
Mapeos Conformes y Grupos de Simetría del Espacio Físico

Eduardo Alberto Bardales España

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN FÍSICA

ANTEPROYECTO DE TRABAJO PARA AÑO DE PRÁCTICAS

SUPERVISADO POR: M.Sc. JUAN DIEGO CHANG

21 de enero de 2019

1. Descripción General de la Institución

1.1. Instituto de Investigación de Ciencias Físicas y Matemáticas (ICFM)

El Instituto de Investigación de Ciencias Físicas y Matemáticas (ICFM) es la unidad de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas (ECFM) que promueve y realiza estudios avanzados en áreas científicas, fundamentales y aplicadas, de las ciencias físicas y matemáticas. El ICFM se proyecta como una plataforma regional de excelencia dedicada a la investigación y difusión del conocimiento en física y matemática. Las principales líneas de trabajo del ICFM son:

- La investigación académica en ciencia básica y aplicada.
- La promoción de la investigación en ciencia básica y aplicada en el ámbito universitario.
- La difusión y divulgación del conocimiento generado por la investigación en ciencias físicas y matemáticas.
- La Actualización continua de programas académicos de ciencias físicas y matemáticas.

2. Descripción del grupo de trabajo

El proyecto es dirigido por el M.Sc. Juan Diego Chang en el ICFM, dentro del programa de investigación regular de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas.

Partida del proyecto: 29 de enero de 2019.

El M.Sc. Chang estudió la licenciatura en Física de la Universidad del Valle de Guatemala (UVG), y una maestría en Física y Modelación en la Universidad de Cergy-Pontoise en Francia, centrándose en sistemas integrables. Actualmente labora como profesor-investigador en la ECFM.

3. Descripción General del Proyecto

El proyecto consiste en el estudio de dos temas matemáticos diferentes pero relacionados íntimamente a la física moderna. El primero de estos temas es la teoría básica de los Mapeos Conformes. El segundo tema está constituido en Grupos Euclídeos de 2 y 3 dimensiones, y los Grupos de Lorentz y de Poincaré asociados al espacio-tiempo de Minkowski. Ambos temas se encuentran contenidos en el estudio de las Teorías Conformes de Campos (CFT, por sus siglas en inglés) dado que, como indica el nombre, las CFT son invariantes bajo transformaciones (o mapeos) conformes, y los grupos de simetría del espacio en el que se desarrolla una teoría proveen el álgebra y leyes de conservación ligadas a la teoría.

3.1. Mapeos Conformes

Los mapeos conformes, en una definición práctica, son transformaciones del espacio que conservan localmente los ángulos entre curvas en ese espacio. Los mapeos conformes son invertibles y son susceptibles a composición, de manera que mapeos de una región a sí misma forman un grupo [1].

3.2. Grupos Euclidianos

Los grupos euclídeos son los grupos de simetría de los espacios euclídeos, y consisten en el conjunto de todas las rotaciones, traslaciones y sus productos dentro de un espacio de ese tipo. El estudio del grupo requiere especificar sus elementos, generadores y su álgebra de Lie. A diferencia de los grupos de rotación $SO(n)$, las representaciones irreducibles unitarias de estos grupos son infinito-dimensionales [2].

3.3. Grupo de Lorentz y Grupo de Poincaré

El espacio-tiempo de Minkowski es un espacio 4-dimensional con una métrica $(-1, 1, 1, 1)$, por lo que no es un espacio euclídeo, pero el análisis realizado sobre los grupos euclídeos pueden generalizarse hacia los llamados grupos de Lorentz y de Poincaré. El grupo de Lorentz $SO(3, 1)$ está formado por las 'rotaciones' en el espacio-tiempo, tanto rotaciones espaciales de $SO(3)$ como aquellas en las que 'gira' también la dimensión temporal. El grupo de Poincaré consiste en el grupo de Lorentz más todas las traslaciones en el espacio-tiempo. Sus generadores y álgebra de Lie guardan similitudes con las de los grupos euclídeos, pero diferenciados debido a la métrica; el álgebra de $SO(3, 1)$ es equivalente al álgebra de $SU(2) \times SU(2)$ [2].

4. Objetivos

4.1. Objetivo General

Estudiar y aprender las ideas fundamentales sobre Mapeos Conformes, y sobre los grupos de simetría del espacio euclídeo y del espacio-tiempo de Minkowski, como preámbulo a un estudio inicial sobre Teoría Conforme de Campos.

4.2. Objetivos Específicos

- Entender la definición y características principales de los mapeos conformes.
- Aprender la composición, estructura y álgebra de Lie de los grupos euclídeos en 2 y 3 dimensiones.
- Aprender la composición, estructura y álgebra de Lie del grupo de Lorentz y el grupo de Poincaré.

5. Justificación del Proyecto

Las Teorías Conformes de Campos (CFT) son un tipo de teoría cuántica de campos que, además de su posicionamiento como teoría en sí misma, constituye una herramienta utilizada en múltiples ramas de la física moderna. Tiene aplicaciones en mecánica estadística, materia condensada y varias divisiones de la física de altas energías, por lo que es una pieza fundamental en el aprendizaje de quienes buscan trabajar en algún campo de la física moderna.

