Zur Berechnung der Matrizen beim Wasserstoffatom

Von W. Gordon

Für die Matrixkomponenten der Koordinaten x, y, z sind von P. Epstein[1]) für das Wasserstoffatom bei Separation in Polar- und parabolischen Koordinaten (Zeeman- und Stark-effekt) allgemeine Formeln aufgestellt worden, die im folgenden auf einfache Weise (auch bei Berücksichtigung des kontinuierlichen Spektrums) abgeleitet werden sollen.

§ 1. Die Eigenfunktionen

Sie enthalten die Funktion

$$w = e^{-\frac{k\xi}{2}} \xi^p F(-n, \gamma, k\xi), \tag{1}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} F(\alpha, \gamma, x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\gamma_\nu \nu!}; \\ \alpha_\nu &= \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1), \qquad \alpha_0 = 1, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

das aus der hypergeometrischen Funktion

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha_\nu \beta_\nu x^\nu}{\gamma_\nu \nu!}, \qquad |x| < 1 \tag{2'}$$

vermöge $x \rightarrow \frac{x}{\beta}$ und $\lim \beta \rightarrow \infty$ hervorgeht. (2) genügt daher der entarteten hypergeometrischen Differentialgleichung

$$x\frac{d^2 F}{d x^2} + (\gamma - x)\frac{d F}{d x} - \alpha F = 0 \tag{3}$$

---

1) P. Epstein, Proc. Nat. Acad. 12. S. 629. 1926; 15. S. 405. 1929; Phys. Rev. 28. S. 695. 1926.

und w somit der Gleichung

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} & \xi \frac{d^2 w}{d\xi^2} + (\gamma - 2p)\frac{dw}{d\xi} \\ & \qquad + \left(-\frac{k^2 \xi}{4} - \frac{p}{\xi}(\gamma - p - 1) + \beta\right) w = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(3'') \qquad \beta = k\left(\frac{\gamma}{2} + n\right).$$

Vermöge des Eulerschen Integrals

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{1}{\mathfrak{h}} \int\limits_{(10)} s^{a-1}(1-s)^{b-1}\,ds,$$

wo stets $\Re b > 0$, während für $\Re a > 0$, $\mathfrak{h} = 1$ zu setzen und geradlinig von 0 bis 1 zu integrieren ist, für $\Re a < 0$, $\mathfrak{h} = e^{2\pi i a} - 1$ und die Integration von 1 mit $\arg s = 0$ beginnend um $s = 0$ positiv herum zu 1 zurückkehrt ($\arg 1 - s = 0$ für $s = 0$), erhält man mit $a = \alpha + \nu$, $b = \gamma - \alpha$ für

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\nu)}{\Gamma(\gamma+\nu)} \binom{-\beta}{\nu} (-x)^{\nu}$$

die Integraldarstellung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\mathfrak{h}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \int\limits_{(10)} s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-xs)^{-\beta}\,ds$$

$\mathfrak{h} = 1$ oder $\mathfrak{h} = e^{2\pi i \alpha} - 1$, die die Reihe für $|x| > 1$ fortsetzt.

Mit $s = \frac{h}{1+h}$ wird

$$(4) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\mathfrak{h}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \int\limits_{(0\infty)} \frac{\big(1 + (1-x)h\big)^{-\beta} h^{\alpha-1}}{(1+h)^{\gamma-\beta}}\,dh$$

und daraus

$$(4') \quad F(\alpha, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\mathfrak{h}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \int\limits_{(0\infty)} \frac{e^{\frac{xh}{1+h}} h^{\alpha-1}}{(1+h)^{\gamma}}\,dh.$$

Die Integration geht für $\Re \alpha > 0$ mit $\mathfrak{h} = 1$ geradlinig von 0 nach ∞ und für $\Re \alpha < 0$ mit $\mathfrak{h} = e^{2\pi i \alpha} - 1$

$$\left(\text{so daß } 1 \mid \mathfrak{h}\,\Gamma(\alpha) = e^{-\pi i \alpha}\,\Gamma(1-\alpha) \mid 2\pi i\right)$$

von ∞ positiv um 0 herum nach ∞ zurück, derart, daß $\arg h = \pi$ auf der negativen reellen Achse. In dem wichtigen

Falle $\alpha = -n$, n positiv ganz oder Null, reduzieren sich die beiden F auf Polynome und die Integrale auf eine Umkreisung des Nullpunkts. Aus (4) und (4') resultiert die Darstellung dieser Polynome durch erzeugende Funktionen ($-h$ statt h gesetzt)

$$\frac{(1-(1-x)h)^{-\beta}}{(1-h)^{\gamma-\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \gamma_n}{n!} F(-n, \beta, \gamma, x).$$

$$\frac{e^{-\frac{xh}{1-h}}}{(1-h)^{\gamma}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \gamma_n}{n!} F(-n, \gamma, x).$$

Das Verhalten von $F(\alpha, \gamma, x)$ im Unendlichen ergibt sich, wenn man zunächst unter der Voraussetzung $\Re\,\alpha > 0$ das Integral (4'), das dann von 0 bis ∞ zu nehmen ist, in zwei Integrale zerlegt: von 0 bis -1 und von -1 bis ∞, wo der Weg mit $\Re\,\frac{xh}{1+h} < 0$ in $h = -1$ ein- bzw. ausläuft. Um die beiden Teile eindeutig zu bestimmen, nehmen wir $|\arg x|$ und $|\arg -x| < \pi$ und setzen für $h = -1$ $\arg h = \pi$ oder $-\pi$, je nachdem $0 < \arg x < \pi$ oder $-\pi < \arg x < 0$, d. h. je nachdem x in der oberen oder unteren Halbebene liegt. $F(\alpha, \gamma, x)$ wird dann zerlegt in

$$F = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \left(\int_0^{-1} + \int_{-1}^{\infty}\right) \frac{e^{\frac{xh}{1+h}} h^{\alpha-1}}{(1+h)^{\gamma}}\, dh$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \left\{(-x)^{-\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{\alpha-1} \left(1 + \frac{\tau}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1} dx \right.$$

$$\left. + x^{\alpha-\gamma} e^{x} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{\gamma-\alpha-1} \left(1 - \frac{\tau}{x}\right)^{\alpha-1} d\tau \right\},$$

wo im Integral $\int_0^{-1}$

$$\frac{xh}{1+h} = -\tau \qquad (0 < \tau < \infty)$$

substituiert wurde, was in der h-Ebene einem Kreisbogen von 0 bis -1 entspricht, der in der Richtung des Vektors vom

Punkt x nach dem Punkt 0 in -1 einmündet, und im Integral $\int\limits_{-1}^{\infty}$

$$\frac{x\,h}{1+h} = x - \tau \quad (0 < \tau < \infty),$$

was in der h-Ebene einer Geraden von -1 in der Richtung $0 \to x$ entspricht.[1]) Setzt man die Mellinsche Formel[2])

$$\frac{1}{(1+z)^a} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(a-s)\,z^{-s}\,ds}{\Gamma(a)}, \quad |\arg z| < \pi$$

mit $z = \frac{\tau}{x}$ und $a = \alpha + 1 - \gamma$ in das Integral für F_1 ein, indem man die Integration über τ vermöge der Integraldarstellung die Γ-Funktion ausführt, so wird

$$\frac{F_1}{2} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)}\,\frac{(-x)^{-\alpha}}{2\pi i} \cdot \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(s)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma-s)\,\Gamma(\alpha-s)\,x^s\,ds\,.$$

Der Integrationsweg läßt die Pole von $\Gamma(s)$ $s = 0, -1, -2, \ldots$ links und die von $\Gamma(1+\alpha-\gamma-s)$ $\Gamma(\alpha-s)$ rechts.[3]) Analog

$$\frac{F_2}{2} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{x^{\alpha-\gamma}\,e^x}{2\pi i} \cdot \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(s)\,\Gamma(1-\alpha-s)\,\Gamma(\gamma-\alpha-s)\,(-x)^s\,ds\,.$$

Diese Ausdrücke für F_1 und F_2 sind unabhängig von der Voraussetzung $\Re\,\alpha > 0$. Schiebt man den Weg über die N

1) Man denke sich den Weg durch einen Kreisbogen von großem Radius zu $h = \infty$ zurückkehrend, der wegen $\Re(\gamma - \alpha) > 0$ keinen Beitrag gibt.

