离散数学Chapter 3：函数

- ## 3.1 函数及性质
  - ### 一、函数的基本概念
    - #### 1.函数的定义
      - 函数、映射、变换：

        定义 3.1 设有集合 A，B，f 是一个由 A 到 B 的关系，如果 $\forall x \in A$，均存在唯一的 $y \in B$，使得 $x f y$（或 $(x, y) \in f$），则称关系 f 是一个由 A 到 B 的函数或映射或变换。记作 f：$A \to B$。

        当 $A = B$ 时，也称 f 为 A 上的函数。
      - 像，原像/像源，自变量，函数值

        若 $(x, y) \in f$，则称 y 为 x 在 f 下的像，称 x 为 y 的像源或原像，常记作 $f(x) = y$。也称 x 为自变量（元），对应的 y 为函数 f 在 x 处的函数值。
      - **函数的定义是普通函数定义的推广。**
      - 定义中的“存在唯一”对函数提出了两条要求：
        - 存在性：A 中每个元素均要有像，即 dom f = A。
        - 唯一性：A 中每个元素只能有一个像，即 f 的单值性。
      - 对有限集合，如果 f 是由 A 到 B 的函数，则
        - 从关系图看，要求 A 的每一结点有且仅有一条有向边指向 B 中的一个结点；不要求 B 的每个结点均有边指向它，也没有要求 B 的结点只有一条边指向它。
        - 从关系矩阵看，要求关系矩阵的每一行有且仅有一个为 1，其它均为 0，而列中元素可以全为 0，也可以有不止一个 1。
      - n元函数

        若 $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，则 A 中元素 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在函数 f 下的像 $f((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ 通常简写成 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，并称 f 为 n 元函数。
    - #### 2.函数的定义域和值域
      - 定义域、值域

        ■ 函数 f：$A \to B$ 的定义域即关系的定义域，仍记为 $\mathrm{dom} f$，满足 $\mathrm{dom} f = A$。

        ■ 函数 f：$A \to B$ 的值域即关系的值域，仍记为 $\mathrm{ran} f$，满足 $\mathrm{ran} f \subseteq B$。
      - 像集

        ■ 对于函数 f，常将 $\mathrm{ran} f$ 记作 $f(A)$，并称为函数的像集，即

        $$f(A) = \mathrm{ran} f = \{y \mid y \in B \text{ 且存在 } x \in A \text{ 使 } f(x) = y\}$$

        ■ 若 $S \subseteq A$，则 S 中所有元素的像的集合常记为 $f(S)$，即

        $$f(S) = \{y \mid y \in B \text{ 且存在 } x \in S \text{ 使 } f(x) = y\}$$

- **3.特殊函数**
  - 空函数，常函数，恒等函数

定义 3.2 （1）对于函数 f：$A \to B$，

若 $A = \Phi$，B 为任意集合，则称 f 为**空函数**；

若存在 $b \in B$，使 $\forall x \in A$ 均有 $f(x) = b$，则称 f 为**常函数**。

（2）对于 A 上的函数 f，

若 $\forall x \in A$ 均有 $f(x) = x$，则称 f 为 A 上的**恒等函数**。

-

显然

- 当 $A \neq \Phi$ 且 $B = \Phi$ 时，不存在由 A 到 B 的函数。
- A 上的恒等函数即是 A 上的恒等关系 I_A。

- **4.函数的相等**
  - 相等

4. 函数的相等

定义 3.3 设有函数 f：$A \to B$ 和 g：$C \to D$，如果 f 和 g 具有相同的定义域和对应法则，即 $A = C$，且对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x) = g(x)$，则称函数 f 和 g **相等**，记作 $f = g$。

- 注意：（函数的个数，B上A）

注意：

- 若在 A 中有一个元素 a，使得 $f(a) \neq g(a)$，则 $f \neq g$。
- 设 A 和 B 都是有限集，$\#A = m$，$\#B = n$，则 A 中 m 个元素的取值方式有 $n \times n \times \ldots \times n$（共 m 个）种，因此由 A 到 B 的函数有 n^m 个。
- 一般地，由有限集合 A 到 B 的所有函数的集合为

$$B^A = \{ f \mid f:\ A \to B\}$$

（读着"B 上 A"），则 $\#(B^A) = (\#B)^{\#A}$。

- **5.函数的扩充和限制**
  - 限制，扩充

5. 函数的扩充与限制

定义 3.4 设有函数 f：$A \to B$ 和 g：$C \to B$，如果 $C \subseteq A$，$C \neq \Phi$，且对于所有的 $a \in C$，有 $f(a) = g(a)$，则称函数 g 是 f 在 C 上的**限制**，并称函数 f 是 g 在 A 上的**扩充**。

- 注意：

注意：

- $g = f \cap (C \times B)$。（定理 3.1）
- f 是 g 在 A 上的扩充当且仅当 $g \subseteq f$。（定理 3.2）
- 一个函数和它的限制或扩充是不相同的函数，它们往往还具有完全不同的性质。

- **二、函数的性质**
  - 函数的三个性质：
    - 内射，单射，一对一：

定义 3.5 设 f 是一由 A 到 B 的函数，

（1）若对任意的 x，$y \in A$，当 $x \neq y$ 时都有 $f(x) \neq f(y)$（或者说当 $f(x) = f(y)$ 时有 $x = y$），则称 f 是由 A 到 B 的**内射**或**单射**，也称**一对一**的函数。

我的像就是我的像，像的原像是唯一的

- 也就是说，一个自变量对应一个函数值

- 满射，映上：

每个像都有原像

  - 若 f (A) = B，则称 f 是由 A 到 B 的满射，也称映上的函数

- 双射，一一对应：
  - 若 f 既是内射又是满射，则称 f 是由 A 到 B 的双射，也称一一对应的函数。

- 例题：

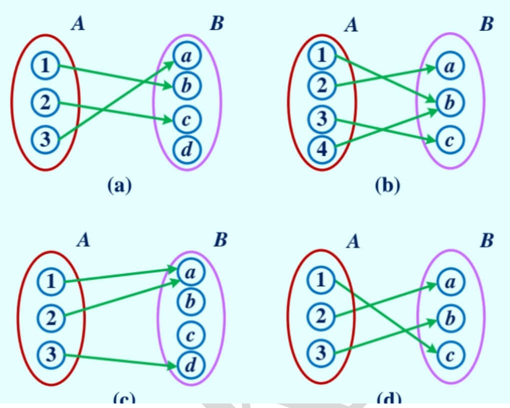
【例 3.3】判断下列关系图所给函数的性质。

（a）是内射，但不是满射。

（b）是满射，但不是内射。

（c）既不是内射，也不是满射。

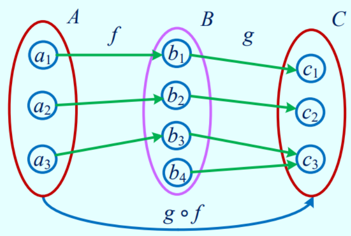
（d）既是内射又是满射，因此是双射。



- 从定义易知：
  - 内射使得 A 中的元不同其像也不同。
  - 满射使得 B 中每个元至少有一个原像。
  - 双射使得 A 中的元有唯一的像而 B 中的元有唯一的原像。
    - （反证：若 B 中元 y 有两个不同的原像 x1，x2，使得 f(x1) = f(x2) = y，则显然与 f 是内射矛盾。）
- 注意：
  - 由集合 A 到 B 的内射 f 也是由 A 到 f(A) 的双射。
    - —— 此结论在证题时经常用到。
- 如果 A 和 B 都是有限集，那么函数 f：A→B 是
  - 内射的必要条件是 #A≤#B。
  - 满射的必要条件是 #A≥#B。
  - 双射的必要条件是 #A=#B。

- **3.2 复合函数**
  - **一、复合函数的定义**
    - **复合关系**
      - 设有函数 f：A → B 和 g：B → C，则复合关系 f ∘ g 是一个由集合 A 到 C 的函数

- **复合函数，复合运算**
  - 设有函数 f：A→B 和 g：B→C，则 f 和 g 的复合函数是一个由集合 A 到 C 的函数，记为 g∘f（或 gf），定义为：∀x∈A，都有(g∘f)(x) = g(f(x))
  - 即若集合 B 中的元素 y 是 x 在 f 作用下的像，且集合 C 中的元素z 是 y 在 g 作用下的像，那么 z 就是 x 在函数 g∘f 作用下的像。
  - 由函数 f 和 g 求得复合函数 g∘f 的运算“∘”称为函数的复合运算。
  - 注意：
    - 复合函数 g∘f 是复合关系 f∘g。这样记是为了和数学中复合函数的习惯写法相一致。
    - 只有当 ranf ⊆ domg 时，它们的复合才有意义。当这一要求不满足时，可利用函数的限制和扩充来弥补
- **二、函数复合运算的性质**
  - 设 f 是一个由集合 A 到 B 的函数，IA和 IB 分别是 A 和B 上的恒等函数，则有 f∘I_A = I_B∘f = f
    - 即：恒等函数在函数复合中不起作用
  - 设有函数 f：A→B，g：B→C 和 h：C→D，则有h∘(g∘f) = (h∘g)∘f
    - 即函数的复合满足结合律。其中 h∘(g∘f) 和 (h∘g)∘f 都是 A→D 的函数
  - **n次幂,幂等函数**
    - 若函数 f：A→A，则对任意的非负整数 n，定义 f 的 n次幂为
    - $f^0 = I_A, f^{n+1} = f^n \circ f(n \in Z^+)$
    - 易证，对于任意的非负整数m和n，有$f^m \circ f^n = f^{m+n}$，$(f^m)^n = f^{mn}$
    - 若函数 f：A→A 满足 f^2 = f，则称 f 是幂等函数
- **三、复合函数的性质**
  - 设有函数 f：A→B，g：B→C，
    - （1）如果 f 和 g 都是内射，则 g∘f 也是内射。
    - （2）如果 f 和 g 都是满射，则 g∘f 也是满射。
    - （3）如果 f 和 g 都是双射，则 g∘f 也是双射。
    - 注意：
      - 定理说明函数的复合运算能够保持函数的内射、满射、双射性。
      - 但该定理的逆命题不为真，即若 g∘f：A→C 是内射（满射、双射）的，则不一定有 f：A→B 和 g：B→C 都是内射（满射、双射）的.



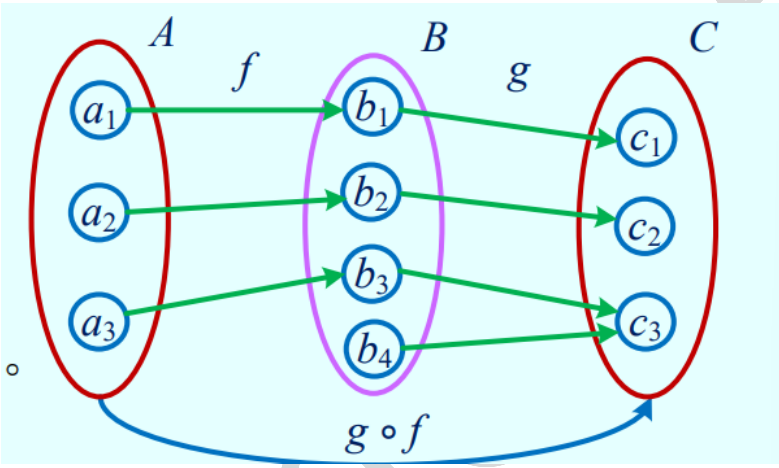
不难看出：

（1）f：$A \to B$ 和 $g \circ f$：$A \to C$ 都是内射，但 g：$B \to C$ 不是内射。

（2）g：$B \to C$ 和 $g \circ f$：$A \to C$ 都是满射，但 f：$A \to B$ 不是满射。

（3）$g \circ f$：$A \to C$ 是双射，但 f：$A \to B$ 和 g：$B \to C$ 都不是双射。

- 设有函数 f：A→B 和 g：B→C:
  - （1）如果 g∘f 是内射，则 f 是内射。
  - （2）如果 g∘f 是满射，则 g 是满射。
  - （3）如果 g∘f 是双射，则 f 是内射而 g 是满射
  - 注意：

    - 当 g∘f 是内射时，g 可能不是内射。反例如上图。
    - 当 g∘f 是满射，f 可能不是满射。反例见上图。
    - 当 g∘f 是双射时，f 可能不是满射，g 可能不是内射。反例见上图
- **3.3 逆函数**
  - **一、逆函数的定义**
    - **逆函数，可逆的**
      - 设 f：A→B 是双射，则逆关系 f−1 是 B 到 A 的函数且为双射
      - 设函数 f：A→B 是一个双射，定义函数 g：B→A，使得对于每一个元素 y∈B，g(y)=x，其中 x 是使得 f(x)=y 的 A中的元素，称 g 为 f 的逆函数，记作 f−1，并称 f 是可逆的。
      - 注意：
        - 当且仅当 f 是双射函数时才定义 f 的逆函数 f−1。
        - 逆关系不一定是函数，但逆函数一定是逆关系。

- 事实上，若函数 f 使 f(x) = y，则逆函数 f^{-1} 使$f^{-1}(y) = x$，即如果(x，y) ∈ f，那么 (y，x) ∈f^{-1} .因此逆函数f^{-1}是 f 的逆关系

- 二、逆函数的性质

- 3.4 无限集的基数

利用函数研究无限集合是集合论的一个重要部分。

- 一、抽屉原理
  - 集合基数的讨论是以抽屉原理（又称鸽笼原理）为根据的。抽屉原理是德国数学家狄利克雷首先明确提出并用以证明一些数论中的问题，因此，也称为狄利克雷原则。它是组合数学中一个重要的原理，易用反证法加以证明。抽屉原理在证明某些存在性或唯一性问题时非常有用，它通常表述为如下三种形式（设 m，n 均为正整数）
    - 把多于 n 个的物体放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里的物体不少于两个。
    - 把多于 mn 个的物体放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里有不少于 m + 1 个的物体。
    - 把 m 个物体放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里有不少于 $\left\lfloor \frac{(m-1)}{n} \right\rfloor + 1$ 个的物体（[x] 表示不超过 x 的最大整数）。
    - 把无穷多个物体放入 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里有无穷多个物体。
- 二、集合的等势
  - **等势，有相同的基数，同基**
    - 设有集合 A，B，如果存在一个双射函数 f：A → B，则称 A 与 B 等势或有相同的基数，简称同基，记作 A ~ B。
    - **注意：**
      - “一一对应”规则是判断两个集合是否一样“大”的标准。
      - 当 A ~ B 时，双射 f：A→B 可能不止一个。
      - 对于有限集，$A \sim B$ ⇔ #A=#B。
      - 如果 A = B，则$A \sim B$。反之，则不一定。
    - **定理**
      - 集合族 S 上的等势关系“~”是一个等价关系。
      - 注意：（基数类的定义）
        - 欲证集合 A ~ B，可构造一个 A →B 或者 B → A 的双射。

          构造双射函数非易事 一般根据难易做选择
        - 等势关系“~”导致 S 的一个等价分划，其中每一个等价类称为一个基数类。凡属于同一基数类的集合必有相同的基数。
  - **有限集，无限集**
    - 如果集合 A 与集合 N_m = {0，1，2，…，m – 1}（m 为某一正整数）属于同一基数类，则称 A 为有限集，且# A=m. ϕ是有限集（基数为 0）。不是有限集

的集合称为无限集。

- 一个集合 A，若存在与它等势的真子集，则称 A 为无限集；否则称为有限集。

- **三、可数集的基数**
  - **1．可数集的概念**
    - 可数集，不可数集，可计数集
      - 如果集合 A ~ N，则称 A 是可数集，如果 A 是无限集但不是可数集，则称 A 是不可数集。有限集和可数集统称为可计数集。
    - 注意：
      - 非负整数集 N 可以换成正整数集 Z^+。
      - 可数集的基数记作$\aleph_0$（Aleph），读作“ 阿列夫零”。
      - 所有正有理数的集合 Q+，所有负有理数的集合 Q– 和所有有理数的集合 Q 都是可数集（证明见后）。
    - 思考
      - 举例说明有限集合的基数中哪些结论在无限集合中不成立?
        - $A \subset B$ -> # A < # B
        - $C = A \cup B, A \cap B = \phi$ -> # C = # A + # B
  - **2．可数集的性质**
    - 定理
      - 集合 A 为可数集的充分必要条件是它的元素可排成无重复的枚举：A = { a_0， a_1， a_2， $...$， a_n， $...$}
        - 证明

          定理 3.15 集合 A 为可数集的充分必要条件是它的元素可排成无重复的枚举：$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$。

          【证明】设集合 A 的元素可排成无重复的枚举：$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$。

          令 f: $A \to \mathbf{N}$，$f(a_n) = n$。

          显然 f 是由 A 到 $\mathbf{N}$ 的双射。故 A 是可数集。

          反之，设集合 A 为可数集，则由定义知，存在双射 f: $A \to \mathbf{N}$。

          于是 f^{-1} 是 $\mathbf{N} \to A$ 的一个双射。

          从而 A 的元素可排成一个无重复的枚举：$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$。

          —— 判别无限集为可数集的简便方法（不必构造双射）。
        - 所有元素排成无重复的枚举，“如何排”是关键，需要技巧。
      - 任一无限集 A 必包含有可数子集。
        - —— 可数集是“最小的”无限集。
      - 可数集 A 的任一无限子集仍是可数集。
        - 证明：
          - 因为 A 是可数集，由定理 3.15，A 的元素可排成无重复的枚举：a_0， a_1， a_2， $...$， a_n， $...$，

- 设 B 是 A 的任一无限子集（次序可能有变）。
- 从 A 中删去不在 B 中出现的那些元素，剩下的元素即为 B 的元素，其个数无限。
- 按照这些元素在枚举中出现的先后次序，依次令其一一对应于 N 中的元素 0，1，2，3，…，则 B 是一个可数集。
- 或者
    - 从 a0 开始向后检查，不断地删去不在 B 中的元素，则得到新的一列 a_{i0}，a_{i1}，a_{i2}，$...$，a_{in}，$...$，它与非负整数一一对应，所以 B 是可数集。

- 推论：
    - 从可数集 A 中除去一个有限子集 B 后（即 A – B）仍是一个可数集。

- 若 A 是可数集，B 是有限集，则 A ∪ B 是可数集。
- 有限个可数集的并集仍是可数集。
- 可数个互不相交的可数集的并集仍是可数集。
- 可数个可数集的并集仍是可数集。
- 有理数集 Q 是可数集。
- 如果 A 和 B 都是可数集，则 A × B 也是可数集。
- 设 A0，A1，A2，…，An（n ∈ N）均为可数集，则 A0× A1 × A2 × … × An 也是可数集。

- **四、不可数集的基数**

  讨论除可数集外的其他无限集的基数问题。

    - 任一无限集必与它的一个真子集等势。
    - 一个集合是无限集当且仅当该集合必与它的一个真子集等势。
    - 注意：

      由此可见，从有限集到无限集存在质的飞跃。

        - 有限集不能与其真子集等势。
        - 在无限的世界中，全体与部分可能等势。
    - 集合 R_1 = {x | x∈ R，0 < x < 1} 是不可数集。
        - 规定：所有的有限小数均写成以 9 为循环节的无限循环小数。例如 0.418 要写成 0.417999…。
    - **连续基数、连续统的势、连续统**
        - 若集合 A 与 (0，1) 属于同一个基数类，则 A 的基数# A = ℵ，并称“ℵ”为连续基数或连续统的势，并称集合 A 为连续统。

- **五、集合基数的比较**
    - **A 的基数不大于 B 的基数,A 的基数小于 B 的基数**
        - 若存在一个由集合 A 到 B 的内射函数，则称 A 的基数不大于 B 的基数，记为 # A ≤ # B。

- 若存在一个由集合 A 到 B 的内射函数，但不存在双射函数，则称 A 的基数小于 B 的基数，记为 # A < # B。
- 定理：
  - 设 A、B 是集合，则 # A ≤ # B 当且仅当存在 C $\subseteq$ B，使得 A ~ C。
  - 设 A、B 是集合，若 A $\subseteq$ B，则 # A ≤ # B。
  - 设 A、B 是集合，若 # A ≤ # B 且 # B ≤ # A，则 # A = # B。此定理称为伯恩斯坦定理
  - 注意：
    - ≤ 是集合的基数之间的偏序关系。
    - 证明两集合等势的有效方法：将双射函数的构造转化为两个内射函数的构造。
  - 若 A 为有限集，则 # A < $\aleph_0$ < $\aleph$。
  - 若 A 是无限集，则 $\aleph_0 \leq$ # A
    - 注意：$\aleph_0$ 是最小的无限基数，即可数集是“最小”的无限集。
  - （康托定理） 对任意的集合 A，则 # A < #(P(A))。
    - 定理说明：无论一个集合的基数多大，一定存在更大基数的集合。
    - 因此不存在最大的集合。
    - 同时由于每个无限基数都比后面的基数小，所以不存在最大的基数。