Al iniciar el estudio de un tema particular de física, se deben tomar en consideración los conocimientos previos de matemática y física necesarios para aprender adecuadamente el tema objetivo. El estudio de las CFT se basa en el análisis de las simetrías en un espacio sometido a transformaciones (o mapeos) conformes; por tanto, es evidente que el estudio de estas teorías requiere de considerables conocimientos previos en análisis de variable compleja, especialmente en los fundamentos de mapeos conformes, y en teoría de los grupos de simetría del espacio, el cual puede ser el espacio euclídeo o el espacio-tiempo de Minkowski, o una variante de estos.

Con mayor generalidad, el análisis de variable compleja y la teoría de grupos son temas fundamentales para la formación profesional en múltiples ramas de la física, y en la ECFM la carrera de física solamente cuenta con un curso de variable compleja que no llega a mapeos conformes y no posee ningún curso en el que se estudie teoría de grupos por sí sola. Se hace notorio, entonces, que los estudios a realizar en estas prácticas son muy importantes para completar los conocimientos adecuados a una Licenciatura en Física.

6. Metodología

El estudio consiste en la selección de material útil de entre múltiples fuentes a través de lecturas superficiales de los textos. Luego se secciona el material seleccionado de acuerdo a las divisiones propuestas en su desarrollo escrito; se procede a leer cada sección de manera pausada y analítica, buscando entender cada paso del desarrollo y completar cualquier procedimiento abreviado que se encuentre. Tras la lectura de cada sección, se procede a redactar una síntesis de lo comprendido en la lectura. Se requiere, además, familiarizarse y comprender conceptos generales de variable compleja y teoría de grupos para optimizar el aprendizaje de los temas específicos.

7. Cronograma

| Tareas | Enero | Febrero | Marzo | Abril | Mayo | Junio | Julio | Agosto |
|---------------|-------|---------|-------|-------|------|-------|-------|--------|
| Tarea 1 | | | | | | | | |
| Tarea 2 | | | | | | | | |
| Sub-tarea 2.1 | | | | | | | | |
| Sub-tarea 2.2 | | | | | | | | |
| Tarea 3 | | | | | | | | |
| Tarea 4 | | | | | | | | |
| Sub-tarea 4.1 | | | | | | | | |
| Sub-tarea 4.2 | | | | | | | | |
| Tarea 5 | | | | | | | | |
| Tarea 6 | | | | | | | | |
| Sub-tarea 6.1 | | | | | | | | |
| Sub-tarea 6.2 | | | | | | | | |
| Tarea 7 | | | | | | | | |

- **Tarea 1:** Explorar diversas fuentes bibliográficas sobre Análisis de Variable Compleja en busca de las explicaciones mejor desarrolladas y más claras sobre Mapectos Conformes.
- **Tarea 2:** Estudiar sobre Mapectos Conformes de las fuentes seleccionadas.
- *Sub-tarea 2.1:* Dividir el tema según secciones dadas por la bibliografía elegida.
- *Sub-tarea 2.2:* Redactar a manera de informe lo aprendido en cada sección.
- **Tarea 3:** Explorar diversas fuentes bibliográficas sobre Teoría de Grupos en Física, buscando las explicaciones mejor desarrolladas y más claras sobre Grupos Euclídeos, Grupo de Lorentz y Grupo de Poincaré, y aprendiendo conceptos fundamentales de teoría de grupos general.
- **Tarea 4:** Estudiar sobre Grupos Euclídeos de las fuentes seleccionadas.
- *Sub-tarea 4.1:* Dividir el tema según secciones dadas por la bibliografía elegida.
- *Sub-tarea 4.2:* Redactar a manera de informe lo aprendido en cada sección.
- **Tarea 5:** 40 horas de colaboración con proyectos del área Social-Humanística de la ECFM.
- **Tarea 6:** Estudiar sobre Grupos de Lorentz y de Poincaré de las fuentes seleccionadas.
- *Sub-tarea 6.1:* Dividir el tema según secciones dadas por la bibliografía elegida.
- *Sub-tarea 6.2:* Redactar a manera de informe lo aprendido en cada sección.
- **Tarea 7:** Organizar y redactar el informe final de prácticas.

8. Referencias Comentadas

Referencias

- [1] Marsden, J. E., Hoffman, M. J., W. H. Freeman and Company, *Basic Complex Analysis*, 2nd ed, 1987

Libro introductorio al Análisis de Variable Compleja, que incluye el tema de Mapeos Conformes. Es un libro enfocado a la formalidad matemática, pero con explicaciones claras y ejemplificadas, e incluye ejemplos de aplicación a física.

- [2] Tung, W-K., World Scientific Publishing Co Pte Ltd., *Group Theory in Physics*, 1985

Libro para estudiantes de pre-grado avanzado y posgrado, que desarrolla la Teoría de Grupos y Simetrías enfocándose en sus usos en física clásica y moderna.