2) Wenn man für $|z| < 1$ den Weg über die Pole $s = 0, -1, -2, \ldots$ von $\Gamma(s)$ schiebt, bekommt man die Binomialentwicklung von

$$\frac{1}{(1+z)^a} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\nu)\,(-z)^\nu}{\Gamma(a)\,\nu!}\,.$$

3) Dies ist möglich, falls α und $1 + \alpha - \gamma$ nicht negativ ganz sind, in welchem Falle die Reihe (5) abbricht.

ersten Pole von $\Gamma(s)$, so gibt der Residuensatz die asymptotische Entwicklung

$$(5)\quad \frac{F_1}{2} = \Gamma(\gamma)(-x)^{-\alpha}\left\{\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{(1+\alpha-\gamma)_\nu\,\alpha_\nu}{\nu!\,(-x)^\nu} + R_N(\alpha,\gamma,x)\right\}$$

mit dem Restglied

$$R_N(\alpha,\gamma,x) = \frac{\sin\pi(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\alpha)\,2\,i\,\pi^2}\,\frac{1}{x^{N+\vartheta}}$$

$$\cdot\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(\tau-N-\vartheta)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma+N+\vartheta-\tau)\,\Gamma(\alpha+N+\vartheta-\tau)\,\tau^\tau\,d\tau,$$

$$0<\vartheta<1,$$

so daß $\lim|x|^N R_N = 0$ für $|x|\to\infty$. Analog

$$(5')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{F_2}{2} = \Gamma(\gamma)\,x^{\alpha-\gamma}e^x\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{(1-\alpha)_\nu\,(\gamma-\alpha)_\nu}{\nu!\,x^\nu}\right.\\ \left. + R_N(\gamma-\alpha,\gamma,-x)\right\}.\end{aligned}\right.$$

Schiebt man dagegen den Weg über die Pole von
$\Gamma(1+\alpha-\gamma-s)(\Gamma\alpha-s)$ bzw. $\Gamma(1-\alpha-s)\,\Gamma(\gamma-\alpha-s)$, so ergibt der Residuensatz die Entwicklung von $x=0$ aus. Im wichtigen Falle $\gamma = 1+g$, g positiv ganz, sind diese Pole doppelt[1]) und es wird

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} F_1 &= \pm\frac{1-e^{\pm 2\pi i a}}{\pi i}\,\Phi(\alpha,\gamma,x) + F(\alpha,\gamma,x)\\ F_2 &= \pm\frac{1-e^{\pm 2\pi i a}}{\pi i}\,\Phi(\alpha,\gamma,x) + F(\alpha,\gamma,x)\end{aligned}\right.$$

mit

$$(6')\quad \left\{\begin{aligned} \Phi(\alpha,\gamma,x) = &-\frac{g!\,(g-1)!\,x^{-g}}{(1-\alpha)_g}\sum_{\nu=0}^{g-1}\frac{(\alpha-g)_\nu\,x^\nu}{(1-g)_\nu\,\nu!}\\ &+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\alpha_\nu\,x^\nu}{(1+g)_\nu\,\nu!}\big(\psi(\alpha+\nu)-\psi(\nu+1)-\psi(\nu+g+1)\big)\\ &+F(\alpha,\gamma,x)\left(\ln x+\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\pi\alpha\mp i\right),\end{aligned}\right.$$

1) Die Entwicklung von $\Gamma(z)$ an einem Pol $z=-n$ $(n=0,1,\ldots)$ ist

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\left\{\frac{1}{z+n}+\psi(n+1)+\ldots\right\},$$

an einer regulären Stelle $z=a$

$$\Gamma(z) = \Gamma(a)\{1+(z-a)\,\psi(a)+\ldots\},\qquad \psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

wo $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ und das obere Vorzeichen für $0 < \arg x < \pi$ und das untere für $-\pi < \arg x < 0$ gilt. $\Phi(\alpha, \gamma, x)$ ist ein zweites, im Nullpunkt singuläres Integral von (3).

Die Eigenfunktionen in *Polarkoordinaten*

$$x + i\,y = r \sin\vartheta\, e^{i\varphi}, \quad z = r\cos\vartheta$$

sind

$$\psi_{n_r, l, m} = P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{i m \varphi}\, X_{n_r, l}(r)$$

(n_r radiale, $l = 0, 1, 2, \ldots$ azimutale, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$ magnetische Quantenzahl). Für X gilt

$$r \frac{d^2 X}{d r^2} + 2 \frac{d X}{d r} + \left(-k^2 r - \frac{l(l+1)}{r} + \frac{2}{a}\right) X = 0$$

$$\left(a = \frac{h^2}{4\pi^2 m_0 e^2} = \text{Wasserstoffradius},\right.$$

$$\left. k = \frac{2\pi}{h}\sqrt{-2 m_0 E}\,, \quad E = \text{Energie}\right),$$

d. h. (3′) und (3″) mit

(7) $$\xi = 2r, \quad \gamma = 2l + 2, \quad p = l, \quad n = n_r,$$

(7′) $$\beta = k(l + 1 + n_r) = \frac{1}{a}\,.$$

Daher nach (1)

(8) $$X_{n_r, l} = e^{-k r}(2r)^l F(-n_r, 2l + 2, 2k r).$$

Für $E < 0$, diskretes Spektrum, sei $k > 0$. Die Eigenfunktionen haben der Bedingung:

$$\int_0^\infty r^2 X^2_{n_r, l}(r)\, dr \text{ existiert}$$

zu genügen (vgl. 15″). Daher muß nach der asymptotischen Entwicklung (5), (5′) $n_r = 0, 1, 2, \ldots$ sein. (7′) ist dann die Balmerformel.

Für $E > 0$, kontinuierliches Spektrum, sei $k = -i\varkappa$, $\varkappa > 0$. An Stelle der Eigenfunktionen treten hier die Eigen*differentiale* die sich auf ein Intervall des Spektrums beziehen. In unserem Fall sind diese Differentiale in der $\varkappa$-Skala $\int_{\Delta\varkappa} X_{n_r, l}(r)\, d\varkappa$, wo $\Delta\varkappa$ das Intervall ist. Die Bedingung ist jetzt:

$$\int_0^\infty r^2 \left(\int_{\Delta\varkappa} X_{n_r, l}(r)\, d\varkappa\right)^2 d r \text{ existiert (vgl. 15″).}$$

Es ist $n_r = \frac{i}{\varkappa a} - l - 1$, also komplex. Die mit F_1 und F_2 gebildeten Funktionen $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ lauten nach (5) und (5') asymptotisch

$$(8') \qquad X^{\binom{1}{2}} = \frac{(2l+1)!\cdot e^{-\frac{\pi}{2\varkappa a}}}{\Gamma\left(l+1 \pm \frac{i}{\varkappa a}\right)} \frac{e^{\pm i\left(\varkappa r + \frac{\ln 2\varkappa r}{\varkappa a} - \frac{(l+1)\pi}{2}\right)}}{r\varkappa^{l+1}},$$

ein- und auslaufende Kugelwellen, die sich zur stehenden $X = \frac{1}{2}(X^{(1)} + X^{(2)})$ zusammensetzen. Die Eigendifferentiale nehmen wie $1/r^2$ im Unendlichen ab und genügen daher der genannten Bedingung.

Die Eigenfunktionen in *parabolischen* Koordinaten

$$x + iy = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}\, e^{i\varphi}, \qquad z = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \quad \text{sind}$$

$$\psi_{n_1, n_2, m} = e^{im\varphi} \Lambda_{n_1, m}(\lambda_1)\, \Lambda_{n_2, m}(\lambda_2)$$

(n_1, n_2 parabolische Quantenzahlen). Für die Λ_i gilt

$$\lambda_i \frac{d^2\Lambda_i}{d\lambda_i^2} + \frac{d\Lambda_i}{d\lambda_i} + \left(-\frac{k^2\lambda_i}{4} - \frac{m^2}{4\lambda_i} + \beta_i\right)\Lambda_i = 0,$$

$$\beta_1 + \beta_2 = \frac{1}{a},$$

d. h. (3) und (3'') mit

$$(9) \qquad \xi = \lambda_i, \quad \gamma = |m| + 1, \quad p = \frac{|m|}{2}, \quad n = n_i, \quad \beta = \beta_i,$$

$$(9') \qquad \beta_1 + \beta_2 = k(|m| + 1 + n_1 + n_2) = \frac{1}{a}\,.$$

Daher nach (1)

$$(10) \qquad \Lambda_{n_i m}(\lambda_i) = e^{-\frac{k\lambda_i}{2}} \lambda_i^{\frac{|m|}{2}} F(-n_i, |m| + 1, k\lambda_i).$$

Für $k > 0$, diskretes Spektrum, muß

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \Lambda^2_{n_1 m}(\lambda_1)\, \Lambda^2_{n_2 m}(\lambda_2)\,(\lambda_1 + \lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2$$

existieren (vgl. 16'). Daher nach (5) (5') $n_i = 0, 1, 2, \ldots$ (9') ist dann die Balmerformel.

Für $k = -i\varkappa$, kontinuierliches Spektrum, muß $\Re(n_1 - n_2) = 0$ sein, damit $\Lambda_{n_1, m}(\lambda_1)\, \Lambda_{n_2, m}(\lambda_2)$ wie $1/r$ im Unendlichen verschwindet, d. h. nach (9')

$$(11) \qquad n_{\frac{1}{2}} = \frac{i/\varkappa a - |m| - 1}{2} \pm i\zeta \quad \text{bzw.} \quad \beta_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2a} \pm \zeta\varkappa,$$

wo ζ reell. Es wird dann asymptotisch nach (5) und (5')

$$(10')\quad \left\{\begin{aligned} \overset{(1)}{\underset{n_1, m}{\Lambda^{(2)}}}(\lambda_1) = {} & \frac{2\,|\,m\,|\,!\; e^{-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2\varkappa a}+\zeta\right)}}{\Gamma\left(\frac{|\,m\,|+1}{2} \pm i\left(\frac{1}{2\varkappa a}+\zeta\right)\right)} \\ & \cdot \frac{e^{\pm i\left(\frac{\varkappa \lambda_1}{2} + \left(\frac{1}{2\varkappa a}+\zeta\right)\ln \varkappa \lambda_1 - \frac{|\,m\,|+1}{4}\pi\right)}}{\lambda_1^{1/2}\, \varkappa^{\frac{|\,m\,|+1}{2}}} . \end{aligned}\right.$$

Diese beiden fortschreitenden Wellen setzen sich gemäß

$$\Lambda_{n_1 m}(\lambda_1) = \frac{1}{2}\left(\Lambda^{(1)}_{n_1 m}(\lambda_1) + \Lambda^{(2)}_{n_2 m}(\lambda_2)\right)$$

zur stehenden zusammen. Bei $\overset{(1)}{\underset{n_2 m}{\Lambda^{(2)}}}(\lambda_2)$ ist in (10') λ_1, ζ mit λ_2, $-\zeta$ zu vertauschen.

Die Eigendifferentiale in der $\varkappa-\zeta$-Skala sind

$$\int\limits_{\Delta \varkappa}\int\limits_{\Delta \zeta} \Lambda_{n_1 m}(\lambda_1)\, \Lambda_{n_2 m}(\lambda_2)\, d\,\varkappa\, d\,\zeta .$$

Sie nehmen wieder wie $1/r^2$ im Unendlichen ab.

Es ist für das Folgende wesentlich, daß wir auch Funktionen (8) und (10) betrachten, bei denen (7') und (9') nicht gelten, die also keine Eigenfunktionen des Wasserstoffs sind (a variabel, statt konstant).

§ 2. **Die zu berechnenden Integrale**

Für die Intensität des bei einem Übergang $n \rightarrow n'$ ausgestrahlten Lichtes ist maßgebend die Stromdichte

$$\mathfrak{s} = \frac{h}{4\pi i m_0}\left(\psi^*_{n'} \operatorname{grad} \psi_n - \psi_n \operatorname{grad} \psi^*_{n'}\right),$$

wo ψ_n und $\psi_{n'}$ die zeitabhängigen Eigenfunktionen oder -differentiale der beiden Zustände sind (* = konjugiert—komplex), die gemäß

$$(12)\qquad \int |\,\psi\,|^2\, d\,v = 1, \qquad d\,v = d\,x\,d\,y\,d\,z$$

normiert sind. Das Vektorpotential in großer Entfernung ist bei Vernachlässigung der Retardierung proportional zu $\int \mathfrak{s}\, d\,v$ und die Feldstärkenamplituden daher zu $\int \frac{\partial\,\mathfrak{s}}{\partial\,t}\, d\,v$. Aus dem

Erhaltungssatz der Elektrizität einerseits und der Schrödingergleichung

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{h^2}{8\pi^2 m_0}\Delta\psi + \frac{e^2}{r}\psi,$$

andererseits folgt

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(x\,\psi_n\,\psi^*_{n'}) + \operatorname{div}\left(x\,\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}\right) = -\frac{e^2}{m_0}\frac{x}{r^3}\psi_n\,\psi^*_{n'} - \operatorname{div}\mathfrak{T}_x,$$

wo

$$\mathfrak{T}_x = \frac{h^2}{16\pi^2 m_0}\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\operatorname{grad}\psi^*_{n'} \right.$$
$$\left. + \frac{\partial\psi^*_{n'}}{\partial x}\operatorname{grad}\psi_n - \psi_n\operatorname{grad}\frac{\partial\psi^*_{n'}}{\partial x} - \psi^*_{n'}\operatorname{grad}\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right),$$

die Schrödingerschen Spannungen[1]) sind. Da die Eigenfunktionen im Unendlichen exponentiell und die Differentiale wie $1/r^2$ gegen Null gehen, verschwinden bei der Integration über dv die div und es resultiert

$$(13)\qquad \int\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t}\,dv = \frac{d^2}{dt^2}\int x\,\psi_n\,\psi^*_{n'}\,dv = -\frac{e^2}{m_0}\int\frac{x}{r^3}\psi_n\,\psi^*_{n'}\,dv,$$

was nichts anderes als die Bewegungsgleichung ist.

Nun konvergiert das Integral

$$\int\frac{x}{r^3}\psi_n\,\psi^*_{n'}\,dv$$

bereits über die Eigen*funktionen* und für die Intensität kommt daher

$$\int\frac{x}{r^3}\psi_n\,\psi^*_{n'}\,dv$$

in Frage, wo jetzt $\psi_n\,\psi^*_{n'}$ die Eigen*funktionen* sind, multipliziert mit den infinitesimalen Intervallen Δa des kontinuierlichen Spektrums (wenn Zustände derselben vorkommen), falls a die kontinuierlichen Parameter zusammenfaßt ($\varkappa$ bei Polar-, $\varkappa$ und ζ bei parabolischen Koordinaten). Ferner ist das Integral (12) im kontinuierlichen Spektrum, falls ψ wieder die Eigen*funktionen* sind,

$$\int_{a_1}^{a_2} d\,a\left\{\int d\,v\;\psi(a)\int_{a_1}^{a_2}\overset{*}{\psi}(a')\,d\,a'\right\} = \Delta a\int d\,v\;\psi(a)\int_{a_1}^{a_2}\psi^*(x')\,d\,a',$$
$$a_1 < a < a_2,\qquad \Delta a = a_2 - a_1,$$

1) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 82. S. 265. 1927.

da das Integral in { } konvergiert und unabhängig von der Größe des Intervalls $\varDelta a$ ist. Durch

$$\int \frac{x}{r^3}\, \psi_n\, \psi^*_{n'}\, d v \quad \text{mit} \quad \int d v\; \psi(a) \int_{a_1}^{a_2} \psi^*(a', d a') = 1$$

für das kontinuierliche und (12) für das diskrete Spektrum, unter ψ die Eigenfunktionen verstanden, sind daher die Amplituden pro $\sqrt{\varDelta a}$ und damit die Intensität pro $\varDelta a$ des kontinuierlichen Spektrums gegeben.

Der Schritt (14) von

7^3

$$\int \frac{x}{r^2}\, \psi_n\, \psi^*_{n'}\, d v \quad \text{zu} \quad \int x\, \psi_n\, \psi^*_{n'}\, d v$$

für Eigen*funktionen* ψ ist ohne weiteres ausführbar, wenn mindestens eine der Funktionen dem diskreten Spektrum angehört, weil wegen deren exponentiellem Verschwinden der Integrale über die div wegfallen. Sind aber beide Zustände kontinuierlich, so zerlege man, falls $\varkappa > \varkappa'$, in ψ_n die Funktion F in F_1 und F_2, d. h. X in $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ und die $\varLambda$ in $\varLambda^{(1)}$ und $\varLambda^{(2)}$. Infolge dieser Zufällung des ψ_n besteht $\psi_n\, \psi^*_{n'}$ dann einmal aus Teilen (I) mit F_1 und Teilen (II) mit F_2. Nach (8′) und (10′) verschwinden wegen $\varkappa > \varkappa'$ die Teile (I) auf einem Viertelkreis mit unendlichem Radius von der positiv-reellen zur *positiv*-imaginären Achse der komplexen r, λ_1 oder λ_2 Ebene, die Teile (II) auf einem solchen Viertelkreis zur *negativ*-imaginären Achse. (Für $\varkappa < \varkappa'$ wäre analog $\psi^*_{n'}$ zu zerlegen.) Im Nullpunkt dagegen wurden jene Teile unendlich gemäß (6), (6′). Daher können wir in

$$\int \frac{x}{r^3}\, \psi_n\, \psi^*_{n'}\, d v$$

die Teile (I) von $\varepsilon > 0$ geradlinig nach $\varepsilon + i\,\infty$ und die Teile (II) von ε nach $\varepsilon - i\,\infty$ integrieren und hiernach zu $\lim \varepsilon = 0$ übergehen. Dann gilt für die einzelnen Glieder, in die $\frac{x}{r^3}\, \psi_n\, \psi^*_{n'}$ zerfällt, wieder (13), da auch die mit F_1 und F_2 gebildeten ψ die Schrödingergleichung erfüllen, die Eigenfunktionen im positiv- bzw. negativ-imaginär Unendlichen exponentiell verschwinden und ihre Summe für $\lim \varepsilon = 0$ im Nullpunkt Null ist.

Es handelt sich also um die Matrizen

$$(14) \qquad x^{n}_{n'} = \int x\, \psi_n\, \psi^*_{n'}\, d v$$

mit

$$(14') \int |\psi|^2 d v = 1 \text{ bzw. } \int d v\, \psi(a) \int_{a_1}^{a_2} \psi^*(a')\, d a' = 1,\; a_1 < a < a_2,$$

wenn die ψ stets Eigen*funktionen* sind und das Integral (14) im geschilderten Sinne genommen wird. Aus diesen Matrizen berechnet sich die Intensität pro Intervall des kontinuierlichen Spektrums jedes Zustandes.

Die *polaren* Matrizen sind (nach Integration über ϑ und φ)

$$(15) \quad \begin{cases} x^{n_r',\, l,\, m}_{n_r',\, l-1,\, m\mp 1} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l \pm m - 1)(l \pm m)}{(2l+1)(2l-1)}}\; C^{n_r,\, l}_{n_r',\, l-1}, \\ z^{n_r,\, l,\, m}_{n_r',\, l-1,\, m} = \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}}\; C^{n_r,\, l}_{n_r',\, l-1}, \end{cases}$$

$$(15') \qquad C^{n_r,\, l}_{n_r',\, l-1} = N(n_r, l)\, N(n'_r, l-1) \int_0^\infty r^3\, X_{n_r l}(r)\, X_{n_r' l-1}(r)\, d r,$$

$$(15'') \quad \begin{cases} N^{-2}(n_r, l) = \int_0^\infty r^2\, X^2_{n_r l}(r)\, d r \quad \text{bzw.} \\ \lim\limits_{R=\infty} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} d\varkappa' \int_0^R r^2\, X_{n_r l}(r)\, X_{n_r' l}(r)\, d r. \end{cases}$$

Unter X sind die Funktionen (8), wo zwischen k, l, n_r die Relation (7') gilt, zu verstehen; sind beide Zustände kontinuierlich und $\varkappa > \varkappa'$, so ist nach dem Gesagten in (15') das Integral

$$\lim_{\varepsilon=0} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + i\infty} r^3\, X^{(1)}_{n_r,\, l}(r)\, X_{n_r',\, l-1}(r)\, d r + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + i\infty} r^3\, X^{(2)}_{n_r\, l}(r)\, X_{n_r\, l-1}(r)\, d r \right\}$$

gemeint.

Die Matrizen für den Sprung $l \to l+1$ ergeben sich wegen der Symmetrie in den beiden Zuständen gemäß

$$x^{n_r\, l\quad m}_{n_r'\, l+1\, m\mp 1} = x^{n_r'\, l+1\, m\mp 1}_{n_r\, l\quad m}, \qquad z^{n_r\, l\quad m}_{n_r'\, l+1\, m} = z^{n_r'\, l+1\, m}_{n_r\, l\quad m}$$

aus den Matrizen (15). Die y-Matrizen endlich unterscheiden sich von den x-Matrizen um einen Faktor $\pm i$.

Die *parabolischen* Matrizen sind (nach Integration über φ), für $\Lambda_{n_1 m}(\lambda_1)\Lambda_{n_2 m}(\lambda_2)$ kurz $\Lambda_m(n_1, n_2)$ geschrieben,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} x^{n_1\, n_2\, m}_{n_1'\, n_2'\, m-1} &= \frac{1}{8} N_m(n_1 n_2) N_{m-1}(n_1' n_2') \\ &\quad \cdot \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\Lambda_m(n_1 n_2)\Lambda_{m-1}(n_1' n_2') d\lambda_1\, d\lambda_2, \\ &\qquad \text{falls } m \geqq 1, \text{ so daß } |m-1| = |m| - 1, \\ z^{n_1\, n_2\, m}_{n_1'\, n_2'\, m} &= \frac{1}{8} N_m(n_1 n_2) N_m(n_1' n_2') \\ &\quad \cdot \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\Lambda_m(n_1 n_2)\Lambda_m(n_1' n_2') d\lambda_1\, d\lambda_2, \\ &\qquad m \gtreqless 0, \end{aligned}\right.$$

$$(16')\qquad N_m^{-2}(n_1 n_2) = \frac{1}{4}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty (\lambda_1 + \lambda_2)\Lambda_m^2(n_1 n_2) d\lambda_1\, d\lambda_2,$$

Λ sind die Eigenfunktionen, gebildet aus (10) mit den Relationen (9') bzw. (11) für $n_1 n_2$; sind beide kontinuierlich und $\varkappa > \varkappa'$, so ist in (16) die Summe von 4 Integralen gemeint, die durch die Zufällung von $\Lambda_{n_1 m}(\lambda_1)$ und $\Lambda_{n_2 m}(\lambda_2)$ in ihre zwei Bestandteile entsteht.

Die x-Matrizen für den Sprung $m \to m+1$ ergeben sich für $m \geqq 0$ gemäß

$$x^{n_1\, n_2\, m}_{n_1'\, n_2'\, m+1} = x^{n_1'\, n_2'\, m+1}_{n_1\, n_2\, m}$$

aus den Matrizen (16). Die Matrizen für negative m folgen vermöge

$$x^{-m}_{-m-1} = x^{m}_{m+1} \quad m \geqq 0, \qquad x^{-m}_{-m+1} = x^{m}_{m-1} \quad m \geqq 1$$

aus denen für positive m.

Setzt man

$$(17)\qquad J_\varrho^{(\sigma,\tau)}(n, n') = \int_0^\infty e^{-\frac{k+k'}{2}\xi}\, \xi^{\varrho+\sigma} F(-n, \varrho+1, k\xi) \cdot F(-n', \varrho+1-\tau, k'\xi)\, d\xi,$$

so wird aus (15'), (15'')

$$(18)\qquad C^{n_r\, l}_{n_r'\, l-1} = \frac{1}{16} N(n_r l) N(n_r' l-1) J^{(1,2)}_{2l+1}(n_r, n_r'),$$

$$(18')\qquad N^{-2}(n_r l) = \frac{1}{8} J^{(1,0)}_{2l+1}(n_r n_r)$$

und aus (16), (16')

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} x^{n_1\, n_2\, m}_{n_1'\, n_2'\, m-1} &= \frac{1}{8} N_m(n_1 n_2) N_{m-1}(n_1' n_2') \\ &\qquad \cdot \left\{ J^{(1,1)}_{|m|}(n_1 n_1') J^{(0,1)}_{|m|}(n_2 n_2') + \cdot \right\}, \\ z^{n_1\, n_2\, m}_{n_1'\, n_2'\, m} &= \frac{1}{8} N_m(n_1 n_2) N_m(n_1' n_2') \\ &\qquad \cdot \left\{ J^{(2,0)}_{|m|}(n_1 n_1') J^{(0,0)}_{|m|}(n_2 n_2') - \cdot \right\}, \end{aligned}\right.$$

$$(19')\qquad N_m^{-2}(n_1 n_2) = \frac{1}{4} \left\{ J^{(1,0)}_{|m|}(n_1 n_1) J^{(0,0)}_{|m|}(n_2 n_2) + \cdot \right\},$$

wo der $\cdot$ in $\{\,\}$ Wiederholung mit Vertauschung der Indizes 1 und 2 bei den n bedeutet.

Es handelt sich also um die Berechnung der Integrale J.

§ 3. Reduktion der Integrale $J^{(\sigma,\tau)}$ auf $J^{(0,0)}$

Die Reaktion in τ geschieht mittels

$$F(\alpha,\gamma,x) = \frac{(\gamma-1)}{x}\big(F(\alpha,\gamma-1,x) - F(\alpha-1,\gamma-1,x)\big);$$

der Koeffizient von $x^\nu/\nu!$ rechts ist nämlich

$$\frac{1}{\gamma_\nu(\nu+1)}\big(\alpha_\nu(\alpha+\nu) - (\alpha-1)\alpha_\nu\big) = \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}\,.$$

Wiederholung gibt

$$F(\alpha,\gamma,x) = \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{x^2}\big(F(\alpha,\gamma-2,x) - 2F(\alpha-1,\gamma-2,x) \\ + F(\alpha-2,\gamma-2,x)\big).$$

Wendet man dies in (17) auf $F(-n, \varrho+1, k\xi)$ an, so erhält man

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} J^{(\sigma,1)}_{\varrho}(n,n') &= \frac{\varrho}{k}\left(J^{(\sigma,0)}_{\varrho-1}(n,n') - J^{(\sigma,0)}_{\varrho-1}(n+1,n')\right), \\ J^{(\sigma,2)}_{\varrho}(n,n') &= \frac{\varrho(\varrho-1)}{k^2}\left(J^{(\sigma,0)}_{\varrho-2}(n,n') - 2J^{(\sigma,0)}_{\varrho-2}(n+1,n') \right. \\ &\qquad \left. + J^{(\sigma,0)}_{\varrho-2}(n+2,n')\right). \end{aligned}\right.$$

Es bleibt mithin noch die Reduktion von

$$J_\varrho^{(\sigma,0)}(n,n') = \int\limits_0^\infty w\,w'\,d\,\xi \quad \text{mit}$$

(21) $$w = e^{-\frac{k\xi}{2}}\,\xi^{\frac{\varrho+\sigma}{2}}\,F(-n,\varrho+1,k\,\xi)$$

und w', wo $k'n'$ an Stelle von $k\,n$ steht. Nach (3'), (3'') genügt (21) der Gleichung

(22) $$\xi\frac{d^2 w}{d\,\xi^2} + (1-\sigma)\frac{d\,w}{d\,\xi} + \left(-\frac{k^2\,\xi}{4} - \frac{\varrho^2-\sigma^2}{4\,\xi} + \beta_\varrho(n)\right)w = 0,$$

(22') $$\beta_\varrho(n) = k\left(\frac{\varrho+1}{2} + n\right).$$

Multipliziert man sie mit w' und die für w' geltende mit w subtrahiert und integriert über ξ von 0 bis ∞ (bzw. $\pm i\infty$, wenn in w $F_{\frac{1}{2}}$ steht), so erhält man (nach einer partiellen Integration, wo der ausintegrierte Teil bei den Normierungsfaktoren des kontinuierlichen Spektrums nach (15'') und (16') zwischen 0 und R zu nehmen ist)

$$\left[\xi\left(w'\frac{d\,w}{d\,\xi} - w\frac{d\,w'}{d\,\xi}\right) - \sigma\,w\,w'\right]_0^R + 2\,\sigma\int\limits_0^\infty w\frac{d\,w'}{d\,\xi}\,d\,\xi$$
$$+ \frac{k'^2-k^2}{4}\,J_\varrho^{(\sigma+1,0)}(n,n') + (\beta_\varrho - \beta_\varrho')\,J_\varrho^{(\sigma,0)}(n,n') = 0,$$

wo kurz β_ϱ' für $k'\left(\frac{\varrho+1}{2} + n'\right)$ geschrieben ist. Mit

$$\frac{d\,F(\alpha,\gamma,x)}{d\,x} = \frac{\alpha}{x}\left(F(\alpha+1,\gamma,x) - F(\alpha,\gamma,x)\right)$$

(der Koeffizient von $x^{\nu-1}/\nu!$ rechts ist nämlich

$$\left.\frac{\alpha_\nu(\alpha+\nu)}{\gamma_\nu} - \frac{\alpha\,\alpha_\nu}{\gamma_\nu} = \frac{\nu\,\alpha_\nu}{\gamma_\nu}\right)$$

wird die Ableitung von (21)

$$\frac{d\,w(n)}{d\,\xi} = \left(-\frac{k}{2} + \frac{\frac{\varrho+\sigma}{2}+n}{\xi}\right)w(n) - \frac{n}{\xi}\,w(n-1)$$

und daher

$$2\int\limits_0^\infty w\frac{d\,w'}{d\,\xi}\,d\,\xi = -k'\,J_\varrho^{(\sigma,0)}(n,n') + (\varrho+\sigma+2\,n')$$
$$\cdot\,J_\varrho^{(\sigma-1,0)}(n,n') - 2\,n'\,J_\varrho^{(\sigma-1,0)}(n,n'-1).$$

Dies eingesetzt, gibt die gewünschte Reduktionsformel

$$J_\varrho^{(\sigma+1,\,0)}(n,n') = \frac{4}{k^2 - k'^2}\Big\{(-k'\sigma + \beta_\varrho - \beta_\varrho')\,J_\varrho^{(\sigma,\,0)}(n,n') + \sigma(\varrho + \sigma + 2n')\,J_\varrho^{(\sigma-1,\,0)}(n,n') - 2n'\sigma\,J_\varrho^{(\sigma-1,\,0)}(n,n'-1) + \Big[\xi\Big(w'\frac{dw}{d\xi} - w\frac{dw'}{d\xi}\Big) - \sigma w w'\Big]_0^R\Big\}.$$

Insbesondere für $\sigma = 0$, $\sigma = 1$

$$(23)\qquad \begin{cases} J_\varrho^{(1,\,0)}(n,n') = \dfrac{4}{k^2 - k'^2}\Big\{(\beta_\varrho - \beta_\varrho')\,J_\varrho^{(0,\,0)}(n,n') + \Big[\xi\Big(w'\dfrac{dw}{d\xi} - w\dfrac{dw'}{d\xi}\Big)\Big]_0^R(\sigma = 0)\Big\}, \\ J_\varrho^{(2,\,0)}(n,n') = \dfrac{4}{k^2 - k'^2}\Big\{\Big(\dfrac{4(-k' + \beta_\varrho - \beta_\varrho')(\beta_\varrho - \beta_\varrho')}{k^2 - k'^2} + (\varrho + 1 + 2n')\Big)J_\varrho^{(0,\,0)}(n,n') - 2n'\,J_\varrho^{(0,\,0)}(n,n'-1)\Big\}, \end{cases}$$

wo in $J^{(2,\,0)}$ der ausintegrierte Teil weggelassen ist, da er nicht gebraucht wird.

Damit ist alles auf $J^{(0,\,0)}$ zurückgeführt.

§ 4. Berechnung von $J^{(0,\,0)}$

In

$$J_\varrho^{(0,\,0)}(n,n') = \int_0^\infty e^{-\frac{k+k'}{2}\xi}\,\xi^\varrho\,F(-n,\varrho+1,k\xi)\,F(-n',\varrho+1,k'\xi)\,d\xi$$

setzen wir für das erste F die Integraldarstellung (4'), für das zweite F die Reihe (2) ein, so daß, wenn wir die Integrationen nach ξ und nach h vertauschen, mit den Abkürzungen

$$(24)\qquad u = \frac{k' - k}{k' + k}, \qquad v = \frac{2}{k + k'},$$

woraus

$$(24')\qquad k = \frac{1-u}{v}, \qquad k' = \frac{1+u}{v}$$

resultiert

$$J_\varrho^{(0,\,0)}(n,n') = A\int_{0}^{\infty}\!\!\!\!\!\!\int\limits_{\infty}^{0}\!\int_0 \frac{h^{-n-1}\,e^{-\frac{\xi(1+hu)}{v(1+h)}}\,\xi^\varrho}{(1+h)^{\varrho+1}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n'}{\nu}\frac{(-k'\xi)^\nu}{(\varrho+1)_\nu}\,d\xi\,dh,$$

wenn A den Faktor vor den Integralen in (4) und (4') bezeichnet.

Ist mindestens einer der Zustände diskret, so sei es k'. Dann ist die Summe endlich. Damit das Integral über ξ konvergiert, ist der Weg in h so zu führen, daß

$$\Re \frac{1 + h u}{v(1+h)} > 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{k' + k + h(h' - k)}{1+h} > 0.$$

Ist k auch diskret wie k', dann ist der Weg in h eine Nullpunktsumkreisung, die so eng gemacht werden kann, daß die Bedingung erfüllt ist. Ist dagegen $k = -i\varkappa$ kontinuierlich, dann ist der Weg in h eine von ∞ ausgehende, den Nullpunkt positiv umkreisende Schleife mit $\arg h = \pi$ auf der negativen reellen Achse, und die Bedingung wird erfüllt, wenn man außerhalb des Kreises um $h = -1 + \frac{i\varkappa}{k'}$ durch $h = -1$ bleibt.

Sind beide Zustände kontinuierlich und $\varkappa > \varkappa'$, so handelt es sich um das Integral

$$\lim_{\varepsilon = 0} \left(\int_0^{-1} \int_\varepsilon^{\varepsilon + i\infty} + \int_{-1}^{\infty} \int_\varepsilon^{\varepsilon - i\infty} \right).$$

Es ist nach dem S. 1033 Bemerkten $\arg h = -\pi$ für $h = -1$, weil $x = -i\varkappa\xi$ den negativen Imaginärteil $-i\varepsilon$ hat. Damit die Integrale über h konvergieren, muß in $\int\limits_0^{-1}$ beim Einmünden in $h = -1$ $\Re \frac{\varkappa h}{1+h} < 0$ und in $\int\limits_{-1}^{\infty}$ beim Auslauf $\Re \frac{\varkappa h}{1+h} > 0$ sein. Damit die Integrale über ξ konvergieren, muß

$$\Re \frac{\xi(1 + h u)}{v(1+h)} > 0 \text{ sein}, \quad \text{d. h.} \quad \Re \frac{\varkappa + \varkappa' - (\varkappa - \varkappa')h}{1+h} > 0$$

in $\int\limits_0^{-1}$ und < 0 in $\int\limits_{-1}^{\infty}$.[1]) Es wird alles erfüllt, wenn h längs

---

1) $\Re \frac{\varkappa + \varkappa' - (\varkappa - \varkappa')h}{1+h} \gtrless 0$ heißt $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{inner}}{\text{außer}}$halb des Kreises um $h = \frac{\varkappa'}{\varkappa - \varkappa'}$ durch $h = -1$.

der negativen reellen Achse mit dem arg $= -\pi$ geht, was dem Weg in τ auf S. 1035/1036 entspricht.

Die Integration über ξ ist elementar ausführbar und gibt eine Binomialreihe mit dem allgemeinen Glied

$$A\,\varrho!\int\limits_{0\,\infty}\binom{n'}{\nu}\frac{h^{-n-1}(1+h)^{\nu}\,v^{\varrho+\nu+1}(-k')^{\nu}}{(1+h\,u)^{\varrho+\nu+1}}\,d\,h\,,$$

wenn man zu $\lim \varepsilon = 0$ übergeht und beide Integrale über h in eins zusammenzieht. Die Reihe ist endlich, wenn k' diskret ist. Im Falle, daß beide Zustände kontinuierlich sind, geht das Integral von 0 nach $-\infty$, und die Reihe konvergiert für

$$\frac{|1+h|\,|v\,k'|}{|1+h\,u|}=\frac{|1+h|\,|1+u|}{|1+h\,u|}<1\,,$$

was der Fall ist, wenn das wegen $\varkappa > \varkappa'$ negative $u = \frac{\varkappa' - \varkappa}{\varkappa' + \varkappa}$ zwischen -1 und $-\frac{1}{2}$ liegt.

Summation ergibt

$$A\,\varrho!\,v^{\varrho+1}\int\limits_{0\,\infty}\frac{h^{-n-1}}{(1+h\,u)^{\varrho+1}}\left(1-\frac{k'\,v\,(1+h)}{1+h\,u}\right)^{n'}d\,h\,,$$

oder h durch h/u ersetzt und nach (24) $k'v = 1 + u$ substituiert

$$A\,\varrho!\,v^{\varrho+1}\,u^{n}(-u)^{n'}\int\limits_{0\,\infty}\frac{h^{-n-1}}{(1+h)^{\varrho+1+n'}}\left(1+\frac{h}{u^{2}}\right)^{n'}d\,h\,,$$

wo die neuen Integrationswege aus den alten durch Drehung um $\arg u$ (und Vergrößerung im Verhältnis $|u|$) hervorgehen. Ist k' diskret, so haben wir für diskretes k eine Nullpunktsumkreisung, für kontinuierliches $k = -i\,\varkappa$, ist, wenn wir in

$$u=\frac{k'+i\,\varkappa}{k'-i\,\varkappa}=e^{2\,i\,\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{k'}},\quad 0<\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{k'}<\frac{\pi}{2}$$

nehmen, wieder $\arg h = +\pi$ beim Passieren der negativen reellen Achse. Sind beide Zustände kontinuierlich, so haben wir $\arg u = \pi$ (und $\arg - u = 0$) zu nehmen; dann geht der Weg von $h = 0$ bis $h = +\infty$ mit $\arg h = 0$.

Für alle Fälle ist nach (4)

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &J_{\varrho}^{(0,0)}(n,n')\\ &\quad = e^{-\pi i n'}\,\varrho!\,v^{\varrho+1}\,u^{n+n'}\,F\left(-n,\,-n',\,\varrho+1,\,1-\frac{1}{u^{2}}\right),\end{aligned}\right.$$

wo $u^{n+n'}$ eindeutig bestimmt ist durch

$$u = e^{2i \operatorname{arctg} \frac{\varkappa}{k'}}, \quad 0 < \operatorname{arctg} \frac{\varkappa}{k'} < \frac{\pi}{2}$$

für die Sprünge diskret-kontinuierlich und durch

$$u = e^{i\pi} \frac{\varkappa - \varkappa'}{\varkappa + \varkappa'}, \quad \arg \frac{\varkappa - \varkappa'}{\varkappa + \varkappa'} = 0$$

für die Sprünge kontinuierlich-kontinuierlich.

(25) kann auf Grund der Relationen zwischen den hypergeometrischen Funktionen umgeformt werden. Mittels

$$\text{(25a)} \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1 - x)^{-\beta} F\left(\gamma - \alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x - 1}\right)$$

(man führe zum Beweise $(1 - x)h$ statt h in (4) ein) folgt

$$\text{(25b)} \quad \begin{cases} J_{\varrho}^{(0,0)}(n, n') = e^{+\pi i n'} \varrho!\, v^{\varrho+1} u^{n-n'} \\ \qquad \cdot F(\varrho + 1 + n, -n', \varrho + 1, 1 - u^2). \end{cases}$$

Mittels [1])

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x)$$
$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta}$$
$$\cdot F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x)$$

folgt aus (25)

$$\text{(25c)} \begin{cases} J_{\varrho}^{(0,0)}(n, n') = (\varrho!)^2 v^{\varrho+1} e^{\pi i n} \left\{ \frac{\Gamma(n - n')}{\Gamma(\varrho + 1 + n)\,\Gamma(-n')} (e^{-i\pi} u)^{n'-n} \cdot \right. \\ \qquad F(-n, \varrho + 1 + n', n' - n + 1, u^2) \\ \qquad + \frac{\Gamma(n' - n)}{\Gamma(\varrho + 1 + n')\,\Gamma(-n)} (e^{-i\pi} u)^{n-n'} \\ \qquad \left. \cdot F(-n', \varrho + 1 + n, n - n' + 1, u^2) \right\}. \end{cases}$$

Setzt man in (25) für F die Reihe (2′) ein, so konvergiert im Falle, daß beide Zustände kontinuierlich sind, (25) für $\frac{1}{2} < u^2$, dagegen (25b) und (25c) für $0 < u^2 < 1$. (25b) ist

1) Vgl. E. T. Whittaker u. G. N. Watson, Modern Analysis, 4. Aufl. S. 291.

geeigneter für $1 - u^2 \ll 1$ und (25c) für $u^2 \ll 1$. Ist einer der Zustände diskret, dann sind die F Polynome. Ist es k', während k kontinuierlich ist, dann bleibt in (25c) nur das zweite F stehen (wegen $1/\Gamma(-n') = 0$); sind beide diskret und $n - n' \geqq 0$, so gilt dasselbe und (25c) reduziert sich auf

$$\text{(25d)} \quad \begin{cases} J_{\varrho}^{(0,0)}(n, n') = \dfrac{(\varrho!)^2\, n!}{(n-n')!\,(\varrho+n')!}\, v^{\varrho+1}\, u^{n-n'} \\ \qquad \cdot F(-n', \varrho + 1 + n', n - n' + 1, u^2), \quad n \geqq n'. \end{cases}$$

Daraus folgt insbesondere für $n = n'$

$$\text{(25e)} \qquad J_{\varrho}^{(0,0)}(n, n) = \frac{(\varrho!)\, n!}{(\varrho+n)!\, k^{\varrho+1}}\,.$$

§ 5. Die polaren Matrizen

Um $C_{n_r', l-1}^{n_r, l}$ zu berechnen, brauchen wir zunächst nach (18) $J_{2l+1}^{(1,2)}(n_r, n_r')$. Nach (7') ist wegen $l' = l - 1$

$$k(l + 1 + n_r) = k'(l + n_r') = \frac{1}{a}$$

und somit gilt für die $\beta_{2l-1}(n_r) = k(l + n_r)$ [vgl. (22')]

$$\beta_{2l-1}(n_r) - \beta_{2l-1}(n_r') = -k, \qquad \beta_{2l-1}(n_r + 1) - \beta_{2l-1}(n_r') = 0,$$
$$\beta_{2l-1}(n_r + 2) - \beta_{2l-1}(n_r') = -k.$$

Daher nach (23)

$$J_{2l-1}^{(1,0)}(n_r, n_r') = -\frac{4k}{k^2 - k'^2} J_{2l-1}^{(0,0)}(n_r, n_r'), \qquad J_{2l-1}^{(1,0)}(n_r + 1, n_r') = 0,$$
$$J_{2l-1}(n_r + 2, n_r') = \frac{4k}{k^2 - k'^2} J_{2l-1}^{(0,0)}(n_r + 2, n_r')$$

und nach (20), wenn man nach (24) $4/(k'^2 - k^2) = v^2/u$ einsetzt,

$$\text{(26)} \quad \begin{cases} J_{2l+1}^{(1,2)}(n_r, n_r') = 2l(2l+1)\dfrac{v^2}{u\,k} \\ \qquad \cdot \left(J_{2l-1}^{(0,0)}(n_r, n_r') - J_{2l-1}^{(0,0)}(n_r + 2, n_r')\right). \end{cases}$$

Ferner wird der Normierungsfaktor für das diskrete Spektrum wegen

$$\lim_{k=k'} \frac{4}{k^2 - k'^2}\left(\beta_{2l+1}(n_r) - \beta_{2l+1}(n_r')\right) = \frac{2}{k}(l + 1 + n_r)$$

nach (18′), (23) und (25 e)

$$(26') \quad \left\{ \begin{aligned} N^{-2}(n_r, l) &= \frac{l+1+n_r}{4k} J^{(0,0)}_{2l+1}(n_r, n_r) \\ &= \frac{\big((2l+1)!\big)^2 n_r!\,(l+1+n_r)}{4\,(2l+1+n_r)!\,k^{2l+3}} \\ &= \frac{\big((2l+1)!\big)^2 (n-l-1)!\,n^4 a^3}{4\,(n+l)!\,k^{2l}} \end{aligned} \right.$$

mit Einführung der Hauptquantenzahl $n = l + 1 + n_r$ und Benutzung der Balmerformel $k = \frac{1}{n a}$.

Der Normierungsfaktor für das kontinuierliche Spektrum ist wegen

$$\beta_{2l+1}(n_r) = \beta_{2l+1}(n_r') = \frac{1}{a} \quad \text{und}$$

$$w_{\sigma=0,\,\varrho=2l+1} = \xi^{1/2} X_{n_r l}(r) \quad \big(\text{nach (21) und (8)}\big)$$

$$= \frac{(2l+1)!\,e^{-\frac{\pi}{2\varkappa a}}}{\left|\Gamma\left(l+1+\frac{i}{\varkappa a}\right)\right|} \sqrt{\frac{2}{r}}\,\frac{1}{\varkappa^{l+1}} \cos(\varkappa r + \varphi)$$

asymptotisch nach (8′), wo φ für $r \to \infty$ gegen $\varkappa r$ verschwindet, nach (15″), (18′), (23)

$$26'') \quad \left\{ \begin{aligned} N^{-2}(n_r, l &= \frac{\big((2l+1)!\big)^2 e^{-\frac{\pi}{\varkappa a}}}{\left|\Gamma\left(l+1+\frac{i}{\varkappa a}\right)\right|^2} \frac{1}{2\varkappa^{2l+2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \\ &= \frac{\big((2l+1)!\big)^2 e^{-\frac{\pi}{\varkappa a}}\,\varkappa a\,\mathfrak{Sin}\frac{\pi}{\varkappa a}}{2\varkappa^{2l+2}\prod\limits_{s=1}^{l}\left(s^2+\frac{1}{(\varkappa a)^2}\right)} \quad \big(x = (\varkappa' - \varkappa) R\big), \end{aligned} \right.$$

da

$$\Gamma\left(l+1 \pm \frac{i}{\varkappa a}\right) = \left(l \pm \frac{i}{\varkappa a}\right)\left(l-1 \pm \frac{i}{\varkappa a}\right) \cdots \Gamma\left(\pm \frac{i}{\varkappa a}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{i}{\varkappa a}\right)\Gamma\left(-\frac{i}{\varkappa a}\right) = i\varkappa a\,\Gamma\left(\frac{i}{\varkappa a}\right)\Gamma\left(1-\frac{i}{\varkappa a}\right)$$

$$= \frac{\pi i \varkappa a}{\sin\frac{\pi i}{\varkappa a}} = \frac{\pi \varkappa a}{\mathfrak{Sin}\frac{\pi}{\varkappa a}} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi.$$

Die normierten Eigenfunktionen sind also nach (8)

$$
(27)\quad
\begin{cases}
u_{n\,l}(r) = \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} \frac{2}{n^2\,(2l+1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}} \\
\qquad \cdot\, e^{-\frac{r}{n\,a}} \left(\frac{2r}{n\,a}\right)^{l} F\left(-(n-l-1),\ 2l+2,\ \frac{2}{n\,a}\right), \\
u_{\varkappa\,l}(r) = \sqrt{\frac{2\varkappa}{a}}\ \frac{1}{(2l+1)!}\, e^{\frac{\pi}{2\varkappa a}} \sqrt{\frac{\prod\limits_{s=1}^{l}\left(s^2 + \frac{1}{(\varkappa a)^2}\right)}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{\varkappa a}}} \\
\qquad \cdot\, e^{i\varkappa r} (2\varkappa r)^{l} F\left(l+1-\frac{i}{\varkappa a},\ 2l+2,\ -2i\varkappa r\right).
\end{cases}
$$

Für $C^{n_r\,l}_{n_r'\,l-1}$ erhält man nach (18), (26) [wenn man darin (25) bzw. (25b) einträgt] und (26′) bzw. (26″) beim Sprung

diskret-diskret

$$
(28)\quad
\begin{cases}
C^{n_r\,l}_{n_r',\,l-1} = \frac{(-1)^{n_r'}\,a}{4(2l-1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!\,(n'+l-1)!}{(n-l-1)!\,(n'-l)!}} \\
\qquad \cdot \left(\frac{4n\,n'}{(n-n')^2}\right)^{l+1} \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^{n+n'} \\
\quad \cdot \left\{ F\left(-n_r,\ -n_r',\ 2l,\ -\frac{4n\,n'}{(n-n')^2}\right) \right. \\
\qquad \left. - \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2 F\left(-n_r - 2,\ -n_r',\ 2l,\ -\frac{4n\,n'}{(n-n')^2}\right) \right\};
\end{cases}
$$

diskret-kontinuierlich

$$
(28')\quad
\begin{cases}
C^{n_r,\,l}_{n_r',\,l-1} = \frac{(-1)^{n_r'}\,i}{8\,\varkappa^{3/2}\,(2l-1)!} \sqrt{\frac{(n'+l-1)!}{(n'-l)!}\ \frac{2\prod\limits_{s=1}^{l}\left(s^2+\frac{1}{(\varkappa a)^2}\right)}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{\varkappa a}}} \\
\qquad \cdot\, e^{\frac{1}{\varkappa a}\left(\frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\varkappa}{k'}\right)} \left(\frac{4k'\varkappa}{k'^2+\varkappa^2}\right)^{l+1} u^{n_r'-1} \\
\quad \cdot \left\{ F\left(l+1-\frac{i}{\varkappa a},\ -n_r',\ 2l,\ 1-\frac{1}{u^2}\right) \right. \\
\qquad \left. - u^2 F\left(l-1-\frac{i}{\varkappa a},\ -n_r',\ 2l,\ 1-\frac{1}{u^2}\right) \right\},
\end{cases}
$$

wo

$$u = e^{2i\,\mathrm{arctg}\,\frac{\varkappa}{k'}}.$$

Dies ist reell auf Grund von (25a)

kontinuierlich–kontinuierlich

$$
(28'')\left\{\begin{aligned}
C^{n_r\, l}_{n_r',\, l-1} &= \frac{i}{8\varkappa\varkappa'(2l-1)!}\sqrt{\frac{\prod\limits_{s=1}^{l}\left(s^2+\frac{1}{(\varkappa a)^2}\right)\prod\limits_{s'=1}^{l-1}\left(s'^2+\frac{1}{(\varkappa' a)^2}\right)}{\varkappa a\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{\varkappa a}\quad \varkappa' a\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{\varkappa' a}}}\\
&\cdot e^{\frac{\pi}{2a}\left|\frac{1}{\varkappa'}-\frac{1}{\varkappa}\right|}\left(\frac{4\varkappa\varkappa'}{(\varkappa+\varkappa')^2}\right)^{l+1}\left|\frac{\varkappa-\varkappa'}{\varkappa+\varkappa'}\right|^{\frac{i}{\varkappa a}-\frac{i}{\varkappa' a}}\\
&\cdot\left\{F\left(l+1+\frac{i}{\varkappa a},\, l-\frac{i}{\varkappa' a},\, 2l,\, \frac{4\varkappa\varkappa'}{(\varkappa+\varkappa')^2}\right)\right.\\
&\left.-\left(\frac{\varkappa+\varkappa'}{\varkappa-\varkappa'}\right)^2 F\left(l-1+\frac{i}{\varkappa a},\, l-\frac{i}{\varkappa' a},\, 2l,\, \frac{4\varkappa\varkappa'}{(\varkappa+\varkappa')^2}\right)\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Dies ist reell auf Grund von

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x),$$

was durch zweimalige Anwendung von (25a) folgt.

Die Summation über alle m gibt

$$\sum_{x\,y\,z\,m'}\left|x^{n_r,\,l,\,m}_{n_r',\,l-1,\,m}\right|^2 = l\left(C^{n_r,\,l}_{n_r',\,l-1}\right)^2$$

und die absolute Intensität der Emission ergibt sich hieraus durch Multiplikation mit $\frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3}(2\pi\nu)^4$, wenn ν die Frequenz ist.

§ 6. Die parabolischen Matrizen

Zur Berechnung der x-Matrix brauchen wir nach (19)

$$J^{(0,1)}_{|m|}(n,n') \quad \text{und} \quad J^{(1,1)}_{|m|}(n,n'),$$

die sich gemäß (20) und (23) auf $J^{(0,0)}$ reduzieren:

$$J^{(0,1)}_{|m|}(n,n') = \frac{|m|}{k}\left(J^{(0,0)}_{|m|-1}(n,n') - J^{(0,0)}_{|m|-1}(n+1,n')\right),$$

$$
\begin{aligned}
J^{(1,1)}_{|m|}(n,n') = \frac{4|m|}{(k^2-k'^2)k}&\Big(\left(\beta_{|m|-1}(n) - \beta^{(n')}_{|m|-1}(n')\right)J^{(0,0)}_{|m|-1}(n,n)\\
&-\left(\beta_{|m|-1}(n+1) - \beta_{|m|-1}(n')\right)J^{(0,0)}_{|m|-1}(n+1,n')\Big).
\end{aligned}
$$

Daher ergibt sich für

$$\left\{J^{(1,1)}_{|m|}(n_1,n_1')\,J^{(0,1)}_{|m|}(n_2,n_2')+\cdot\right\},$$

weil nach (9')

$$k(n_1 + n_2 + |m| + 1) = k'(n_1' + n_2' + |m|) = \frac{1}{a}$$

und somit für die $\beta_{|m|-1}(n) = k\left(\frac{|m|}{2} + n\right)$ gilt:

$$\beta_{|m|-1}(n_1) - \beta_{|m|-1}(n_1') + \cdot = - k,$$

$$\beta_{|m|-1}(n_1) - \beta_{|m|-1}(n_1') + \beta_{|m|-1}(n_2 + 1) - \beta_{|m|-1}(n_2') =$$

$$\beta_{|m|-1}(n_1 + 1) - \beta_{|m|-1}(n_1') + \beta_{|m|-1}(n_2) - \beta_{|m|-1}(n_2') = 0,$$

$$\beta_{|m|-1}(n_1 + 1) - \beta_{|m|-1}(n_1') + \cdot = k,$$

wenn man nach (24) $4/(k'^2 - k^2) = v^2/u$ einsetzt:

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\left\{J^{(1,1)}_{|m|}(n_1, n_2') J^{(0,1)}_{|m|}(n_2, n_2') + \cdot\right\} \\ &\quad = \frac{m^2 v^2}{u k}\left(J^{(0,0)}_{|m|-1}(n_1, n_1') J^{(0,0)}_{|m|-1}(n_2, n_2') \right. \\ &\quad \left. - J^{(0,0)}_{|m|-1}(n_1 + 1, n_1') J^{(0,0)}_{|m|-1}(n_2 + 1, n_2')\right). \end{aligned}\right.$$

Zur Berechnung der z-Matrix brauchen wir nach (19) $J^{(2,0)}_{|m|}(n, n')$, das sich gemäß (23) auf $J^{(0,0)}$ reduziert. Daher ergibt sich für

$$\left\{J^{(2,0)}_{|m|}(n_1, n_1') J^{(0,0)}_{|m|}(n_2, n_2') - \cdot\right\},$$

weil für die $\beta_{|m|}(n) = k\left(\frac{|m|+1}{2} + n\right)$ gilt

$$(\beta_{|m|}(n_1) - \beta_{|m|}(n_1'))^2 - \ = 0,$$

$$\beta_{|m|}(n_1) - \beta_{|m|}(n_1') - \cdot = k(n_1 - n_2) - k'(n_1' - n_2'),$$

wenn man u und v einführt,

$$(29')\quad \left\{\begin{aligned} &\left\{J^{(2,0)}_{|m|}(n_1, n_1') J^{(0,0)}_{|m|}(n_2, n_2') - \cdot\right\} \\ &\quad = \frac{v^2}{u^2}\left\{((n_1' - n_2')(1 + u^2) - (n_1 - n_2)(1 - u^2))\right. \\ &\quad \cdot J^{(0,0)}_{|m|}(n_1, n_1') J^{(0,0)}_{|m|}(n_2, n_2') + 2 n_1' u J^{(0,0)}_{|m|}(n_1, n_1' - 1) \\ &\quad \left. \cdot J^{(0,0)}_{|m|}(n_2, n_2') - 2 n_2' u J^{(0,0)}_{|m|}(n_2, n_2' - 1) J^{(0,0)}_{|m|}(n_1, n_1')\right\}. \end{aligned}\right.$$

Ferner wird der Normierungsfaktor für das diskrete Spektrum wegen

$$\lim_{k = k'} \frac{4}{k^2 - k'^2}\left(\beta_{|m|}(n) - \beta_{|m|}(n')\right) = \frac{2}{k}\left(\frac{|m|+1}{2} + n\right)$$

nach (19′), (23$_1$) und (25e)

$$(30)\quad \begin{cases} N_m^{-2}(n_1, n_2) = \frac{1}{2k}(|m| + 1 + n_1 + n_2) \\ \qquad\qquad \cdot J_{|m|}^{(0,0)}(n_1\, n_1)\, J_{|m|}^{(0,0)}(n_2\, n_2) \\ \qquad = \frac{(|m|!)^4\, n_1!\, n_2!}{2a\,(|m| + n_1)!\,(|m| + n_2)!} \frac{1}{k^{2|m|+4}}, \end{cases}$$

unter Benutzung der Balmerformel (9′).

