离散数学Chapter 2：关系

- **2.1 笛卡尔积与关系**
  - 一、笛卡尔积
    - 1．序偶
      - 序偶，有序对，分量，坐标
        - 由两个具有给定次序的个体 a，b 组成的序列称为序偶或有序对，记作 (a，b) 或 <a，b>，其中 a，b 常称为该序偶的第 1 个和第 2 个分量或坐标。a，b 可以相同。
      - 序偶相等，序偶不相等
        - 设 (a，b) 和 (c，d) 是两个序偶，若 a = c 与 b = d 同时成立，则称这两个序偶相等，并记作 (a，b) = (c，d)。否则，称这两个序偶不相等，记为 (a，b) ≠(c，d)。
      - 有序n元组，分量，坐标
        - 由 n 个具有给定次序的个体 a1，a2，…，an 组成的序列称为有序 n 元组，记作 (a1，a2，…，an)，其中第 i 个元素 ai常称为该有序 n 元组的第 i 个分量或坐标。
      - 有序n元组相等
        - 设 (a1，a2，…，an) 和 (b1，b2，…，bn) 是两个有序 n 元组，若 a1 = b1，a2 = b2，…，an = bn 同时成立，则称这两个有序 n 元组相等，并记作 (a1，a2，…，an) = (b1，b2，…，bn)。
    - 2．笛卡尔积
      - 笛卡尔积的定义，n阶笛卡尔积

        定义 2.5 设 A，B 为任意集合，称集合

        $$\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

        为 A 与 B 的**笛卡尔积**，也称**直积**或**叉积**，记作 $A \times B$。

        注意：

        （1）两集合的笛卡尔积仍然是一个集合。

        （2）两集合的笛卡儿积的元素为序偶，序偶的第一个分量必在第一个集合中，第二个分量必在第二个集合中。

        定义 2.6 设 A_1，A_2，…，A_n 为任意集合，称集合

        $$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

        为 A_1，A_2，…，A_n 的 **n 阶笛卡儿积**，记为 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$。特别将 $A \times A \times \ldots \times A$（$n$ 个 A）简记为 A^n。
      - 笛卡尔积的性质

视两个集合的笛卡儿积为一种运算，它有如下的性质。

- 不满足交换律 $A \times B \neq B \times A$（$A \neq B$ 且 A、B 都不是空集）
- 不满足结合律 $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$（$A$、$B$、$C$ 均非空）
- $A \times B = \Phi$ 当且仅当 $A = \Phi$ 或 $B = \Phi$。
- $A \times B \subseteq C \times D$ 当且仅当 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$。
- $A \times B = C \times D$ 当且仅当 $A = C$ 且 $B = D$。

A、B、C、D 都不是空集

- 若 $C \neq \Phi$，则 $A \subseteq B$ 当且仅当 $A \times C \subseteq B \times C$ 当且仅当 $C \times A \subseteq C \times B$。

不封闭!

- 与笛卡尔积有关的一些恒等式

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$。
- $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$。
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$。
- $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$。
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$。
- $(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$。

- 笛卡尔积的基数

由笛卡尔积的定义和排列组合知识可得如下结论。

定理 2.2 当 A，B 均是有限集时，$A \times B$ 必为有限集，且

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$$

注意：

- 当**非空集合** A 和 B 中有一个是无限集时，$A \times B$ 必为无限集。
- 定理的结论可推广到有限个有限集的情形。

二、关系的基本概念

1．关系的定义

- 二元关系，n元关系，有关系，没关系。（简称二元关系为关系）

定义 2.7 设 A，B 为任意集合，集合 $A \times B$ 的任意一个子集称为一个*由 A 到 B 的二元关系*。当 $A = B$ 时称为 *A 上的二元关系*。

定义 2.8 设 A_1，A_2，…，A_n 为任意集合，集合 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 的任意一个子集称为*由 A_1，A_2，…，A_{n-1} 到 A_n 的一个 n 元关系*。

当 $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ 时称为 *A 上的 n 元关系*。

本章以研究二元关系为主，简称二元关系为*关系*。

定义 2.9 设 R 是由集合 A 到 B 的关系，若 $(a, b) \in R$，则称 *a 与 b 有关系 R*，又记作 $a R b$。

若 $(a, b) \notin R$，则称 *a 与 b 没有关系 R*，又记作 $a R' b$。

- 二元关系的个数

由有限集 A 到有限集 B 的二元关系的个数为

$$\#(2^{A\times B}) = 2^{\#(A\times B)} = 2^{\#A\cdot\#B}$$

- 注意：

（1） a 与 b 没有关系 R，不能说明 a 与 b 没有关系，可能有其他关系。

例如 设 $R_1 = \{(a,2),(a,8),(b,2)\}$，$R_2 = \{(a,5),(b,2),(b,5)\}$ 是由集合 $A=\{a,b\}$ 到 $B=\{2,5,8\}$ 的关系，显然 $a\,R_1'\,5$ 但 $a\,R_2\,5$。

（2）数学上抽象定义的关系，有的在直观上已无法再用自然语言来描述了。

- 2．几种特殊的关系
  - 空关系，全关系，普遍关系，恒等关系

定义 2.10 对任意的集合 A 与 B，

- 称空集 Φ 为**空关系**。
- 称 $A\times B$ 为**由 A 到 B 的全关系**或**普遍关系**。
- 称 $A\times A$ 为 **A 上的全关系**或**普遍关系**。
- 常将 $A\times A$ 记作 $U_A=\{(a_i,a_j)\mid a_i,a_j\in A\}$。
- 称集合 $\{(a,a)\mid a\in A\}$ 为 **A 上的恒等关系**，记为 I_A。

- 3．关系的定义域和值域

dom for domain,ran for range

  - 定义域domR，值域ranR，前域，后域

定义 2.11 设 R 是一个由集合 A 到 B 的关系，

（1）R 中所有序偶的第一个分量构成的集合称为 R 的**定义域**，记作 dom$R$，即

$$\mathrm{dom}R=\{a\mid a\in A \text{ 且存在 } b\in B，\text{使得 } a\,R\,b\}$$

（2） R 中所有序偶的第二个分量构成的集合称为 R 的**值域**，记作 ran$R$，即

$$\mathrm{ran}R=\{b\mid b\in B \text{ 且存在 } a\in A，\text{使得 } a\,R\,b\}$$

显然有

$$\mathrm{dom}R\subseteq A，\mathrm{ran}R\subseteq B$$

此时，A 称为关系 R 的**前域**，B 称为关系 R 的**后域**。

- **2.2 关系的表示方法**
  - 一、集合表示法
    - 用表示集合的列举法或描述法来表示关系
    - 不足：
      - 不能直观地看出关系的特点和性质
      - 不便于计算机处理
  - 二、矩阵表示法
    - 关系矩阵，布尔矩阵

