Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos

Lista 3

Pedro Calligaris Delbem 5255417

Professor: Attilio Cucchieri

Abril de 2025

Sumário

1 Runge-Kutta Methods

1.1 Exercício 1

Tarefa: Demonstrar que o erro da interpolação linear

$$f(x,y) = \frac{x - x_{n-1}}{h} f_n + \frac{x_n - x}{h} f_{n-1}$$

é $\mathcal{O}(h^2)$

Demonstração:

Seja $f(x) \in C^2$ queremos interpolar $f(x)$ entre os pontos x_{n-1} e $x_n = x_{n-1} + h$ utilizando interpolação linear, e estimar o erro:

$$E(x) = f(x) - \tilde{f}(x)$$

onde

$$\tilde{f}(x) = \frac{x - x_{n-1}}{h} f(x_n) + \frac{x_n - x}{h} f(x_{n-1})$$

Expandimos $f(x_n)$ em série de Taylor ao redor de x_{n-1}:

$$f(x_n) = f(x_{n-1} + h) = f(x_{n-1}) + hf'(x_{n-1}) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_{n-1}, x_n)$$

Expandimos também $f(x)$ ao redor de x_{n-1}:

$$f(x) = f(x_{n-1}) + (x - x_{n-1})f'(x_{n-1}) + \frac{(x - x_{n-1})^2}{2} f''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_{n-1}, x)$$

Substituímos a expansão de $f(x_n)$ na expressão de $\tilde{f}(x)$:

$$\tilde{f}(x) = \frac{x - x_{n-1}}{h} \left[f(x_{n-1}) + hf'(x_{n-1}) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_1) \right] + \frac{x_n - x}{h} f(x_{n-1})$$

Logo

$$\tilde{f}(x) = \frac{x - x_{n-1}}{h} f(x_{n-1}) + (x - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) + \frac{(x - x_{n-1})h}{2} f''(\xi_1) + \frac{x_n - x}{h} f(x_{n-1})$$

Como $x_n = x_{n-1} + h$, temos $x_n - x = h - (x - x_{n-1})$ - assim:

$$\tilde{f}(x) = \left(\frac{x - x_{n-1}}{h} + \frac{h - (x - x_{n-1})}{h} \right) f(x_{n-1}) + (x - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) + \frac{(x - x_{n-1})h}{2} f''(\xi_1)$$

Segue que:

$$\tilde{f}(x) = f(x_{n-1}) + (x - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) + \frac{(x - x_{n-1})h}{2} f''(\xi_1)$$

Fazendo a subtração entre $f(x)$ e $\tilde{f}(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) - \tilde{f}(x) = & \left[f(x_{n-1}) + (x - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) + \frac{(x - x_{n-1})^2}{2} f''(\xi_2) \right] \\ & - \left[f(x_{n-1}) + (x - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) + \frac{(x - x_{n-1})h}{2} f''(\xi_1) \right] \end{aligned}$$

Deste modo:

$$\begin{aligned} f(x) - \tilde{f}(x) &= \frac{1}{2} \left[(x - x_{n-1})^2 f''(\xi_2) - (x - x_{n-1}) h f''(\xi_1) \right] \\ &= \frac{(x - x_{n-1})}{2} \left[(x - x_{n-1}) f''(\xi_2) - h f''(\xi_1) \right] \end{aligned}$$

Podemos reescrever esse erro como:

$$f(x) - \tilde{f}(x) = -\frac{(x - x_{n-1})(x - x_n)}{2} f''(\tilde{\xi}) \quad \text{para algum } \tilde{\xi} \in (x_{n-1}, x_n)$$

onde usamos que $(x - x_{n-1})(x - x_n) = (x - x_{n-1})^2 - h(x - x_{n-1})$, e agrupamos os termos com uma média das derivadas.

Portanto, o erro da interpolação linear de $f(x) \in C^2$ entre dois pontos é dado por:

$$\boxed{f(x) - \tilde{f}(x) = -\frac{(x - x_{n-1})(x - x_n)}{2} f''(\xi) \quad \text{para algum } \xi \in (x_{n-1}, x_n)}$$

Como $|(x - x_{n-1})(x - x_n)| \leq \frac{h^2}{4}$, então:

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| = \mathcal{O}(h^2)$$

1.2 Exercício 2

Tarefa: Resolva a equação

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -4\pi^2 y(x)$$

com as condições iniciais $y(x = 0) = 0$ e $y'(x = 0) = 0$ usando o algoritimo de Runge-Kutta.

Código Escrito:

2 The Numerov Algorithm

2.1 Exercício 3

Tarefa: Resolva a equação

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -4\pi^2 y(x)$$

com as condições iniciais $y(x = 0) = 0$ e $y'(x = 0) = 0$ usando o algoritimo de Numerov. Explique como foram escolhidos os valores iniciais y_0 e y_1. Compare o resultado com a solução obtida no exercício anterior.

Código Escrito: