\ d)\}$

        验证得知，$t(R)$ 是可传递的。

- 二、关系闭包的性质
  - R 是自反的 当且仅当 r(R) = R。
  - R 是对称的 当且仅当 s(R) = R。
  - R 是可传递的 当且仅当 t(R) = R。
  - 包含在闭包中的传递性

- 设 R1 和 R2 是非空集合 A 上的关系，且 R1 ⊆ R2，则
  - （1）r(R1) ⊆ r(R2)；
  - （2）s(R1)⊆s(R2)；
  - （3）t(R1)⊆t(R2)。
- 对于 A 上任何关系 Q，若 Q 可传递且R ⊆ Q，则 t(R) ⊆ Q。

- 并运算在闭包中的运算性质
  - 设 R1 和 R2 是非空集合 A 上的关系，则

$$（1）\ \mathrm{r}(R_1 \cup R_2) = \mathrm{r}(R_1) \cup \mathrm{r}(R_2)。$$
$$（2）\ \mathrm{s}(R_1 \cup R_2) = \mathrm{s}(R_1) \cup \mathrm{s}(R_2)。$$
$$（3）\ \mathrm{t}(R_1 \cup R_2) \supseteq \mathrm{t}(R_1) \cup \mathrm{t}(R_2)。$$

- R的SRT与闭包的SRT
  - 设 R 是非空集合 A 上的关系，则
    - （1）若 R 是自反的，则 r(R)，s(R) 和 t(R) 是自反的。
    - （2）若 R 是对称的，则 r(R)，s(R) 和 t(R) 是对称的。
    - （3）若 R 是可传递的，则 r(R) 和 t(R) 是可传递的。
  - 定理指出，若 R 是可传递的，则 s(R) 不一定是可传递的。
    - 例如 R = {(a，b)} 是集合 A = {a，b} 上的可传递关系，但 s(R) = {(a，b)，(b，a)} 不是 A 上的可传递关系。

- 自反对称闭包、自反传递闭包、自反对称传递闭包。
  - 例如 s(r(R))，简记为 sr(R)，因该关系既有自反性又有对称性，故称 sr(R) 为 R 的自反对称闭包。类似地，称 tr(R)（也记作 R*）为 R 的自反传递闭包，称 ts(R) 为R 的对称传递闭包，称 tsr(R) 为 R 的自反对称传递闭包。
  - 性质：

那么，在求解这些闭包时与求解的次序有关系吗？

对称 √
可传递 ×

定理 2.17 设 R 是非空集合 A 上的关系，则

（1）$\mathrm{rs}(R) = \mathrm{sr}(R)$；（2）$\mathrm{rt}(R) = \mathrm{tr}(R)$；（3）$\mathrm{st}(R) \subseteq \mathrm{ts}(R)$。

一般 $\mathrm{st}(R) \neq \mathrm{ts}(R)$。如 $R = \{(1，2)\}$ 是集合 $A = \{1，2\}$ 上的关系，则 $\mathrm{st}(R) = \{(1，2)，(2，1)\} \neq \mathrm{ts}(R) = \{(1，2)，(2，1)，(1，1)，(2，2)\}$。

- 三、关系闭包的求法
  - 1．利用关系矩阵求关系的闭包

【思考 2.3】设 A、B 均是有限集，R_1、R_2 都是由 A 到 B 的关系，它们的关系矩阵分别为$\boldsymbol{M}_{R_1}$和$\boldsymbol{M}_{R_2}$，求下列关系的关系矩阵：

$$R_1 \cup R_2，R_1 \cap R_2，R_1'，R_1 - R_2，R_1^{-1}$$

【答】设$\boldsymbol{M}_{R_1} = (r_{ij}^{(1)})$，$\boldsymbol{M}_{R_2} = (r_{ij}^{(2)})$，则

（1）$R_1 \cup R_2$ 的关系矩阵为$(r_{ij}^{(1)} \vee r_{ij}^{(2)})$

（2）$R_1 \cap R_2$ 的关系矩阵为$(r_{ij}^{(1)} \wedge r_{ij}^{(2)})$

（3）$(R_1)'$ 的关系矩阵为$(1 - r_{ij}^{(1)})$

（4）$R_1 - R_2 = R_1 \cap (R_2)'$ 的关系矩阵为$(r_{ij}^{(1)} \wedge (1 - r_{ij}^{(2)}))$

（5）$(R_1)^{-1}$ 的关系矩阵为$(r_{ji}^{(1)})$即$(\boldsymbol{M}_{R_1})^{\mathrm{T}}$

- 2．利用关系图求关系的闭包
  - 给定关系 R，分别记 R，r(R)，s(R)，t(R) 的关系图为 G，Gr，Gs和 Gt，则 Gr，Gs，Gt 的结点集与 G 的结点集相等。除了G 的边以外，以下述方法添加新的边。
    - 考察 G 的每个结点：如果没有单边环就加上一个单边环。最终得到的是 Gr。
    - 考察 G 的每一条边：若有一条由结点 ai 到 aj 的单向边，i ≠ j，则在 G 中加一条由结点 aj 到 ai 的反方向边。最终得到的是 Gs。
    - 考察 G 的每个结点 ai：找出从 ai 出发的所有 2 步、3 步、…、n 步长的路径（n 为图 G 的结点数），设这些路径的所有终点为$aj1$，$aj2$，⋯，ajk。如果没有从结点 ai 到ajl （l = 1，2，…，k）的边，就加上这条边。最终得到的是 Gt
  - 3．利用Warshall算法求关系的传递闭包

Warshall 算法是 Warshall 于 1962 年提出的，这种算法也便于计算机实现。

设 n 个元素的有限集合上关系 R 的关系矩阵为 $\boldsymbol{M}$，用 $A[i，j]$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $(i，j)$ 项元素。

（1）置新矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}$；

（2）$j = 1$；

（3）对所有的 i，如果 $A[i，j] = 1$，则对 $k = 1，2，…，n$，作布尔加法 $A[i，k] = A[i，k] \vee A[j，k]$，即将第 j 行加到第 i 行上去；

（4）j 加 1；

（5）如果 $j \leq n$，则转到步骤（3），否则停止。

所得矩阵即为关系 R 的传递闭包 t(R) 的关系矩阵。

- **2.6 等价关系**
  - 一、等价关系的基本概念
    - 1．等价关系的定义
      - 等价关系
        - 集合 A 上的关系 R，如果它是自反的、对称的、可传递的，则称 R 是 A 上的等价关系。
        - 显然：

- （1）有限集合 A 上等价关系 R 的关系矩阵 M 是主对角线上的元素全为 1 的对称阵，且 M^2 中为 1 的位置 M 也为 1。
- （2）有限集合 A 上等价关系 R 的关系图 G 中，
  - 每个结点都有自环；
  - 若有由结点 ai 指向结点 ak 的有向边，且有由结点 ak 指向结点 aj 的有向边，则一定有由结点 ai 指向结点 aj 的有向边。
  - 任意两个不同结点之间要么没有有向边，要么有方向相反的两条有向边；

- 2．元素 a 与 b 等价
  - a等价于 b,称 a 与 b 是等价的
    - 设 R 是集合 A 上的等价关系，若 a R b 成立，则称 a等价于 b。
    - 显然，如果 a 等价于 b，则 b 也等价于 a（因 R 是对称的）。
    - 故 a 等价于 b 也简称 a 与 b 是等价的（在 R 下），记作 a ~ b
- 3．等价类
  - 等价类、代表元、生成元
    - 设 R 是集合 A 上的等价关系，则 A 中等价于元素 a 的所有元素组成的集合称为 a 生成的等价类，记为 $[a]_R$
    - 即$[a]_R$ = {b | b ∈ A 且 a R b}
    - 称 a 为 $[a]_R$ 的代表元或生成元。
    - 不同的元素可能生成相同的等价类。

- 二、等价类的性质
  - （1）对任意的 a ∈ A，$[a]_R \neq \phi$
  - （2）对任意的 a，b ∈ A，若 a R b，则$[a]_R = [b]_R$
  - （3）对任意的 a，b ∈ A，若 a R' b，则 $[a]_R \cap [b]_R = \phi$。
  - 结论
    - 同一个等价类中元素均相互等价。
    - 不同等价类中的元素互不等价。
- 三、等价关系与分划
  - 设 R 是集合 A 上的一个等价关系，则集合 A 中所有元素产生的等价类的集合$\{[a]_R|a \in A\}$是 A 的一个分划。
  - 由 R 导出的等价分划,平凡分划
    - 这种由等价关系 R 的等价类所形成的 A 的分划（唯一的）称为 A 上由 R 导出的等价分划，记作Π_R^A
    - 对于任意集合 A，由恒等关系 I_A 导出的等价分划是 A 的“最细”的分划，由普遍关系 U_A 导出的等价分划是 A 的“最粗”的分划，合称 A 的平凡分划。
    - 由集合 A 和 A 上的等价关系 R 可以构造一个新的集合——商集。

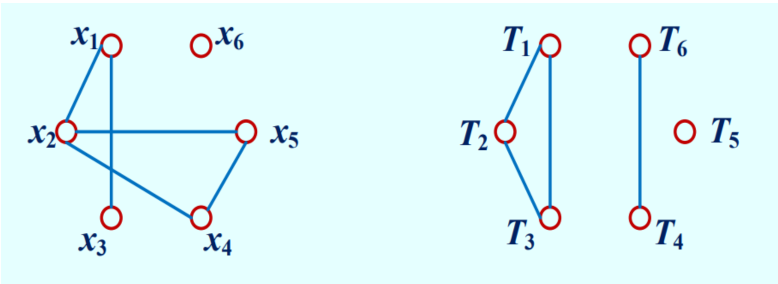
- 商集，秩
  - 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集，记做 A / R，即A / R = {$[x]_R|x \in A$}
  - A / R 的基数（A 在 R 下的不同等价类的个数）称为 R 的秩。
- 定理：
  - 设 R1，R2 是集合 A 上的等价关系，则 R1 = R2 的充分必要条件是 A/R1 = A/R2。
  - 设 Π = {A1，A2，…，Am} 是集合 A 的一个分划，则存在 A 上的一个等价关系 R，使得 Π 是 A 上由 R 导出的等价分划。

- 四、等价关系的其他性质
  - 设 R1，R2 是集合 A 上的等价关系，则 R1 ∩ R2 也是 A 上的等价关系。
  - 设 R 是集合 A 上的等价关系，则对任意的正整数 n 有
    - $R^n = R$
    - $(R^{-1})^n = R$

- **2.7 相容关系**
  - 一、相容关系的基本概念
    - 1．相容关系的定义
      - 相容关系
        - 集合 A 上的关系 R，如果它是自反的、对称的，则称R 是 A 上的相容关系。
        - 显然：
          - （1）有限集合 A 上相容关系 R 的关系矩阵 M 是主对角线上的元素全为 1 的对称阵。
          - （2）有限集合 A 上相容关系 R 的关系图 G 中
            - 每个结点都有自环；
            - 任意两个不同结点之间要么没有有向边，要么有方向相反的两条有向边。
          - （3）等价关系是相容关系，但相容关系不一定是等价关系。
    - 2．最大相容类
      - 相容类,最大相容类
        - 设 R 是有限集 A 上的相容关系，C ⊆ A，C ≠ Φ，如果
          - ∀a，b ∈ C，均有 a R b（称 C 为相容关系 R 的一个相容类），
          - 不存在任何相容类 D，使 C ⊂ D（或 ∀x ∈ A – C，∃c ∈ C，使得 x R′ c），则称 C 是相容关系 R 的最大相容类，记为 C_R
            - 即：不能真包含在任何其它相容类中的相容类称作最大相容类。
          - 注意：

- 若 C_R 最大相容类，则
  - （1）它是 A 的一个非空子集。
  - （2）对任意的 x ∈ C_R，x 必与 C_R 中的所有元素有相容关系。
  - （3）在 $A - C_R$ 中没有元素与 C_R 中的所有元素有相容关系。

- 3．最大相容类的关系简图求法
  - 关系简图
    - 由于相容关系的关系图中每个结点都有一个自环，且每两个结点之间若有边，则一定有两条方向相反的边，因此，为了简化图形，约定相容关系的关系图中，不画自环，用单线（无向）替代来回线，并称其为相容关系的关系简图。
    - 例：

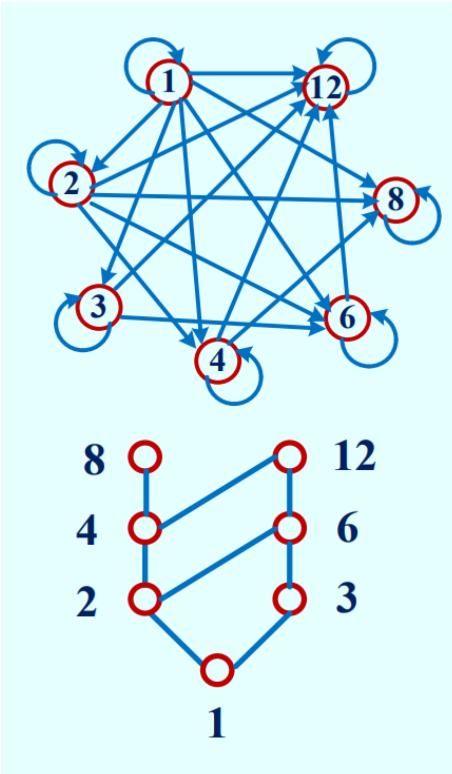


      - 最大相容类是 {x1，x2}，{x1，x3}，{x2，x4，x5}，{x6}。{x1，x2，x3}，{x4，x5} 等都不是最大相容类。
      - 最大相容类是 {T1，T2，T3}，{T4，T6}，{T5}
    - 在相容关系的关系简图中，定义每个结点都与其它结点相连接的多边形为完全多边形。
      - 关系简图中每一最大完全多边形的结点集合就是一个最大相容类。
      - 对于关系简图中只有一个孤立结点以及不是完全多边形的两个结点的连线的情况，也容易知道它们各自对应一个最大相容类。

- 二、相容关系与覆盖
  - 设 R 是有限集合 A 上的一个相容关系，# A = n，则对任意的 a ∈ A，必存在一个最大相容类 C，使得 a ∈ C。
  - 设 R 是有限集合 A 上的一个相容关系，则 R 的所有最大相容类的集合是 A 的一个覆盖。
  - 集合 A 上相容关系 R 的最大相容类所构成的 A 的覆盖常称为 A的完全覆盖，记作 $C_R(A)$。
  - 设 S = {A1，A2，…，An} 是 A 的一个覆盖，根据 S 定义的关系 R = (A1×A1) ∪ (A2×A2) ∪ … ∪ (An×An) 是 A 上的相容关系
    - 注意：

- 对于集合，给定一个相容关系必可对应一个覆盖，给定一个覆盖也可确定一个相容关系，但二者之间不存在一对一的关系
- 任一覆盖可以确定一个相容关系，但可以有多个覆盖对应一个相容关系

- **2.8 偏序关系**
  - 一、偏序关系的基本概念
    - 偏序关系，偏序
      - 集合 A 上的关系 R，如果它是自反的、反对称的、可传递的，则称 R 是 A 上的偏序关系，简称偏序
    - 偏序结构，偏序集
      - 集合 A 与 A 上的偏序关系 R 一起称为偏序结构或偏序集。记为<A;R>
    - 例如:
      - 实数集 R 上的“ ≤ ”关系显然是一个偏序关系。全集合 U 的幂集 2^U 上的“ ⊆ ”关系也是一个偏序关系
    - 注意:
      - 对于一个集合上的偏序关系 R，常用记号“$\preceq$”来表示。当 a ≼ b 时，称 a 先于等于 b，或 a 小于等于 b。
      - 一个偏序的逆也是一个偏序，常用“≽”来表示。
  - 二、偏序关系的次序图
    - 次序图,哈斯图
      - 在研究有限集 A 上偏序关系时也可根据其特点简化其关系图的表示。目前习惯用次序图或哈斯图表示，其作图规则如下
        - 去掉自环;
        - 用无向单边表示两元素之间有关系，若 a ≼ b 时，则结点 a 位于结点 b 的下方（一律由下向上，下小上大，因而不应出现水平画置的边）；
        - 去掉传递性的第三边（因而不应出现三角形）
        - 例



- 三、偏序集的特殊元素
  - 极大元，极小元，最大元，最小元
    - 设$<A; \preceq>$为偏序集，B 为 A 的非空子集，b ∈ B，
      - （1）如果 B 中没有任何元素 x 满足 x ≠ b 及 b ≼ x，则称 b 为 B 的极大元。
      - （2）如果 B 中没有任何元素 x 满足 x ≠ b 及 x ≼ b，则称 b 为 B 的极小元。
      - （3）如果对任意 x ∈ B 都有 x ≼ b，则称 b 为 B 的最大元。
      - （4）如果对任意 x ∈ B 都有 b ≼ x，则称 b 为 B 的最小元
    - 注意：
      - （1）如果 B 的极大元，极小元，最大元，最小元存在，则一定在 B 中。
      - （2）极大元与最大元，极小元与最小元是不一样的。
        - ① b 是 B 的极大元当且仅当 B 中没有比 b 大的元素。
        - ② b 是 B 的最大元当且仅当 B 中所有其它元素都比 b 小。
        - ③ b 是 B 的极小元当且仅当 B 中没有比 b 小的元素。
        - ④ b 是 B 的最小元当且仅当 B 中所有其它元素都比 b 大
    - 定理：
      - 设$<A; \preceq>$为偏序集，B 为 A 的非空子集
        - （1）若 b 为 B 的最大元（最小元），则 b 为 B 的极大元（极小元）。
        - （2）若 B 有最大元（最小元），则 B 的最大元（最小元）唯一。

        - （3）若 B 为有限集，则 B 的极大元、极小元恒存在。
        - 对有限集而言，最大元、最小元未必存在，极大元、极小元虽必存在，但未必唯一
- 四、全序和良序
  - 1．全序
    - 可比的，可排序的，不可比的，不可排序的，全序，线序
      - 设≼是集合A上的一个偏序关系，a，b∈A，若有a≼b或b≼a，则称元素a和b是可比的或可排序的，否则是不可比的，或不可排序的。
      - 若对任意的a，b∈A，a 与b都是可比的，则称≼为A上的一个全序。
      - 全序的次序图仅由一条垂直边上结点的序列组成，故又称线序，即任意两个元素均存在大小关系。
  - 2.良序
    - 设≼是集合A上的一个偏序，若对于A 的每一个非空子集S都有最小元，则称它为A上的一个良序。
    - **注意：**集合A上的
      - 全序或良序一定是偏序，但偏序却不一定是全序或良序。
      - 一个偏序若是良序，则一定是全序。（定理2.29）
      - 全序不一定是良序。但有限集上的全序一定是良序。（定理2.30）

- **离散数学Chapter 3： 函数**
  - 3.1 函数及性质
    - 一、函数的基本概念
      - 1.函数的定义
        - 函数、映射、变换：

          定义 3.1 设有集合 A，B，f 是一个由 A 到 B 的关系，如果 $\forall x \in A$，均存在唯一的 $y \in B$，使得 xfy（或 $(x, y) \in f$），则称关系 f 是一个**由 A 到 B 的函数**或**映射**或**变换**。记作 f：$A \to B$。

          当 $A = B$ 时，也称 f 为 **A 上的函数**。
        - 像，原像/像源，自变量，函数值

          若 $(x, y) \in f$，则称 y 为 x 在 f 下的**像**，称 x 为 y 的**像源**或**原像**，常记作 $f(x) = y$。也称 x 为**自变量（元）**，对应的 y 为函数 f 在 x 处的**函数值**。
        - **函数的定义是普通函数定义的推广。**
        - 定义中的“存在唯一”对函数提出了两条要求：
          - 存在性：A 中每个元素均要有像，即 dom f = A。
          - 唯一性：A 中每个元素只能有一个像，即 f 的单值性。
        - 对有限集合，如果 f 是由 A 到 B 的函数，则
          - 从关系图看，要求 A 的每一结点有且仅有一条有向边指向 B 中的一个结点；不要求 B 的每个结点均有边指向它，也没有要求 B 的结点只有一条边指向它。

- 从关系矩阵看，要求关系矩阵的每一行有且仅有一个为 1，其它均为 0，而列中元素可以全为 0，也可以有不止一个 1。

- n元函数

若 $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，则 A 中元素 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在函数 f 下的像 $f((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ 通常简写成 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，并称 f 为 ***n* 元函数**。

A B

- 2.函数的定义域和值域
  - 定义域、值域

■ 函数 f：$A \to B$ 的**定义域**即关系的定义域，仍记为 $\mathrm{dom}f$，满足 $\mathrm{dom}f = A$。

■ 函数 f：$A \to B$ 的**值域**即关系的值域，仍记为 $\mathrm{ran}f$，满足 $\mathrm{ran}f \subseteq B$。

  - 像集

■ 对于函数 f，常将 $\mathrm{ran}f$ 记作 $f(A)$，并称为函数的**像集**，即

$$f(A) = \mathrm{ran}f = \{y \mid y \in B \text{ 且存在 } x \in A \text{ 使 } f(x) = y\}$$

■ 若 $S \subseteq A$，则 S 中所有元素的像的集合常记为 $f(S)$，即

$$f(S) = \{y \mid y \in B \text{ 且存在 } x \in S \text{ 使 } f(x) = y\}$$

- 3.特殊函数
  - 空函数，常函数，恒等函数

定义 3.2 （1）对于函数 f：$A \to B$，
若 $A = \Phi$，B 为任意集合，则称 f 为**空函数**；
若存在 $b \in B$，使 $\forall x \in A$ 均有 $f(x) = b$，则称 f 为**常函数**。
（2）对于 A 上的函数 f，
若 $\forall x \in A$ 均有 $f(x) = x$，则称 f 为 A 上的**恒等函数**。

  -

显然

■ 当 $A \neq \Phi$ 且 $B = \Phi$ 时，不存在由 A 到 B 的函数。

■ A 上的恒等函数即是 A 上的恒等关系 I_A。

- 4.函数的相等
  - 相等

4. 函数的相等

定义 3.3 设有函数 f：$A \to B$ 和 g：$C \to D$，如果 f 和 g 具有相同的定义域和对应法则，即 $A = C$，且对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x) = g(x)$，则称函数 f 和 g **相等**，记作 $f = g$。

  - 注意：（函数的个数，B上A）

注意：

- 若在 A 中有一个元素 a，使得 $f(a) \neq g(a)$，则 $f \neq g$。
- 设 A 和 B 都是有限集，$\#A = m$，$\#B = n$，则 A 中 m 个元素的取值方式有 $n \times n \times \ldots \times n$（共 m 个）种，因此由 A 到 B 的函数有 n^m 个。
- 一般地，由有限集合 A 到 B 的所有函数的集合为

$$B^A = \{ f \mid f: A \to B \}$$

（读着"B 上 A"），则 $\#(B^A) = (\#B)^{\#A}$。

- 5.函数的扩充和限制
  - 限制，扩充

5. 函数的扩充与限制

定义 3.4 设有函数 f: $A \to B$ 和 g: $C \to B$，如果 $C \subseteq A$，$C \neq \Phi$，且对于所有的 $a \in C$，有 $f(a) = g(a)$，则称函数 g 是 f 在 C 上的**限制**，并称函数 f 是 g 在 A 上的**扩充**。

- 注意：

注意：

- $g = f \cap (C \times B)$。（定理 3.1）
- f 是 g 在 A 上的扩充当且仅当 $g \subseteq f$。（定理 3.2）
- 一个函数和它的限制或扩充是不相同的函数，它们往往还具有完全不同的性质。

- 二、函数的性质
  - 函数的三个性质：
    - 内射，单射，一对一：

定义 3.5 设 f 是一由 A 到 B 的函数，

（1）若对任意的 x，$y \in A$，当 $x \neq y$ 时都有 $f(x) \neq f(y)$（或者说当 $f(x) = f(y)$ 时有 $x = y$），则称 f 是由 A 到 B 的**内射**或**单射**，也称**一对一**的函数。

我的像就是我的像，像的原像是唯一的

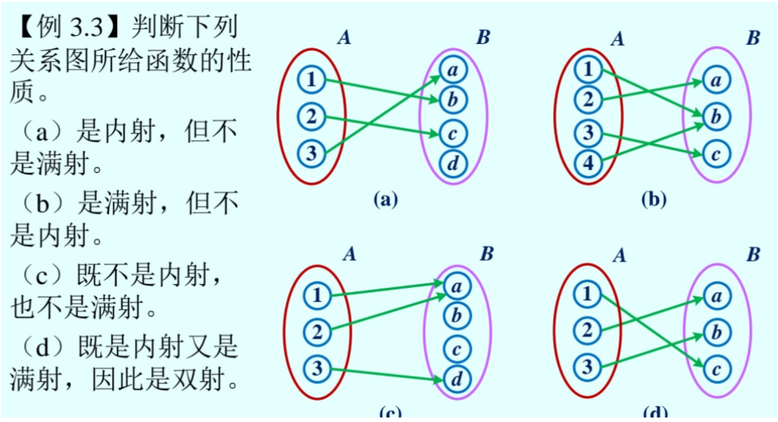
- 也就是说，一个自变量对应一个函数值

- 满射，映上：

每个像都有原像

- 若 f (A) = B，则称 f 是由 A 到 B 的满射，也称映上的函数

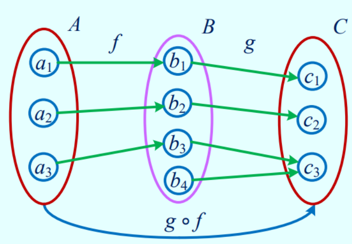
- 双射，一一对应：
  - 若 f 既是内射又是满射，则称 f 是由 A 到 B 的双射，也称一一对应的函数。
- 例题：



- 从定义易知：
  - 内射使得 A 中的元不同其像也不同。
  - 满射使得 B 中每个元至少有一个原像。
  - 双射使得 A 中的元有唯一的像而 B 中的元有唯一的原像。
    - （反证：若 B 中元 y 有两个不同的原像 x1，x2，使得 f(x1) = f(x2) = y，则显然与 f 是内射矛盾。）
- 注意：
  - 由集合 A 到 B 的内射 f 也是由 A 到 f(A) 的双射。
    - —— 此结论在证题时经常用到。
- 如果 A 和 B 都是有限集，那么函数 f：A→B 是
  - 内射的必要条件是 #A≤#B。
  - 满射的必要条件是 #A≥#B。
  - 双射的必要条件是 #A=#B。

- 3.2 复合函数
  - 一、复合函数的定义
    - 复合关系
      - 设有函数 f：A→B 和 g：B→C，则复合关系 f∘g 是一个由集合 A 到 C 的函数
    - 复合函数，复合运算
      - 设有函数 f：A→B 和 g：B→C，则 f 和 g 的复合函数是一个由集合 A 到 C 的函数，记为 g∘f（或 gf），定义为：∀x∈A，都有(g∘f)(x) = g(f(x))
      - 即若集合 B 中的元素 y 是 x 在 f 作用下的像，且集合 C 中的元素z 是 y 在 g 作用下的像，那么 z 就是 x 在函数 g∘f 作用下的像。
      - 由函数 f 和 g 求得复合函数 g∘f 的运算“∘”称为函数的复合运算。
      - 注意：
        - 复合函数 g∘f 是复合关系 f∘g。这样记是为了和数学中复合函数的习惯写法相一致。
        - 只有当 ranf ⊆ domg 时，它们的复合才有意义。当这一要求不满足时，可利用函数的限制和扩充来弥补

- 二、函数复合运算的性质
  - 设 f 是一个由集合 A 到 B 的函数，IA和 IB 分别是 A 和B 上的恒等函数，则有 f $\circ I_A = I_B \circ$ f = f
    - 即：恒等函数在函数复合中不起作用
  - 设有函数 f：A→B，g：B→C 和 h：C→D，则有h∘(g∘f) = (h∘g)∘f
    - 即函数的复合满足结合律。其中 h∘(g∘f) 和 (h∘g)∘f 都是 A→D 的函数
  - n次幂,幂等函数
    - 若函数 f：A→A，则对任意的非负整数 n，定义 f 的 n次幂为
    - $f^0 = I_A, f^{n+1} = f^n \circ f (n \in Z^+)$
    - 易证，对于任意的非负整数m和n，有$f^m \circ f^n = f^{m+n}$，$(f^m)^n = f^{mn}$
    - 若函数 f：A→A 满足 f^2 = f，则称 f 是幂等函数
- 三、复合函数的性质
  - 设有函数 f：A→B，g：B→C，
    - （1）如果 f 和 g 都是内射，则 g∘f 也是内射。
    - （2）如果 f 和 g 都是满射，则 g∘f 也是满射。
    - （3）如果 f 和 g 都是双射，则 g∘f 也是双射。
    - 注意：
      - 定理说明函数的复合运算能够保持函数的内射、满射、双射性。
      - 但该定理的逆命题不为真，即若 g∘f：A→C 是内射（满射、双射）的，则不一定有 f：A→B 和 g：B→C 都是内射（满射、双射）的.