定义 2.12 设 A，B 都是有限集，$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，由 A 到 B 的关系 R 可用一个 $n\times m$ 的矩阵 M_R 来表示，M_R 的 (i, j) **项元素**即第 i 行第 j 列交叉处元素 r_{ij} 取值如下：

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & 若 a_i\ R\ b_j \\ 0, & 若 a_i\ R'\ b_j\end{cases} \quad i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, m$$

称矩阵 M_R 为 R 的**关系矩阵**。

关系矩阵是一个 0-1 矩阵，称为**布尔矩阵**。

- 注意：
  - 关系矩阵依赖于集合元素的排序！集合 A，B 的元素需要先规定一种次序。
- 三、关系图表示法
  - 定义：
    - 关系图由结点和边组成：
      - 用小圆圈代表集合中的元素，在图中称为结点。
      - 用从结点 a 指向结点 b 的有向单边表示序偶 (a，b)。
      - 特别当 A = B 时，用绕结点 a 且指向自身的带箭头的小圆圈表示序偶 (a，a)，其中方向任意。
  - 注意：
    - 用矩阵来表示关系，为计算机处理关系带来了极大的方便。
    - 用关系图的方式表示关系，便于关系的直观。
    - 表示 (a，a) 的单边，如例2.10的关系图中 (1，1) 等，被称为自环。
    - 在画关系图时：
      - 结点位置的排列、边的长短及形状均无关紧要。
      - 如果 A ≠ B，则需要将 A 和 B 中的元素都画出来
      - 如果 A = B，则只需画出 A 中的所有元素即可

- **2.3 关系的运算**
  - 一、关系的并、交、差、补运算
    - 定义：$R_1\cup R_2, R_1\cap R_2$，$R_1-R_2, (R_1)'$

若 R_1 和 R_2 都是由集合 A 到 B 的关系，则

$$R_1\subseteq A\times B，R_2\subseteq A\times B$$

于是

$$R_1\cup R_2，R_1\cap R_2，R_1-R_2，(R_1)'=A\times B-R_1\subseteq A\times B$$

因此 $R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$，R_1-R_2 和 $(R_1)'$ 也都是由 A 到 B 的关系。

关系是一种特殊的集合，因此可对它进行集合的所有基本运算（并、交、差、补等）而产生新的关系。

以前有关集合运算的一些结论在关系中也同样适用。

  - 二、关系的逆运算
    - 1.逆关系的定义
      - 逆关系，关系的逆运算

定义 2.13 设 A，B 是两个集合，R 是由 A 到 B 的关系，则由 B 到 A 的关系

$$\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

称为关系 R 的**逆关系**，记为 R^{-1}。

这种由关系 R 得到逆关系 R^{-1} 的运算称为**关系的逆运算**。

- 显然
  - $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{ran}(R)$，$\mathrm{ran}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$。
  - 逆关系 R^{-1} 的关系矩阵是 R 的关系矩阵的转置。
  - 逆关系 R^{-1} 的关系图是将 R 的关系图中的有向边改变方向。

- 2.关系逆运算的性质

定理 2.3 设 R_1，R_2 都是由集合 A 到 B 的关系，则下列各式成立：

（1）$(R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1)^{-1} \cup (R_2)^{-1}$。

（2）$(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1)^{-1} \cap (R_2)^{-1}$。

（3）$(R_1 - R_2)^{-1} = (R_1)^{-1} - (R_2)^{-1}$。

（4）$((R_1)')^{-1} = ((R_1)^{-1})'$。

（5）$((R_1)^{-1})^{-1} = R_1$。

（6）若 $R_1 \subseteq R_2$，则 $(R_1)^{-1} \subseteq (R_2)^{-1}$。

（7）若 $R_1 = R_2$，则 $(R_1)^{-1} = (R_2)^{-1}$。

- 给出（3）的证明：

$$(R_1 - R_2)^{-1} = (R_1)^{-1} - (R_2)^{-1}。$$

对任意的 (x, y)，

$(x, y) \in (R_1 - R_2)^{-1}$

$\Leftrightarrow (y, x) \in R_1 - R_2$

$\Leftrightarrow (y, x) \in R_1$ 但 $(y, x) \notin R_2$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (R_1)^{-1}$ 但 $(x, y) \notin (R_2)^{-1}$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (R_1)^{-1} - (R_2)^{-1}$

- 三、关系的复合运算
  - 1.复合关系的有关定义
    - 复合关系，关系的复合运算

定义 2.14 设 A，B，C 是三个集合，R_1 是由 A 到 B 的关系，R_2 是由 B 到 C 的关系，则 R_1 和 R_2 的**复合关系**，记为 $R_1 \circ R_2$（简记为 R_1R_2），是一个由 A 到 C 的关系，且

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{且存在 } b \in B, \text{使得 } a R_1 b, b R_2 c\}$$

这种由 R_1 和 R_2 求复合关系 $R_1 \circ R_2$ 的运算称为**关系的复合运算**。

- 注意：

注意：

（1）关系 R_1 与 R_2 能复合的前提是：$\mathrm{ran}R_1$ 与 $\mathrm{dom}R_2$ 是同一个集合 B 的子集。

（2）若 $\mathrm{ran}R_1 \cap \mathrm{dom}R_2 = \Phi$，则对任意的 $a \in A$ 及 $c \in C$，不存在 $b \in B$，使得 $a R_1 b$ 与 $b R_2 c$ 同时成立，因而复合关系 $R_1 \circ R_2$ 是空关系。

（3）$R_1 \circ \Phi = \Phi \circ R_2 = \Phi$。

求复合关系 $R_1 \circ R_2$ 中的序偶时，可简单地只考虑 R_1 与 R_2 中序偶。

（4）$\mathrm{dom}(R_1 \circ R_2) \subseteq \mathrm{dom}R_1 \subseteq A$，$\mathrm{ran}(R_1 \circ R_2) \subseteq \mathrm{ran}R_2 \subseteq C$。

- **一般，关系的复合运算不满足交换律。**

- R的n次幂

定义 2.15 设 R 是集合 A 上的关系，则 ***R* 的 *n* 次幂**定义为

$$R^0 = I_A,\quad R^{n+1} = R^n \circ R\ (n \in \mathbf{N})$$

定理 2.7 设 R 是集合 A 上的二元关系，则对任意的 m，$n \in \mathbf{N}$，

（1）$R^m \circ R^n = R^{m+n}$。

（2）$(R^m)^n = R^{mn}$。

48

- 2.关系复合运算的性质
  - 与恒等关系复合
    - 设 R 是由集合 A 到 B 的关系，则 $I_A \circ$ R = R $\circ$ I_B = R
    - 注意：恒等关系在关系的复合运算中不起作用
  - 结合律：
    - 设 R1 是由集合 A 到 B 的关系，R2 是由集合 B 到 C 的关系，R3 是由集合 C 到 D 的关系，则有
      (R1∘ R2) ∘ R3 = R1∘ (R2∘ R3)
  - 一般的：

一般地，若 R_1 是一由集合 A_1 到 A_2 的关系，R_2 是一由集合 A_2 到 A_3 的关系，…，R_n 是一由集合 A_n 到 A_{n+1} 的关系，则不加括号的表达式 $R_1 \circ R_2 \circ \ldots \circ R_n$ 唯一地表示一由集合 A_1 到 A_{n+1} 的关系。在计算这一关系时，可以运用结合律将其中任意两个相邻的关系先结合。

  - **分配律**

定理 2.8 设 R_1 是由集合 A 到 B 的关系，R_2 和 R_3 都是由集合 B 到 C 的关系，R_4 是由集合 C 到 D 的关系，则

（1）$R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$。

（2）$(R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4)$。

关系的复合运算对并运算具有分配律

（3）$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$。

（4）$(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$。

关系的复合运算对交运算不具有分配律

  - 子集关系（即关系的复合运算对交运算）

定理 2.8 设 R_1 是由集合 A 到 B 的关系，R_2 和 R_3 都是由集合 B 到 C 的关系，R_4 是由集合 C 到 D 的关系，则

（3）$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$。

（4）$(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$。

  - 逆关系
    - 原性质：$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$

- 推论:

推论 2.1 设 R_1，R_2，…，R_n 是集合 A 上的关系，则有

$$(R_1 \circ R_2 \circ \ldots \circ R_n)^{-1} = R_n^{-1} \circ \ldots \circ R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$$

推论 2.2 设 R 是集合 A 上的关系，则对任意正整数 n，有

$$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$$

- 3.求复合关系的方法
  - 1）根据复合关系的定义求复合关系
    - 注意：该方法的优点是直观，但是如果关系中包含的序偶太多时，容易出错。
  - 2）运用关系矩阵的运算求复合关系
    - 布尔运算
      - 布尔加法，布尔乘法

布尔加法运算 $\vee$ 定义如下：

$$0 \vee 0 = 0,\ 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$$

布尔乘法运算 $\wedge$ 定义如下：

$$1 \wedge 1 = 1,\ 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0$$

例如 $(1 \wedge 0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) = 1$。

      - 注意：

在一个布尔加运算表达式中，当且仅当至少有一个加项为1（如全1作布尔乘：$1 \wedge 1 \wedge \cdots \wedge 1$）时，该表达式等于 1，否则为 0。

在一个布尔乘运算表达式中，当且仅当至少有一个乘项为0（如全0作布尔加：$0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0$）时，该表达式等于 0，否则为 1。

    - 关系矩阵的布尔加法

定义 2.16 设 $\boldsymbol{M}_1$，$\boldsymbol{M}_2$ 是 (i, j) 项元素分别为 $r_{ij}^{(1)}$ 和 $r_{ij}^{(2)}$ 的 $m \times n$ 关系矩阵，则 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 的布尔加法，记为 $\boldsymbol{M}_1 \vee \boldsymbol{M}_2$，是一个 $m \times n$ 矩阵，其 (i, j) 项元素为

$$r_{ij} = r_{ij}^{(1)} \vee r_{ij}^{(2)},\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$$

关系矩阵的布尔加法的运算法则与一般矩阵的加法是相同的，只是其中数的加法运算为布尔加。

显然，布尔矩阵 $\boldsymbol{M}$ 满足 $\boldsymbol{M} \vee \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}$。

    - 关系矩阵的布尔乘法

定义 2.17 设 $\boldsymbol{M}_1$ 是一个 (i, k) 项元素为 $r_{ik}^{(1)}$ 的 $l \times m$ 关系矩阵，$\boldsymbol{M}_2$ 是一个 (k, j) 项元素为 $r_{kj}^{(2)}$ 的 $m \times n$ 关系矩阵，则 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 的布尔乘法，记为 $\boldsymbol{M}_1 \circ \boldsymbol{M}_2$，是一个 $l \times n$ 矩阵，其 (i, j) 项元素为

$$r_{ij} = \bigvee_{k=1}^{m} (r_{ik}^{(1)} \wedge r_{kj}^{(2)}),\ i = 1, 2, \ldots, l;\ j = 1, 2, \ldots, n$$

关系矩阵的布尔乘法的运算法则与一般矩阵的乘法是相同的，只是其中数的加法运算和乘法运算应改为布尔加和布尔乘。

    - 复合关系的关系矩阵
      - 布尔乘法

定理 2.9 设 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$，$C=\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ 均是有限集，R_1 是由 A 到 B 的关系，R_2 是由 B 到 C 的关系，它们的关系矩阵分别为$\boldsymbol{M}_{R_1}$和$\boldsymbol{M}_{R_2}$，则复合关系 $R_1\circ R_2$ 的关系矩阵$\boldsymbol{M}_{R_1\circ R_2}=\boldsymbol{M}_{R_1}\circ\boldsymbol{M}_{R_2}$。

推论 2.3 设 A_1，A_2，…，A_{n+1} 是有限集合，R_1，R_2，…，R_n 分别是由 A_1 到 A_2，由 A_2 到 A_3，…，由 A_n 到 A_{n+1} 的关系，它们的关系矩阵分别为$\boldsymbol{M}_{R_1}$，$\boldsymbol{M}_{R_2}$，⋯，$\boldsymbol{M}_{R_n}$，则有

$$\boldsymbol{M}_{R_1\circ R_2\circ\cdots\circ R_n}=\boldsymbol{M}_{R_1}\circ\boldsymbol{M}_{R_2}\circ\cdots\circ\boldsymbol{M}_{R_n}$$

推论 2.4 设 R 是有限集合 A 上的关系，$\boldsymbol{M}$ 为其关系矩阵，则有

$$\boldsymbol{M}_{R^n}=\boldsymbol{M}^n$$

- 3）利用关系图求复合关系 R^n
  - 方法

设 R 是有限集合 A 上的关系，则复合关系 R^n 也是 A 上的关系。

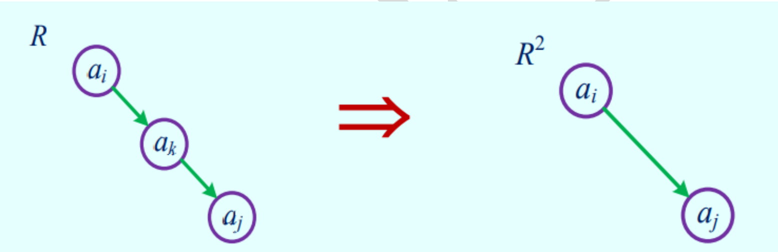
在 R^n 的关系图中，有边由结点 a_i 指向 a_j ⇔

在 R 的关系图中，存在 n–1 个结点a_{k_1}，a_{k_2}，⋯，$a_{k_{n-1}}$，使得有边由 a_i 指向a_{k_1}，由a_{k_1}指向a_{k_2}，…，由$a_{k_{n-1}}$指向 a_j。

对于关系图中结点 a_i 和 a_j，若存在 n–1 个结点a_{k_1}，a_{k_2}，⋯，$a_{k_{n-1}}$，使得$a_i\ R\ a_{k_1}$，$a_{k_1}\ R\ a_{k_2}$，…，$a_{k_{n-1}}\ R\ a_j$时，则称从结点 a_i 到 a_j 有一条**长为 n 的路**（$n\geq 0$）。

根据 R 的关系图构造出 R^n 的关系图：

对于 R 的关系图中的每一结点 a_i，找出从 a_i 经过长为 n 的路能够到达的所有结点，这些结点在 R^n 的关系图中，边必须由 a_i 指向它们。



2.4 关系的性质

一、关系性质的定义

自反、非自反、反自反

若对于所有的 $x\in A$，均有 $x\ R\ x$，则称 R 在 A 上是**自反的**。

否则 R 是**非自反的**。

若对于所有的 $x\in A$，均有 $x\ R'\ x$，则称 R 在 A 上是**反自反的**。

自反：所有；反自反对于任意（a,b）一定没有（b,a）；非自反不全都有（b,a）

- 例子：

【例 2.18】设集合 $A=\{0, 1, 2, 3\}$，判断下列关系是否为自反关系或反自反关系。

$R_1=\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$　自反

$R_2=\{(0, 0), (1, 2), (3, 3), (2, 2), (1, 1), (2, 3)\}$　自反

$R_3=\{(2, 1), (0, 0), (3, 3)\}$　非自反、非反自反

$R_4=\{(0, 1), (2, 3), (1, 2)\}$　反自反

- 注意:
  - （1）集合 A 上的恒等关系是自反关系，但自反关系却不一定是恒等关系。
  - （2）反自反的关系一定是非自反的关系。反之不一定。
- 对称、非对称、反对称

对于所有的 $x, y \in A$，若每当有 $x\,R\,y$ 就必有 $y\,R\,x$，则称 R 在 A 上是**对称的**。否则 R 是**非对称的**。

对于所有的 $x, y \in A$，若每当有 $x\,R\,y$ 和 $y\,R\,x$ 就必有 $x = y$，则称 R 在 A 上是**反对称的**。

反对称：如果有两个关系，则相等

对称：如果有一个关系，则一定有另外一个关系；

- 例子:

【例 2.19】设集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$，判断下列关系是否为对称关系或反对称关系。

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ 对称，非反对称

$R_2 = \{(1, 2), (1, 1), (0, 2), (3, 1)\}$ 非对称，反对称

$R_3 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ 非对称，非反对称

$R_4 = \{(0, 0), (2, 2), (1, 1)\}$ 对称，反对称

- 注意:
  - （1）若 R 是集合 A 上的反对称关系，则由定义知，在 R中 (x，y) 与 (y，x) 至多有一个出现，其中 x≠y。

【例 2.19】设集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$，判断下列关系是否为对称关系或反对称关系。

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ 对称，非反对称

$R_2 = \{(1, 2), (1, 1), (0, 2), (3, 1)\}$ 非对称，反对称

$R_3 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ 非对称，非反对称

$R_4 = \{(0, 0), (2, 2), (1, 1)\}$ 对称，反对称

  - （2）对称关系与反对称关系没有联系。
  - （3）集合 A 上的恒等关系既是对称的也是反对称的。
- 可传递、不可传递

对于所有的 $x, y, z \in A$，若每当有 $x\,R\,y$ 和 $y\,R\,z$ 就必有 $x\,R\,z$，则称 R 在 A 上是**可传递的**。否则 R 是**不可传递的**。

- 注意:
  - A 上的恒等关系是可传递关系。

- 二、关系性质的判断
  - 1．集合运算的方法

(1) R 在 A 上 自反 当且仅当 $I_A \subseteq R$。

(2) R 在 A 上 反自反 当且仅当 $R \cap I_A = \Phi$。

(3) R 在 A 上 对称 当且仅当 $R = R^{-1}$。

(4) R 在 A 上 反对称 当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。

(5) R 在 A 上 传递 当且仅当 $R \circ R \subseteq R$。

- 2．关系矩阵的方法

  反之也成立！

  - 设 R 为有限集合 A 上的关系，M 为 R 的关系矩阵。
    - 若 R 是自反的，则 M 的主对角线上所有元素均为 1。
    - 若 R 是反自反的，则 M 的主对角线上所有元素均为 0.
    - 若 R 是对称的，则 M 为对称矩阵。
    - 若 R 是反对称的，则在 M 中，关于主对角线对称的元素不同时为 1，即 i ≠ j 时，r_{ij} 与 r_{ji} 这两个数中至多一个是 1，但允许两个均为 0，亦即 $r_{ij} = r_{ji} = 0$。
    - 若 R 是可传递的，则在 M^2 中 1 所在的位置，M 中相应的位置上也是 1（因为 R∘R ⊆R）。
- 3．关系图的方法
  - 设 R 为有限集合 A 上的关系，G 为 R 的关系图。
    - 若 R 是自反的，则 G 中每一结点引出一个指向自身的单边环。
    - 若 R 是反自反的，则 G 中每一结点均没有单边环。
    - 若 R 是对称的，则 G 中，若两结点之间存在有边，则必存在两条方向相反的边。
    - 若 R 是反对称的，则 G 中任意两个不同的结点间至多只有一条边。
    - 若 R 是可传递的，则 G 中，若每当有边由结点 ai 指向结点ak，且又有边由结点 ak 指向结点 aj，则必有一条边由结点 ai 指向结点 aj。
- 4．判别法小结
  - 关系性质的集合、关系矩阵和关系图判别法如表所示。

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表示	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \Phi$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是 1	主对角线元素全是 0	对称矩阵	当 $i \neq j$ 时，r_{ij} 与 r_{ji} 中至多有一个为 1，即 $r_{ij} \cdot r_{ji} = 0$	对 M^2 中 1 所在的位置，M 中相应的位置都是 1
关系图	每个结点都有单边环	所有结点都没有单边环	如果两个结点之间有边，则一定是一对方向相反的边（无单边）	如果两个结点之间有边，则一定是一条有向边（无双向边）	若有由结点 a_i 指向结点 a_k 的边，及由结点 a_k 指向结点 a_j 的边，则有一条由结点 a_i 指向结点 a_j 的边

  - 关系的性质与关系运算之间的联系

设 R_1 和 R_2 是 A 上具有共同性质的两个关系，则

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

- 5．关系的个数

3．设集合 $A=\{1，2，3\}$，则在集合 A 上可定义多少个

（1）自反的二元关系？

（2）反自反的二元关系？

（3）对称的二元关系？

（4）反对称的二元关系？

（5）既对称又反对称的二元关系？

【分析】考虑自反、反自反、对称、反对称二元关系的关系矩阵的特点。

- (1) (2) $2^{n\times n-n}=2^{n^2-n}$
- (3) $2^{\sum_{i=1}^{n-1} i}\times 2^n=2^{\frac{n^2+n}{2}}$
- (4) $3^{\sum_{i=1}^{n-1} i}\times 2^n=2^n\times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$
- (5) 2^n

2.5 关系的闭包

一、关系闭包的定义

- 闭包，闭包运算
  - 对集合 A 上给定的关系 R 和一种性质 P，包含 R 且满足性质 P 的最小关系称为 R 对于 P 的闭包，记作 P(R)。
  - 构造闭包的运算称为闭包运算。
- 自反闭包

  r for reflexive

  - $r(R)=R\cup I_A$为 R 的自反闭包。
    - 性质

设 R 是集合 A 上的关系，则 $\mathrm{r}(R)=R\cup I_A$ 具有以下性质：

（1）$R\subseteq \mathrm{r}(R)$。　　　　（2）$\mathrm{r}(R)$ 是自反的。

（3）对于 A 上任何关系 Q，若 Q 自反且 $R\subseteq Q$，则 $\mathrm{r}(R)\subseteq Q$。

- 对称闭包

  s for Symmetrical

  - $s(R)=R\cup R^{-1}$为 R 的对称闭包。
    - 性质

设 R 是集合 A 上的关系，则 $s(R) = R \cup R^{-1}$ 具有以下性质：

（1）$R \subseteq s(R)$。（2）$s(R)$ 是对称的。

（3）对于 A 上任何关系 Q，若 Q 对称且 $R \subseteq Q$，则 $s(R) \subseteq Q$。

- 传递闭包

  t for Transitive

  - $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$为 R 的传递闭包。
    - 性质

      设 R 是集合 A 上的关系，则 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$ 具有以下性质：

      （1）$R \subseteq t(R)$。（2）$t(R)$ 是可传递的。

      （3）对于 A 上任何关系 Q，若 Q 可传递且 $R \subseteq Q$，则 $t(R) \subseteq Q$。

    - 定理：

      定理 2.12 设 A 为非空有限集合，$\#A = n$，R 是 A 上的关系，则存在正整数 $k \le n$，使得 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k$。

      【证明】对任意的 a，$b \in A$，若 $a\ t(R)\ b$ 成立，则存在正整数 p 使得 $a R^p b$，进而存在序列 $x_0 = a$，x_1，x_2，…，x_{p-1}，$x_p = b$，使得对 $0 \le i \le p-1$ 有 $x_i R x_{i+1}$。

      设满足上述条件的最小 p（记为 k）大于 n，则由 x_0，x_1，…，$x_p \in A$ 及假设 $\#A = n$ 知，在上述序列中必有 $0 \le s < t \le k$，使得 $x_s = x_t$，因此序列可简缩为

      $$\underbrace{x_0Rx_1,\ x_1Rx_2,\ \ldots,\ x_{s-1}Rx_s}_{s}\ \underbrace{x_tRx_{t+1},\ \ldots,\ x_{k-1}Rx_k}_{k-t}$$

      这表明存在正整数 $q = s + k - t$，使得 $a R^q b$，而 $q = k - (t - s) < k$，此与 k（最小的 p）的假设矛盾，故 $k > n$ 不成立。

      从而命题得证。

      - 例题：

        【例 2.25】设集合 $A = \{a, b, c, d\}$，A 上的关系

        $$R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d)\},$$

        不是可传递的，计算得

        $$R^2 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d)\},$$
        $$R^3 = \{(a, b), (a, d), (b, a), (b, c)\},$$
        $$R^4 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d)\},$$

        注意到 $R^4 = R^2$，则 $R^5 = R^3$，$R^6 = R^4 = R^2$，$R^7 = R^5 = R^3$，…

        故

        $$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{3} R^i$$

        $= \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, d)\}$

        验证得知，$t(R)$ 是可传递的。

- 二、关系闭包的性质
  - R 是自反的 当且仅当 r(R) = R。
  - R 是对称的 当且仅当 s(R) = R。
  - R 是可传递的 当且仅当 t(R) = R。
  - 包含在闭包中的传递性

- 设 R1 和 R2 是非空集合 A 上的关系，且 R1 ⊆ R2，则
  - （1） r(R1) ⊆ r(R2)；
  - （2） s(R1)⊆s(R2)；
  - （3） t(R1)⊆t(R2)。
- 对于 A 上任何关系 Q，若 Q 可传递且R ⊆ Q，则 t(R) ⊆ Q。
- 并运算在闭包中的运算性质
  - 设 R1 和 R2 是非空集合 A 上的关系，则

    （1） $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$。

    （2） $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$。

    （3） $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$。
- R的SRT与闭包的SRT
  - 设 R 是非空集合 A 上的关系，则
    - （1）若 R 是自反的，则 r(R)，s(R) 和 t(R) 是自反的。
    - （2）若 R 是对称的，则 r(R)，s(R) 和 t(R) 是对称的。
    - （3）若 R 是可传递的，则 r(R) 和 t(R) 是可传递的。
  - 定理指出，若 R 是可传递的，则 s(R) 不一定是可传递的。
    - 例如 R = {(a，b)} 是集合 A = {a，b} 上的可传递关系，但 s(R) = {(a，b)，(b，a)} 不是 A 上的可传递关系。
- 自反对称闭包、自反传递闭包、自反对称传递闭包。
  - 例如 s(r(R))，简记为 sr(R)，因该关系既有自反性又有对称性，故称 sr(R) 为 R 的自反对称闭包。类似地，称 tr(R)（也记作 R*）为 R 的自反传递闭包，称 ts(R) 为R 的对称传递闭包，称 tsr(R) 为 R 的自反对称传递闭包。
  - 性质：

    那么，在求解这些闭包时与求解的次序有关系吗？ 对称 √ 可传递 ×

    定理 2.17 设 R 是非空集合 A 上的关系，则

    （1）$rs(R) = sr(R)$；（2）$rt(R) = tr(R)$；（3）$st(R) \subseteq ts(R)$。

    一般 $st(R) \neq ts(R)$。如 $R = \{(1，2)\}$ 是集合 $A = \{1，2\}$ 上的关系，则 $st(R) = \{(1，2)，(2，1)\} \neq ts(R) = \{(1，2)，(2，1)，(1，1)，(2，2)\}$。
- 三、关系闭包的求法
  - 1．利用关系矩阵求关系的闭包

【思考 2.3】设 A、B 均是有限集，R_1、R_2 都是由 A 到 B 的关系，它们的关系矩阵分别为$\boldsymbol{M}_{R_1}$和$\boldsymbol{M}_{R_2}$，求下列关系的关系矩阵：

$$R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2,\ R_1',\ R_1 - R_2,\ R_1^{-1}$$

【答】设$\boldsymbol{M}_{R_1} = (r_{ij}^{(1)})$，$\boldsymbol{M}_{R_2} = (r_{ij}^{(2)})$，则

（1）$R_1 \cup R_2$ 的关系矩阵为$(r_{ij}^{(1)} \vee r_{ij}^{(2)})$

（2）$R_1 \cap R_2$ 的关系矩阵为$(r_{ij}^{(1)} \wedge r_{ij}^{(2)})$

（3）$(R_1)'$ 的关系矩阵为$(1 - r_{ij}^{(1)})$

（4）$R_1 - R_2 = R_1 \cap (R_2)'$ 的关系矩阵为$(r_{ij}^{(1)} \wedge (1 - r_{ij}^{(2)}))$

（5）$(R_1)^{-1}$ 的关系矩阵为$(r_{ji}^{(1)})$即$(\boldsymbol{M}_{R_1})^{\mathrm{T}}$

- 2．利用关系图求关系的闭包
  - 给定关系 R，分别记 R，r(R)，s(R)，t(R) 的关系图为 G，Gr，Gs和 Gt，则 Gr，Gs，Gt 的结点集与 G 的结点集相等。除了G 的边以外，以下述方法添加新的边。
    - 考察 G 的每个结点：如果没有单边环就加上一个单边环。最终得到的是 Gr。
    - 考察 G 的每一条边：若有一条由结点 ai 到 aj 的单向边，i ≠ j，则在 G 中加一条由结点 aj 到 ai 的反方向边。最终得到的是 Gs。
    - 考察 G 的每个结点 ai：找出从 ai 出发的所有 2 步、3 步、…、n 步长的路径（n 为图 G 的结点数），设这些路径的所有终点为$aj1$，$aj2$，⋯，ajk。如果没有从结点 ai 到ajl（l = 1，2，…，k）的边，就加上这条边。最终得到的是 Gt
  - 3．利用Warshall算法求关系的传递闭包

Warshall 算法是 Warshall 于 1962 年提出的，这种算法也便于计算机实现。

设 n 个元素的有限集合上关系 R 的关系矩阵为 $\boldsymbol{M}$，用 $A[i，j]$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $(i，j)$ 项元素。

（1）置新矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}$；

（2）$j = 1$；

（3）对所有的 i，如果 $A[i，j] = 1$，则对 $k = 1，2，…，n$，作布尔加法 $A[i，k] = A[i，k] \vee A[j，k]$，即将第 j 行加到第 i 行上去；

（4）j 加 1；

（5）如果 $j \le n$，则转到步骤（3），否则停止。

所得矩阵即为关系 R 的传递闭包 t(R) 的关系矩阵。

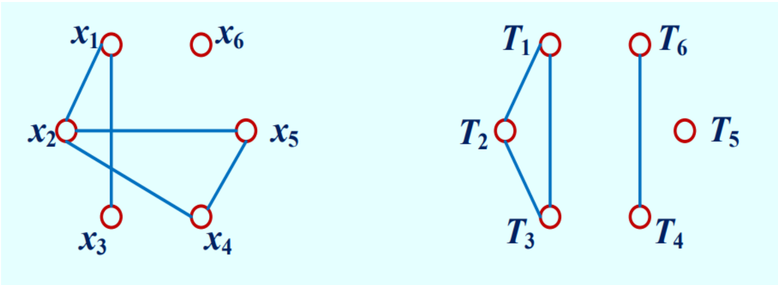
- **2.6 等价关系**
  - 一、等价关系的基本概念
    - 1．等价关系的定义
      - 等价关系
        - 集合 A 上的关系 R，如果它是自反的、对称的、可传递的，则称 R 是 A 上的等价关系。
        - 显然：