Der Normierungsfaktor für das kontinuierliche Spektrum ist, wegen

$$\beta_{|m|}(n_1) + \beta_{|m|}(n_2) = \beta_{|m|}(n_1') + \beta_{|m|}(n_2') = \frac{1}{a}$$

und

$$(31)\quad \begin{cases} w_{\sigma=0,\,\varrho=|m|} = \Delta_{n_i\, m}(\lambda_i) \text{ [nach (21) und (10)]} \\ \qquad = \dfrac{2\,|m|!\, e^{-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2\varkappa a} \pm \zeta\right)}}{\left|\Gamma\left(\frac{|m|+1}{2} + i\left(\frac{1}{2\varkappa a} \pm \zeta\right)\right)\right|} \dfrac{1}{\lambda_i^{1/2}\, \varkappa^{\frac{|m|+1}{2}}} \\ \qquad \cdot \cos\left(\frac{\varkappa \lambda_i}{2} + \left(\frac{1}{2\varkappa a} \pm \zeta\right) \ln \varkappa \lambda_i - \frac{|m|+1}{4}\pi\right) \end{cases}$$

asymptotisch nach (10′), wo nach (11) das obere Vorzeichen für $i = 1$, das untere für $i = 2$ gilt, nach (19′) und (23$_1$), wenn $J_{|m|}^{(0,0)}(n_i, n_i')$ das bis R_i genommene Integral bezeichnet,

$$N_m^{-2}(n_1, n_2) = \frac{(|m|!)^2\, e^{-\frac{\pi}{2\varkappa a}}}{\varkappa^{|m|+1}} \lim_{R_1=\infty,\, R_2=\infty} \int\limits_{\Delta\varkappa} \int\limits_{\Delta\zeta} d\varkappa'\, d\zeta'$$

$$\cdot \left\{ \frac{\sin \frac{\varkappa' - \varkappa}{2} R_1}{\varkappa' - \varkappa} \cdot \frac{e^{-\pi\zeta}}{|\Gamma_+|^2}\, J_{|m|}^{(0,0)}(n_2, n_2') + \cdot \right\},$$

wo mit 1 und 2 auch $+\zeta$ und $-\zeta$ zu vertauschen ist

$$\left[\Gamma_\pm \text{ steht für } \Gamma\left(\frac{|m|+1}{2} + i\left(\frac{1}{2\varkappa a} \pm \zeta\right)\right)\right].$$

Die Ausführung der Integration nach $\varkappa'$ gibt

$$\frac{\pi\,(|m|!)^2\, e^{-\frac{\pi}{2\varkappa a}}}{\varkappa^{|m|+1}} \left\{ \frac{e^{\pi\zeta}}{|\Gamma_-|^2} \lim_{R_1=\infty} \int\limits_{\Delta\zeta} J_{|m|}^{(0,0)}(n_1, n_1')\, d\zeta' + \cdot \right\}_{\varkappa=\varkappa'}.$$

Wiederum nach (23_1) und (31) ist, da nach (11)

$$\beta_1 - \beta_1' = (\zeta - \zeta')\,\varkappa \text{ (für } \varkappa = \varkappa'),$$

$$\lim_{\substack{R_1=\infty \\ \varkappa=\varkappa'}} \int_{\Delta\zeta} J^{(0,0)}_{|m|}(n_1, n_1')\,d\zeta' = \frac{2\,(|m|!)^2\, e^{-\pi\left(\frac{1}{2\varkappa a}+\zeta\right)}}{|\Gamma_+|^2\,\varkappa^{|m|+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$= \frac{2\pi\,(|m|!)^2\, e^{-\pi\left(\frac{1}{2\varkappa a}+\zeta\right)}}{|\Gamma_+|^2\,\varkappa^{|m|+1}} \quad \left(x = (\zeta' - \zeta)\ln \varkappa R_1\right).$$

Mithin

$$N_m^{-2}(n_1\,n_2) = \frac{4\pi^2\,(|m|!)^4\, e^{-\frac{\pi}{\varkappa a}}}{|\Gamma_+|^2\,|\Gamma_-|^2\,\varkappa^{2|m|+2}} \tag{32}$$

mit

$$(32')\quad \begin{cases} |\Gamma_\pm|^2 = \prod\limits_{s=1}^{\mu}\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\varkappa a}\right)^2\right)\cdot \dfrac{\pi}{\mathfrak{Cos}\,\pi\left(\frac{1}{2\varkappa a}\pm\zeta\right)}, \\ \qquad\qquad \text{wenn } |m| = 2\mu, \\ \quad = \prod\limits_{s=1}^{\mu}\left(s^2 + \left(\frac{1}{2\varkappa a}\pm\zeta\right)^2\right)\cdot \dfrac{\pi\left(\frac{1}{2\varkappa a}\pm\zeta\right)}{\mathfrak{Sin}\,\pi\left(\frac{1}{2\varkappa a}\pm\zeta\right)}, \\ \qquad\qquad \text{wenn } |m| = 2\mu+1. \end{cases}$$

Die normierten Eigenfunktionen sind also nach (10)

$$(33)\quad \begin{cases} A_m(n_1, n_2) = \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} \dfrac{1}{n^2\,|m|!)^2} \\ \qquad \cdot \sqrt{\dfrac{(|m|+n_1)!\;|m|+n_2)!}{n_1!\quad n_2!}}\; e^{-k\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}}\,(k^2\lambda_1\lambda_2)^{\frac{|m|}{2}} \\ \qquad \cdot F(-n_1, |m|+1, k\lambda_1)\,F(-n_2, |m|+1, k\lambda_2), \\ A_m(n_1, n_2) = \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\varkappa}{(|m|!)^2}\, e^{\frac{\pi}{2\varkappa a}}\left|\Gamma\left(\frac{|m|+1}{2} + i\left(\frac{1}{2\varkappa a}+\zeta\right)\right)\right. \\ \qquad \left.\cdot\,\Gamma\left(\frac{|m|+1}{2} + i\left(\frac{1}{2\varkappa a}-\zeta\right)\right)\right|\, e^{i\varkappa\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}}\,(\varkappa^2\lambda_1\lambda_2)^{\frac{|m|}{2}} \\ \qquad \cdot F\left(\dfrac{|m|+1-\frac{i}{\varkappa a}}{2} - i\zeta,\ |m|+1,\ -i\varkappa\lambda_1\right) \\ \qquad \cdot F\left(\dfrac{|m|+1-\frac{i}{\varkappa a}}{2} + i\zeta,\ |m|+1,\ -i\varkappa\lambda_2\right). \end{cases}$$

Für die Matrizen der Starkeffektkomponenten gilt nach (19), (29), (29') [wenn man darin (25) einträgt] und (30), zur Abkürzung

$$\Psi_\mu(n_i, n_i') = 1 - \frac{n_i\, n_i'}{(\mu+1)} \frac{4\,n\,n'}{(n-n')^2} + \frac{n_i(n_i-1)\cdot n_i'(n_i'-1)}{(\mu+1)(\mu+2)\,2!} \left(\frac{4\,n\,n'}{(n-n')^2}\right)^2 - \cdots$$

und $|m| = \mu$ gesetzt,

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} x^{n_1\,n_2\,m}_{n_1'\,n_2'\,m-1} &= (-1)^{n_1'+n_2'} \frac{a}{4\big((\mu-1)!\big)^2} \\ &\cdot \sqrt{\frac{(n_1+\mu)!}{n_1!}\frac{(n_2+\mu)!}{n_2!}\frac{(n_1'+\mu-1)!}{n_1'!}\frac{(n_2'+\mu-1)!}{n_2'!}} \left(\frac{4\,n\,n'}{(n-n')^2}\right)^{\mu+1} \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^{n+n'} \\ &\cdot \Big\{\Psi_{\mu-1}(n_1, n_1')\, \Psi_{\mu-1}(n_2, n_2') \\ &\qquad - \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2 \Psi_{\mu-1}(n_1+1, n_1')\, \Psi_{\mu-1}(n_2+1, n_2')\Big\}, \\ z^{n_1\,n_2\,m}_{n_1'\,n_2'\,m} &= (-1)^{n_1'+n_2'} \frac{a}{4(\mu!)^2} \\ &\cdot \sqrt{\frac{(n_1+\mu)!}{n_1!}\frac{(n_2+\mu)!}{n_2!}\frac{(n_1'+\mu)!}{n_1'!}\frac{(n_2'+\mu)!}{n_2'!}} \left(\frac{4\,n\,n'}{(n-n')^2}\right)^{\mu+2} \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^{n+n'} \\ &\cdot \Big\{\Big((n_1'-n_2')\frac{n^2+n'^2}{(n+n')^2} - (n_1-n_2)\frac{4\,n\,n'}{(n+n')^2}\Big)\, \Psi_\mu(n_1, n_1')\, \Psi_\mu(n_2, n_2') \\ &- 2\,\big(n_1'\, \Psi_\mu(n_1, n_1'-1)\, \Psi_\mu(n_2, n_2') - n_2'\, \Psi_\mu(n_2, n_2'-1)\, \Psi_\mu(n_1, n_1')\big)\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Die mit (34) bei natürlicher Anregung berechneten Intensitäten der Starkeffektkomponenten stimmen mit den von Schrödinger[1]) angegebenen Zahlen überein.

Hamburg, Physikalisches Staatsinstitut.

---

1) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **80**. S. 437. 1926; W. Gordon und R. Minkowski, Naturw. **17**. S. 368. 1929.

(Eingegangen 6. August 1929)