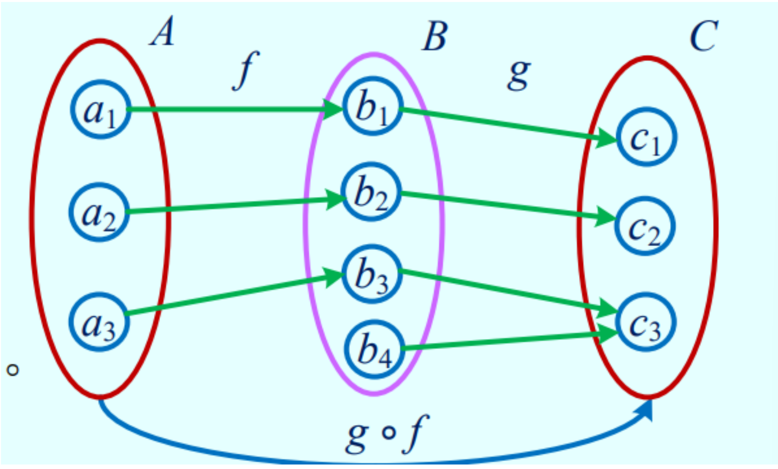
不难看出：

（1）f：$A \to B$ 和 $g \circ f$：$A \to C$ 都是内射，但 g：$B \to C$ 不是内射。

（2）g：$B \to C$ 和 $g \circ f$：$A \to C$ 都是满射，但 f：$A \to B$ 不是满射。

（3）$g \circ f$：$A \to C$ 是双射，但 f：$A \to B$ 和 g：$B \to C$ 都不是双射。

- 设有函数 f：A→B 和 g：B→C:
  - （1）如果 g∘f 是内射，则 f 是内射。
  - （2）如果 g∘f 是满射，则 g 是满射。
  - （3）如果 g∘f 是双射，则 f 是内射而 g 是满射
  - 注意：



    - 当 g ∘ f 是内射时，g 可能不是内射。反例如上图。
    - 当 g ∘ f 是满射，f 可能不是满射。反例见上图。
    - 当 g ∘ f 是双射时，f 可能不是满射，g 可能不是内射。反例见上图
- 3.3 逆函数
  - 一、逆函数的定义
    - 逆函数，可逆的
      - 设 f：A → B 是双射，则逆关系 f –1 是 B 到 A 的函数且为双射
      - 设函数 f：A → B 是一个双射，定义函数 g：B → A，使得对于每一个元素 y ∈ B，g(y) = x，其中 x 是使得 f(x) = y 的 A中的元素，称 g 为 f 的逆函数，记作 f –1，并称 f 是可逆的。
      - 注意：
        - 当且仅当 f 是双射函数时才定义 f 的逆函数 f –1。
        - 逆关系不一定是函数，但逆函数一定是逆关系。
        - 事实上，若函数 f 使 f(x) = y，则逆函数 f^{-1} 使$f^{-1}(y) = x$，即如果 (x，y) ∈ f，那么 (y，x) ∈ f^{-1} .因此逆函数f^{-1}是 f 的逆关系
  - 二、逆函数的性质
    -
- 3.4 无限集的基数

  利用函数研究无限集合是集合论的一个重要部分。
  - 一、抽屉原理
    - 集合基数的讨论是以抽屉原理（又称鸽笼原理）为根据的。抽屉原理是德国数学家狄利克雷首先明确提出并用以证明一些数论中的问题，因此，也称为狄利克雷原则。它是组合数学中一个重要的原理，易用反证法加以证明。抽屉原理在证明某些存在性或唯一性问题时非常有用，它通常表述为如下三种形式（设 m，n 均为正整数）
      - 把多于 n 个的物体放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里的物体不少于两个。
      - 把多于 mn 个的物体放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里有不少于 m + 1 个的物体。

- 把 m 个物体放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里有不少于$[\frac{(m-1)}{n}]+1$个的物体（[x] 表示不超过 x 的最大整数）。
- 把无穷多个物体放入 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里有无穷多个物体。

- 二、集合的等势
  - 等势，有相同的基数，同基
    - 设有集合 A，B，如果存在一个双射函数 f：A → B，则称 A 与 B 等势或有相同的基数，简称同基，记作 A ~ B。
    - 注意：
      - “一一对应”规则是判断两个集合是否一样“大”的标准。
      - 当 A ~ B 时，双射 f：A→B 可能不止一个。
      - 对于有限集，$A \sim B \Leftrightarrow$ #A=#B。
      - 如果 A = B，则$A \sim B$。反之，则不一定。
    - 定理
      - 集合族 S 上的等势关系“~”是一个等价关系。
      - 注意：（基数类的定义）
        - 欲证集合 A ~ B，可构造一个 A→B 或者 B→A 的双射。

        > 构造双射函数非易事 一般根据难易做选择

        - 等势关系“~”导致 S 的一个等价分划，其中每一个等价类称为一个基数类。凡属于同一基数类的集合必有相同的基数。
  - 有限集，无限集
    - 如果集合 A 与集合 N_m = {0，1，2，…，m－1}（m 为某一正整数）属于同一基数类，则称 A 为有限集，且# A=m. ϕ是有限集（基数为 0）。不是有限集的集合称为无限集。
    - 一个集合 A，若存在与它等势的真子集，则称 A 为无限集；否则称为有限集。
- 三、可数集的基数
  - 1．可数集的概念
    - 可数集，不可数集，可计数集
      - 如果集合 A ~ N，则称 A 是可数集，如果 A 是无限集但不是可数集，则称 A 是不可数集。有限集和可数集统称为可计数集。
    - 注意：
      - 非负整数集 N 可以换成正整数集 Z^+。
      - 可数集的基数记作$\aleph_0$（Aleph），读作“ 阿列夫零”。
      - 所有正有理数的集合 Q+，所有负有理数的集合 Q– 和所有有理数的集合 Q 都是可数集（证明见后）。
    - 思考
      - 举例说明有限集合的基数中哪些结论在无限集合中不成立？

            - $A \subset B$ -> # A < # B
            - $C = A \cup B, A \cap B = \phi$ -> # C = # A + # B
- 2．可数集的性质
    - 定理
        - 集合 A 为可数集的充分必要条件是它的元素可排成无重复的枚举：A = { a_0， a_1， a_2， ...， a_n， ...}
            - 证明

> **定理 3.15** 集合 A 为可数集的充分必要条件是它的元素可排成无重复的枚举：$A=\{a_0，a_1，a_2，…，a_n，…\}$。
> 【证明】设集合 A 的元素可排成无重复的枚举：$A=\{a_0，a_1，a_2，…，a_n，…\}$。
> 令 f：$A \to \mathbf{N}$，$f(a_n)=n$。
> 显然 f 是由 A 到 $\mathbf{N}$ 的双射。故 A 是可数集。
> 反之，设集合 A 为可数集，则由定义知，存在双射 f：$A \to \mathbf{N}$。
> 于是 f^{-1} 是 $\mathbf{N} \to A$ 的一个双射。
> 从而 A 的元素可排成一个无重复的枚举：$A=\{a_0，a_1，a_2，…，a_n，…\}$。
> —— 判别无限集为可数集的简便方法（不必构造双射）。

            - 所有元素排成无重复的枚举，“如何排”是关键，需要技巧。
        - 任一无限集 A 必包含有可数子集。
            - —— 可数集是“最小的”无限集。
        - 可数集 A 的任一无限子集仍是可数集。
            - 证明：
                - 因为 A 是可数集，由定理 3.15，A 的元素可排成无重复的枚举：a_0， a_1， a_2， ...， a_n， ...，
                - 设 B 是 A 的任一无限子集（次序可能有变）。
                - 从 A 中删去不在 B 中出现的那些元素，剩下的元素即为 B 的元素，其个数无限。
                - 按照这些元素在枚举中出现的先后次序，依次令其一一对应于 N中的元素 0，1，2，3，...，则 B 是一个可数集。
                - 或者
                    - 从 a0 开始向后检查，不断地删去不在 B 中的元素，则得到新的一列 a_{i0}， a_{i1}， a_{i2}， ...， a_{in}， ...， 它与非负整数一一对应，所以 B 是可数集。
            - 推论：
                - 从可数集 A 中除去一个有限子集 B 后（即 A – B）仍是一个可数集。
        - 若 A 是可数集，B 是有限集，则 A ∪ B 是可数集。
        - 有限个可数集的并集仍是可数集。
        - 可数个互不相交的可数集的并集仍是可数集。

- 可数个可数集的并集仍是可数集。
- 有理数集 Q 是可数集。
- 如果 A 和 B 都是可数集，则 A × B 也是可数集。
- 设 A0，A1，A2，…，An（n ∈ N）均为可数集，则 A0× A1 × A2 × … × An 也是可数集。

- 四、不可数集的基数

  讨论除可数集外的其他无限集的基数问题。

  - 任一无限集必与它的一个真子集等势。
  - 一个集合是无限集当且仅当该集合必与它的一个真子集等势。
  - 注意：

    由此可见，从有限集到无限集存在质的飞跃。

    - 有限集不能与其真子集等势。
    - 在无限的世界中，全体与部分可能等势。
  - 集合 R_1 = {x | x∈ R，0 < x < 1} 是不可数集。
    - 规定：所有的有限小数均写成以 9 为循环节的无限循环小数。例如 0.418 要写成 0.417999…。
  - 连续基数、连续统的势、连续统
    - 若集合 A 与 (0，1) 属于同一个基数类，则 A 的基数# A = ℵ，并称“ℵ”为连续基数或连续统的势，并称集合 A 为连续统。
- 五、集合基数的比较
  - A 的基数不大于 B 的基数,A 的基数小于 B 的基数
    - 若存在一个由集合 A 到 B 的内射函数，则称 A 的基数不大于 B 的基数，记为 # A ≤ # B。
    - 若存在一个由集合 A 到 B 的内射函数，但不存在双射函数，则称 A 的基数小于 B 的基数，记为 # A < # B。
  - 定理：
    - 设 A、B 是集合，则 # A ≤ # B 当且仅当存在 C ⊆ B，使得 A ~ C。
    - 设 A、B 是集合，若 A ⊆ B，则 # A ≤ # B。
    - 设 A、B 是集合，若 # A ≤ # B 且 # B ≤ # A，则 # A = # B。此定理称为伯恩斯坦定理
    - 注意：
      - ≤ 是集合的基数之间的偏序关系。
      - 证明两集合等势的有效方法：将双射函数的构造转化为两个内射函数的构造。
    - 若 A 为有限集，则 # A < $\aleph_0$ < ℵ。
    - 若 A 是无限集，则 $\aleph_0 \leq$ # A
      - 注意：$\aleph_0$ 是最小的无限基数，即可数集是“最小”的无限集。

- （康托定理） 对任意的集合 A，则 # A < #(P(A))。
  - 定理说明：无论一个集合的基数多大，一定存在更大基数的集合。
  - 因此不存在最大的集合。
  - 同时由于每个无限基数都比后面的基数小，所以不存在最大的基数。

- **离散数学Chapter 4： 代数系统**
  - 4.1 代数运算
    - 一、代数运算的概念
      - n 元运算,运算的阶或元数,运算符,二元运算,一元运算
        - 设 S 为非空集合， 函数 f： S^n → S 称为 S 上的一个 n 元运算， n 称为该运算的阶或元数， f 称为运算符。
        - 当 n = 2 时， 函数 f： $A^2 \to A$ 称为 A 上的二元运算。
        - 当 n = 1 时， 函数 f： A → A 称为 A 上的一元运算。
      - 例：
        - 减法运算不是正整数集 Z+ 和非负整数集 N 上的二元运算
        - 求倒数的运算不是实数集 R 上的一元运算。数的除法运算不是实数集 R 上的二元运算。
        - 在所有 n 阶实可逆矩阵构成的集合上
          - 矩阵的乘法运算是该集合上的二元运算。
          - 矩阵的转置运算和求逆运算是该集合上的一元运算。
          - 矩阵的加法和减法运算不是该集合上的二元运算。
      - 注意：上面定义的运算与通常的数的运算相比有如下特点：
        - 运算必须与某个集合联系在一起。所谓集合 S 上的 n 元运算，**要求 n 个运算对象必须是 S 中的元素，运算结果也必须在 S 中**，即运算是封闭的。
        - 运算的对象已被推广。运算对象和运算结果都可以不是数而是任何个体。
        - 运算的含义更为抽象、广泛。只要能从集合 S^n 到集合 S 之间建立一个函数关系，那么 S^n 的元素与 S 的元素之间的对应关系就是一个 n 元运算
      - 运算表：

当 S 是有限集时，S 上的一元运算 ~ 和二元运算 * 有时采用运算表的方式来定义。

a_i	$\sim(a_i)$
a_1	$\sim(a_1)$
a_2	$\sim(a_2)$
$\vdots$	$\vdots$
a_n	$\sim(a_n)$

$*$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$*(a_1, a_1)$	$*(a_1, a_2)$	$\cdots$	$*(a_1, a_n)$
a_2	$*(a_2, a_1)$	$*(a_2, a_2)$	$\cdots$	$*(a_2, a_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	$*(a_n, a_1)$	$*(a_n, a_2)$	$\cdots$	$*(a_n, a_n)$

- 封闭
  - 设∘是集合 S 上的一个 n 元运算，H 是 S 的非空子集，若对于每一个(a1，a2，…，an) ∈ Hn，都有∘(a1，a2，…，an) ∈H，则称运算∘在子集 H 上是封闭的。
  - 定理：
    - 设∘是集合 S 上的一个 n 元运算，且在 S 的两个子集合S1 和 S2 上均封闭，则∘在 S1 ∩ S2 上也是封闭的
- 二、二元运算的性质
  - 可交换的，交换律
    - 若对任意的 x，y ∈ S，有 x ∗ y = y ∗ x，则称运算 ∗ 在 S 上是可交换的，或称运算 ∗ 在 S 上满足交换律。
  - 可结合的，结合律
    - 若对任意的 x，y，z ∈ S，有 (x ∗ y) ∗ z = x ∗ (y ∗ z)，则称运算 ∗ 在 S 上是可结合的，或称运算 ∗ 在 S 上满足结合律，常记作没有括号的 x ∗ y ∗ z
  - 可分配的，分配律
    - 如果运算∗对运算∘既是左可分配的又是右可分配的，则称运算∗对运算∘是可分配的，或称运算∗对运算∘在 S 上满足分配律。
      - x ∗ (y ∘ z) = (x ∗ y) ∘ (x ∗ z)，则称运算 ∗ 对运算 ∘ 是左可分配的，或称运算 ∗ 对运算 ∘ 在 S 上满足左分配律；
      - (y ∘ z) ∗ x = (y ∗ x) ∘ (z ∗ x)，则称运算 ∗ 对运算 ∘ 是右可分配的，或称运算 ∗ 对运算 ∘ 在 S 上满足右分配律；
  - n 次幂，指数
    - 若运算 ∗ 在集合 S 上是可结合的二元运算，则对任意的x ∈ S 和任意正整数 n，定义 x 的 n 次幂为$x^1 = x$，$x^{n+1} = x^n * x$ （$n \in Z^+$),并称 n 为 x 的指数
- 三、特殊元素
  - 1.单位元
    - 单位元，幺元
      - 设 ∗ 是集合 S 上的二元运算，
        - 若存在一元素 e_l ∈ S，使得对任意的 x ∈ S，有e_l ∗ x = x，则称e_l是 S 中运算 ∗ 的左单位元。
        - 若存在一元素 e_r ∈ S，使得对任意 x ∈ S，有 x ∗ e_r = x，则称 e_r 是 S 中运算 ∗ 的右单位元。
        - 若存在一元素 e ∈ S，使得对任意 x ∈ S，有 e ∗ x = x ∗ e = x，则称 e 是 S 中运算 ∗ 的单位元，又称为幺元
        - 注意：
          - 单位元是集合中的“中性”元素，它与别的元素进行运算所产生的作用为零。

- 2.零元
  - 左零元，右零元，零元
    - 设 ⋆ 是集合 S 上的二元运算，
      - 若存在元素 θ_l ∈ S，使得对任意的 x ∈ S，有 θ_l ⋆ x =θ_l，则称θ_l 是 S 中运算 ⋆ 的左零元；
      - 若存在元素 θ_r ∈ S，使得对任意的 x ∈ S，有 x ⋆ θ_r = θ_r，则称θr 是 S 中运算 ⋆ 的右零元；
      - 若存在元素 θ ∈ S，使得对任意 x ∈ S，有 θ ⋆ x = x ⋆ θ = θ，则称 θ 是 S 中运算 ⋆ 的零元。
    - 注意：
      - （1）在实数集合 R 上，数的加法运算没有零元，数的乘法运算有零元 0。
      - （2）在所有 n 阶实矩阵的集合 Mn(R) 上，矩阵加法没有零元，零矩阵是矩阵乘法的零元。
      - （3）在非空集合 A 上所有关系构成的集合 S 上，空关系 OA 是关系复合运算的零元
    - 二元运算的左（右）零元不一定存在，若存在可以不是唯一的
    - 定理：
      - 设 ⋆ 是 A 上的二元运算，θl 和 θr 分别是 ⋆ 的左零元和右零元，则 θl = θr = θ，且 θ 是 ⋆ 唯一的零元。
        - 定理说明：二元运算若同时存在左、右零元，则它们必相等且唯一
      - 设 ⋆ 是集合 S 上的二元运算，且 # S > 1。若运算 ⋆ 有单位元 e 和零元 θ，则 e ≠ θ
- 3.幂等元
  - 幂等元,幂等律
    - 设 ⋆ 是集合 S 中的二元运算，若 x ∈ S 且 x ⋆ x = x，则称 x 是 S 中关于运算 ⋆ 的幂等元。
    - 如果 S 中所有元素都是幂等元，则称运算 ⋆ 在 S 上满足幂等律。
    - 对任何二元运算，（左、右）单位元和（左、右）零元（若存在）是幂等元。（取$x = e_l$）
    - 一个集合关于运算的幂等元（若存在）不一定唯一
- 4.逆元
  - 左逆元，右逆元，逆元
    - 设 ⋆ 是集合 S 上具有单位元 e 的二元运算，对于元素a ∈ S，
      - 若存在 a_l^{-1} ∈ S，使得a_l^{-1} ⋆ a = e，则称 a 关于运算 ⋆ 是左可逆的，称a_l^{-1} 是 a 的左逆元；

- 若存在 a_r^{-1} ∈ S，使得 a * a_r^{-1} = e，则称 a 关于运算 * 是右可逆的，称a_r^{-1} 是 a 的右逆元；
- 若存在一元素 a^{-1} ∈ S，使得 a^{-1} * a = a * a^{-1} = e，则称 a 关于运算 * 是可逆的，称 a^{-1}是 a 的逆元

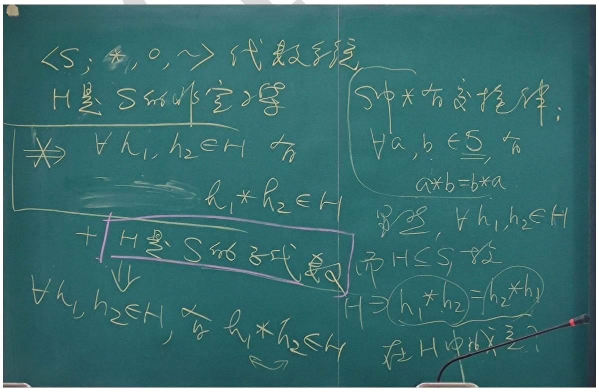
- 注意：
  - 对于任何二元运算，单位元是可逆的，其逆元就是其自身。
  - 对于集合 S 上的二元运算 *，
    - 单位元 e 和零元 θ 是全局的概念，它们是对 S 上的所有元素而言的。
    - 幂等元和逆元是局部的概念，它们只针对 S 中的某元素而言的
  - 一个元素的左、右逆元不一定存在，若同时存在可以不是唯一的

*	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	e	c	a
b	b	a	c	c	b
c	c	e	a	b	c
d	d	a	b	b	b

    - 因为 e * e = e，所以 e 以自身为逆元。
    - 因为 c * a = e，a * b = e，所以 a 有左逆元 c，也有右逆元 b。
    - 因为 a * b = e，所以 b 有左逆元 a。但 b 没有右逆元。
    - 因为 c * a = e，所以 c 有右逆元 a。但 c 没有左逆元。
    - d 既没有左逆元，又没有右逆元
    - $(a,b)\circ(b,a)=(a,a)\neq(b,b)=(b,a)\circ(a,b)$
- 定理：
  - 设 * 是集合 S 上具有单位元 e 且可结合的二元运算，若元素 a ∈ S 有左逆元 a_l^{-1} 和右逆元 a_r^{-1}，则 a_l^{-1} =a_r^{-1}= a^{-1}且a^{-1} 是 a 唯一的逆元

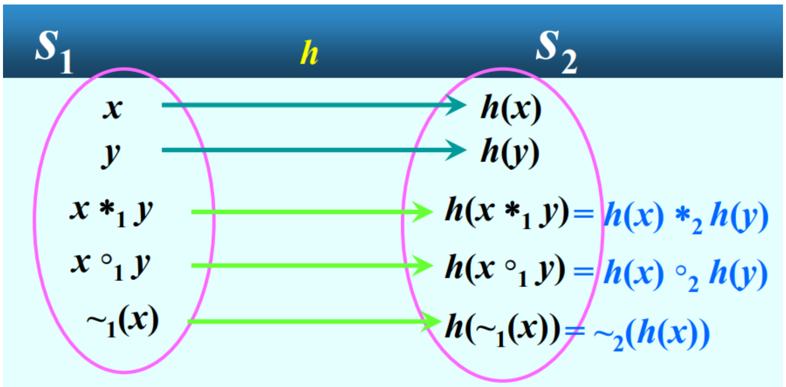
- 4.2 代数系统与子代数
  - 一、代数系统的概念
    - 代数系统,域,有限代数系统
      - 非空集合 S 和定义在 S 上的若干个运算 o1，o2，…，on所组成的系统称为一个代数系统，记为 < S；o1，o2，…，on>，其中 S 称为该代数系统的域。
      - 当 S 为有限集时，称代数系统 < S；o1，o2，…，on > 为有限代数系统
      - 注意：

- 代数系统中，运算 o1，o2，…，on 可以是任意有限阶的运算，运算的个数也可以是任意有限个。
- 不同的代数系统可能具有一些共同的性质。
  - 可以把这组性质看作公理，研究满足这些公理的抽象的代数系统。
  - 在这样的代数系统中，由公理所推导出的任何结论（定理），对于满足这组公理的任何代数系统都是成立的
- 研究用抽象的符号所表示的集合和运算这种代数系统。
- 为简单起见，本章后面重点讨论**类型为＜S；o1，o2，~＞的代数系统，其中 o1 和 o2 是二元运算，~是一元运算**。所引进的概念和讨论的结果都可以推广到任意类型的代数系统
- 为强调代数系统中二元运算特殊元（单位元、零元）的存在，可将这些特殊元列到系统的表达式中。如＜R；+，×，0，1＞。在不发生混淆的情况下，也可以用域来标记一个代数系统

- 二、子代数的概念
  - 子代数或子系统，真子代数或真子系统
    - 设＜S；o1，o2，~＞是一个代数系统，H 是 S 的一个**非空子集**，如果 S 上的每一个运算在 H 上都是封闭的，则称代数系统＜H；o1，o2，~＞是＜S；o1，o2，~＞的子代数系统，简称子代数或子系统。若 H 是 S 的真子集，则称代数系统<$H;o_1,o_2$~>是<$S;o_1,o_2$~>的真子代数或真子系统。
    - 设＜S；o1，o2，~＞，＜H；o1'，o2'，~'＞是代数系统，若 o1'，o2'，~'分别为 o1，o2，~在 H 上的限制，则称＜H；o1'，o2'，~'＞为＜S；o1，o2，~＞的子代数
      - 
    - 注意：
      - （1）**子代数是一个代数系统**；代数系统是自身的一个子代数。
      - （2）**代数系统中运算所具有的性质在其子代数上依然成立**

- 4.3 代数系统的同态与同构
  - 一、代数系统的同态
    - 1．同态的概念

  - 同类型的
    - 设有两个代数系统 V1 = < S1；o11，o12，…，o1n > 和V2 = < S2；o21，o22，…，o2n>，如果运算 o1i 和 o2i（i = 1，2，…，n）具有相同的阶，则称代数系统 V1 和 V2 是同类型的
  - 同态
    - V1 = < S1；⋆1，∘1，~1 > 和 V2 = < S2；⋆2，∘2，~2 > 是两个**同类型的代数系统**，h 是一个从 S1 到 S2 的函数，若对任意的 x，y ∈ S1，有
      - $h(x{\ast_1}y) = h(x){\ast_2}h(y)$
      - h(x ∘1 y) = h(x) ∘2 h(y)
      - h(~1(x)) = ~2(h(x))
    - 则称 h 是从代数系统 V1 到 V2 的一个同态

    - 有时也称 h 将运算 ⋆1 传送到 ⋆2，将运算 ∘1 传送到 ∘2，将运算 ~1传送到 ~2
    - 同态是一种保持两个同类型代数系统之间运算的映射。
    - 同态映射所满足的条件可以归结为：
      - 两集合中“对应元素的运算结果仍然对应”
      - 先运算后取像等同于先取像后运算
  - 同态像
    - 设 f 是代数系统 V1 = < S1；⋆1，∘1，~1 > 到 V2 = < S2；⋆2，∘2，~2 > 的同态，称 < f(S1)；⋆2，∘2，~2 > 是 V1 在 f 下的同态像
- 2．特殊的同态
  - 单同态，满同态，同构，自同态，自同构
    - 设 h：S1 → S2 是从代数系统 V1 = < S1；⋆1，∘1，~1 > 到 V2 = < S2；⋆2，∘2，~2 > 的同态。
      - 如果 h 是内射，则称 h 是从 V1 到 V2 的单同态。
      - 如果 h 是满射，则称 h 是从 V1 到 V2 的满同态。
      - 如果 h 是双射，则称 h 是从 V1 到 V2 的同构。
    - 特别地，若 V1 和 V2 是同一代数系统 V，则从 V1 对 V2 的同态称为 V 的自同态；从 V1 对 V2 的同构称为 V 的自同构
    - 显然

        - V1 到 V2 的同态是 V1 到 V1 的同态像的满同态。
            - $\because f: A \to B$内射
            - $\therefore f: A \to f(A)$双射
        - V1 到 V2 的单同态是 V1 到 V1 的同态像的同构

- 二、满同态的性质
    - 设 h 是从代数系统 V1 = < S1； ⋆1，∘1， ~1 > 到 V2 = < S2； ⋆2，∘2， ~2 > 的一个满同态，
        - （1）若 ⋆1 (∘1) 是可交换的，则 ⋆2 (∘2) 也是**可交换的**；
        - （2）若 ⋆1 (∘1) 是可结合的，则 ⋆2 (∘2) 也是**可结合的**；
        - （3）若 ⋆1 对 ∘1 是可分配的，则 ⋆2 对 ∘2 也是**可分配的**；
        - （4）若 V1 中 ⋆1 (∘1) 有单位元 e，则 V2 中 ⋆2 (∘2) **有单位元 h(e)**；
        - （5）若 V1 中 ⋆1 (∘1) 有零元 θ，则 V2 中 ⋆2 (∘2) **有零元 h(θ)**；
        - （6）若对于 ⋆1 (∘1)，S1 的元素 x 有逆元 x^{-1}，则对于 ⋆2 (∘2)，x 的像 h(x) **具有逆元** h(x^{-1})
    - 注意：
        - **注：**

          ■ 因为代数系统 V_1 到 V_2 的同态是 V_1 到 V_1 的同态像的满同态，所以与代数系统 V_1 相联系的一些重要公理，比如交换律、结合律、分配律，在 V_1 的任何满同态像中（特别在同构像中）能够被保持下来。

          ■ 若 h：$S_1 \to S_2$ 不是满同态，则定理 4.6 所列出的性质不一定成立。因为这时在 S_2 中存在某些元素，它们不是 S_1 中任何元素的像。

          例如 $V = <A;\ *>$，其中 $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbf{R} \right\}$，运算 $*$ 为矩阵乘法。函数

          f：$A \to A$，$f(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

          f 不是满同态，f 将 $*$ 的单位元 $\boldsymbol{E}$ 映射到 $f(\boldsymbol{E})$，不是 $*$ 的单位元。

- 三、同构的性质
    - 设 h 是从代数系统 V1 = < S1； ⋆1，∘1， ~1 > 到 V2 = < S2； ⋆2，∘2， ~2 > 的同构，那么 h 是从 S1 到 S2 的双射，此时 h 存在有逆函数$h^{-1}: S_2 \to S_1$且为双射
    - 若代数系统 V1 = < S1； ⋆1，∘1， ~1 > 与 V2 = < S2； ⋆2，∘2， ~2 > 彼此同构，则
        - **集合 S1 中所有元素与集合 S2 中所有元素一一对应；**
        - **V1 中的各个运算与 V2 中的各个运算一一对应；**
        - **若 S1 中元素之间有由某运算所构成的关系时，则 S2 中对应元素之间也相应有由与上述运算相对应的运算构成的类似关系。**
        - **反之亦然。**
    - 两个同构的代数系统，除了集合中元素的名字和运算符号不同外，在本质上没有什么区别，可以看作同一个代数系统加以研究
    - 注意：
        - 在由代数系统所组成的集合上，同构关系是一个等价关系。

- **每个代数系统和其自身是同构的。（自反）**
- **对任意的代数系统 V1，V2，如果 V1 和 V2 是同构的，则 V2和 V1 也是同构的。（对称）**
- **对任意的代数系统 V1，V2，V3，如果 V1 和 V2 是同构的，V2 和 V3 是同构的，则 V1 和 V3 也是同构的。（传递）**
- 由该等价关系将集合分划成一些等价类，其中每个等价类是由具有相同"结构"的同构代数系统所组成

- 4.4 代数系统的积代数
  - 积代数，直积
    - 设有代数系统 Vi = < Si； ⋆i ，∘i ，~i >，其中 ⋆i ，∘i 是二元运算，~i 是一元运算，i = 1，2，…，n。V1，V2，…，Vn 的积代数或直积是一个代数系统 V = < S； ⋆，∘，~ >，其中

$$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n = \{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \mid x_i \in S_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$

对任意的 $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \in S$，

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) * (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) = (x_1 *_1 y_1,\ x_2 *_2 y_2,\ \ldots,\ x_n *_n y_n)$$

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \circ (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) = (x_1 \circ_1 y_1,\ x_2 \circ_2 y_2,\ \ldots,\ x_n \circ_n y_n)$$

$$\sim(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = (\sim_1(x_1),\ \sim_2(x_2),\ \ldots,\ \sim_n(x_n))。$$

V 一般表示为 $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$。

  - 定理：
    - 设有代数系统 Vi = ，其中 ⋆i，∘i 是二元运算，~i 是一元运算，i = 1，2，…，n，V = V1 × V2 × … × Vn = 其中 ⋆ 和 ∘ 是二元运算，~ 是一元运算，则
      - ⋆i 是可交换的运算，i = 1，2，…，n，则 ⋆ 也是可交换的运算。
      - 若 ⋆i 是可结合的运算，i = 1，2，…，n，则 ⋆ 也是可结合的运算。
      - 若 ⋆i 对 ∘i 是可分配的，i = 1，2，…，n，则 ⋆ 对 ∘ 也是可分配的。
      - 若 ⋆i 有单位元 ei，i = 1，2，…，n，则 ⋆ 也有单位元 (e1，e2，…，en)。
      - 若 ⋆i 有零元 θi，i = 1，2，…，n，则 ⋆ 也有零元 (θ1，θ2，…，θn)。
      - 若元素 xi ∈ Si 对 ⋆i 有逆元 xi−1，i = 1，2，…，n，则 (x1，x2，…，xn) ∈ S 对 ⋆ 也有逆元 (x1−1，x2−1，…，xn−1)。
    - 定理表明，与代数系统相联系的某些重要公理在这些系统的积代数中被保留

- **离散数学Chapter 5： 群，环，域**
  - **5.1 半群和独异点**
    - **一、半群和独异点的基本概念**
      - 半群，交换半群
        - 设 S 是一个非空集合，⋆ 是 S 上的一个二元运算，如果⋆ 是可结合的，则称代数系统 <S ; * > 是半群。
        - 若在半群 <S ; * > 中，运算 ⋆ 满足交换律，则 <S ; * > 称为交换半群
      - n次幂，指数

      - 设<S；* >是一个半群，则对任意的 x ∈ S 和任意正整数 n，定义 x 的 n次幂为
      - $x^1 = x$，$x^{n+1} = x^n * x$（$n \in Z^+$）
      - 并称 n 为 x 的指数
      - 定理：
        - 设<S；* >是一个有限的半群，则必有 a ∈ S，使得 a 是一个幂等元，即 a ⋆ a = a
    - 独异点，交换独异点
      - 若半群<S； *> 中运算 * 有单位元，则称该半群为独异点。
      - 若独异点<S； *>中运算 * 满足交换律，则称该独异点为交换独异点。
      - 注意：
        - 独异点中唯一的单位元常记为 e。
        - 设 <S； *> 为有限独异点，则关于运算 *的运算表中没有两行或两列是相同的。
    - 循环独异点,生成元
      - 在独异点<S； *> 中，如果存在元素 $g \in S$，使得 S 中的每一元素 a 都能写成 g^i（$i \in N$）的形式，则称独异点 <S； *> 为循环独异点，元素 g 称为该循环独异点的生成元。
      - 定理：
        - 每一个循环独异点都是可交换的。
        - 设<S；* >是一个有限的独异点，则对每一 a ∈ S，存在正整数 j，使得 a^j 是一个幂等元
        - 设<S；* >是是独异点，且 S 中所有元都可逆，则对任意的 a，b ∈ S
          - (1) $(a^{-1})^{-1} = a$
          - (2) $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$
  - 二、子半群和子独异点
    - 子半群,子独异点
      - < S； *> 是一个半群，若 <H； *> 是 <S； *> 的子代数，则称 <H； * > 是 <S； * > 的子半群。
      - 设 <S； *>是一独异点，若<H； *>是 <S； *>的子代数，且单位元$e \in H$，则称 <H； *>是 <S； *>的子独异点。
      - 注意：
        - 子半群（子独异点）也是一个半群（独异点）。
        - 半群（独异点）是自身的一个子半群（子独异点）。
        - <{e}； ⋆> 也是独异点 <S；* > 的子独异点
      - 定理：

- 设 <S；*> 是一个可交换的独异点，则S的所有幂等元的集合形成 <S；*> 的一个子独异点。
- 三、半群和独异点的同态
  - **代数系统的同态（单同态、满同态）、同构和积代数的概念以及一些有关的结论可以推广到半群和独异点中**
  - 设 h是从代数系统$V_1 =< S_1；* >$ 到$V_2 =< S_2；\circ >$的满同态，其中运算*和∘都是二元运算。
    - （1）若 V1 是（交换）半群，则V2 也是（交换）半群。
    - （2）若 V1 是（交换）独异点，则V2 也是（交换）独异点。
    - **注：**
      - 可以利用此定理判断某些代数系统是半群或独异点。
  - （交换）半群的同态像是（交换）半群，（交换）独异点的同态像是（交换）独异点。
  - 给定代数系统 V1 = <*S*1；*> 和 V2 = <*S*2；∘>，其中运算 * 和 ∘ 都是二元运算，则
    - （1）若 V1，V2 是（交换）半群，则 V1 × V2 也是（交换）半群。
    - （2）若 V1，V2 是（交换）独异点，则 V1 × V2 也是（交换）独异点。
- 5.2 群
  - 一、群的基本概念
    - 1．群的定义
      - 群，交换群，阿贝尔群
        - 设 <G；*> 是一个代数系统，如果G上的二元运算满足下列条件，则称 <*G*；*> 是一个群，简记成群G。
          - * *（1）运算 * 是可结合的；* *
          - **（2）存在单位元 $e \in G$；**
          - **（3）G 中所有元素都可逆。**
        - 如果群 <G；*> 的运算 * 是可交换的，则称该群为交换群或阿贝尔群。
        - 设<G；*>是一个代数系统，如果<G；*>是独异点，且G中所有元素都可逆，则<G；*>是一个群。
          - 注意：
            - 若 <*G*；*> 是群，且 # G >1，则 <*G*；*> 无零元。
            - 若 <*G*；*> 是群，则 <*G*；*> 中唯一的幂等元是单位元 e
    - 2．群中元素的幂
      - 幂
        - 设 <*G*；*> 是群，则对任意的 $x \in G$，定义 x的幂为
          - $x^0 = e$，$x^{n+1} = x^n * x$，$x^{-n} = (x^{-1})^n$ 其中 $n \in \mathbf{N}$。

- 也满足以下两式
  - $x^m * x^n = x^{m+n}, (x^m)^n = x^{mn}$
  - $x^{-n} = (x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$

- **3．群的阶和元素的周期**
  - 阶，有限群，无限群
    - 设<*G*；*>是群，若 *G* 是有限集，则称<*G*；*>是有限群，*G* 中元素的个数称为群<*G*；*>的阶；若 *G* 是无限集，则称<*G*；*>是无限群。
  - 有限周期，有限阶，周期，阶
    - 设 < G ； * >是群，$a \in G$，若存在正整数 r，使得 $a^r = e$ 称元素 a 具有有限周期或有限阶。使 $a^r = e$ 成立的最小的正整数 r 称为 a 的周期或阶。
    - 如果对于任何正整数 r，均有 $a^r \neq e$，则称 a 具有无限周期或无限阶。
    - 注意：
      - **群中单位元具有有限周期，且周期是 1。**

- **二、群的基本性质**
  - **1．消去律**
    - 设<*G*；*> 是群，则对任意的 a，$b \in G$，
      - （1）存在唯一的元素 $x \in G$，使 $a * x = b$。
      - （2）存在唯一的元素 $y \in G$，使 $y * a = b$。
      - **注：** 定理说明在群中方程 $a * x = b$ 与 $y * a = b$ 有唯一解。
    - 左消去律，右消去律
      - 设<*G*；*> 是群，则运算 * 满足消去律，即对任意的 a，b，$c \in G$
      - （1）若 $a * b = a * c$，则 $b = c$；

        左消去律
      - （2）若 $b * a = c * a$，则 $b = c$。

        右消去律
      - 设 < G ； *> 是群，且对任意的 a，$b \in G$，有 $(a * b)^n = a^n * b^n$，则 < G ； *> 是阿贝尔群，反之也成立
  - **2.元素运算后的逆元**
    - 设<*G*；*>是一个群，则对任意的 a，$b \in G$，有
      - $(a^{-1})^{-1} = a, (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$
  - **3．关于元素的周期**
    - 若群<*G*；*>中元素 a 具有有限周期 r，则 $a^k = e$ 当且仅当 $r|k$，即 k 是 r 的整数倍
    - 定理：

- 群中任一元素与它的逆元具有相同的周期。
  - 说明：群中任意元a的逆元的周期是 a的周期的因子。
  - **注：** 定理的证明说明，群中任一元素与它的逆元要么具有有限的周期且相等，要么具有无限周期，不可能出现一个为有限周期而另一个为无限周期。
- 在有限群中，每个元素均具有有限周期，且周期不超过群的阶。

- **三、群的同态**
  - 代数系统的同态（单同态、满同态）、同构和积代数的概念以及一些有关的结论也可以推广到群中。
    - 设 h是从代数系统 $V_1 =< G_1; \ * >$到代数系统$V_2 =< G_2; \ * >$的满同态，其中运算 * 和 ∘ 都是二元运算，若 $V1$ 是（交换）群，则 $V2$ 也是（交换）群。
      - **注：** 可以利用此定理判断某些代数系统是群。
    - 推论:(交换）群的同态像是（交换）群。
    - 给定代数系统 $V1$ = <*G*1； *> 和 $V2$ = <*G*2； ∘>，其中运算 * 和 ∘ 都是二元运算，若 $V1$ 和 $V2$ 是（交换）群，则 $V1 \times V2$ 也是（交换）群。

- **5.3 置换群与循环群**
  - **一、置换群**
    - **1．置换的概念**
      - n元置换
        - 设 A={$a1$，$a2$，…，an} 是一个非空有限集合，A 上的双射函数称为A 的 n 元置换。
        - 一个 n 元置换 f：A → A 常表示成如下形式，这里n个列的次序是任意的。

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_n) \end{pmatrix}$$

        - 注意：
          - 设 f是集合 A = {$a1$，$a2$，…，an} 上的一个 n 元置换，则 $f(a1)$，$f(a2)$，…，$f(an)$ 必为 $a1$，$a2$，…，an 的一个排列。
            - 因为 f是双射，故 $f(a1)$，$f(a2)$，…，$f(an)$ 各不相同，但所有 $f(ai)$ 都是 A 中的元素，且# A = n，因此结论成立。
          - 集合 A 上不同的 n 元置换的数目为 ***n*!** 个。
          - 恒等函数 I_A 是集合 A上的一个置换，称为A 上的恒等置换。
          - 设 $f1$ 和 $f2$ 是 A 上任意两个置换，则$f1$ 和 $f2$ 的复合$f1 \circ f2$ 也是 A 上的一个置换。其中$f1 \circ f2$ 表示置换 $f1$ 后再接着置换$f2$ 所产生的一种置换（类似于关系的复合），即
            - $f_1 \circ f_2 = f_2(f_1(x)), \forall x \in A$

- 集合 A 上的任意置换 f 的逆函数 f^{-1} 也是 A 上的置换，称为 f 的逆置换。

2．置换群的概念

- n 次对称群，n 次置换群

置换群对称群

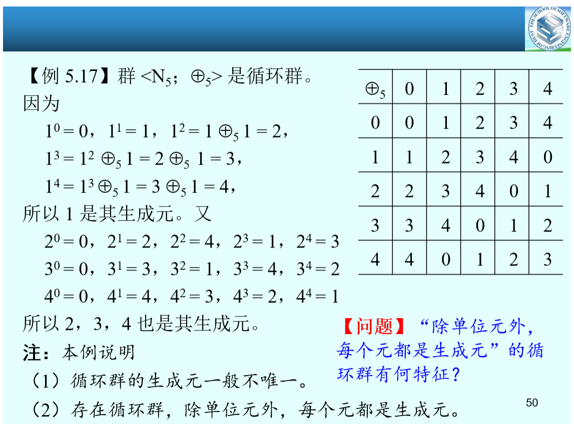
- 基数为 n 的集合 A 上的**所有**置换的集合，对于置换的复合运算∘构成一个群，称为 n 次对称群。
- 集合 A 上的**若干**置换的集合，对于置换的复合运算∘构成的群，称为 n 次置换群。
- 注意：
  - （1）n 次对称群是一个 n 次置换群。对称群与置换群一般不是交换群。
  - （2）置换群是最早研究的一类群，而且它是一类重要的非交换群。更为重要的是，每个有限群都与一个置换群同构（凯莱定理），从而任何有限的抽象群可以转化为一个置换群进行研究。
  - （3）对称群的概念首先是伽罗瓦（ÉvaristeGalois，1811-1832，法国数学家）建立的，他创造这个概念来证明四次以上的一般多项式不能用根号解出。从历史来讲，研究群首先研究的是对称群。

二、循环群

1．循环群的概念

- 循环群，生成元，生成

- 在群<G；*>中，如果存在元素 $g \in G$，使得每一元素 $a \in G$ 都能表示成 g^i（$i \in \mathbf{Z}$）的形式，则称群<G；*>为循环群，称 g 为该循环群的生成元，并称群<G；*>由 g 生成。
- 注意：
  - 每一循环群必是交换群。
  - 若 g 是循环群<G；*>的生成元，则 g^{-1} 也是该群的生成元。
  - 每个元都是生成元的循环群



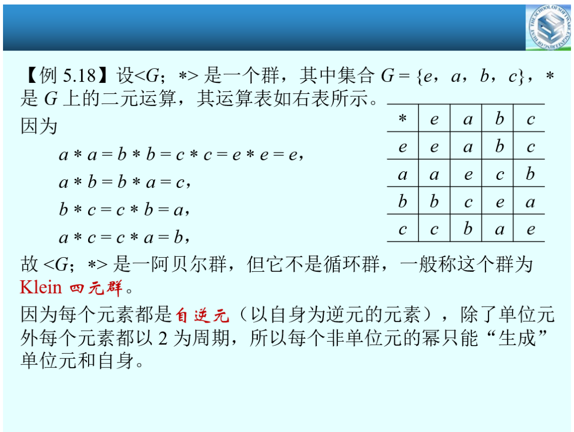
【例 5.17】群 $<N_5;\ \oplus_5>$ 是循环群。
因为
$1^0=0$，$1^1=1$，$1^2=1\oplus_5 1=2$，
$1^3=1^2\oplus_5 1=2\oplus_5 1=3$，
$1^4=1^3\oplus_5 1=3\oplus_5 1=4$，
所以 1 是其生成元。又
$2^0=0$，$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=1$，$2^4=3$
$3^0=0$，$3^1=3$，$3^2=1$，$3^3=4$，$3^4=2$
$4^0=0$，$4^1=4$，$4^2=3$，$4^3=2$，$4^4=1$
所以 2，3，4 也是其生成元。
注：本例说明
（1）循环群的生成元一般不唯一。
（2）存在循环群，除单位元外，每个元都是生成元。

$\oplus_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

【问题】“除单位元外，每个元都是生成元”的循环群有何特征？

50

  - Klein 四元群，自逆元



【例 5.18】设<G; $*$> 是一个群，其中集合 $G=\{e, a, b, c\}$，$*$ 是 G 上的二元运算，其运算表如右表所示。

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

因为

$a*a=b*b=c*c=e*e=e$,

$a*b=b*a=c$,

$b*c=c*b=a$,

$a*c=c*a=b$,

故 <G; $*$> 是一阿贝尔群，但它不是循环群，一般称这个群为 Klein 四元群。

因为每个元素都是自逆元（以自身为逆元的元素），除了单位元外每个元素都以 2 为周期，所以每个非单位元的幂只能“生成”单位元和自身。

- **2．循环群的性质**
  - 在循环群中，生成元的周期可决定群的阶。
  - 设 < G ; * > 是由元素 g 生成的循环群，
    - （1）若 g 的周期为 n，则 < G ； *> 是一个 n 阶的有限循环群；
    - （2）若 g 的周期为无限，则< G ； *> 是一个无限阶的循环群。
    - **注：** 循环群的生成元一般不唯一，**但生成元的周期与所生成的循环群的阶是一样的。**
  - 推论：设 <G； *> 是 n 阶循环群，g 是生成元，则 $G=\{g,\ g^2,\ ...,\ g^n$ }
  - 推论：设<G； ⋆> 是n阶循环群，g是生成元，则生成元g的周期也是n。
- **5.4 子群及其陪集**
  - **一、子群的定义**
    - 子群，真子群，平凡子群
      - Def_1:设<G； ⋆>是一个群，<H； ⋆>是<G； ⋆>的子代数，若单位元e∈H，且对任意的a∈H，有a^{-1}∈H，则称<H； ⋆>是<G； ⋆>的子群。
      - Def_2:设 <G； *> 是群，H 是 G 的非空子集，若 <H； *> 也是群，则称 <H； *> 是 <G； *> 的子群。
      - 若 H 是 G 的真子集，则称子群 <H； *> 是<G； *> 的真子群。
      - 注意：
        - 群 <G; *> 的任一子群本身也是一个群。
        - 群 <G； *> 的两个子群 <G； *> 与 <{e}； *> 称为 <G； *> 的平凡子群。
        - 交换群的子群也是交换群。
        - n 次置换群是 n 次对称群的子群。
      - 定理：
        - 设<G； ⋆>是一个群，H是G的非空子集，若<H； ⋆>也是群，则<H； ⋆>必是<G； ⋆>的子群。
  - **二、子群的判别**
    - 要判断非空子集 $H \subseteq G$ 对运算 * 能否构成群 < G ; * >的子群，需要弄清：
      - 封闭性：对任意的 a，$b \in H$，是否有 $a * b \in H$；

    - 单位元：是否有 $e\in H$;
    - 可逆性：对任意的$a\in H$，是否有 $a^{-1}\in H$。
  - **子群定义中对单位元 *e* 的要求可由封闭性和可逆性推出。**
  - 判别法：
    - 定理 5.17
      - 设<G；$\ast$>是群，H是G的非空子集，若
        - （1）对任意的a，b∈H，有$a\ast b\in H$，
        - （2）对任意的a∈H，有$a^{-1}\in H$，
      - 则< H；$\ast$>是< G；$\ast$>的子群。
    - 定理 5.18
      - 设<G；$\ast$>是一个群，H是G的一个非空子集，若对任意的a，b∈H，有$a\ast b^{-1}\in H$，则<H；$\ast$>是<G；$\ast$>的子群。
    - 定理 5.19
      - 设<G；$\ast$>是一有限群，若<H；$\ast$>是<G；$\ast$>的子代数，则<H；$\ast$>是<G；$\ast$>的子群。
    - 定理 5.20
      - 设<G；$\ast$>是一有限群，若<H；$\ast$>是<G；$\ast$>的子代数，则<H；$\ast$>是<G；$\ast$>的子群。
    - 例 5.23
      - 若<G；$\ast$>是循环群，则其子群也是循环群。
  - **进一步可以将封闭性和可逆性合并成一个条件。**
- **三、陪集与正规子群**
  - **1．陪集与正规子群的概念**
    - 左陪集，右陪集，代表元。
      - 设<H；$\ast$>是<G；$\ast$>的子群，g∈G，令
        - $g\ast H=\{g\ast h|\ h\in H\}$，简记为gH
        - $H\ast g=\{h\ast g|\ h\in H\}$，简记为Hg
      - 称$g\ast H$和$H\ast g$分别为由g确定的子群<H；$\ast$> 在群<G；$\ast$>中的左陪集和右陪集。称g为其代表元。
    - 正规子群，陪集
      - 设<H；$\ast$>是群<G；$\ast$>的子群，如果对任意的g∈G，都有gH= Hg，则称<H；$\ast$>是群<G；$\ast$>的正规子群。此时的左陪集和右陪集简称为陪集。
  - **2．正规子群的判别法**
    - 补充定义
      - 设<G；$\ast$>是群，H是G的非空子集，g∈G，定义
        - $g\ast H\ast g^{-1}=\left\{g\ast h\ast g^{-1}|h\in H\right\}$，简记为$gHg^{-1}$

            - 一般地，若A，B是G的非空子集，定义
                - $A*B=\{a*b|a\in A，b\in B\}$，简记为$AB$
        - （**判别法**）群<G；*>的子群<H；*>为正规子群的充分必要条件是对任意的g∈G，都有$gHg^{-1}=H$。
        - 群<G；*>的子群<H；*>为正规子群的充分必要条件是对任意的g∈G，都有gHg^{-1}⊆H。
        - 判断H 是否是G 的正规子群归结为：**对任意的g∈G 及任意的h∈H，计算元素$g*h*g^{-1}$是否在H 中。**
    - **3．陪集分划**
        - 定理5.23
            - 设<H；*>是群<G；*>的子群，若g∈H，则有gH= Hg =H。
        - 定理5.24
            - 设<H；*>是群<G；*>的子群，a，b∈G，则有
                - （1）aH= bH或aH∩bH= Φ。
                - （2）Ha= Hb或Ha∩Hb= Φ。
        - 定理5.25
            - 设<H；*>是群<G；*>的子群，a，b∈G，则有
                - （1）aH= bH当且仅当b∈aH。
                - （2）Ha= Hb当且仅当b∈Ha。
        - 定理5.26
            - 设<H；*>是群<G；*>的子群，则
                - （1）<H；*>的所有相异的左陪集组成G的一个分划。
                - （2）<H；*>的所有相异的右陪集组成G的一个分划。
        - **注意：**
            - 定理中的分划称为群<G；*> 中与<H；*> 相关的左（右）陪集分划或左（右）陪集分解。
                - 可以看作是由G上某一等价关系R所导致的等价分划：
                    - a R b ⇔ a和b在<H；*> 的相同的左（右）陪集中
                - 当<H；*> 是<G；*> 的正规子群时，这种分划简单地称为<G；*> 中与<H；*> 相关的陪集分划或陪集分解。
            - 定理给出了构造左（右）陪集分划的一个方法：
                - （1）H本身是一个，令G′= G–H；
                - （2）若G′= Φ，则结束，否则任取g∈G′，求得gH是一个；
                - （3）令G′= G′–gH，转（2）。
            - 可类似地构造H的所有右陪集。
- **四、拉格朗日定理**
    - 定理5.27

- 设<H； ⋆>是群<G； ⋆>的子群，g∈G，则#(gH) = #(Hg) = # H。即H的任意左（右）陪集与H 具有相同的基数。
- 定理5.28
  - 设<H； ⋆>是群<G； ⋆>的子群，则的所有相异左陪集的个数和所有相异右陪集的个数相同。
- 指数：
  - 群<G； ⋆>中子群<H； ⋆>的所有相异的左（右）陪集的个数称为<H； ⋆>在<G； ⋆>中的指数。
- lagrange theorem（拉格朗日定理）：
  - 设<G； ⋆>是一个有限群，且子群<H； ⋆>在<G； ⋆>中的指数为d，则# G = d·(# H)。
- 推论：
  - 推论5.7
    - 素数阶群只有平凡子群。

      只有1和它本身
  - 推论5.8
    - 有限群<G； ⋆> 中，任意元的周期必可整除群的阶。
  - 推论5.9
    - 素数阶群必为循环群，且每个非单位元的元都是生成元。
  - 注意：
    - 根据推论5.9，易写出任意素数阶群中二元运算的运算表。
      - 如：

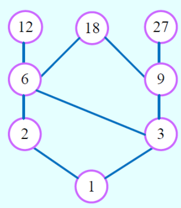
$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

      - Lagrange 定理只指出有限群 若有子群，则# H可整除# G，但不保证“若n能整除# G，就必有阶为n的子群”。
      - Lagrange 定理的逆定理对循环群成立。
  - 定理5.30
    - 设<G； ⋆>是n阶循环群，若正整数d能整除n，则存在且仅存在一个阶为d 的子群（也是循环群）。
  - 推论5.10
    - 若<G； ⋆> 是无限循环群，则<G； ⋆> 的子群除<{e}； ⋆> 外都是无限循环群，且有无穷多个。
- ***5.5 环和域**
- **离散数学Chapter 6： 格和布尔代数**

- **6.1 格及其性质**
  - **一、格的偏序集定义**
    - 给定偏序集，≽为偏序≼的逆偏序，则$\forall l_1$，$l_2 \in L$，有
      - $l_1 \preccurlyeq l_2$当且仅当$l_2 \succcurlyeq l_1$
    - **最小上界,最大下界**

      GLB: Greatest Lower Bound // LUB: Least Upper Bound
      - 设l1和l2是偏序集 中的两个元素，
        - 元素a∈L，若满足a≼l1，a≼l2，则称a是l1 和l2 的下界。
          - 如果元素a是l1和l2的下界，且对任意的a′∈L，只要有a′也是l1和l2的下界便有a′≼a，则称a是l1和l2的最大下界，简记作a=glb(l1，l2)。
        - 元素b∈L，若满足l1≼b，l2≼b，则称b是l1和l2的上界。
          - 如果元素b是l1和l2的上界，且对任意的b′∈L，只要有b′也是l1和l2的上界便有b≼b′，则称b是l1和l2 的最小上界，简记作b=lub(l1，l2)。
      - 注意：从偏序集<L；≼>的次序图来看：
        - 元素l1和l2有最大下界：从结点l1和l2出发，经过向下的路径至少可以共同到达次序图的一个结点，这些结点中最上面的那一个就代表l1和l2的最大下界。
        - 元素l1和l2有最小上界：从结点l1和l2出发，经过向上的路径至少可以共同到达次序图的一个结点，这些结点中最下面的那一个就代表l1和l2的最小上界。
        - 例题：

          例如 设集合 $A=\{1，2，3，6，9，12，18，27\}$，“整除”关系是 A 上的偏序关系，其次序图如右，它们构成一个偏序集 $<A；\preccurlyeq>$。

          lub(2，3) = ? lub(12，18) = ? glb(12，18) = ?

          显然，$2 \preccurlyeq 6$，$3 \preccurlyeq 6$；$2 \preccurlyeq 12$，$3 \preccurlyeq 12$；$2 \preccurlyeq 18$，$3 \preccurlyeq 18$。

          由于 $6 \preccurlyeq 12$，$6 \preccurlyeq 18$，因此 lub(2，3) = 6。

          但 lub(12，18) 不存在（无上界）。

          $6 \preccurlyeq 12$，$6 \preccurlyeq 18$；$2 \preccurlyeq 12$，$2 \preccurlyeq 18$；$3 \preccurlyeq 12$，$3 \preccurlyeq 18$；$1 \preccurlyeq 12$，$1 \preccurlyeq 18$。因为 $1 \preccurlyeq 6$，$2 \preccurlyeq 6$，$3 \preccurlyeq 6$，所以 glb(12，18) = 6。

          因此，偏序集中并非任意两个元都有最小上界和最大下界存在。
        - **偏序集中并非任意两个元都有最小上界和最大下界存在**
    - **格**
      - 设<L；≼>是一个偏序集，**如果L 中任意两个元素l1，l2都存在着最小上界和最大下界，**分别记为lub(l1，l2) 和glb(l1，l2)，则称<L；≼>是格。
      - 设< L；∨，∧>是一个代数系统，∨和∧是L上的两个二元运算，如果这两个运算满足交换律、结合律和吸收律，则称< L；∨，∧>是格。
    - **并运算，交运算，由格<L；≼>导出的代数系统**
      - 偏序集<L；≼>是格，对任意的l1，l2∈L，引入记号

      - $l_1 \vee l_2 = lub(l_1，l_2)$，$l_1 \wedge l_2 = glb(l_1，l_2)$
    - 则∨和∧均是集合L上的二元运算，分别称为并运算和交运算，构成的代数系统<L；∨，∧>称为由格<L；≼>导出的代数系统。
    - 注：
      - 这里出现的符号∨，∧只代表格中的运算，不再有其它的含义。
      - 交运算也称保交运算，并运算也称保联运算
    - 如果<L；≼>是格，则<L；≽>也是格，且对任意的l1，l2，l3∈L，有以下关系式成立：
      - **十大关系式**
        - ≼
          - l1≼l1（6.1）
          - 若l1≼l2，l2≼l1，则l1= l2（6.2）
          - 若l1≼l2，l2≼l3，则l1≼l3（6.3）
          - l1∧l2≼l1，l1∧l2≼l2（6.4）
          - 若l3≼l1，l3≼l2，则l3≼l1∧l2（6.5）
        - ≽
          - l1≽l1（6.1′）
          - 若l1≽l2，l2≽l1，则l1=l2（6.2′）
          - 若l1≽l2，l2≽l3，则l1≽l3（6.3′）
          - l1∨l2≽l1，l1∨l2≽l2（6.4′）
          - l3≽l1，l3≽l2，则l3≽l1∨l2（6.5′）
    - 注意：
      - 式（6.1）~（6.5）及式（6.1′）~（6.5′）这十个关系式代表了格的定义，是后面推理的基础。
      - 可以按照这些关系式所代表的意义来记忆，如关系式（6.4）说明最大下界的“下界”意义，关系式（6.5）说明最大下界的“最大”意义。
      - 由（6.4）和（6.4′），有$l_1 \wedge l_2 \preccurlyeq l_1 \vee l_2$。

- **二、格的性质**
  - **定理6.1**
    - 在格中，对任意的$l_1，l_2 \in L$，以下三式中若任意一式成立，那么其它两式也成立。
      - (1) $l_1 \vee l_2 = l_1$；
      - (2) $l_1 \wedge l_2 = l_2$；
      - (3) $l_2 \preccurlyeq l_1$
    - **定理表明**：在格的偏序关系的次序图中，如果两个不同的结点有边相连或通过可传递的第三边相连，则它们的并为连线上方的结点，而它们的交为连线下方的结点，可简单记忆为**“并取大，交取小”**。

- **对偶命题，对偶**
  - 设<L；≼>是格，P是包含格的元素和符号=、≼、≽、∧、∨的命题，将P中的≼、≽、∧和∨分别替换成≽、≼、∨和∧所得的命题称为P的对偶命题，简称对偶，记为P^D。
    - 注：若P^D是P的对偶，则P也是P^D的对偶，即互为对偶。
- **对偶原理**
  - 对于格 上的任一真命题P，其对偶P^D亦为格<L；≼>上的真命题。
- **定理 6.3**
  - 设<L；≼>是格，则运算∨和∧满足交换律、结合律、吸收律和幂等律，即对任意的l1，l2，l3∈L，有
    - (1) $l_1 \vee l_2 = l_2 \vee l_1$，$l_1 \wedge l_2 = l_2 \wedge l_1$。
    - (2) $l_1 \vee (l_2 \vee l_3) = (l_1 \vee l_2) \vee l_3$，$l_1 \wedge (l_2 \wedge l_3) = (l_1 \wedge l_2) \wedge l_3$。
    - (3) $l_1 \vee (l_1 \wedge l_2) = l_1$，$l_1 \wedge (l_1 \vee l_2) = l_1$。
    - (4) $l_1 \vee l_1 = l_1$，$l_1 \wedge l_1 = l_1$
    - 即格导出的代数系统具有交换律、结合律、吸收律和幂等律
  - 注：
    - 由于有结合律，常将$l_1 \vee (l_2 \vee l_3)$，$(l_1 \vee l_2) \vee l_3$记为$l_1 \vee l_2 \vee l_3$；将$l_1 \wedge (l_2 \wedge l_3)$，$(l_1 \wedge l_2) \wedge l_3$记为$l_1 \wedge l_2 \wedge l_3$。
    - 利用归纳法可以证明，对于任意n个元素l_1，l_2，…，$l_n \in L$，结合律也是成立的，即不加括号的表达式
    - $l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_n$（简记为$\bigvee\limits_{i=1}^{n} l_i$）和$l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$（简记为$\bigwedge\limits_{i=1}^{n} l_i$）分别唯一地表示L中的一个元素。
- **格的保序性**
  - 设<L；≼>是格，对任意的l_1，l_2，l_3，$l_4 \in L$，有
    - (1) 若$l_2 \preccurlyeq l_3$，则$l_1 \vee l_2 \preccurlyeq l_1 \vee l_3$，$l_1 \wedge l_2 \preccurlyeq l_1 \wedge l_3$。
    - (2) 若$l_1 \preccurlyeq l_3$，$l_2 \preccurlyeq l_4$，则$l_1 \vee l_2 \preccurlyeq l_3 \vee l_4$，$l_1 \wedge l_2 \preccurlyeq l_3 \wedge l_4$。
- **定理 6.5**
  - 设<L；≼>是格，则对任意l_1，l_2，$l_3 \in L$，有
    - (1) $l_1 \vee (l_2 \wedge l_3) \preccurlyeq (l_1 \vee l_2) \wedge (l_1 \vee l_3)$。
    - (2) $l_1 \wedge (l_2 \vee l_3) \succcurlyeq (l_1 \wedge l_2) \vee (l_1 \wedge l_3)$。
    - 可简单记忆为“先并大，后并小”或“先并大，先交小”。
    - **在格<L；≼>中，运算∨和∧一般不满足分配律。**
- **三、格的代数系统定义**
  - **定理 6.6**
    - 设< L；∨，∧>是一个代数系统，其中∨和∧都是二元运算且满足交换律、结合律和吸收律，则在L上必存在一偏序关系≼，使得< L；≼>是一个格。

- **代数格**
  - 设< L； ∨， ∧> 是一个代数系统，∨和∧是L上的两个二元运算，如果这两个运算满足交换律、结合律和吸收律，则称< L； ∨， ∧> 是格。
- **偏序格，代数格**
  - 格既可以看作是一个偏序集<L； ≼>（L中任意两个元素都存在最大下界和最小上界），一般称为偏序格，也可以看作是一个代数系统< L； ∨， ∧>（两个二元运算满足交换律、结合律和吸收律），一般称为代数格。

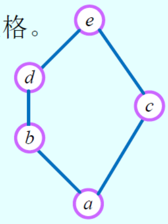
- **四、子格**
  - **子格**
    - 设< L； ∨， ∧> 是格，如果< S； ∨， ∧> 是< L； ∨， ∧> 的子代数，则称< S； ∨， ∧> 是< L； ∨， ∧> 的子格。
    - 注意：
      - 子格也是一个格。因为当运算∨和∧限制在S上时，交换律、结合律和吸收律也是成立的。
        - $\forall a, b \in S(\subseteq L) \rightarrow a \vee b, a \wedge b \in S$
      - 格是其自身的一个子格。
- **五、格的同态**
  - **定理6.7**
    - 设h 是从代数系统V1= <L1； ∨1， ∧1> 到代数系统V2= <L2； ∨2， ∧2> 的满同态，其中∨1，∧1，∨2，∧2都是二元运算，若V1是格，则V2也是格。
    - 格的同态像是格
  - **定理6.8**
    - 设h 是从格<L1； ≼1> 到格<L2； ≼2> 的同态，则对任意的x，y∈L1，如果$x \preccurlyeq_1 y$，则$h(x) \preccurlyeq_2 h(y)$。
  - **定理6.9**
    - 给定代数系统V1= <L1； $\vee_1$， $\wedge_1$>，V2= <L2； $\vee_2$， $\wedge_2$>，其中$\vee_1$，$\wedge_1$，$\vee_2$，$\wedge_2$都是二元运算，若V1和V2是格，则V1×V2 也是格。

6.2 分配格和有补格

- **一、分配格**
  - **1．分配格的定义**
    - **分配格**
      - 设< L； ∨， ∧> 是一个格，若对任意的l1，l2，l3∈L，有
      - $l_1 \wedge (l_2 \vee l_3) = (l_1 \wedge l_2) \vee (l_1 \wedge l_3)$，
      - $l_1 \vee (l_2 \wedge l_3) = (l_1 \vee l_2) \wedge (l_1 \vee l_3)$，
      - 则称< L； ∨， ∧> 是分配格。

【例 6.9】对任意的集合 A，$<2^A;\ \cup,\ \cap>$ 是一个分配格。

【例 6.10】图中给出的格（称为**五角格**）不是分配格。



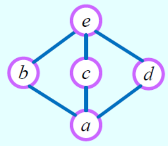
因为

$$b = b \vee (d \wedge c) \neq (b \vee d) \wedge (b \vee c) = d$$

$$d = d \wedge (b \vee c) \neq (d \wedge b) \vee (d \wedge c) = b$$

所以运算不满足分配律。

【例 6.11】图中给出的格（称为**钻石格**） 不是分配格。



因为 $b \wedge (c \vee d) = b \wedge e = b$，

而 $(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a$，

所以 $b \wedge (c \vee d) \neq (b \wedge c) \vee (b \wedge d)$。

- **2．分配格的判别**
  - **定理6.10**
    - 在格< L； ∨， ∧> 中，如果交运算对并运算是可分配的，则并运算对交运算也是可分配的；如果并运算对交运算是可分配的，则交运算对并运算也是可分配的。

如果 $<L;\ \vee,\ \wedge>$ 是分配格，则对任意的 l，a_1，a_2，…，$a_n \in L$，有

$$l \vee (\bigwedge_{i=1}^{n} a_i) = \bigwedge_{i=1}^{n} (l \vee a_i)$$

$$l \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} a_i) = \bigvee_{i=1}^{n} (l \wedge a_i)$$

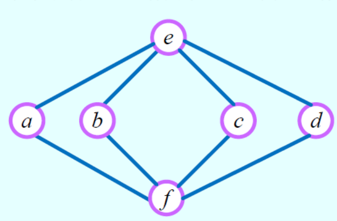
更一般地，对任意的 l_1，l_2，…，l_m，a_1，a_2，…，$a_n \in L$，有

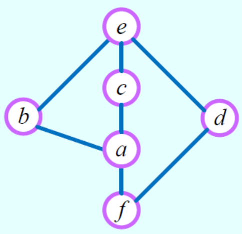
$$(\bigwedge_{i=1}^{m} l_i) \vee (\bigwedge_{j=1}^{n} a_j) = \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} (l_i \vee a_j)$$

$$(\bigvee_{i=1}^{m} l_i) \wedge (\bigvee_{j=1}^{n} a_j) = \bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} (l_i \wedge a_j)$$

  - **定理6.11**
    - 格为分配格的充分必要条件是，格中不存在与钻石格或五角格同构的子格。

例如 下图给出的格都不是分配格。





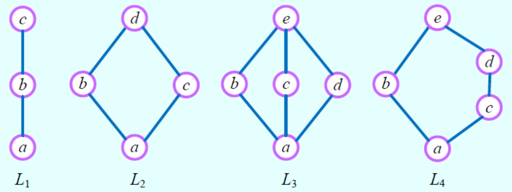
  - **推论6.2**
    - 任何小于5 个元素的格均为分配格。
  - **链**
    - 设<L； ≼>是一个偏序集，若对任意的l_1，l_2∈L，或者$l_1 \preccurlyeq l_2$或者$l_2 \preccurlyeq l_1$，即l_1，l_2可比，则称<L； ≼> 是一个链。
    - 此时的偏序称为全序或线序。

      - 每一个链$<L;\preccurlyeq>$都是一个分配格。
  - **定理6.12**
    - 设l_1，l_2，l_3是分配格$<L;\vee,\wedge>$中的任意三个元素，那么当且仅当$l_1\vee l_2=l_1\vee l_3$，$l_1\wedge l_2=l_1\wedge l_3$时，有$l_2=l_3$。
    - 注：对于非分配格，定理6.12 不成立。可用于反证一个格不是分配格。
- 二、有补格
  - 1．有界格
    - 全上界，全下界
      - 如果格$<L;\preccurlyeq>$中存在一个元素a，对任何元素$l\in L$，均有$l\preccurlyeq a$（$a\preccurlyeq l$），则称a 为格的全上界（全下界）。
      - **一个格若有全上界（全下界），则是唯一的。**
      - 通常将全上界记为“1”，而将全下界记为“0”。
    - 有界格
      - 既有全下界又有全上界的格称为有界格。
      - 在有界格 中，对任意的$l\in L$，有
      - （1）$0\preccurlyeq l$，$l\preccurlyeq 1$。
      - （2）$l\vee 1=1$，$l\vee 0=l$，$l\wedge 1=l$，$l\wedge 0=0$。
      - 注：在有界格的次序图中，必有唯一一个称为“1”的结点位于图的最上层，也必有唯一一个称为“0”的结点位于图的最下层，并且从任一其它结点出发经过向上的路径都可以到达结点1，而从任一其它结点出发经过向下的路径都可以到达结点0。
    - **定理6.14**
      - 每个有限格都是有界格。
      - 对于无限格L 来说，有些是有界格，有些不是有界格。
        - 例如
          - （1）格$<Z;\leq>$既无全下界，又无全上界，不是有界格。
          - （2）格$<N;\leq>$有全下界0，但没有全上界，也不是有界格。
          - （3）在格$<2^U;\subseteq>$中，无论U 是什么样的集合，均有全下界Φ和全上界U，因此是有界格。
  - 2．补元素
    - 补元素
      - 设$<L;\vee,\wedge>$是一个有界格，$a\in L$，若存在元素$b\in L$，使得$a\vee b=1$，$a\wedge b=0$，则称b是a的补元素。
      - 若b是a的补元素，则a也是b的补元素。因此a和b互为补元素。
      - 在任一有界格中，0 和1 互为补元素。

- 例子表明，在有界格中，
  - 并非每一个元素都有补元素。
  - 若某元素有补元素，则其补元素不一定唯一。

- **3．有补格**
  - **有补格**
    - 设< L； ∨， ∧> 是一个有界格，如果L中每一个元素都有补元素，则称< L； ∨， ∧> 是有补格。

【例 6.17】考虑下图所示的四个格。



L_1中的a与c互为补元，其中a，c分别为全下界和全上界，b没有补元。L_1不是有补格。

L_2中的a与d互为补元，其中a，d分别为全下界和全上界，b与c也互为补元。L_2是有补格。

L_3中的a与e互为补元，其中a，e分别为全下界和全上界，b的补元是c和d，c的补元是b和d，d的补元是b和c。L_3是有补格。

L_4中的a与e互为补元，其中a，e分别为全下界和全上界，b的补元是c和d，c的补元是b，d的补元是b。L_4是有补格。

- **三、有补分配格**
  - **有补分配格，布尔格**
    - 既是有补格又是分配格的格称为有补分配格，也称为布尔格。
    - **性质**：
      - 在有补分配格< L； ∨， ∧> 中，任一元素的补元素是唯一的。
        - 记l的补元素为l'或$\bar{l}$。
      - （对合律）在有补分配格< L； ∨， ∧> 中，对每一个l∈L，有(l')'= l。
      - （德· 摩根定律）在有补分配格< L； ∨， ∧> 中，对于任意的l_1，l_2∈L，有
        - (1) $(l_1 \vee l_2)' = l_1' \wedge l_2'$；
        - (2) $(l_1 \wedge l_2)' = l_1' \vee l_2'$。
      - 在有补分配格< L； ∨， ∧> 中，对任意的l_1，l_2∈L，$l_1 \preccurlyeq l_2$当且仅当$l_2' \preccurlyeq l_1'$当且仅当$l_1 \wedge l_2' = 0$当且仅当$l_1' \vee l_2 = 1$

- **6.3 布尔代数**
  - **一、布尔代数的基本概念**
    - **布尔代数**
      - 如果一个格是有补分配格，则称其为布尔代数。一般记作< B； ∨， ∧， '>，其中'为求补运算（一元运算）。

- 设$< B; \vee, \wedge, ' >$是一个代数系统，$\vee$和$\wedge$是B上的二元运算，'是一元运算，若这些运算满足交换律、分配律、同一律和互补律，则称$< B; \vee, \wedge, ' >$是布尔代数。
- 布尔代数$< B; \vee, \wedge, ' >$具有如下基本性质：对于B中任意元素x，y，z，有
    - （1）交换律：$x \vee y = y \vee x$，$x \wedge y = y \wedge x$
    - （2）结合律：
        - $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
        - $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
    - （3）幂等律：$x \vee x = x$，$x \wedge x = x$
    - （4）吸收律：$x \vee (x \wedge y) = x$，$x \wedge (x \vee y) = x$
    - （5）分配律：
        - $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
        - $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
    - （6）同一律：$x \vee 0 = x$，$x \wedge 1 = x$
    - （7）零一律：$x \vee 1 = 1$，$x \wedge 0 = 0$
    - （8）互补律：$x \vee x' = 1$，$x \wedge x' = 0$
    - （9）对合律：$(x')' = x$
    - （10）德·摩根定律：
        - $(x \vee y)' = x' \wedge y'$
        - $(x \wedge y)' = x' \vee y'$
- **注意：**
    - 以上十条性质均可由交换律、分配律、同一律和互补律这四条基本定律导出（课后练习）。
    - 这四条基本定律中每一条都包含了互为对偶的两个关系式，即将一个关系式中的$\vee$，$\wedge$，0，1分别改为$\wedge$，$\vee$，1，0，则可得到另一个关系式。
    - 布尔代数的任一由这些基本关系式所导出的关系式的对偶，亦可由这些基本关系式的对偶导出。
    - **单位元，零元**
        - 对运算$\vee$：0是单位元，1是零元；
        - 对运算$\wedge$：1是单位元，0是零元。
        - 单位元和零元都唯一。
- **代数系统的格：**
    - **布尔代数**
        - 设$< B; \vee, \wedge, ' >$是一个代数系统，$\vee$和$\wedge$是B上的二元运算，'是一元运算，若这些运算满足交换律、分配律、同一律和互补

      律，则称$<B; \vee, \wedge, '>$是布尔代数。

  - **子布尔代数**
    - 设$<B; \vee, \wedge, '>$是一个布尔代数，$<S; \vee, \wedge, '>$是$<B; \vee, \wedge, '>$的子代数，则称$<S; \vee, \wedge, '>$为$<B; \vee, \wedge, '>$的子布尔代数。
  - **注:**
    - 布尔代数的子代数也是一个布尔代数。
    - 布尔代数是其自身的一个子布尔代数。
  - **定理6.19**
    - 设h是从代数系统$V_1 = <L_1; \vee_1, \wedge_1, '_1>$到代数系统$V_2 = <L_2; \vee_2, \wedge_2, '_2>$的满同态，其中$\vee_1, \wedge_1, \vee_2, \wedge_2$都是二元运算，$'_1, '_2$都是一元运算，若$V_1$是布尔代数，则$V_2$也是布尔代数。

      > 满同态传递运算性质
  - **推论6.3**
    - 布尔代数的同态像是布尔代数。
  - **定理6.20**
    - 给定代数系统$V_1 = <L_1; \vee_1, \wedge_1, '_1>$和$V_2 = <L_2; \vee_2, \wedge_2, '_2>$，其中$\vee_1, \wedge_1, \vee_2, \wedge_2$都是二元运算，$'_1, '_2$都是一元运算，若$V_1$和$V_2$是布尔代数，则$V_1 \times V_2$也是布尔代数。

- **二、布尔代数的性质**
  - **元素a盖住b**
    - 设a，b是格$<L; \preccurlyeq>$中的两个元素，如果$b \preccurlyeq a$且$b \neq a$（记为$b<a$），以及格中无其它别的元素c，使得$b<c$和$c<a$（记为$b<c<a$），则称元素a盖住b。
    - 若a为原子，则不存在元素$c \in L$，使得$0<c<a$。
    - 从关系$\preccurlyeq$的次序图上看，从全下界结点0出发经过一条边就能够到达的结点就是原子。
    - **格中的原子不一定唯一。**
    - **定理6.21**
      - 若格中有原子a，b，且$a \neq b$，则必有$a \wedge b = 0$。
    - **定理6.22**
      - 对于布尔代数，原子具有如下性质：
        - （1）元素a是原子当且仅当$0<a$，且对任意的$x \in B$，有$x \wedge a = a$或$x \wedge a = 0$。
        - （2）若元素a是原子，则对任意的x，$y \in B$，$a \preccurlyeq x \vee y$当且仅当$a \preccurlyeq x$或$a \preccurlyeq y$。
        - （3）若元素a，b是原子，则有$a = b$或$a \wedge b = 0$。

- （4）对有限布尔代数中任意非零元素b，总有一个原子a，使得a≼b。
- （5）对有限布尔代数中任意元素b，设$A(b) = \{x|x \in B，x是原子且x \preccurlyeq b\} = \{a_1，a_2，…，a_m\}$，则b= a1∨a2∨… ∨am且表达式唯一。

- **定理6.23**
  - 设<B；∨，∧，'>是有限布尔代数，S是其所有原子的集合，则<B；∨，∧，'>和$< 2^S；\ \cup，\ \cap，\ >$同构，这里将集合的补运算记为~以示区别。
- **推论6.4**
  - 任何有限布尔代数的域的基数必定等于2^n，其中n是该布尔代数中所有原子的个数。
- **推论6.5**
  - 任何等势的有限布尔代数都是同构的。

- **离散数学Chapter 7： 图和树**
  - **7.1图的基本概念**
    - **一、图及其图解表示**
      - **1．图的定义**
        - **图，结点，顶点，结点集，边，弧，边集，结点数和边数，阶，n阶图，(n，m)图，零图，平凡图**
          - 一个图G是一个有序二元组(V，E)，记作G=(V，E)

            Graph，Vertex，Edge
          - V={v1，v2，…，vn}是一个**非空的有限集合**，V中的元素称为G的结点或顶点，V称为图G的结点集，记作V(G)。
          - E={e1，e2，…，em}是一个由V中元素构成的对偶的集合，E中的元素称为G的边或弧，E称为图G的边集，记作E(G)。

            可为空集
          - ＃V(G)，＃E(G)分别称为图的结点数和边数。
          - 图的结点数也称为图的阶，n个结点的图称为n阶图。
          - 具有n个结点和m条边的图称为(n，m)图。
            - (n，0)图称为零图。
            - (1，0)图称为平凡图。
        - **无向边,端点,有向边，起点（始点）,终点，端点,关联边**
          - 图G= (V，E)中，
            - 若E的元素e为V中两个元素u和v的**非有序的对偶**，则称边e为图G的无向边，记为e= {u，v}，其中，结点u和v称为无向边e的端点；

- 若E的元素e为V中两个元素u和v的有序的对偶，则称边e为图G的有向边，记为e=(u，v)，其中，结点u和v分别称为有向边e的起点（或始点）和终点，也称为有向边的端点。
- 以结点u为端点的边称为结点u的关联边。

> 图中结点与边的关联关系

- **注意：**
  - （1）若结点u≠v，则{u，v}和{v，u}是同一条边，而(u，v)和(v，u)是两条不同的边（如果存在的话）。
  - （2）对无向边，每个端点都可作为起点或终点。

- **自环，自回路，平行边，重复边，重数**
  - 图G=(V，E)中，
    - 端点相同的边{u，u}或(u，u)称为结点u的自环或自回路。
    - E中相同的边{u，v}或(u，v)称为平行边或重复边，并称重复边的条数为该边的重数。
- **多重图，简单图**
  - 图G=(V，E)中，
    - 含有平行边的图称为多重图。
    - 既不含自环又不含平行边的图称为简单图。
- **无向图，无向简单图，有向简单图，混合图**
  - 所有边都是无向边的图称为无向图，所有边都是无向边的简单图称为无向简单图或简单无向图。
  - 所有边都是有向边的图称为有向图，所有边都是有向边的简单图称为有向简单图或简单有向图。
  - 既含无向边又含有向边的图称为混合图。
  - **注意：**
    - 用方向相反的两条有向边替换无向边，可将混合图变为有向图，所以，本篇只讨论无向图和有向图。
    - 无向图与有向图统称为图，但一般说到图常指无向图。
    - 在分析包含某种流向的结构时，常用到有向图。
- **基础图，基图，底图，定向图**
  - 将有向图的各条有向边略去方向后所得到的无向图称为该有向图的基础图，简称基图，也称底图。
  - 如果将无向图的各条边任意定一个方向后所得到的有向图称为该无向图的一个定向图。
- **赋权图，有权图**
  - 如果图G的每条边都赋以一个实数作为该边的权，则称图G为赋权图或有权图。

      - 有权图可定义为一个有序三元组(V，E，f)，其中f是一个定义在边集E上的函数，通过f将权分配给各边。
    - **邻接点，邻接边，孤立点，孤立边**
      - 图中关联于同一条边的两个结点称为是邻接点，关联于同一结点的两条边称为是邻接边。

        > 图中结点与结点，边与边的邻接关系

      - 图中不与其他任何结点相邻接的结点称为是孤立点，不与其他任何边相邻接的边称为是孤立边。
      - 平凡图是仅由一个孤立结点组成的图。
      - 零图是仅由孤立结点组成的图。
  - **2．图的表示方法**
    - 集合表示法
      - 利用集合表示

        【例 7.1】设集合$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$，
        $E_1=\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}\}$，
        $E_2=\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_6, v_6\}\}$，
        $E_3=\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_2, v_5), (v_3, v_4)\}$，
        $E_4=\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_2, v_5), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_3, v_4), (v_6, v_6)\}$，
        $E_5=\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_2\}\}$，
        (V, E_1)是一个无向简单图
        (V, E_2)是一个无向多重图　　(V, E_4)是一个有向多重图
        (V, E_3)是一个有向简单图　　(V, E_5)是一个混合图。 13
    - 图解表示法
      - 用平面上的一些小圆圈分别表示图的结点，
      - 用连接相应两个结点u和v而**不经过其它结点**的带（不带）箭头的直线或曲线来表示图的有向边(u，v)（无向边{u，v}），
      - 绕结点u画一个带（不带）箭头的圆圈表示自环(u，u)（{u，u}）。
      - **注意：**
        - 由于结点位置的选取和边的形状的任意性，一个图可以有各种外形上看起来差别很大的图解。
        - 常将图的一个图解就看做是这个图。
    - 矩阵表示法
      - 用矩阵的方法也可以表示一个图。
      - 在7.2 节中专门讨论。
- **二、完全图与补图**
  - **无向完全图，有向完全图，竞赛图**
    - 在无向简单图中，如果任意两个不同的结点都是邻接的，则称该图是无向完全图。**n个结点的完全图记作K_n。**
    - 在有向简单图中，如果任意两个不同的结点之间均有两条方向相反的有向边，则称该有向图为有向完全图。

- 在有向简单图中，如果任意两个不同的结点之间有且仅有一条有向边，则称该有向图为竞赛图。
- **注意：**
  - n阶无向完全图的边数m= n(n–1)/2。
  - n阶有向竞赛图的边数m= n(n–1)/2。
  - n阶有向完全图的边数m= n(n–1)。

- **补图，相对于完全图的补图**
  - 设G是一个简单图，由G的所有结点和为了使G成为完全图所需添加的那些边组成的图，称为G的相对于完全图的补图，简称为G的补图，一般用$\overline{G}$表示。

- **三、结点的度与握手定理**
  - **1．结点的度**
    - **结点的度,出度,入度**
      - 图中关联于结点v的边的总数称为该结点的度，记作deg(v)。

        > degree
      - 在有向图中，
        - 以v为起点的有向边的条数称为结点v的出度，记作$deg^+(v)$。
        - 以v为终点的有向边的条数称为结点v的入度，记作$deg^-(v)$。
        - 结点v的度为$deg(v)=deg^+(v)+deg^-(v)$。
      - **约定：**
        - 无向图中的自环在其对应结点的度上增加2。
        - 有向图中的自环在其对应结点的度上增加一个入度和一个出度。
  - **2．握手定理**
    - **握手定理**
      - 设图G具有结点集$\{V_1,V_2,\ldots,V_n\}$和m条边，则G中所有结点的度之和为G的边数的两倍，即
        - $\sum\limits_{i=1}^{n} deg(v_i)=2m$
      - 任何图G中，度为奇数的结点个数为偶数。
    - **正则图**
      - 若无向**简单**图的所有结点都具有同一个度d，则称该无向图G为d次正则图或d度正则图。

- **四、图的连通性**
  - **1．路**
    - **路,开路,简单路,基本路,真路,回路,简单回路,基本回路,环、圈**
      - 图G中结点和边的序列$v_1,e_1,v_2,e_2,\ldots,v_l,e_l,v_{l+1}$称为结点$v_1$到$v_{l+1}$的一条长为l的路，简单图中常用结点的序列$v_1v_2\ldots v_lv_{l+1}$来表

示。其中e_i（$i = 1，2，...，l$）以v_i和v_{i+1}为端点（有向图中，边e_i为以vi为起点、以vi+1为终点的有向边）。

- 若$v_1 \neq v_{l+1}$，则称路$v_1 v_2 \dots v_l v_{l+1}$为开路。
  - 在开路中，若所有**边**互不相同，则称该路为简单路，
  - 若所有**结点**互不相同（此时所有边也互不相同），则称该路为基本路或真路。
- 若$v_1 = v_{l+1}$，则称路$v_1 v_2 \dots v_l v_{l+1}$为回路。
  - 在回路中，若所有**边**互不相同，则称该路为简单回路
  - 若$v_1, v_2, \dots, v_l$各不相同（此时所有边也互不相同），则称该回路为基本回路或环、圈。

- **注:**
  - 有向图的路、开路、回路、简单路、简单回路、真路、环常称为有向路、有向开路、有向回路、有向简单路、有向简单回路、有向真路、有向环。
  - 无向图中形如$v_i v_j v_i$的回路（此时，两条边相同）不能称为环。
  - 真路是简单路，简单路不一定是真路。环是简单回路，简单回路不一定是环。

- **2．可达、连通图**
  - **可达的，可达结点，不可达的，连接的，连通的**
    - 图G中，若存在一条结点u到v的路，则称结点u到v是可达的，或者结点v是u的可达结点，否则称结点u到v是不可达的。
    - 对于无向图，若结点u到v是可达的，则结点v到u也是可达的，即结点u和v相互可达，常称为结点u和v是连接的或连通的。
    - **规定：**任何结点到其自身总是可达的。
    - 显然，
      - 在有向图中结点u到v可达，并不意味着v到u也可达；
      - 无向图结点之间的可达关系即连接关系是图的结点集上的等价关系。
  - **连通图，连通的，非连通图，分离图，非连通的**
    - 无向图G中，若任意两个结点可达，则称图G是连通图或是连通的；否则，称图G为非连通图、分离图或是非连通的。
    - **注:**
      - （1）仅有一个孤立结点的平凡图是连通图。
      - （2）连通图（平凡图除外）中结点的度大于0。
  - **弱连通，连通的，单向连通的，单侧连通的，强连通的。**
    - 有向图G中，
      - 如果G的基图是连通的，则称G是弱连通的或连通的；

- 如果对任意的两个结点，至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称G是单向连通的或单侧连通的；
- 如果对任意两个结点，两者之间是相互可达的，则称G是强连通的。
- 强连通图是单向连通图，单向连通图是弱连通图。反之不一定。
- **定理7.2（判断是否连通）**
  - 无向图G不连通当且仅当G的结点集V可以划分为子集V1和V2，使得G的任何边都不以V1的一个结点和V2的一个结点为端点。
- **3．短程和距离、竞赛图的真生成路及应用**
  - **短程，距离**
    - 图G中，结点u可达v，则称u到v的路中最短的路为结点u到v的短程，短程的长度称为结点u到v的距离，用d(u，v)表示。

      > distance

    - 若结点u到v不可达，则d(u，v) = ∞。
    - **注：**
      - 在无向图中，若结点u和v是连接的，则d(u，v) = d(v，u)。
      - 在有向图中，结点u不一定可达v，结点v也不一定可达u，即便结点u可达v，v也可达u，但d(u，v)与d(v，u)不一定相等。
    - **定理7.3**
      - n阶图G中结点u到v（u≠v）的短程是一条长度不大于n–1的真路，其中n> 1。
    - **注：**
      - 在n阶图中，任意两个相连接的结点间的距离不超过n –1。
    - **推论7.2**
      - 在n阶图中，任一环的长度不大于n，其中n> 2。
    - **定理7.4**
      - 每个竞赛图G= (V，E)都有一条真生成路，即存在一条通过G的每个结点一次且仅一次的有向路。
      - n阶竞赛图可用来表示n个选手间循环赛的胜负状态（不考虑平局），其真生成路则给出了一个循环赛结果的选手排名。
- **五、图的同构**
  - **同构**
    - 设G_1= (V_1，E_1)，G_2= (V_2，E_2)是两个无向图（有向图），若存在双射函数h：$V_1 \to V_2$，使得对任意的u，v∈V_1，{u，v} ∈E_1 （(u，v) ∈E_1）当且仅当{h(u)，h(v)} ∈E_2 （(h(u)，h(v)) ∈E_2），则称G_2同构于G_1。
    - **注：**
      - 定义说明，如果两图的结点和边能建立一一对应关系，且点和边的关联关系也能保持一一对应关系，则这两个图同构。

- 若图G2同构于G1，则G1也同构于G2，简称G1和G2同构。
- 图之间的同构关系是等价关系，具有自反性、对称性和传递性。
- 同构的两图除了结点的标记可能不一样外，其它是完全相同的，一图成立的结论对同构于它的图也成立。

- **判定方法：**
  - 目前，判断两个图的同构还只能从定义进行判断，是一个非常困难的问题。但若不满足下面的必要条件之一，则可以断定它们不同构：
    - 具有相同的结点个数。
    - 具有相同的边数。
    - 如果不是简单图，则还要求对应边的重数也相同。
    - 度数相同的结点数相同。

- **六、子图与分图**
  - **子图，母图,G_1包含G_2,真子图,生成子图,支撑子图,G_1的由结点集V_2导出的子图，导出子图**
    - 设G_1=(V_1，E_1)和G_2=(V_2，E_2)是两个图，
      - 若V_2⊆V_1，E_2⊆E_1，则称G_2是G_1的子图，G_1是G_2的母图，或称G_1包含G_2，记作G_2⊆G_1；
      - 若$G_2 \subseteq G_1$但G_2≠G_1（即V_2⊂V_1或E_2⊂E_1），则称G_2是G_1的真子图，记作G_2⊂G_1；
      - 若V_2= V_1，E_2⊆E_1，则称G_2是G_1的生成子图或支撑子图。
      - 若V_2⊆V_1，且E_2为E_1中两个端点均在结点子集V_2中的所有边的集合，即E_2 = {e | e∈E_1，且e的两个端点均在V_2中}则称G_2是G_1的由结点集V_2导出的子图，简称G_2是G_1的导出子图。
    - 图G的子图的其他定义
      - 图的两种操作：
        - 删边：删去图中某一条边，但仍保留这条边的两个端点。
        - 删结点：删去图中某一结点以及与这个结点关联的所有边。
      - 在图G中删去一些边**和**结点后所得的图称为图G的子图。
      - 在图G中至少删去一条边或一个结点后所得的图称为图G的真子图。
      - 由图G删去一些边后所得的子图称为图G的生成子图。
      - 由于在图G中删去一条边时仍保留边的两个端点，所以图G的生成子图必然含有图G的所有结点。
      - 保留图G的所有结点的子图称为图G的生成子图。
  - **分图**
    - 设H是无向图G的子图，如果H满足以下条件，则称H是G的分图。
      - H是连通的；

      - 对G的任意子图G′，若H⊂G′⊆G，则G′不是连通的。
    - **注意**
      - 若H是G的分图，则H是G的连通子图，同时除H中的结点和边外，G中的任何结点或任意的边加到H后都不是连通的。
      - 若图G是连通图，则G只有一个分图。
      - 与“关系”的联系

        用第二章“关系”的概念解释分图的概念如下：

        给定图$G=(V, E)$，其中$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$。定义$V$上的个二元关系 R

        当且仅当v_i到v_j有路连接时，$v_i \, R \, v_j$

        则图G中结点之间的连接关系R是V上的一个等价关系。

        该等价关系将结点集V分成若干个分划块（即V的若干个非空子集）$V_1, V_2, \ldots, V_T$，使得任意两个结点v_i和v_j，当且仅当属于同一个分划块V_h时，v_i与v_j相连接。

        于是，等价类中各结点以及与这些结点相关联的边构成G的一个分图。

        有多少个等价类，便有多少个分图。
  - **割点，割边，桥**
    - 无向图G中，如果删去结点u后图的分图数增加，则称结点u是G的割点；如果删去边e后图的分图数增加，则称边e是G的割边或桥。
    - **定理7.5**
      - 无向图G中边{vi，vj}为割边的充要条件是边{vi，vj}不在G的任何环上出现。
  - **弱（单向、强）分图**
    - 设H是有向图G的子图，如果H满足以下条件，则称H是G的弱（单向、强）分图。
      - （1）H是弱（单向、强）连通的；
      - （2）对G的任意子图G′，若G′≠H，且H⊆G′⊆G，则G′不是弱（单向、强）连通的。
    - **注意**
      - （1）无向图的连通及有向图的弱连通、强连通都是图的结点集上的等价关系。
      - （2）有向图的单向连通不是图的结点集上的等价关系。
- **七、图的运算**

7.2 图的矩阵表示

本节开始，如无特别声明，主要讨论简单图。

- **一、图的关联矩阵**
  - **关联矩阵**
    - 定义：

定义 7.24 设无向图 $G=(V, E)$，其中 $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，称 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})$ 为 G 的**关联矩阵**，其中 (i, j) 项元素为

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & 若v_i与e_j关联\\ 0, & 否则\end{cases}$$

$$i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m$$

对于有向图，其关联矩阵 (i, j) 项元素为

$$m_{ij}=\begin{cases}0, & 若v_i与e_j不关联\\ 1, & 若v_i为e_j的始点\\ -1, & 若v_i为e_j的终点\end{cases}$$

$$i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m$$

- 有向图的关联矩阵M具有如下性质

（1）$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0$，$j=1, 2, \ldots, m$，因而 $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0$，即 $\boldsymbol{M}$ 中所有元素之和为0。

（2）$\boldsymbol{M}$ 中 -1 的个数等于 $+1$ 的个数，都等于边数。

（3）$\boldsymbol{M}$ 的第 i 行中，1的个数为 $\deg^+(v_i)$，-1 的个数为 $\deg^-(v_i)$。

- **二、图的邻接矩阵**
  - **邻接矩阵**
    - 定义：

定义 7.25 设无向图 $G=(V, E)$，其中 $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，称 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 G 的**邻接矩阵**，其中 (i, j) 项元素为

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若\{v_i, v_j\}\in E\\ 0, & 否则\end{cases}$$

$$i, j=1, 2, \ldots, n$$

对于有向图，其邻接矩阵的 (i, j) 项元素为

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若(v_i, v_j)\in E\\ 0, & 否则\end{cases}$$

$$i, j=1, 2, \ldots, n$$

- **图的邻接矩阵具有如下性质：**
  - 无向图的邻接矩阵是主对角线元素均为零的对称0-1矩阵。
    - 反之，若给定任何主对角线元素均为零的对称0-1矩阵A，则可以唯一地作一个无向图G，以A为邻接矩阵。
    - 有向图的邻接矩阵与无向图的类似，只是其邻接矩阵不一定对称。
  - 零图的邻接矩阵为一个零矩阵，反之亦然。
  - 任意图的邻接矩阵依赖于V中各元素的给定次序。
    - 对于V中元素不同的给定次序，可以得到同一个图的不同的邻接矩阵。
    - 图G的任何一个邻接矩阵都可以由G的另一个邻接矩阵通过变换某些行和相应的列而得到。

      合同变换
  - 今后选取给定图的任何一个邻接矩阵作为该图的邻接矩阵。

- 如果两个图有这样的邻接矩阵，其中的一个可通过另一个变换某些行和相应的列而得到，则这两个图是**同构的**。
- 无向图G的邻接矩阵A的第i行（或第i列）出现的1 的个数即为结点vi的度。
  - 有向图G的邻接矩阵A的第i行出现的1的个数为结点vi的出度
  - 第i列出现的1的个数为结点vi的入度。
- 图G的邻接矩阵A的(i，j)项元素a_{ij}给出了从vi到vj的长度为1的路的总数。

- **定理7.6**
  - 设G是具有结点集{v_1，v_2，…，v_n}和邻接矩阵A的无向图，则矩阵A^l（l = 1，2，…）的(i，j) 项元素$a_{ij}^{(l)}$ 是图G中连接结点v_i 到v_j的长度为l 的路的总数
  - 利用无向图的邻接矩阵，可以
    - 判断G中结点v_i与v_j（i≠j）是否相连接。
    - 计算结点v_i与v_j（i≠j）之间的距离

- **三、图的连接矩阵**
  - **连接矩阵，可达矩阵**
    - 定义：

定义 7.26 设无向图$G = (V, E)$，其中$V = \{v_1, v_2, …, v_n\}$，称n阶方阵$\boldsymbol{C} = (c_{ij})$为图$G$的**连接矩阵**，其中 (i, j) 项元素为

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{结点}v_i\text{和}v_j\text{连接} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, …, n$$

对于有向图G，n阶方阵$\boldsymbol{P} = (p_{ij})$称为$G$的**可达矩阵**，其中

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{结点}v_i\text{到}v_j\text{可达} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, …, n$$

- 当且仅当连接矩阵的所有元素均为1时，图G是连通的。

- 由图G的邻接矩阵A构造连接矩阵C：
  - 方法一：
    - 由 $\boldsymbol{A}$ 计算 $\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^3$，…，$\boldsymbol{A}^{n-1}$
    - 计算 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^0 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + … + \boldsymbol{A}^{n-1}$
    - 将 $\boldsymbol{B}$ 中非零元素改为 1，所得到的矩阵即为连接矩阵 $\boldsymbol{C}$
  - 方法二：

将邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 看作是布尔矩阵，矩阵的乘法运算和加法运算中，元素之间的加法与乘法采用布尔运算（参看第 2.3 节）

- 由 $\boldsymbol{A}$ 计算 $\boldsymbol{A}^{(2)}$，$\boldsymbol{A}^{(3)}$，…，$\boldsymbol{A}^{(n-1)}$
- 计算 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^0 \vee \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{A}^{(2)} \vee … \vee \boldsymbol{A}^{(n-1)}$
- $\boldsymbol{C}$ 便是所要求的连接矩阵

- 7.3 树
  - 一、树的基本概念
    - 无向树，树，树叶，树林
      - 不包含环的连通图称为无向树，简称树，树中度为1的结点常称为树叶。不包含环的图（即每个分图都是树的图）称为树林。
  - 二、树的基本性质
    - **定理7.7**
      - 设T是一棵树，v_i和v_j是T中任意两个不同的结点，则v_i 和v_j由唯一的一条真路相连接。若v_i 和v_j不相邻接，那么当给T添加一条边$\{v_i\ ,\ v_j\}$后形成的图恰有一个环。
      - 注意：若v_i 和v_j相邻接，则连接v_i 和v_j的真路是边$\{v_i\ ,\ v_j\}$，此时给T添加一条边$\{v_i\ ,\ v_j\}$后得到的是一个多重图，其中回路$v_iv_jv_i$也是环
      - **定理7.8**
        - 若T是一(n，m) 树，则m= n–1。
        - 树中如果有边，一定是割边
        - **推论7.3**
          - 若T是由r棵树构成的一(n，m) 树林，则m= n–r。
      - **定理7.9**
        - 具有两个或更多结点的树至少有两片树叶。
      - **定理7.10**
        - 给定(n，m) 图T，以下关于树的定义是等价的：
          - （1）无环的连通图。
          - （2）无环且m = n –1。
          - （3）连通且m = n –1。
          - （4）无环，但增加一条新边后得到一个且仅一个环。
          - （5）连通，但删去任何一个边后不连通。
          - （6）每一对结点之间有一条且仅一条真路。
  - 三、最小生成树
    - 1．生成树
      - 生成树
        - 若连通图G的生成子图T是一棵树，则称T为G的生成树，记为T_G。
        - **注：**
          - 任何连通图存在生成树，且其生成树一般不是唯一的。
    - 2．构造连通图的生成树的方法
      - **破坏法**

        一个连通图G和它的生成树的差别在于前者可能有环，而后者不包含任何环。
        - （1）令G为G_1，置i= 1；

      - （2）若G_i无环，则T_G= G_i；
      - 否则，在G_i中找出一个环σi，去掉环σi中的任一条边e_i，令剩余的图为G_{i+1}；
      - （3）i增加1，并返回到第（2）步。
      - 注意：破环时不要破坏图的连通性。
    - **避环法**
      - （1）选取G的任一条边e_{1}，令E_{1}= {e_{1}}，G_{1}= (V，E_{1})，置i= 1；
      - （2）若已选好E_i= {e_1，e_2，…，e_i}，从E-E_i中选一条边e_{i+1}使E_i ∪{e_{i+1}}不含有环。
        - 若满足上述条件的e_{i+1}不存在，则G_i= (V，E_i) 就是生成树T_G。否则令G_{i+1}= (V，E_{i+1})，其中E_{i+1}= E_i ∪{e_{i+1}}；
      - （3）i增加1，并返回到第（2）步
    - **注意：**
      - 用破环法和避环法得到的连通图的生成树一般不唯一！
      - 若G是一(n，m) 连通图，其生成树T_G为(n，n–1) 图。
      - G中去掉m –n + 1 条边可以得到T_G，该数称为G的环秩。
        - G的环秩是为了“弄破”G 的所有环而必须由G中删去的边的最小数目。
      - G的每一条不属于T_G的边称为T_G的弦。
        - 共有m –n + 1 条弦。
      - T_G中的边称为T_G的枝。
  - **3．最小生成树**
    - **权，最小生成树**
      - 设G= (V，E，f) 是一连通有权图，T是G的一棵生成树，T的边集用E(T) 表示，T的各边权值之和$W(T)=\sum_{e\in E(T)} f(e)$称为T的权。
      - G的所有生成树中权最小的生成树称为G的最小生成树。
  - **4．构造连通有权图的最小生成树**
    - 实际背景
      - 城市之间通信线路的铺设、水渠的布置、交通线的规划等都是
    - 图的最小生成树的问题。
      - 构造方法
        - 破环法（又称Prim 算法）
        - 避环法（又称Kruskal 算法）。
    - **注意：**
      - 与构造生成树不同的是，在破环法中每次去掉环中权最大的边，在避环法中每次取出权最小的边。

- 7.4 有向树
  - 一、有向树的基本概念
    - **有向树，根树，树根，终点或树叶，分枝结点，内点**
      - 一个有向图，若其基图是一棵树，则称为有向树。
      - 一棵有向树，若它只有一个结点的入度为0，而其它所有结点的入度为1，则称为根树，其中入度为0 的结点称为树根，出度为0 的结点称为终点或树叶，出度不为零的结点称为分枝结点（包括树根）或内点（不包括树根）。
      - 注：每棵有向树至少有一个结点。一个孤立点也是一棵有向树。
      - $$\begin{cases} \text{入度为}0 \rightarrow \text{树根} \\ \text{入度为}1 \begin{cases} \text{出度为}0 \rightarrow \text{树叶} \\ \text{出度大于}0 \rightarrow \text{分支结点} \end{cases} \end{cases}$$
      - 在根树中，对任一结点v∈V，必存在唯一的一条从根v0到v的真路。
        - 根树的树根可以到达根树的任意节点
    - **级**
      - 称从v0到结点v的距离为结点v的级。

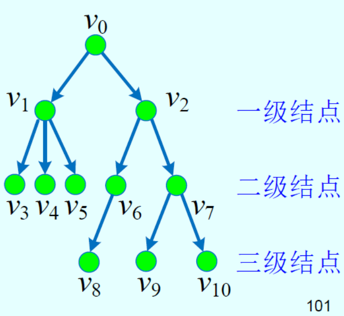
        根的级是 0。

        由于根 v_0 的入度为 0，因此若有边与 v_0 相关联，则这些边都以 v_0 为始点，这些边的终点称为一级结点。

        如果还有边与一级结点相关联，则这些边必以一级结点为始点，而它们的终点称为二级结点。

        ……

        因此，根树的图解如右图所示。

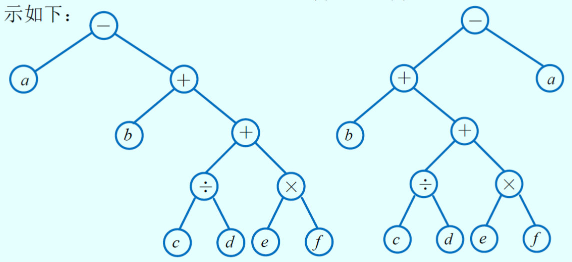
        101
    - **父亲,儿子,兄弟,祖先,子孙,后裔,真祖先,真子孙,真后裔**
      - 若(a，b) 是一条边，则称a是b的父亲，b是a的儿子。
        - 同一结点的儿子称为兄弟。
      - 若a 到b 可达，则称a 是b 的祖先，b 是a 的子孙或后裔，如果还有a≠b，那么称a 是b 的一个真祖先，b 是a 的一个真子孙或真后裔。
    - **v为根的子树,v的子树**
      - 设v 是根树T 的分枝结点，
        - 由结点v 和它的所有子孙构成的结点集V_1以及从v 出发的所有有向路中的边构成的边集E_1组成的T 的子图$T_1=(V_1，E_1)$称为T 的以v为根的子树
        - 以v的儿子为根的子树称为v的子树。
  - 二、二元树及其周游
    - **m元树或m叉树,完全m元树,二元树,完全二元树,满二元树**

    - 在根树中，若每一结点的出度都小于或等于正整数m，则称这棵树为m元树或m叉树。
    - 若每个结点的出度恰好为m或零，则称这棵树为完全m元树。
    - 当m= 2 时，分别称其为二元树和完全二元树。
    - 若完全二元树的所有树叶结点在同一级别则称它为满二元树。
  - **有序树,左子树,右子树**
    - 若在根树中规定了每一级上结点的次序，则称这样的根树为有序树。
    - 在二元有序树中，每个结点v至多有2棵子树，分别称为v的左子树和右子树。
      - 在图解时，左子树和右子树分别画在v的左下方和右下方。
      - 利用二元有序树可以表示算术表达式:
        - 运算符放在分枝结点上，数字或变量放在树叶结点上。
        - 被减数和被除数放在左子树的树叶上。
        - 例题:

【例 7.33】用二元有序树表示算术表达式

$a-(b+((c/d)+(e\times f)))$ 和 $(b+((c/d)+(e\times f)))-a$。

解：这两个算术表达式可分别用图 (a) 和图 (b) 的二元有序树表示如下：



（a）　　（b）

- **三、周游二元树**
  - **周游二元树**
    - 所谓周游二元树，是指按照某种次序去访问二元有序树的每一个结点，使得每一个结点恰好被访问一次。
      - 先根周游
        - 访问根;
        - 在根的左子树（若存在）上执行先根周游;
        - 在根的右子树（若存在）上执行先根周游。
      - 中根周游
        - 在根的左子树（若存在）上执行中根周游;
        - 访问根;
        - 在根的右子树（若存在）上执行中根周游。
      - 后根周游
        - 在根的左子树（若存在）上执行后根周游;
        - 在根的右子树（若存在）上执行后根周游;

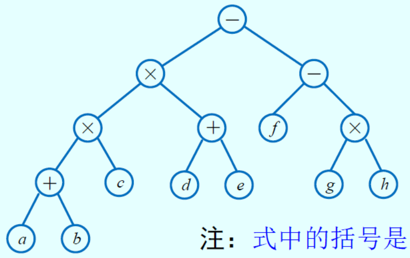
- 访问根。
- 例题:

【例 7.34】（1）用二元有序树表示算术表达式

$$(((a+b)\times c)\times(d+e))-(f-(g\times h))$$

（2）用三种方法周游此树，写出周游结果。

解：（1）



（2）　　注：式中的括号是人为加上去的。

先根周游：$-(\times(\times(+\,a\ b)(c))(+\,d\ e))(-(f)(\times\,g\ h))$

中根周游：$(((a+b)\times c)\times(d+e))-(f-(g\times h))$

后根周游：$(((a\ b\ +)\ c\ \times)\ (d\ e\ +)\ \times)\ (f\ (g\ h\ \times)\ -)-$

- **四、有向树中的一些数量关系**
  - 有向树和无向树一样，满足关系式m= n –1（所有结点入度的和）。这里的n和m分别为有向树的结点数和边数。
  - **定理**
    - 设T是一棵完全m元树，树叶结点数为n_0，分枝结点数为t，则(m–1) t= n_0–1。
    - 设T是一棵二元树，n_0表示树叶结点数，n_2表示出度为2 的结点数，则n_0= n_2+ 1。
    - 完全二元树有奇数个结点。

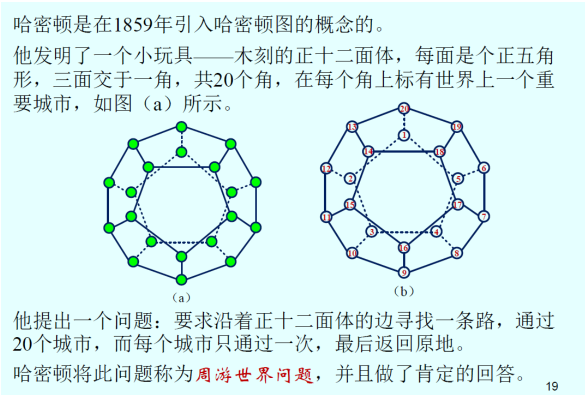
- **离散数学Chapter 8： 集合特殊图**
  - **8.1欧拉图**
    - **一、欧拉图的基本概念**
      - **欧拉回路,欧拉图,欧拉路**
        - 通过图的每条**边**一次且仅一次的回路称为欧拉回路。存在欧拉回路的图，称为欧拉图。
        - 通过图的每条**边**一次且仅一次的开路称为欧拉路。
        - **注:**
          - 除了有孤立点的情形外，一个欧拉图是一个连通图。
          - 具有欧拉回路的连通图是可以一笔画出的图，即能从图中任一点出发一笔画出这个图且最后又回到出发点。
          - 具有欧拉路的连通图也是可以一笔画出的图，但必须从图中某一点出发，一笔画出这个图后，终止于图中的另外一点。
    - **二、欧拉图的判别**
      - **定理8.1**
        - 连通图G为欧拉图的充要条件是G的每一结点的度均为偶数。
        - **注:**

- 此结论可推广到多重图。由此，哥尼斯堡七桥问题无解。
- **定理8.2**
  - 连通图G具有一条连接结点u 到v 的欧拉路的充要条件是u 和v是G中**仅有的**具有奇数度的结点。
- **推论8.1**
  - 一个弱连通的有向图具有欧拉回路的充要条件是该图的每一个结点的入度和出度相等。
  - 一个弱连通的有向图具有欧拉路的充要条件是该图除两个结点外每个结点的入度等于出度，对于这两个结点，一个结点的出度比入度多1，另一个结点的出度比入度少1。

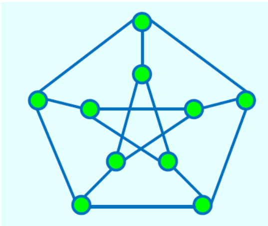
- **三、中国邮路问题**
  - **中国邮路问题**
    - **问题：**
      - 中国邮路问题是一个非常经典的图论问题：一个邮递员送信，要走完他负责投递的全部街道（所有街道都是双向通行的且每条街道可以经过不止一次），完成任务后回到邮局，应按怎样的路线走，他所走的路程才会最短呢?
    - **抽象成图论问题**
      - 就是给定一个连通有权图（每条边的权值为该街道的长度），要在图中求一条回路，使得回路的总权值最小。
        - 如果连通图为欧拉图，则**只要求出图中的一条欧拉回路**即可。
        - 否则，邮递员要完成任务就必须在某些街道上重复走若干次。如果重复走一次，就加一条平行边，于是原来对应的图形就变成了多重图。只是要求加进的平行边的总权值最小就行了。
      - 于是，原来的问题就转化为，在一个有奇度数结点的赋权连通图中，增加一些平行边，使得新图不含奇度数结点，并且增加的边的总权值最小。
    - **解答**
      - 设图G中所有奇数度结点（图中奇数度结点的个数必为偶数）为v_1，v_2，$\ldots$，v_{2h}，中国邮路问题的求解步骤如下。
        - i从1到h，引结点v_{2i-1}到v_{2i}的路P_i（因为图连通，所以路必定存在），并对Pi的每条边附加一条边使之成为重复边。
        - 检查图G的每条边，若添加的重复边数超过1，则除去其中偶数条，使得每条边至多有一条添加的边，此时每一个结点的度为偶数，得多重欧拉图G′。
        - 对图G′的每一简单回路（所有边互不相同的回路），检查其中重复边的权重之和是否超过无重复边的权重之和。
          - 如果超过，则把原来的重复边改为无重复边，把无重复边改为重复边。

- 反复进行以上过程，直到都不超过为止，最后得到多重欧拉图H。
- 图H的欧拉回路就是包含G中每条边至少一次的最小权值回路。

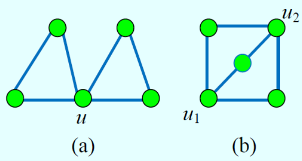
- **8.2哈密顿图**
  - **一、哈密顿图的基本概念**
    - **引入**



    - **哈密顿环，哈密顿图，哈密顿路**
      - 通过图G的每个**结点**一次且仅一次的环称为哈密顿环。具有哈密顿环的图称为哈密顿图。
      - 通过图G的每个结点一次且仅一次的开路称为哈密顿路。
    - 注：
      - 哈密顿图是连通图。
        - 欧拉图不一定是连通图！
      - 到目前为止，还没有找到一个图成为哈密顿图的充分必要条件。
      - 假定本节中所讨论的图均是连通图
  - **二、哈密顿图的判别**
    - **定理8.3**
      - 若连通图G= (V，E) 是哈密顿图，则对于V的任意一个非空子集S，有W(G–S) ≤# S。
      - W(G–S) 表示从G中删除S（删除S中的各结点及相关联的边）后所剩图的分图数。# S表示S中的结点数。
      - 利用该定理可以判定一个图不是哈密顿图。
        - 例如：有割点的连通图不是哈密顿图。
      - **注**
        - 该定理给出的条件是哈密顿图的必要而非充分的条件。
        - 反例：Petersen 图



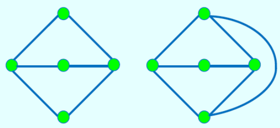
- **推论8.2**
  - 若连通图G= (V，E)存在哈密顿路，则对于V的任意一个非空子集S，有W(G–S) ≤# S+ 1。
- **例题：**



【例 8.6】判断下列各图是否是哈密顿图。

解：在图 (a) 中去掉结点 u 以后 $W(G-\{u\})=2$，
在图 (b) 中去掉结点 u_1 和 u_2 以后，$W(G-\{u_1，u_2\})=3$，
因此，这两个图都不是哈密顿图。

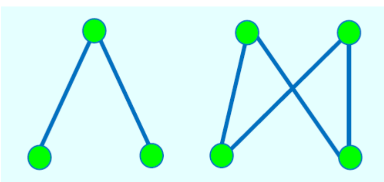
- **定理8.4**
  - 设G是具有n（n≥3）个结点的图，如果G中每对不相邻结点度数之和大于或等于n–1，则G中存在哈密顿路。
  - **注：**
    - 此定理只是充分条件，而不是充分必要条件。
- **定理8.5**
  - 设G是具有n（n≥3）个结点的图，如果G中每对不相邻结点度数之和大于或等于n，则G是哈密顿图。
  - **推论8.3**
    - 设G是具有n（n≥3）个结点的图，如果G中每个结点度数大于或等于n / 2，则G是哈密顿图。
  - **例题：**



【例 8.7】判断以下两图中是否存在哈密顿路与哈密顿环。
解：
（a）存在哈密顿路。
（b）存在哈密顿环。

- **三、流动售货员问题**
  - **引入**
    - 一个流动售货员，要从公司出发走销附近所有的城镇，然后返回公司所在地。假定每两个城镇（含公司所在地）都有公路且长度已知，那么他如何安排路线，使得旅行的总距离最小？
    - 用结点代表公司所在地和各城镇，用边代表相互之间的公路，并标出相应公路之长度。

            - 问题化为在一个完全有权图上找出一条经过每个结点一次且仅一次而且全程为最短的环（哈密顿环）。
        - **分析：**
            - 这一问题看似简单，实际上含有两个困难的问题：
                - 如何判定图G是否有Hamilton环；
                - 在已知图G有Hamilton环的情况下，如何求出一个权重最小的Hamilton环来。
            - 这两个问题目前尚未找到有效算法，甚至不知道这样的有效算法是否存在。事实上它们是NP-Complete问题（NP就是Non-deterministic Polynomial的问题，即多项式复杂程度的非确定性问题）。
            - 下面给出一个“最邻近方法”，它为解决此问题给出了一个较好的结果。
        - **最邻近方法**
            - （1）由任意选择的结点开始，找一个与起始结点最近的结点，形成一条边的初始路径，然后逐点扩充这条路。
            - （2）设x表示最新加到这条路上的结点，从不在路上的所有结点中间选一个与x最接近的结点，将连接x与这一结点的边加到这条路上。
            - 重复这一步，直到图中所有结点包含在路上。
            - （3）将连接起始点与最后加入的结点之间的边加到这条路上，就得到一个环。
            - 在所有这些环中找出全程为最短的环即得。
- **8.3二部图**
    - **一、二部图的基本概念**
        - **二部图,偶图,互补结点子集,完全二部图,完全偶图**
            - 若一个图G的结点集V能划为两个子集V_1和V_2，使得G的每一条边{v_i，v_j}满足$v_i \in V_1$，$v_j \in V_2$，则称G是一个二部图（或偶图），V_1和V_2称为G的互补结点子集。此时可将G记作G=(V_1，V_2，E)。
            - 若V_1中任一结点与V_2中每一结点均相邻接，则称二部图为完全二部图（或完全偶图）。若#V_1= r，#V_2= t，则完全二部图G 记为$K_{r,t}$
            - **注：**
                - **二部图至少有两个结点**
                - 二部图不一定是连通图。例如

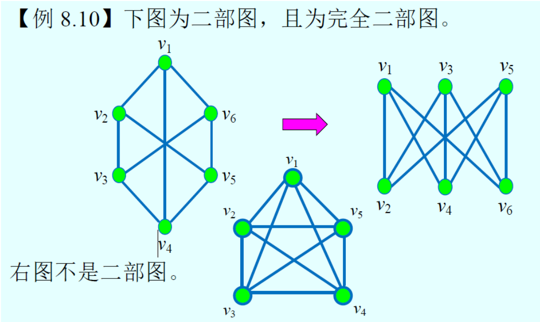
                - 除孤立结点外，树是二部图。

                  > 偶数级结点，奇数级结点分别位于一个结点集中

                - 偶数个结点的环是二部图。

- 二部图中的结点可用黑点和白点加以标注。

- **例题：**



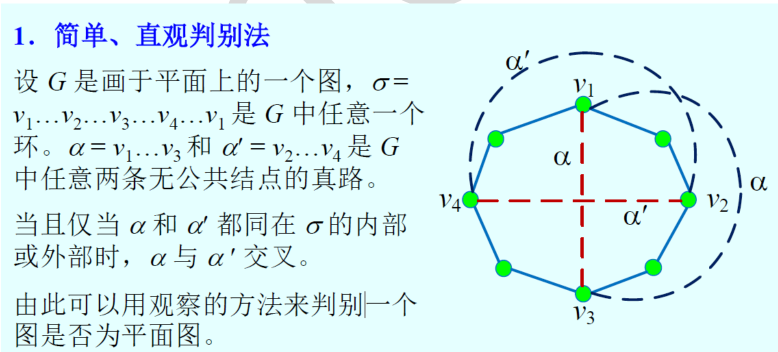
- **二、二部图的判别**
  - **定理8.6、**
    - 图G为二部图当且仅当G的所有回路均为偶数长。
- **三、任务分配问题**
  - **完全匹配，匹配**
    - 设G是具有互补结点子集V_1和V_2的二部图，其中V_1={v_1，v_2，…，v_q}，V_1对V_2的完备匹配简称匹配是G的一个子图，它由q条边{v_1，v_1'}，{v_2，v_2'}，…，{v_q，v_q'}组成，其中v_1'，v_2'，…，v_q'是V_2中q个不同的元素
    - 一个二部图存在V1对V2的匹配的必要条件是$\#V_1 \leq \#V_2$。
  - **任务分配问题：**
    - 有m个人和n件工作，每个人都只熟悉这n件工作中的某几件，每一件工作都需要一个人干，那么能不能将这n件工作都分配给熟悉它的人干呢（不能兼职）？
  - **定理8.7**

    定理中的条件称为**相异性条件**。
    - 设G是具有互补结点子集V_1和V_2 的二部图，则G中存在一个V_1对V_2 的匹配的充要条件是：V_1中每k个结点（k= 1，2，…，$\#V_1$）至少和V_2中k个结点相邻接
  - **定理8.8**

    定理中的条件称为**t 条件**。
    - 设G是具有互补结点子集V1和V2 的二部图，则G中存在一个V1对V2 的匹配的充分条件是：存在某一正整数t，使
      - （1）对V1中的每个结点，至少有t条边与其关联,deg(u)≥t；
      - （2）对V2中的每个结点，至多有t条边与其关联,deg(v)≤t。
    - **注：**
      - 要验证一个二部图满足相异性条件，必须考虑 k 的多种取值，当二部图的结点数较大时使用起来就不太方便了。
      - 在判断二部图是否存在匹配时，先检查 “t 条件”，如果不满足，再用 “相异性条件” 检查。

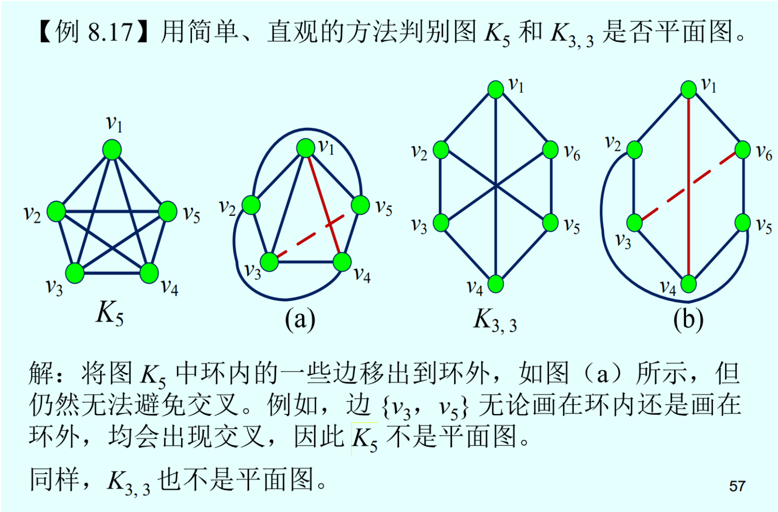
- **8.4平面图**
  - **一、平面图的基本概念**
    - **平面图，非平面图，平面嵌入**
      - 一个图G若能画在平面上而它的边除在结点处外互不交叉，则称G为平面图，否则称G为非平面图。
      - 画出的没有边交叉的图解称为G的一个平面嵌入。
      - **注：**
        - 平面图不一定是连通图。
        - 平面图的任何子图是平面图。
        - 当且仅当图的每个分图都是平面图时，该图是平面图。
    - **面，面的边界，面的次数，度，有限面，内部面，无限面，外部面，相邻的，不相邻的**
      - G是一个连通平面图，图的边所包围的一个区域，其内部既不含图的结点也不含图的边，这样的区域称为G的一个面。包围该面的各边构成的回路称为这个面的边界。面的边界中所含的边数称为该面的次数或度。

        面的次数至少为3
      - 有界的区域称为有限面或内部面，否则称为无限面或外部面。
      - 每个平面图恰有一个无限面（不受边界约束）。
      - 若两个面的边界至少有一条公共边，则称这两个面是相邻的，否则称这两个面是不相邻的。
      - 显然，如果e不是割边，则它一定是某两个面的公共边界。
  - **二、平面图的判别**
    - **1．简单、直观判别法**

      不是平面图
    - **2．欧拉公式判别法**
      - **定理8.10**
        - 设G是一连通平面图，则有$n - m + K = 2$。其中n，m，K分别是图的结点数、边数和面数（包括无限面）。
      - **推论8.4**
        - 设G是一(n，m)的平面图，且有k个分图，则**n−m+ K= k+ 1**。
      - **定理8.11**

      - 设G是一(n，m) 的连通平面图，m≥2，则**m ≤ 3n – 6**
    - **推论8.5**
      - 设G是一(n，m) 的连通平面图，m≥2，若G是二部图，则**m≤2n –4**
    - **推论8.6**
      - 设G是一(n，m)的连通平面图，m≥2，则至少存在一个结点v，有**deg(v) ≤5**。
  - **3．库拉托斯基定理判别法**
    - **在度为2 的结点内同构**
      - 如果两个图G1和G2是同构的，或者通过反复插入或删除度为2 的结点，它们能变成同构的图，则称G1和G2在度为2 的结点内同构。
    - **库拉托斯基定理**
      - 一个图是平面图的充要条件是它既不包含**在度为2 的结点内**与K_5同构的子图，也不包含**在度为2 的结点内**与$K_{3,3}$同构的子图。



是五阶完全图,每一顶点与其他所有顶点都有边.
是二部图.上下顶点分别为3.

- **离散数学Chapter 9： 命题逻辑**
  - **9.1 命题的基本概念**
    - **命题，真值，真（假）命题，二值逻辑**
      - 具有真假意义的陈述句称为一个命题。
      - 一个命题的真或假称为该命题的真值。
      - 常用1 或T 表示真，用0 或F 表示假。
      - 真值为1（0）的命题成为真（假）命题。
      - 由于命题只有真、假两个真值，故命题逻辑也称二值逻辑。
      - **注意：**
        - 命题是陈述句，感叹句、疑问句、祈使句等都不是命题
        - 作为命题的陈述句，其所表示的内容可以分辨真假，而且不是真就是假，不能不真也不假，也不能既真又假。
      - **注：**

        - 命题的真值是唯一确定的，其真值会因人、因时、因地而异。例如
            - 人有十指；
            - 日本的东京即将迎来2020年夏季奥林匹克运动会；
            - 现在是早上八点钟。
        - 一个陈述句本身是否能分辨真假，与能否现在知道它是真还是假是两回事。
        - 在数理逻辑中，不能去纠缠各种具体命题的真假问题，而是将命题当成一个抽象的、形式化的数学概念来处理，把命题定义成非真必假的陈述句。
        - 命题常用大写的拉丁字母 A、B、C、…或者带下标的大写的字母 A_1、A_2、A_3、…来表示，并称为命题标识符。
    - **原子命题，简单命题，复合命题，分子命题**
        - 若一个命题不能分解为更简单的命题，则称其为原子命题或简单命题，否则称为复合命题或分子命题。
        - 原子命题是命题逻辑研究的基本单位。
        - 复合命题的真值由其原子命题及复合的方式确定
- **9.2 命题联结词**

命题联结词（简称**联结词**）是自然语言中有关连词的逻辑抽象，它们作用于命题时，和数学运算符号相当，所以又称为**逻辑运算符号**。

    - **〇、常用符号**
        - `$\land \lor \lnot \forall \exists \top \bot \vdash \vDash$`
        - ∧ ∨ ¬∀∃⊤⊥ ⊢⊨
    - **一、否定联结词**
        - **真值表**

否命题 $\neg P$ 的真值可用下表表示。

P	$\neg P$
0	1
1	0

该表称为否命题 $\neg P$ 的真值表，其构造与集合的成员表类似。

        - **否命题**
            - 设P是一个命题，利用“¬”和P组成的复合命题称为命题P的否命题，记作“¬P”（读作“非P”）。
            - **注意：**
                - 否定“¬”是一个一元运算，它的意义是“否定”被否定命题的全部，而不是一部分。
                - 自然语言中，诸如“并非”“永不”“绝不”等连词，尽管它们的含义并不完全相同，但除了否定外，没有其它的逻辑内容，因而都可用否定词¬ 来表示。
    - **二、合取联结词∧**

- **合取式复合命题**
  - 设P和Q是两个命题，由P、Q利用“∧”组成的复合命题，称为合取式复合命题，记作“P∧Q”（读作“P且Q”）。
  - 当且仅当命题P和Q的真值均为真时P∧Q的真值为真。
  - 真值表

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

  - **注意：**
    - “∧”具有对称性：P∧Q和Q∧P具有相同的真值。
    - “∧”是自然语言中“且”“而”“与”“和”“及”“同时”“不仅…而且…”“虽然…但是…”“既…又…”等连词的逻辑抽象，但不完全等同。
    - 有些汉语中的“与”、“和”字，实际上不是命题联结词。
      - 例如“张三与李四是一对好朋友。”中的“与”字，不具备将两个命题联接起来的功能，不是数理逻辑中的命题联结词。
- **三、析取联结词∨**
  - **析取式复合命题**
    - 由命题P和Q利用“∨”组成的复合命题，称为析取式复合命题，记作“P∨Q”（读作“P或Q”）。
    - 当且仅当P和Q至少有一个真值为真时P∨Q的真值为真。
    - “∨”为可兼或，允许命题P和Q同时为真。
    - 真值表如下

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

    - 从表中可以看出，命题联结词“∨”为可兼或，但自然语言中的“或”既可以是“可兼或”也可以是“不可兼或”。
  - **异或**
    - 设P，Q是两个命题，P异或Q是一个复合命题，记作P▽Q。
    - 异或是不可兼或
    - 其真值如下。

P	Q	$P \bar{\vee} Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	**1**	**0**

- P∇Q可表示为**(P∧¬Q) ∨(¬P∧Q)**。由于“∇”可用“∨”，“∧”和“¬”表示，故我们不把它当作基本联结词。

- **注意：**
  - “∨”具有对称性：P∨Q和Q∨P具有相同的真值。
  - 从定义可以看出，联结词∨与自然语言中的“或”的意义也不全相同，因为自然语言中的“或”可表示“可兼或”，也可表示“不可兼或”。
  - 有一些汉语中的“或”字，实际上不是命题联结词。例如
    - 你仔细找一找，或能找到。
    - 他昨天做了二十或三十个引体向上。
    - 这个例子中的“或”字，只表示了所做引体向上的近似数目，不能用联结词“析取”表达。该例子是个原子命题。
  - 在自然语言中，通常是在具有某种关系的两语句之间使用析取“或”，但在命题逻辑中，并不要求这一点。

- **四、蕴含联结词**
  - **蕴含式复合命题，前件、假设、条件，后件或结论，条件联结词**
    - 由命题P和Q利用“→”组成的复合命题，称为蕴含式复合命题，记作“P→Q”（读作“如果P，则Q”）。
    - P称为前件、假设、条件，Q称为后件或结论。
    - 蕴含联结词也称条件联结词。
    - P→Q的真值依P和Q的真值而定：当P为真、Q为假时，P→Q为假，否则P→Q为真。
    - 真值表如下

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

    - **注：**
      - 复合命题“因为P，所以Q”“若P，则（必须）Q”“Q成立当P”“P成立仅当Q”“只要P就Q”“只有Q才P”“除非Q才P”“除非Q，否则非P”“P是Q的充分条件”“Q是P的必要条件”等都可以写成“P→Q”的形式。

- "除非"表示唯一的条件，常跟"才""否则""不然"等合用，相当于"只有""如果不"。
- 在自然语言中，蕴含式复合命题的前提和结论间必含有某种因果关系，但在命题逻辑中可以允许两者之间无必然因果关系。

- **五、等值联结词**
  - **等值式复合命题，双条件联结词**
    - 由命题P和Q，利用"↔"组成的复合命题，称为等值式复合命题，记作"P↔Q"（读作"P当且仅当Q"）。
    - 等值联结词又称双条件联结词。
    - P↔Q的真值依P和Q的真值而定：当P和Q的真值相同时，P↔Q为真，否则为假。
    - 真值表如下

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

    - **注意：**
      - 等值联结词"↔"具有对称性，即P↔Q 和Q↔P 具有相同的真值。
      - "↔"相当于"等价""相当于""充要条件""反之亦然""反之"等。
      - 在自然语言中，有些类似于"只有…才…""除非…才…"等形式的语句也需要用等值联结词将两个语句联接成复合命题，关键是要判断这两个语句是否具有充分必要性。
      - 例如设P：某人是仓库工作人员，Q：某人可以进入仓库，则命题"非本仓库工作人员一律不得入内。"可符号化为P↔Q。
      - "P↔Q"也不要求P和Q两个命题之间有任何联系。
- **六、命题联结词小结**
  - 对于上述五种联结词，应注意到：
    - 复合命题的真值只取决于构成它的各原子命题的真值，
      - 与这些原子命题的内容、含义无关
      - 与联结词所连接的两原子命题之间是否有关系无关。
    - 联结词是从自然语言中逻辑抽象出来的，仅它仅保留了逻辑内容，而把自然语言所表达的主观因素、心理因素及文学修辞等方面的因素全部撇开，所以联结词只表达了自然语句中的一种客观性质。
    - 联结词都具有从已知命题得到新的命题的作用，从这个意义上讲，它们具有操作或运算的意义。由此可见，它们可以被看做是一、二元运算，或一、二元函数。
    - 二元运算∧、∨、↔具有对称性，而→则不具有。

- 9.3 命题公式的基本概念
  - 一、命题公式的概念
    - 命题常元，命题变元,原子命题变元,真值指派
      - 一个命题标识符P，如果表示一个确定的命题，即具有确定真值（真或假）的命题，则称P为命题常元。
      - 一个命题标识符P，如果只表示任意命题的位置标志，则称P为命题变元
      - **注意：**
        - 因为命题变元可以表示任意命题，所以它不能确定真值，**故命题变元不是命题**。和初等代数中字母的地位相当，命题变元是一个待定的命题。当命题变元表示原子命题时，该变元称为原子命题变元。
        - 当命题变元P用一个特定的命题代入时，P才能确定其真值，这时也称对P进行真值指派。
        - 为简单起见，对一个命题变元进行代入时直接以1 或0 为值代入，而不必代入具体的命题。
    - 命题公式,合式公式,公式
      - 命题演算的命题公式，又称为合式公式，简称公式，是如下递归定义的
        - （1）单个命题常元或命题变元是命题公式；

          —0、1 是命题公式
        - （2）如果A是命题公式，则(¬A) 是命题公式；
        - （3）如果A和B是命题公式，则(A∨B)，(A∧B)，(A→B)，(A↔B) 也是命题公式；
        - （4）有限次地利用上述（1）~（3）而产生的符号串是命题公式。
        - 为简单起见，公式的最外层括号可以省去。
    - n元命题公式,原子命题公式,原子公式
      - 如果G 是含有n 个不同的命题变元P_1，P_2，...，P_n的命题公式，则称其为n元命题公式，记为G(P_1，P_2，...，P_n)，简记为G。
      - **注意：**
        - （1）并非由这三类符号所组成的每一符号串都为命题公式。
        - （2）原子命题变元是最简单的命题公式，称为原子命题公式，简称原子公式。
        - （3）含命题变元的命题公式是没有真值的，故不是命题。仅当在一个命题公式中的所有命题变元都用确定的命题代入时，才得到一个命题。这个命题公式的真值依赖于代换命题变元的那些命题的真值。
        - （4）从图论的观点看，每一个命题公式都可以用一棵“二元有序树”来表示，其中“分枝结点”与命题联结词对应，而“树叶结点”则对应于原子命题变元和**命题**常元。
  - 二、命题符号化