- （1）有限集合 A 上等价关系 R 的关系矩阵 M 是主对角线上的元素全为 1 的对称阵，且 M^2 中为 1 的位置 M 也为 1。
- （2）有限集合 A 上等价关系 R 的关系图 G 中，
  - 每个结点都有自环；
  - 若有由结点 ai 指向结点 ak 的有向边，且有由结点 ak 指向结点 aj 的有向边，则一定有由结点 ai 指向结点 aj 的有向边。
  - 任意两个不同结点之间要么没有有向边，要么有方向相反的两条有向边；
- 2．元素 a 与 b 等价
  - a等价于 b,称 a 与 b 是等价的
    - 设 R 是集合 A 上的等价关系，若 a R b 成立，则称 a等价于 b。
    - 显然，如果 a 等价于 b，则 b 也等价于 a（因 R 是对称的）。
    - 故 a 等价于 b 也简称 a 与 b 是等价的（在 R 下），记作 a ~ b
- 3．等价类
  - 等价类、代表元、生成元
    - 设 R 是集合 A 上的等价关系，则 A 中等价于元素 a 的所有元素组成的集合称为 a 生成的等价类，记为 $[a]_R$
    - 即$[a]_R$ = {b | b ∈ A 且 a R b}
    - 称 a 为 $[a]_R$ 的代表元或生成元。
    - 不同的元素可能生成相同的等价类。
- 二、等价类的性质
  - （1）对任意的 a ∈ A，$[a]_R \neq \phi$
  - （2）对任意的 a，b ∈ A，若 a R b，则$[a]_R = [b]_R$
  - （3）对任意的 a，b ∈ A，若 a R' b，则 $[a]_R \cap [b]_R = \phi$。
  - 结论
    - 同一个等价类中元素均相互等价。
    - 不同等价类中的元素互不等价。
- 三、等价关系与分划
  - 设 R 是集合 A 上的一个等价关系，则集合 A 中所有元素产生的等价类的集合 {$[a]_R | a \in A$}是 A 的一个分划。
  - 由 R 导出的等价分划,平凡分划
    - 这种由等价关系 R 的等价类所形成的 A 的分划（唯一的）称为 A 上由 R 导出的等价分划，记作Π_R^A
    - 对于任意集合 A，由恒等关系 I_A 导出的等价分划是 A 的“最细”的分划，由普遍关系 U_A 导出的等价分划是 A 的“最粗”的分划，合称 A 的平凡分划。
    - 由集合 A 和 A 上的等价关系 R 可以构造一个新的集合——商集。
  - 商集，秩

- 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集，记做 A / R，即A / R = {$[x]_R | x \in A$}
- A / R 的基数（A 在 R 下的不同等价类的个数）称为 R 的秩。
- 定理：
  - 设 R1，R2 是集合 A 上的等价关系，则 R1 = R2 的充分必要条件是 A/R1 = A/R2。
  - 设 Π = {A1，A2，...，Am} 是集合 A 的一个分划，则存在 A 上的一个等价关系 R，使得 Π 是 A 上由 R 导出的等价分划。
- 四、等价关系的其他性质
  - 设 R1，R2 是集合 A 上的等价关系，则 R1 ∩ R2 也是 A 上的等价关系。
  - 设 R 是集合 A 上的等价关系，则对任意的正整数 n 有
    - $R^n = R$
    - $(R^{-1})^n = R$
- **2.7 相容关系**
  - 一、相容关系的基本概念
    - 1．相容关系的定义
      - 相容关系
        - 集合 A 上的关系 R，如果它是自反的、对称的，则称R 是 A 上的相容关系。
        - 显然：
          - （1）有限集合 A 上相容关系 R 的关系矩阵 M 是主对角线上的元素全为 1 的对称阵。
          - （2）有限集合 A 上相容关系 R 的关系图 G 中
            - 每个结点都有自环；
            - 任意两个不同结点之间要么没有有向边，要么有方向相反的两条有向边。
          - （3）等价关系是相容关系，但相容关系不一定是等价关系。
    - 2．最大相容类
      - 相容类,最大相容类
        - 设 R 是有限集 A 上的相容关系，C ⊆ A，C ≠ Φ，如果
          - ∀a，b ∈ C，均有 a R b（称 C 为相容关系 R 的一个相容类），
          - 不存在任何相容类 D，使 C ⊂ D（或 ∀x ∈ A – C，∃c ∈ C，使得 x R' c），则称 C 是相容关系 R 的最大相容类，记为 C_R
            - 即：不能真包含在任何其它相容类中的相容类称作最大相容类。
          - 注意：
            - 若 C_R 最大相容类，则
              - （1）它是 A 的一个非空子集。

- (2) 对任意的 x ∈ C_R，x 必与 C_R 中的所有元素有相容关系。
- (3) 在 $A - C_R$ 中没有元素与 C_R 中的所有元素有相容关系。

- 3．最大相容类的关系简图求法
  - 关系简图
    - 由于相容关系的关系图中每个结点都有一个自环，且每两个结点之间若有边，则一定有两条方向相反的边，因此，为了简化图形，约定相容关系的关系图中，不画自环，用单线（无向）替代来回线，并称其为相容关系的关系简图。
    - 例：

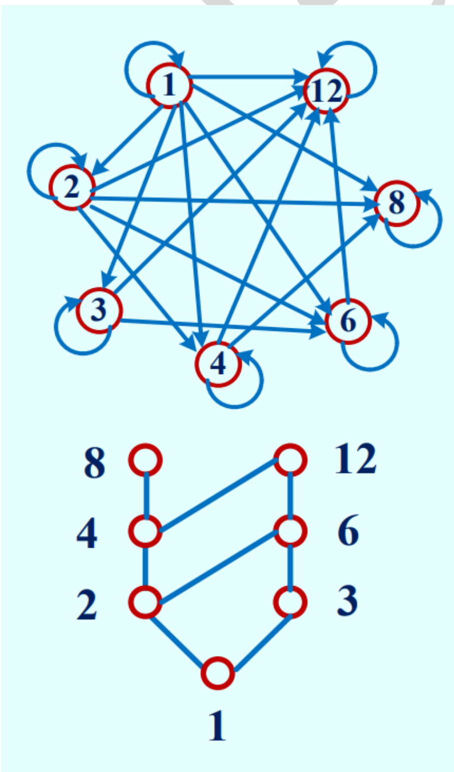


      - 最大相容类是 {x1，x2}，{x1，x3}，{x2，x4，x5}，{x6}。{x1，x2，x3}，{x4，x5} 等都不是最大相容类。
      - 最大相容类是 {T1，T2，T3}，{T4，T6}，{T5}
    - 在相容关系的关系简图中，定义每个结点都与其它结点相连接的多边形为完全多边形。
      - 关系简图中每一最大完全多边形的结点集合就是一个最大相容类。
      - 对于关系简图中只有一个孤立结点以及不是完全多边形的两个结点的连线的情况，也容易知道它们各自对应一个最大相容类。

- 二、相容关系与覆盖
  - 设 R 是有限集合 A 上的一个相容关系，# A = n，则对任意的 a ∈ A，必存在一个最大相容类 C，使得 a ∈ C。
  - 设 R 是有限集合 A 上的一个相容关系，则 R 的所有最大相容类的集合是 A 的一个覆盖。
  - 集合 A 上相容关系 R 的最大相容类所构成的 A 的覆盖常称为 A的完全覆盖，记作 $C_R(A)$。
  - 设 S = {A1，A2，…，An} 是 A 的一个覆盖，根据 S 定义的关系 R = (A1×A1) ∪ (A2×A2) ∪ … ∪ (An×An) 是 A 上的相容关系
    - 注意：
      - 对于集合，给定一个相容关系必可对应一个覆盖，给定一个覆盖也可确定一个相容关系，但二者之间不存在一对一的关系
      - 任一覆盖可以确定一个相容关系，但可以有多个覆盖对应一个相容关系

- **2.8 偏序关系**

- 一、偏序关系的基本概念
  - 偏序关系，偏序
    - 集合 A 上的关系 R，如果它是自反的、反对称的、可传递的，则称 R 是 A 上的偏序关系，简称偏序
  - 偏序结构，偏序集
    - 集合 A 与 A 上的偏序关系 R 一起称为偏序结构或偏序集。记为<A;R>
  - 例如:
    - 实数集 R 上的“≤”关系显然是一个偏序关系。全集合 U 的幂集 2^U 上的“⊆”关系也是一个偏序关系
  - 注意:
    - 对于一个集合上的偏序关系 R，常用记号“$\preceq$”来表示。当 a ≼ b 时，称 a 先于等于 b，或 a 小于等于 b。
    - 一个偏序的逆也是一个偏序，常用“≽”来表示。
- 二、偏序关系的次序图
  - 次序图,哈斯图
    - 在研究有限集 A 上偏序关系时也可根据其特点简化其关系图的表示。目前习惯用次序图或哈斯图表示，其作图规则如下
      - 去掉自环；
      - 用无向单边表示两元素之间有关系，若 a ≼ b 时，则结点 a 位于结点 b 的下方（一律由下向上，下小上大，因而不应出现水平画置的边）；
      - 去掉传递性的第三边（因而不应出现三角形）
      - 例



- 三、偏序集的特殊元素

- 极大元，极小元，最大元，最小元
  - 设$<A;\preceq>$为偏序集，B 为 A 的非空子集，b ∈ B，
    - （1）如果 B 中没有任何元素 x 满足 x ≠ b 及 b ≼ x，则称 b 为 B 的极大元。
    - （2）如果 B 中没有任何元素 x 满足 x ≠ b 及 x ≼ b，则称 b 为 B 的极小元。
    - （3）如果对任意 x ∈ B 都有 x ≼ b，则称 b 为 B 的最大元。
    - （4）如果对任意 x ∈ B 都有 b ≼ x，则称 b 为 B 的最小元
  - 注意：
    - （1）如果 B 的极大元，极小元，最大元，最小元存在，则一定在 B 中。
    - （2）极大元与最大元，极小元与最小元是不一样的。
      - ① b 是 B 的极大元当且仅当 B 中没有比 b 大的元素。
      - ② b 是 B 的最大元当且仅当 B 中所有其它元素都比 b 小。
      - ③ b 是 B 的极小元当且仅当 B 中没有比 b 小的元素。
      - ④ b 是 B 的最小元当且仅当 B 中所有其它元素都比 b 大
  - 定理：
    - 设$<A;\preceq>$为偏序集，B 为 A 的非空子集
      - （1）若 b 为 B 的最大元（最小元），则 b 为 B 的极大元（极小元）。
      - （2）若 B 有最大元（最小元），则 B 的最大元（最小元）唯一。
      - （3）若 B 为有限集，则 B 的极大元、极小元恒存在。
      - 对有限集而言，最大元、最小元未必存在，极大元、极小元虽必存在，但未必唯一
- 四、全序和良序
  - 1．全序
    - 可比的，可排序的，不可比的，不可排序的，全序，线序
      - 设≼是集合A上的一个偏序关系，a，b∈A，若有a≼b或b≼a，则称元素a和b是可比的或可排序的，否则是不可比的，或不可排序的。
      - 若对任意的a，b∈A，a 与b都是可比的，则称≼为A上的一个全序。
      - 全序的次序图仅由一条垂直边上结点的序列组成，故又称线序，即任意两个元素均存在大小关系。
  - 2.良序
    - 设≼是集合A上的一个偏序，若对于A 的每一个非空子集S都有最小元，则称它为A上的一个良序。
    - **注意：**集合A上的
      - 全序或良序一定是偏序，但偏序却不一定是全序或良序。
      - 一个偏序若是良序，则一定是全序。（定理2.29）

- 全序不一定是良序。但有限集上的全序一定是良序。（定理2.30）