- **命题的符号化,命题的翻译**
  - 将一个用文字叙述的命题写成由命题标识符、命题联结词和圆括号表示的命题公式的过程，称为命题的符号化，或称为命题的翻译。
  - 命题符号化的基本步骤如下:
    - 从命题中分析出各原子命题，将它们符号化;
    - 使用合适的命题联结词，把原子命题逐个联结起来，构成复合命题的符号化表示。
  - **注意:**
    - 命题符号化时，若包含多个命题联结词，则要注意优先次序。
      - 命题联结词的优先级由强到弱依次是：¬；∧，∨；→，↔。
      - 对于相同的联结词，规定先出现者先运算。
      - 对于同级的联结词，按从左到右的次序运算。
      - 按优先级书写，命题中可以省略一些不必要的符号。但为了确保命题的清晰性，提高可读性，应适当加上括号以避免混淆。括号中的运算为最优先级。
    - 命题符号化时，还要注意
      - 要善于确定简单命题，不要把一个概念硬拆成几个概念。
        - 例如“我和他是同学”是一个简单命题。
      - 要善于识别自然语言中的联结词（有时它们被省略）。
        - 例如“狗急跳墙”应理解为“狗只有急了才跳墙”。
      - 否定词的位置要放准确。
        - 例如设A：你是傻子，B：他是傻子，C：你会去自讨没趣，D：他会去自讨没趣，则命题“如果你和他不都是傻子，那么你们俩都不会去自讨没趣。”符号化为:
        - ¬(A∧B) →(¬C∧¬D)
- **三、命题公式的解释与真值表**
  - 若把命题公式中的所有命题变元分别代以原子命题或复合命题，则该命题公式便是一个复合命题。因此对复合命题的研究可转化为对命题公式的研究
  - 今后**以命题公式为主要研究对象。**
  - **真值指派,解释,真值表**
    - 设P_1，P_2，$...$，P_n为出现在命题公式G中的所有命题变元，对P_1，P_2，$...$，P_n分别指定一个真值，称为对G的一组真值指派或一个解释。
    - 显然，含有n个命题变元的命题公式共有2^n组不同的真值指派，对于每一组真值指派，公式都有一个确定的真值。
    - 命题公式G在其所有可能的真值指派下所取真值的表称为G的真值表。
- **四、命题公式的类型**
  - **重言式,永真公式**

A是重言式当且仅当

- 设P_1，P_2，...，P_n为出现在命题公式G中所有命题变元，如果对于P_1，P_2，...，P_n的任何一组真值指派，G的真值恒为真，则称公式G为重言式或永真公式，常用"1"表示。

- **矛盾式,永假公式**

  A是矛盾式当且仅当

  - 如果对于P_1，P_2，...，P_n的任何一组真值指派，G的真值恒为假，则称公式F为矛盾式或永假公式，常用"0"表示。

- **可满足的公式**
  - 如果至少有一组真值指派使G的真值为真，则称公式G为可满足的公式

- **注：**
  - 若公式G不是矛盾式，则G为可满足的公式。
  - 重言式是可满足的公式，反之不成立。
  - 公式G 为重言式当且仅当¬G 为矛盾式

- **定理9.1**
  - 若A和B为重言式，则A∧B、A∨B、A→B、A↔B 仍是重言式。

- **9.4 命题公式的等值关系和蕴含关系**
  - **一、命题公式的等值关系**
    - **等值，等值关系式，等值式**
      - 设A和B是两个命题公式，P_1，P_2，...，P_n是所有出现于A和B中的命题变元，如果对于P_1，P_2，...，P_n的任一组真值指派，A和B的真值都相同，则称公式A和B等值，记为A⇔B，称"A⇔B"为等值关系式，简称等值式。
      - **注：**
        - 符号"⇔"与"↔"的区别与联系。
          - "⇔"不是命题联结词，"A⇔B"不是公式，它表示公式A与B间有等值关系。
          - "↔"是命题联结词，"A↔B"是一个公式。
          - A⇔B的充要条件是A↔B是重言式。
        - 公式之间的等值关系是一个等价关系。
          - 自反性：对任意公式A，有A⇔A。
          - 对称性：对任意公式A、B，若A⇔B，则B⇔A。
          - 可传递性：对任意公式A、B、C，若A⇔B，B⇔C，则A⇔C。
        - 当A是重言式时，A⇔1；当A是矛盾式时，A⇔0。
  - **二、基本的等值式**
    - **命题定律**
      - **交换律**

- $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
- $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

- 结合律
  - $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
  - $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
- 分配律
  - $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
  - $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- 同一律
  - $P \vee 0 \Leftrightarrow P$
  - $P \wedge 1 \Leftrightarrow P$
- 互补律/排中律
  - $P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$
- 互补律/矛盾律
  - $P \wedge \neg P \Leftrightarrow 0$
- 双重否定律/对合律
  - $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
- 幂等律
  - $P \vee P \Leftrightarrow P$
  - $P \wedge P \Leftrightarrow P$
- 零一律
  - $P \vee 1 \Leftrightarrow 1$
  - $P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
- 吸收律
  - $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$
  - $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
- 德·摩根律
  - $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
  - $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
- 蕴含等值式
  - $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- 假言易位/逆否律
  - $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
- 等值等值式
  - $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
  - $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

- **前提合并式**
  - **P→(Q→R)⇔(P∧Q)→R**
- **等值否定等值式**
  - **¬(P↔Q) ⇔P↔¬Q**
- **蕴含否定等值式**
  - **¬(P→Q) ⇔P∧¬Q**

- **注意：**
  - 命题逻辑中的前19 个基本的等值式可与集合论中的19 个基本定律对应起来，可对照记忆：
    - 将P，Q理解为全集U的子集合
    - ¬换成'；∨换成∪；∧换成∩；1 换成U；0 换成Φ
    - 后面的基本的等值式是命题逻辑所特有的。
  - 根据E11和E13，五个基本联结词都可以用¬、∧和∨这三个联结词表示。
    - 特别，由于P∧Q⇔¬(¬P∨¬Q)，P∨Q⇔¬(¬P∧¬Q)
    - 故{¬，∨}和{¬，∧}都是功能完备的。
  - 考虑所有命题公式的集合S，代数系统 是一个布尔代数，称为命题代数。

三、等值式的判定

判定A⇔B，有两种方法：**真值表方法，命题演算方法。**

1．真值表方法

构造公式A↔B的真值表，依其标记的列是否全为1来判定。

- 用真值表方法证明P→Q⇔¬P∨Q

解：令 A 为 $P\to Q$，B 为 $\neg P\vee Q$，构造 A，B 以及 $A\leftrightarrow B$ 的真值表如下。

P	Q	$\neg P$	$\neg P\vee Q\ (B)$	$P\to Q\ (A)$	$A\leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	**1**
0	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	0	**1**
1	1	0	1	1	**1**

由于公式 $A\leftrightarrow B$ 所标记的列全为 1，因此 $A\Leftrightarrow B$。

57

2. 等值演算方法

等值演算是指利用已知的一些等值式，根据置换规则、代入规则以及等值关系的可传递性等推导出另外一些等值式的过程。

- **定理9.2（代入规则）**
  - 对于**重言式（矛盾式）**中的任一命题变元出现的每一处均用同一命题公式代入，得到的仍是**重言式（矛盾式）**。
  - 例如(P→Q) ↔(¬Q→¬P) 是重言式，若用公式A∧B代换命题变元P，则得到的公式((A ∧ B) → Q) ↔ (¬Q → ¬(A ∧ B))仍是重言式。
  - **注：**

        - 因为$A \Leftrightarrow B$的充分必要条件是$A \leftrightarrow B$是重言式，所以若对等值式中的任一命题变元出现的每一处均用同一命题公式代入，则得到的仍是等值式。
        - 基本等值关系式中命题变元P，Q，R可为命题公式。
    - **子公式**
      - 设C是命题公式A的一部分（即C是公式A中连续的几个符号），且C本身也是一个命题公式，则称C为公式A的子公式。
      - 例如 设公式A为$(\neg P \lor Q) \to ((P \to Q) \lor (R \land \neg S))$，则$\neg P \lor Q$，$P \to Q$，$(P \to Q) \lor (R \land \neg S)$ 等均是A的子公式，
      - 但 $\neg P \lor$，$P \to$，$\to Q$等均不是A的子公式。
    - **定理9.3（置换规则）**
      - 设C是公式A的子公式且$C \Leftrightarrow D$。如果将公式A中的子公式C置换成公式D之后得到的公式是B，则有$A \Leftrightarrow B$。
      - **注：**代入规则和置换规则的区别如下：
        - 代入规则只能对永真式适用，置换规则可对任何公式适用。
        - 代入是对命题变元而言，置换可对命题公式实行。
        - 代入必须处处代入，置换可部分置换也可全部置换
    - 定理9.4
      - （1）若$A \lor B \Leftrightarrow C \lor B$，$A \land B \Leftrightarrow C \land B$，则$A \Leftrightarrow C$。
      - （2）若$A \lor B \Leftrightarrow C \lor B$，$A \lor \neg B \Leftrightarrow C \lor \neg B$，则$A \Leftrightarrow C$。
      - （3）若$A \land B \Leftrightarrow C \land B$，$A \land \neg B \Leftrightarrow C \land \neg B$，则$A \Leftrightarrow C$。
- **四、命题公式的蕴含关系**
  - **A蕴含B，蕴含关系式，蕴含式。**
    - 设A，B是两个命题公式，若公式$A \to B$是重言式，即$A \to B \Leftrightarrow 1$，则称A蕴含B，记作$A \Rightarrow B$，称“$A \Rightarrow B$”为蕴含关系式，简称蕴含式。
    - **注：**
      - 符号“$\Rightarrow$”和“$\to$”的区别和联系（同符号“$\Leftrightarrow$”与“$\leftrightarrow$”的区别和联系类似）
        - “$\Rightarrow$”不是命题联结词，“$A \Rightarrow B$”不是公式，它表示公式A与B之间存在蕴含关系。
        - “$\to$”是命题联结词，“$A \to B$”是一个公式。
        - $A \Rightarrow B$的充要条件是$A \to B$是重言式。
      - 公式之间的蕴含关系是一个偏序关系
        - 自反性：对任意的公式A，$A \Rightarrow A$。
        - 反对称性：对任意的公式A，B，若$A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow A$，则$A \Leftrightarrow B$。
        - 传递性：对任意的公式A，B，C，若$A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$。
  - **定理9.5**
    - 设A，B是两个命题公式，则$A \Leftrightarrow B$当且仅当$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$。

- **定理9.6**
  - 设A，B，C是命题公式，若A⇒B且A⇒C，则A⇒B∧C
- **定理9.7**
  - 设A，B，C 是命题公式，若A⇒C且B⇒C，则A ∨ B ⇒ C
- **定理9.8**

  逆否命题
  - 设A，B 是命题公式，则A⇒B 的充要条件是¬B⇒¬A。
- **定理9.9**
  - 设A，B 是命题公式，若A⇒B 且A 是重言式，则B 一定也是重言式。

- **五、基本的蕴含式**
  - **化简式**

    P真Q真则P、Q其一一定
    - **P∧Q⇒P**
    - **P∧Q⇒Q**
  - **附加式**

    P真可推知P或Q真
    - **P⇒P∨Q**
    - **Q⇒P∨Q**
  - **附加式变形**

    P假（Q真），P→Q一定真
    - **¬P⇒P→Q**
    - **Q⇒P→Q**
  - **化简式变形**

    P→Q为假，P一定真，Q一定假
    - **¬(P→Q) ⇒P**
    - **¬(P→Q) ⇒¬Q**
  - **假言推理**

    P真并且P箭头Q真，则Q一定真
    - **P∧(P→Q)⇒Q**
  - **拒取式**

    Q假，P→Q为真，则P一定假
    - **¬Q∧(P→Q)⇒¬P**
  - **析取三段论**
    - **¬P∧(P∨Q)⇒Q**
  - **蕴含三段论**

- (P→Q)∧(Q→R)⇒P→R
- 等值三段论
  - (P↔Q)∧(Q↔R)⇒P↔R
- 前后件附加（析取）
  - P→Q⇒(P∨R)→(Q∨R)
- 前后件附加（合取）
  - P→Q⇒(P∧R)→(Q∧R)

六、蕴含式的判定

1.真值表法

- 证明
  - （1）I16：((P∨Q) ∧(P→R) ∧(Q→R)) ⇒R析取构造二难
  - （2）I17：(P∧Q) ∧(P→R) ∧(Q→R) ⇒R合取构造二难
  - 真值表

P Q R	$P \vee Q$	$P \to R$	$Q \to R$	$(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R)$	G
0 0 0	0	1	1	0	1
0 0 1	0	1	1	0	1
0 1 0	1	1	0	0	1
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	1	0	1	0	1
1 0 1	1	1	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0	1
1 1 1	1	1	1	1	1

2.等值演算法

【例 9.22】证明 I_9：$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

证明：$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$

$\Leftrightarrow \neg(P \wedge (\neg P \vee Q)) \vee Q$　　E_{11}

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee Q)) \vee Q$　　E_{10}'

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg P \vee Q)$　　E_1，E_2

$\Leftrightarrow 1$　　代入规则，E_5

因此 $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$。

3.假定前件A为真

要判定 $A \to B$ 是否为重言式，由联结词“→”的真值表可知，只需判定真值表中第三行的情况（A 为真 B 为假）是否发生。

假定前件 A 为真，若能说明后件 B 也为真，则公式 $A \to B$ 是重言式，因而 $A \Rightarrow B$；否则，该蕴含关系不成立。

【例 9.23】证明 I_{10}：$\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$。

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

证明：令 $\neg Q \wedge (P \to Q)$ 为真，

则 $\neg Q$ 为真，且 $P \to Q$ 为真。

于是 Q 为假，因而 P 也为假。

由此 $\neg P$ 为真。

故蕴含式 I_{10} 成立。

4.后件B为假

【例 9.24】证明蕴含式 $(P\to Q)\land(R\to S)\Rightarrow(P\land R)\to(Q\land S)$。
证明：令 $(P\land R)\to(Q\land S)$ 为假，则 $P\land R$ 为真，$Q\land S$ 为假。
于是 P 和 R 均为真，而 Q 和 S 至少有一个为假。
由此可知 $P\to Q$ 与 $R\to S$ 中至少有一个为假。
因此 $(P\to Q)\land(R\to S)$ 为假。
故上述蕴含式成立。
注：一般在 B 中含有蕴含联结词时，考虑利用此方法。

假定后件 B 为假，若能说明前件 A 为假，则 A ⇒ B；否则 A ⇒ B 不成立。

- **七、命题公式的对偶**
  - **对偶式**
    - 在仅含有¬、∧和∨这三种联结词的公式A中，若用∨代换∧，用∧代换∨，用0 代换1，用1 代换0，则所得的公式称为A的对偶式，记为A^D。
    - 显然，A和A^D互为对偶。
      - 例如公式((P∨¬Q) ∧R) ∨(S∧P) 与((P∧¬Q) ∨R) ∧(S∨P)互为对偶。
    - 注：含有蕴含或等值联结词的公式，不能按定义9.17 直接求其对偶公式。但可以先将公式进行等值转换为仅含有¬、∧和∨这三种联结词的公式，然后按照定义求其对偶公式。
      - 例如因P→Q ⇔¬P∨Q，故公式P→Q的对偶为¬P∧Q。
  - **定理9.10**
    - 设A和AD互为对偶式，P1，P2，…，Pn是其命题变元，则**¬A(P1，P2，…，Pn) ⇔**A^D**(¬P1，¬P2，…，¬Pn)**
    - 即 A 的否定式可用其对偶式及其命题变元的否定来等值表示。
  - **定理9.11（对偶原理）**
    - 设A和B是两个仅含有¬、∧和∨这三种联结词的公式，P1，P2，…，Pn是其命题变元。
    - （1）若A⇒B，则$B^D \Rightarrow A^D$。
    - （2）若A⇔B，则$A^D \Leftrightarrow B^D$。
  - **对偶原理十分有用，利用它可以从已知的重言式、等值式和蕴含式推导出新的重言式、等值式和蕴含式。**
- **9.5 命题公式的范式**
  - **〇、引言**
    - 判断一个命题公式是否为重言式，或者矛盾式，或者可满足的公式，这样的问题称为一个判定问题。
    - 在命题逻辑中，对于含有有限个命题变元的命题公式来说，用真值表的方法，总可以在有限的步骤内确定它的真值。因而判定问题总是有解的。
    - 但当命题公式中含有的命题变元较多时，真值表的方法并不理想。
    - 为此，本节将给出命题公式的一种标准形式即范式，并利用范式对命题公式的类型进行判定。
  - **一、析取范式和合取范式**

- **质合取式,原子合取式,质析取式,原子析取式**
  - 一个由有限个命题变元或命题变元的否定所组成的合取式称为质合取式或原子合取式。
  - 一个由有限个命题变元或命题变元的否定所组成的析取式称为质析取式或原子析取式。
- **定理9.12**
  - （1）一个质合取式为永假式的充分必要条件是它同时包含某个命题变元及其否定。
  - （2）一个质析取式为永真式的充分必要条件是它同时包含某个命题变元及其否定。
- **析取范式,析取项,合取范式,合取项**
  - 有限个质合取式的析取式称为析取范式，即具有形为$A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$（$n \geq 1$）的公式，其中Ai（1 ≤i≤n）是质合取式，称为该范式的一个析取项。
  - 有限个质析取式的合取式称为合取范式，即具有形为$A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$（$n \geq 1$）的公式，其中Ai（1 ≤i≤n）是质析取式，称为该范式的一个合取项。
  - **例如**
    - P∨(P∧Q) ∨R∨(¬P∧¬Q∧R) 是一析取范式。
    - R ∨ (P ∧ ¬Q) ∨ (¬P ∧ Q ∧ P)也是一析取范式。
    - ¬P ∧ (P ∨ Q) ∧ R ∧ (P ∨ ¬Q ∨ R)是一合取范式。
    - (¬P ∨ R ∨ Q) ∧ (P ∨ Q) ∧ (P ∨ ¬P)也是一合取范式。
    - P ∨ (¬R ∨ Q)与¬(P∨Q) 既不是析取范式也不是合取范式。但它们的等值公式P∨¬R∨Q与¬P∧¬Q既是析取范式也是合取范式。
  - **定理9.13**
    - 任一命题公式都存在着与它等值的析取范式和合取范式。
  - **注:**
    - 一个公式的析取范式（合取范式）不唯一，但之间等值。
  - **例题:**
    - 求G1：¬(P∨Q) ↔(P∧Q) 的合取范式、析取范式。

解：$G_1 \Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)) \wedge ((P \wedge Q) \rightarrow \neg(P \vee Q))$　E_{14}

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(P \vee Q))$　E_{11}，E_6

$\Leftrightarrow (P \vee (Q \vee (P \wedge Q))) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$　E_2，E_{10}'，E_{10}

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg Q)$　E_9，E_3'

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge ((\neg P \vee \neg P) \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \vee \neg Q))$　E_1，E_2

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$（合取范式）　E_7，E_7'

$\Leftrightarrow (P \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \vee (Q \wedge (\neg P \vee \neg Q))$　E_3

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge \neg Q)$（析取范式）

E_3，E_1

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$（化简后的析取范式）　E_5'，E_4

- 求G2：(P∧(Q→R)) →S的合取范式和析取范式。

$$
\begin{aligned}
\text{解：} G_2 &\Leftrightarrow \neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S && E_{11}\\
&\Leftrightarrow \neg P \vee \neg(\neg Q \vee R) \vee S && E_{10}'\\
&\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee S \text{（析取范式）} && E_{10}, E_6\\
G_2 &\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee S\\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee S) \vee (Q \wedge \neg R) && E_1, E_2\\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee S \vee Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R) \text{（合取范式）} && E_3'\\
\text{另外由 } G_2 &\Leftrightarrow (\neg P \vee S \vee Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)\\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)) \vee (S \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R))\\
&\quad \vee (Q \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)) && E_3\\
&\Leftrightarrow \neg P \vee S \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge S) \vee (Q \wedge \neg R)\\
&\quad \text{（析取范式）} && E_9', E_3
\end{aligned}
$$

- **定理9.14**
  - （1）公式A为永真式当且仅当A的合取范式中每个质析取式至少包含一个命题变元及其否定。
  - （2）公式A为永假式当且仅当A的析取范式中每个质合取式至少包含一个命题变元及其否定。

- ## 二、主析取范式和主合取范式
  - ### 最小项，最大项
    一个命题变元只出现一次
    - 设有命题变元P_1，P_2，$\ldots$，P_n，
      - 形如$\bigwedge_{i=1}^{n} P_i^*$的命题公式称为是由命题变元$P_1$，$P_2$，$\ldots$，$P_n$所产生的最小项，
      - 形如$\bigvee_{i=1}^{n} P_i^*$的命题公式称为是由命题变元P_1，P_2，$\ldots$，P_n所产生的最大项。
      - 其中Pi* 为Pi 或为¬Pi（i= 1，2，…，n）。
      - **例如**
        - $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$，$\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ 是由P_1，P_2，P_3 产生的最小项。
        - $P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3$ 是由P_1，P_2，P_3 产生的一个最大项
    - **注:**
      - 由命题变元P_1，P_2，$\ldots$，P_n产生的不同最小项（最大项）共有2^n个。
      - 不同的最小项（最大项）之间不等值。
      - 最小项是质合取式，但不可能为永假式。
      - 最大项是质析取式，但不可能为永真式。
  - ### 主析取范式，主合取范式，空
    - 由不同最小项所组成的析取式称为主析取范式。
    - 由不同最大项所组成的合取式称为主合取范式。

    - 如果一个主析取范式不包含任何最小项，则称该主析取范式为“空”；如果一个主合取范式不包含任何最大项，则称该主合取范式为“空”。
    - **例如**
        - $(\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3)$ 是一个主析取范式。
        - $(P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3)$是一个主合取范式
    - 求解步骤：**等值代换，真值表**
- **最小项的编码表示**
    - (1) 对于每一个最小项 $\bigwedge_{i=1}^{n} P_i^*$，有且仅有真值表中的一行使其真值为 1，该行就是 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 所标记的各列分别为 $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ 的行。其中 $$\delta_i = \begin{cases} 1, & P_i^* \text{ 为 } P_i \\ 0, & P_i^* \text{ 为 } \neg P_i \end{cases}$$
    - 此时若规定命题变元的次序为 $P_1, P_2, \ldots, P_n$，则最小项可编码表示为 $m_{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n}$ 。
    - 对于任一给定的公式 G，作出它的真值表，根据它在真值表中值 为 1 的个数和 1 所在的行，可作出一个与 G 等值且由这些不同 最小项的析取所构成的公式，即**主析取范式**。
    - 该公式中不同最小项的个数等于 G 在真值表中 1 的个数，而这 些最小项在真值表中值为 1 的行分别对应着 G 的真值为 1 的不 同的行。
- **最大项的编码表示**
    - (2) 对于每一个最大项 $\bigvee_{i=1}^{n} P_i^*$，有且仅有真值表中的一行使其真值为 0，该行就是 $P_1, P_2, \ldots, P_n$所标记的各列分别为$\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_n'$ 的行。其中 $$\delta_i' = \begin{cases} 1, & P_i^* \text{ 为 } \neg P_i \\ 0, & P_i^* \text{ 为 } P_i \end{cases}$$
    - 此时若规定命题变元的次序为 $P_1, P_2, \ldots, P_n$，则最大项可编码表示为 $M_{\delta_1' \delta_2' \cdots \delta_n'}$ 。
    - 对于任一给定的公式 G，作出它的真值表，根据它在真值表中 取值为 0 的个数和 0 所在的行，可作出一个与 G 等值且由这些 不同最大项的合取所构成的公式，即**主合取范式**。
    - 这些不同最大项的个数等于 G 在真值表中 0 的个数，而这些最 大项在真值表中值为 0 的行分别对应着 G 的真值为 0 的不同的 行。
- **定理9.15**
    - 任一公式都有与之等值的主析取范式和主合取范式。
- **推论9.2**
    - 两命题公式等值当且仅当它们有相同的主析取范式和主合取范式
- **例题：**

- 求公式G：((P∨Q)→(Q∧R))→(P∧¬R) 的主析取范式和主合取范式。
- 解：构造公式G的真值表如下

P Q R	$\neg R$	$P\vee Q$	$Q\wedge R$	$(P\vee Q)\to(Q\wedge R)$	$P\wedge\neg R$	G
0 0 0	1	0	0	1	0	0
0 0 1	0	0	0	1	0	0
0 1 0	1	1	0	0	0	1
0 1 1	0	1	1	1	0	0
1 0 0	1	1	0	0	1	1
1 0 1	0	1	0	0	0	1
1 1 0	1	1	0	0	1	1
1 1 1	0	1	1	1	0	0

- （1）由G 取值为1 的行得主析取范式为（次序为P，Q，R）：
  - $m_{010} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{110}$
  - 或$m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6$
  - 或$(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$
- （2）由G取值为0 的行得主合取范式为：
  - $M_{000} \wedge M_{001} \wedge M_{011} \wedge M_{111}$
  - 或$M_0 \wedge M_1 \wedge M_3 \wedge M_7$
  - 或$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$
- 另解:
  - 由 (1) , G 的主析取范式为 $m_{2} \vee m_{4} \vee m_{5} \vee m_{6}$, 故 $\neg G$ 的主析 取范式为$m_{0} \vee m_{1} \vee m_{3} \vee m_{7}$
  - 因此 G 的主合取范式为$\neg(m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7)$, 即 $M_0 \wedge M_1 \wedge M_3 \wedge M_7$

- **离散数学Chapter 10： 谓词逻辑**
  - **10.1 个体、谓词和量词**
    - **一、个体和谓词**
      - **个体，谓词，个体常元，个体变元，一元谓词，n元谓词，谓词常元，谓词变元**
        - 可以独立存在的客体称为个体。用来刻画个体的性质或关系的词称为谓词。
        - 在一个命题里表示思维对象的个体，可以是具体的，也可以是抽象的。表示具体或特定的个体称为个体常元。表示抽象的或泛指的（或者说取值不确定的）个体称为个体变元。
        - 刻画一个个体性质的词称为一元谓词；刻画n个个体之间关系的词称为n元谓词。
        - 个体常用带或不带下标的小写字母a，b，$\ldots$，a_1，b_1，$\ldots$等表示。

      - 谓词常用P，Q，R，A，B等大写字母来表示，也常常用英文单词来表示，如GREAT：大于，BETWEEN：位于…之间，尤其是在程序设计和人工智能中。
      - 谓词也有谓词常元（有确定意义）和谓词变元（无确定意义）之分。以下仅讨论谓词常元。
    - **原子命题的谓词形式**
      - 一个由n个个体常元a_1，a_2，$...$，a_n和n元谓词G所组成的原子命题可表示为G(a_1，a_2，$...$，a_n)，并称为该原子命题的谓词形式。
    - **注:**
      - 在原子命题的谓词形式中个体常元a_1，a_2，$...$，a_n的排列次序是重要的。如例10.1 中若写成Q(c，b)，则表示“陈华比张亮高”。
      - 单独的一个n元谓词没有明确的含义，必须跟随在n个具体的个体后才有明确的含义，并且能分辩真假。
      - 以前所引入的命题联结词在这里仍然可以用来构成复合命题。
  - **二、命题函数**
    - **简单命题函数,n元命题函数,复合命题函数,命题函数**
      - 由一个谓词和若干个个体变元组成的表达式称为简单命题函数。
      - 由n元谓词P和n个个体变元x_1，x_2，$...$，x_n组成的命题函数表示为$P(x_1$，x_2，$...$，$x_n)$并称为n元命题函数。
      - 由一个或若干个简单命题函数以及命题联结词组成的命题函数称为复合命题函数。
      - 简单命题函数和复合命题函数统称为命题函数。
    - 注:
      - 命题可以视为0 元命题函数（含有0 个个体变元）。
      - 命题的谓词表示形式与命题函数是不同的：前者是一个命题,因而有真值；后者并不是一个命题，只有当其中所有的个体变元都分别代之以具体的个体即个体常元后才表示一个命题。
        - 例如 二元命题函数L(x，y) 表示“x 小于y”，那么L(2，3) 表示了一个真值为真的命题“2小于3”。而L(5，1) 则表示了一个真值为假的命题“5小于1”。
      - 个体变元在哪些范围取特定的值，对命题函数产生以下两方面极大影响：
        - 命题函数是否能成为一个命题；
        - 命题的真值是真还是假。
  - **三、量词**
    - **量词，全称量词，存在量词**
      - 在命题中表示个体数量的词称为量词。

- 对于自然语言中“对所有的”“每一个”“对任一个”“凡”“一切”等词用符号“∀”表示，称为全称量词。
- 对于自然语言中“某个”“存在一些”“至少有一个”“对于一些”等词用符号“∃”表示，称为存在量词。
- **注意**
  - ∀x 表示对个体域中的所有个体。
  - ∀xP(x) 表示对个体域中的所有个体都有属性P。
  - ∃x表示存在个体域里的个体。
  - ∃xP(x) 表示存在个体域里的个体具有性质P。
- **例：**
  - 【例10.3】令D(x)： x是要死的，则命题“所有人都是要死的。”可表示为∀xD(x)，其中x 的个体域为全体人的集合。
  - 【例10.4】令I(x)： x是整数，则命题“有些有理数是整数。”可表示为∃xI(x)，其中x的个体域为有理数集合。
  - 自然语言中“恰好存在一个”等用符号“∃!”表示，“至多存在一个”等用符号“∃!!”表示。因这两个量词使用得比较少，这里不再论述。
- 对命题函数前加∀x 或∃x 称为对个体变元x进行量化。
- 命题函数一般不是命题，但可以通过对命题函数中的所有个体变元进行量化而得到命题。
- ——由命题函数得到命题的另一方法（有别于对所有个体变元用个体常元代入的方法）。
- 含有量词的命题的表达式形式及真值都与个体域有关。为简便起见，在后面的讨论中，除特殊说明外，均使用全总个体域。
- 对个体变元的真正取值范围，用特性谓词（限定个体变元变化范围的谓词）加以限制。
  - 对全称量词，特性谓词常作为蕴含公式之前件加入；
  - 对存在量词，特性谓词常作为合取公式之合取项加入。

四、命题符号化

- 将命题符号化的步骤如下：
  - 正确理解给定命题。必要时修改命题的叙述，使其中每一个原子命题、原子命题之间的关系能明显表达出来。
  - 把每一个原子命题分解成个体、谓词和量词；在全总个体域中讨论时，要给出特性谓词。
  - 找出恰当量词。注意特性谓词在全称量词后跟蕴含公式，在存在量词后跟合取公式。
  - 用恰当的命题联结词把给定命题表示出来。

10.2 谓词公式的基本概念

一、谓词公式的定义

- **原子谓词公式**
  - 由n元谓词P和n个个体变元x_1，x_2，...，x_n构成的简单命题函数P(x_1，x_2，...，x_n)称为谓词演算中的原子谓词公式。
  - **注：**
    - 原子谓词公式是不含联结词和量词的命题函数。
    - 当n= 0 时，P(x_1，x_2，...，x_n) 为原子命题P。因此，一个原子命题或一个命题变元也是谓词演算中的原子谓词公式。
- **谓词公式，合式公式，公式**
  - 谓词演算的谓词公式又称为合式公式，简称公式，由如下递归定义构成：
    - （1）原子谓词公式是谓词公式；
    - （2）如果A是谓词公式，则¬A也是谓词公式；
    - （3）如果A和B是谓词公式，则(A∨B)，(A∧B)，(A→B)，(A↔B) 也是谓词公式；
    - （4）如果A是谓词公式，x是A中的个体变元，则∀xA和∃xA也是谓词公式；
    - （5）只有由使用上述四条规则有限次而得到的才是谓词公式。
  - **注：**
    - 谓词公式是由原子谓词公式、命题联结词、量词以及圆括号按照上述规则组成的一个符号串。
    - 命题演算中的命题公式是谓词公式的一个特例。

- **二、约束变元和自由变元**
  - **作用变元，指导变元，量词的辖域，作用域，约束出现，约束变元，自由变元，自由出现**
    - 谓词公式中出现在量词后面的个体变元称为该量词的作用变元或指导变元。
    - 每个量词后面的最短公式称为该量词的辖域或作用域，即量词起作用的区域。
    - 在量词辖域中指导变元的一切出现称为约束出现，约束出现的变元称为约束变元。
    - 在谓词公式中，除约束变元外所出现的个体变元都称为自由变元。自由变元的出现称为自由出现。
    - **注：**
      - 若$P(x_1，x_2，...，x_n)$是n元命题函数，它有n个相互独立的自由变元，当对其中k个变元进行约束时，则变为一个n-k元命题函数。
      - 谓词公式中如果没有自由变元出现，则该公式就成为一个命题公式（含命题变元）或命题（不含命题变元）。

- 谓词公式中量词辖域的求法：
  - 若量词后有括号，则在括号内的公式即为此量词的辖域；
  - 若量词后无括号，则量词后最短的公式为此量词的辖域。
- **注：**
  - 有时一个变元在同一个公式中既有约束出现又有自由出现。
  - 为避免由此而产生混淆，可以对约束变元或自由变元进行更改，使得一个变元在一个公式中只呈一种形式出现。

- **三、换名规则和代入规则**
  - 换名规则
    - 对约束变元进行换名，使得一个变元在一个公式中只呈一种形式出现。
      - 换名时，该变元在量词及其辖域中的所有出现均须同时更改，公式的其余部分不变。
      - 换名时，一定要更改为该量词辖域中没有出现过的符号，最好是公式中未出现过的符号。
  - 代入规则
    - 对于公式中的自由变元也允许更改，这种更改称为代入。
      - 代入时，须对该自由变元的所有自由出现同时进行代入；
      - 代入时，所选用的变元符号与原公式中所有变元的符号不能相同。
  - 下表列出了换名规则与代入规则的主要区别

	换名规则	代入规则
对象	约束变元	自由变元
范围	一个量词及其辖域内	整个公式
符号	辖域内出现的符号以外，最好与公式中的符号不同	整个公式中出现的符号以外

- **10.3 谓词公式的等值关系和蕴含关系**
  - **一、谓词公式的类型**

    一个谓词公式一般含有个体变元**和命题变元**，只有当公式中的自由变元用某个体域中确定的个体代入、命题变元用确定的命题代入后，原公式才变成为一个命题
    - **一组指派,赋值,解释**
      - 一组代入到谓词公式中并使得谓词公式成为命题的确定的个体和命题称为公式的一组指派或赋值或解释。
      - **注意：**
        - 对命题变元的指派为真值指派。对自由变元的指派为非真值指派。
    - **永真公式,重言式,矛盾式,不可满足公式,可满足的公式**
      - 如果对于谓词公式G 的任一组指派，公式G的值总为真，则称G为永真公式或重言式，用1 表示。

- 如果对于公式G的任一组指派，公式G的值总为假，则称G为永假公式或矛盾式或不可满足公式，用0 表示。
- 如果至少存在着一组指派，使公式G的值为真，则称G为可满足的公式。

- **二、谓词公式间的等值与蕴含关系**
  - **等值（式），等价（式）**
    - 设A、B是两个公式，它们有共同的个体域D，若对于A和B的任意一组指派，两公式都具有相同的真值，则称在D上公式A和B等值或等价，记作A⇔B（称为等值式或等价式）。
  - **蕴含，蕴含式**
    - 设A、B是两个公式，它们有共同的个体域D，若在D上A→B⇔1，则称在D上A蕴含B，记作A⇒B（称为蕴含式）。
  - **注意:**
    - 当个体域是有限集时，原则上可以用真值表判断两公式是否有等值关系或有蕴含关系。
    - 当个体域是有限集合时，量词可以被消除掉。
      - 设个体域 $D=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 。
        - 包含有全称量词的谓词公式 $\forall x A(x)$ 表示 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 都有性质 A, 相当于 $A\left(a_1\right)$ 且 $A\left(a_2\right)$ 且 $\ldots$ 且 $A\left(a_n\right)$,
          - 因此$\forall x A(x) \Leftrightarrow A\left(a_1\right) \wedge A\left(a_2\right) \wedge \ldots \wedge A\left(a_n\right)$
          - 因为 $A\left(a_i\right)(i=1,2, \ldots, n)$ 中都没有个体变元, 也没有量词, 所以这一合取式实际上是命题演算中的命题公式。
        - 包含有存在量词的谓词公式 $\exists x A(x)$ 表示 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 至少有一个具有性质 A, 相当于 $A\left(a_1\right)$ 或 $A\left(a_2\right)$ 或 $\ldots$ 或 $A\left(a_n\right)$
          - 因此$\exists x A(x) \Leftrightarrow A\left(a_1\right) \vee A\left(a_2\right) \vee \ldots \vee A\left(a_n\right)$
          - 同样地, 这一析取式也是命题演算中的命题公式。
        - 在后面的学习中，不妨把∀xA(x)理解为命题逻辑中的合取式在谓词逻辑中的延伸，而∃xA(x)理解为命题逻辑中的析取式在谓词逻辑中的延伸，这将有助于我们理解和记忆谓词演算中的等值式和蕴含式。
      - 如果一个谓词公式中包含有多个量词，则可以从里到外用上述方法将量词逐个消去，从而使公式转换成命题演算中的命题公式。
      - 但当个体域中元素很多甚至为无限集时，这个方法就变得不实际甚至不可能了。因此，给出一些基本的永真公式，然后以它们为基础进行推导。
  - **1．命题重言式的推广**
    - **定理10.1**
      - 对命题演算中的所有重言式，若将其中每一个命题变元分别用谓词公式代入，便可得到谓词演算中的永真公式。

- 命题演算中的永真公式可以“移植”到谓词演算中来。即命题演算中的基本等值关系式在谓词演算中仍然成立。
- 例如：
    - $\neg(P\vee Q)\leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$ 是重言式，若用$\forall xP(x)$，$\exists xQ(x)$ 分别代替P和Q，即可得到永真公式$\neg(\forall xP(x)\vee\exists xQ(x))\leftrightarrow(\neg\forall xP(x)\wedge\neg\exists xQ(x))$。
    - 又如 因为$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$，所以$A(x)\rightarrow B(x, y)\Leftrightarrow\neg A(x)\vee B(x, y)$是等值式。
    - 再如 因为$P\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow Q$，所以$A(x)\wedge(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow B(x)$

- **2．量词间转化（量词否定）的等值式**
    - **定理10.2**

      改量词，否命题
        - 设A(x) 是任意一个含自由变元x的公式，则有
            - （1）$\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$。
            - （2）$\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$。
        - “否定一般规律”只需“举一反例”，而“否定存在个例”则要“逐一否定”。
        - 由这两个等值式可知：
            - 在谓词演算中只要有一个量词就够了；
            - 量词前面的否定符号可深入至量词辖域内，但与此同时必须将存在量词和全称量词作对换。
    - **3．量词辖域扩张与收缩的等值式**
        - **定理10.3**
            - 设A(x) 是任意一个含自由变元x的公式，B是任意一个不含有变元x的公式，则有
                - （1）$\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$
                - （2）$\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$
                - （3）$\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$
                - （4）$\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$
            - 当B中含有自由变元，且与量词的指导变元不同时，也有类似的等值式。例如：
                - $\forall x(A(x)\vee B(y))\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B(y)$
        - **推论10.1**
            - 设A(x) 是任意一个含自由变元x的公式，B是任意一个不含有变元x的公式，则有
                - （1）$\forall x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\rightarrow B$
                - （2）$\forall x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$
                - （3）$\exists x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow B$

- (4) $\exists x(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \exists x A(x)$

- **4．量词分配等值式与蕴含式**
  - **定理10.4**
    - 设A(x) 和B(x) 为任意只含自由变元x的公式，则有
      - (1) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$

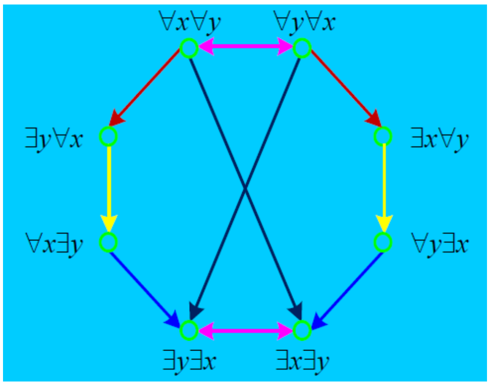
        全称对合取可分配
      - (2) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

        存在对析取可分配
      - (3) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

        先合取再存在小
      - (4) $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

        先析取再全称大
- **5．量词与联结词的关系**
  - **定理10.5**
    - 设A(x) 和B(x) 为任意只含自由变元x的公式，则有
      - (1) $\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x))$
      - (2) $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$
      - (3) $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$
      - (4) $\exists x(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \to \exists x B(x)$
      - (5) $\forall x(A(x) \leftrightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \leftrightarrow \forall x B(x)$
- **6．两个量词间的排列次序**

  相同量词间的次序可以任意调动，不同量词间的次序不能随意调动。
  - **定理10.6**
    - 设A(x，y)为任意只含自由变元x，y的公式，则有
      - (1) $\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$。
      - (2) $\exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$。
      - (3) $\forall x \forall y A(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x, y)$。
      - (4) $\forall y \forall x A(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y A(x, y)$。
      - (5) $\forall x \exists y A(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x A(x, y)$。
      - (6) $\forall y \exists x A(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x, y)$。
      - (7) $\exists y \forall x A(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x, y)$。
      - (8) $\exists x \forall y A(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$。
    - 这八个关系式中量词间的排列次序可以图形表示如下。



- 或者

$$
\begin{array}{ccc}
\forall x\forall y A(x,y) & \Leftrightarrow & \forall y\forall x A(x,y) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\exists x\forall y A(x,y) & & \exists y\forall x A(x,y) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\forall y\exists x A(x,y) & & \forall x\exists y A(x,y) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\exists x\exists y A(x,y) & \Leftrightarrow & \exists y\exists x A(x,y)
\end{array}
$$

- 三、谓词公式的对偶
  - 对偶关系
    - 设A 是不含联结词“→”及“↔”的谓词公式，则在其中以联结词∧，∨分别代换∨，∧，以量词∀，∃分别代换∃，∀，以常量0，1 分别代换1，0后所得到的公式称为A的对偶公式，记作A^D。
    - 例如
      - 公式∀y∃x(P(x，y) ∧Q(x，y)) ∨1 的对偶公式为∃y∀x(P(x，y) ∨Q(x，y)) ∧0
  - **定理10.7**（对偶原理）
    - 设A，B是两个不含联结词“→”和“↔”的谓词公式，
      - （1）若A⇒B，则$B^D \Rightarrow A^D$。
      - （2）若A⇔B，则$A^D \Leftrightarrow B^D$。
    - 对偶原理可用于帮助记忆定理10.2~10.6中的各等值式和蕴含式。
- 10.4 谓词公式的范式
- 一、前束范式
  - 前束范式，母式，尾部
    - 一个谓词公式, 如果它的所有量词均非否定地出现 在公式的最前面, 且它们的辖域一直延伸到公式的末尾, 则称 这种形式的公式为前束范式。记为$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kM$
    - 其中, $Q_i \in \{\forall,\exists\}(1 \le i \le k)$, M 为不含量词的谓词公式。
    - 称 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_k$ 为首标, 称 M 为母式或尾部。
    - 例如
      - （1）∀x∃y∀z(P(x) →Q(y)∧R(x，z))

        - （2）∃x∀y∀z((P(x，y)∧(¬Q(x)))→(R(y，z)∨(¬Q(x))))
        - （3）P(x，y，z)
        - 都是前束范式。
        - 而公式∀xP(x)→∃yQ(y)则不是前束范式。
    - **定理10.8**
      - 任一谓词公式都可以化为与之等值的前束范式。
    - **注:**
      - 在求给定谓词公式的前束范式时，由于进行等值演算时顺序不同以及约束变元换名与否都可以演算下去，对量词左移的次序没有机械地规定，对于母式也没有进一步的要求，因此**一个公式的前束范式可以不唯一。**
      - 由于在谓词逻辑中的判定问题无解，因此前束范式并不像命题逻辑中的范式那样能解决判定问题。前束范式只是使公式的形式比较整齐规范，为判定工作提供一些方便。
  - **二、前束合取范式与前束析取范式**
    - **前束合取范式,前束析取范式**
      - 设谓词公式 A 是一前束范式,
        - 若 A 的母式具有形式:$(A_{11} \vee A_{12} \vee cdots \vee A_{1n_1}) \wedge \cdots \wedge (A_{m1} \vee A_{m2} \vee \cdots \vee A_{mn_m})$其中 A_{ij} 是原子谓词公式或其否定,则称 A 是前束合取范式;
        - 若 A 的母式具有形式:$(A_{11} \wedge A_{12} \wedge \cdots \wedge A_{1n_1}) \vee \cdots \vee (A_{m1} \wedge A_{m2} \wedge \cdots \wedge A_{mn_m})$其中 A_{ij} 是原子谓词公式或其否定,则称 A 是前束析取范式。
        - **例如**
          - ∀x∃y∀z((P(x，y)∨¬R(x，z))∧(¬Q(y，z)∨¬P(x，y)))是前束合取范式;
          - ∃x∀z∀y(S(x，z)∨(¬P(x，y)∧Q(y，z)))是前束析取范式。
        - **定理10.9**
          - 每个谓词公式A均可以变换为与它等值的前束合取范式和前束析取范式。

- **10.5 谓词演算的推理理论**

  在谓词演算中,推理的形式结构仍为若 是永真式,则称**由前提，可逻辑地推出结论**,其中 均为谓词公式。

  - **一、推理规则**
    - **1．US（Universal Specification，全称特定化）规则**
      - **∀xG(x) ⇒G(y),其中G(y) 是将G(x) 中的x处处代之以y而得。**
        - 意义：如果个体域的所有个体x都具有性质G，则个体域中的任一个体y也必具有性质G。——全称量词可以删除

- 推广应用：$\forall xG(x) \Rightarrow G(c)$，其中c为个体域中的任意一个确定的个体，即个体常元。
- US 规则成立的**条件**是：
    - （1）y是个体域中任意的一个个体；
    - （2）x在G(x) 中自由出现，y在G(x) 中不约束出现。
        - 关于（2）的反例：
            - 设$A(x) = \exists y(x> y)$，其中个体域是R，则$\forall xA(x) = \forall x\exists y(x>y)$是一真值为真的命题。
            - 若应用US 规则，则得到$A(y) = \exists y(y> y)$，这是一真值为假的命题。
            - 错误的原因在于y在A(x) 中是约束出现的。

- **2．ES （Existential Specification，存在特定化）规则**
    - **$\exists xG(x) \Rightarrow G(c)$,其中c是指定个体域中某个个体。**
        - 意义：如果个体域中存在个体x具有性质G，则个体域中必有某一个个体c具有性质G。
        - ES 规则成立的条件是：
            - （1）c是使G(c) 为真的指定个体域中的某个个体，非任意；
            - （2）c不曾在G(x) 中出现过，在具体的推理过程中还要求c不在以前的步骤中出现过；
            - （3）G(x) 中除x外无其它自由变元出现

              如果G(x) 中有其它自由变元出现，且x 是随着其它自由变元的值而变，那么就不存在唯一的c 使得G(c)对自由变元的任意值都是成立的。这时，就不能应用ES 规则。

                - 关于（3）的反例：
                - 设G(x) 为$(x= y)$，其中个体域是R，若使用ES 规则，则得$c= y$，即存在一实数c，它等于任意实数y。
                - 结论显然不成立，这是因为在$\exists x(x= y)$ 中有自由变元y。
        - 如果$\exists xP(x)$ 和$\exists xQ(x)$ 都真，则对于某个c和某个d，可以断定$P(c) \wedge Q(d)$ 必真，但不能断定$P(c) \wedge Q(c)$ 为真。
            - 例如：设个体域是Z，P(x)：x是偶数，Q(x)：x是奇数，显然P(2)和Q(3) 都为真，$P(2) \wedge Q(3)$ 也为真，但$P(2) \wedge Q(2)$ 为假。

- **3．UG（Universal Generalization，全称一般化）规则**
    - **$G(y) \Rightarrow \forall xG(x)$,其中G(x) 是将G(y) 中的y处处代之以x而得。**
        - 意义：如果个体域中任意一个个体y都具有性质G，则个体域中所有的个体x都具有性质G。
        - UG 规则成立的条件是：
            - （1）y在G(y) 中自由出现，且y取任何值时G(y) 均为真；
            - （2）取代y的x不能在G(y) 中约束出现。

                - 例如设个体域为R，则对任意的实数y，$G(y) = \exists x(x< y)$ 是真值为真的命题。但$\forall xG(x) = \forall x\exists x(x< x)$ 是真值为假的命题，出错的原因在于x在G(y) 中约束出现了。
        - **注：**
            - 在使用US 规则引出自由变元y之后，不能让由使用ES 规则而引入的新变元在G(y) 中自由出现。如果有这种情况，就不能使用UG 规则。
            - 因为ES 规则引入的新变元是表面的自由变元，G(x) 不是对新变元的一切值都可证明，所以G(x) 不能全称量化，否则就会与“量词序列∀x∃y不可交换”的事实产生矛盾。后面的例10.30将说明这一点。
- **4．EG（Existential Generalization，存在一般化）规则**
    - **$G(c) \Rightarrow \exists xG(x)$,其中c是指定个体域中某个个体。**
        - 意义：如果个体域中有某一个个体c具有性质G，则个体域中存在着具有性质G的个体。
        - 推广应用：$G(y)\Rightarrow\exists xG(x)$，其中x在G(y)中自由出现
        - EG 规则成立的条件是：
            - （1）c是个体域中使G为真的某个确定的个体，非任意；
            - （2）代替c的x不能已在G(c) 中出现。
                - 例如设个体域为R，并取$G(3) = \exists x(x< 3)$，则G(3) 是真值为真的命题。由于x已在G(3) 中出现，因此若用x替换3则得到$\exists x\exists x(x< x)$ 是真值为假的命题。出错原因是违背了条件（2）。
- **推理规则小结：**
    - 添加和删去量词时，该量词必须是公式的最左边的量词，且此量词的前边无任何符号，它的辖域作用到公式末尾。例如：
        - $\forall x(M(x)\to\exists yF(x,y)) \Rightarrow M(c)\to\exists yF(c,y)$
        - $\forall x(M(x)\to\exists yF(x,y)) \not\Rightarrow \forall x(M(x)\to F(x,c))$
    - US 规则和ES 规则主要用于推导过程中删除量词，一旦删除了量词，就可像命题演算一样完成推导过程，从而获得想要的结论。
        - 如有两个含有存在量词的公式∃xP(x) 和∃xQ(x)，当用ES 规则删除量词时，不能选用同一个个体常元符号来取代两个公式中的变元，而应用不同的个体常元符号来取代它们。
        - 在推导过程中，如既要使用US 规则又要使用ES 规则删除公式中的量词，而且选用的个体是同一个符号，则必须先使用ES 规则再使用US 规则。
    - UG规则和EG规则主要用于使结论呈量化形式。
        - 如果一个变元使用ES 规则删除了量词，则对该变元添加量词时只能使用EG 规则，而不能使用UG 规则；

        - 如果使用US 规则删除了量词，则对该变元添加量词时可使用EG 规则和UG 规则。
        - 使用ES规则而产生的变元不能保留在结论中，因它是暂时的假设，在推导结束之前必须使用EG规则使之成为约束变元。
    - 在使用以上4 个规则时，要严格按照限制条件去使用，并从整体上考虑个体变元和个体常元符号的选择，否则会犯错误。
    - 例如：在添加量词时，所选用的x不能在公式A(c) 或A(y) 中以任何约束出现。
    - 这4 个规则可形象地称为："脱帽"、"戴帽"规则：
        - 对全称量词"脱帽容易戴帽难"

          (必须保证y的任意性)
        - 对存在量词"戴帽容易脱帽难"

          (必须保证c是特定的，不得带有任何任意的因素)

- **二、推理规则的应用**
    - 和命题逻辑相比，在谓词逻辑里使用推理规则进行推理演算同样是方便的。
    - 推理演算过程：
        - 将以自然语句表示的推理问题引入谓词公式形式化；
        - 若不能直接使用基本的推理公式就消去量词；
        - 在无量词下使用规则和公式进行推理；
        - 引入量词以求得结论。
    - **【例10.24】**证明苏格拉底的三段论。

      【例 10.24】证明苏格拉底的三段论。

      解：令 $M(x)$：x 是人，$D(x)$：x 是要死的，c：苏格拉底。

      苏格拉底三段论可表示为：

      $$\forall x(\,M(x) \to D(x)\,) \wedge M(c) \;\Rightarrow\; D(c)$$

      推证过程如下：

      (1) $M(c)$　　前提

      (2) $\forall x(\,M(x) \to D(x)\,)$　　前提

      (3)* $M(c) \to D(c)$　　(2)；US 规则

      (4) $D(c)$　　(1)，(3)；假言推理

      * 由于 y 取个体域中任意个体均可，为了与步骤 (1) 一致，故取 c。注意先后顺序！
    - **【例10.25】**证明∀x(C(x) →W(x) ∧R(x)) ∧∃x(C(x) ∧Q(x)) ⇒∃x(Q(x) ∧R(x))。

证明：推证过程如下：

(1)	$\forall x(\,C(x) \to W(x) \land R(x)\,)$	前提
(2)	$\exists x(\,C(x) \land Q(x)\,)$	前提
(3)	$C(a) \land Q(a)$	(2)；ES 规则
(4)	$C(a) \to W(a) \land R(a)$	(1)；US 规则
(5)	$C(a)$	(3)；化简式
(6)	$W(a) \land R(a)$	(4)，(5)；假言推理
(7)	$Q(a)$	(3)；化简式
(8)	$R(a)$	(6)；化简式
(9)	$Q(a) \land R(a)$	(7)，(8)；合取引入
(10)	$\exists x(\,Q(x) \land R(x)\,)$	(9)；EG 规则

(1) 与 (2) 可换

(3) 和 (4) 不能换

- **【例10.26】**证明∀x(P(x) ∨Q(x)) ⇒¬(∀xP(x)) →∃xQ(x)。

证明：推证过程如下：

(1)	$\neg(\,\forall x P(x)\,)$	附加前提
(2)	$\exists x(\,\neg P(x)\,)$	(1)；量词间转化等值式
(3)	$\neg P(c)$	(2)；ES 规则
(4)	$\forall x(\,P(x) \lor Q(x)\,)$	前提
(5)	$P(c) \lor Q(c)$	(4)；US 规则
(6)	$Q(c)$	(3)，(5)；析取三段论
(7)	$\exists x Q(x)$	(6)；EG 规则
(8)	$\neg(\,\forall x P(x)\,) \to \exists x Q(x)$	(1)，(7)；CP 规则