Mapeos PCE reducidos

J. A. de León

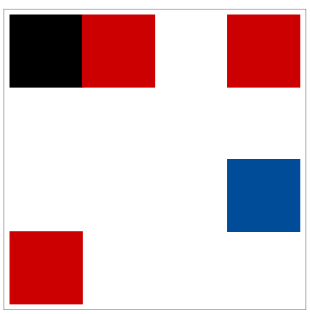
18 de enero de 2021

Sea $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$ un mapeo PCE de 2 qubits reducido, cuya acción es equivalente a

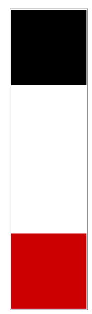
$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\rho_i) = \mathrm{Tr}_j\left[\mathcal{E}\left(\widetilde{\rho}\right)\right], \qquad i, j = 1, 2; \qquad i \neq j, \tag{1}$$

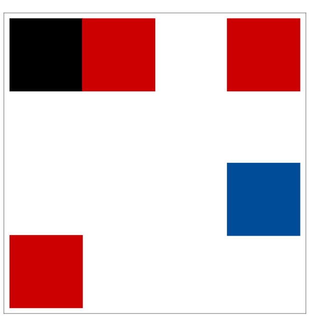
donde $\mathcal{E}$ es un mapeo PCE de 2 qubits, $\widetilde{\rho}$ es una matriz de densidad de 2 qubits y ρ_i una matriz de densidad de 1 qubit, con i el qubit al que refiere.

Veamos a continuación en la representación de los tableros de los mapeos PCE un mapeo reducido $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$. La operación $\mathcal{E}$, representada por su tablero en la parte izquierda de las 2 figuras de abajo, no es una operación CP porque viola la regla de la potencia de 2 componentes invariantes. Sin embargo, dos casos se presentan para las operaciones reducidas sobre cada uno de los qubits: (a) la operación sobre el primer 1 qubit es un canal PCE, y (b) la operación reducida sobre el segundo qubit no es un canal cuántico porque no es CP, dado que viola la regla de la potencia de 2 para 1 qubit.

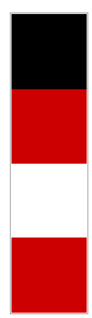


$\xmapsto{\mathrm{Tr}_2}$

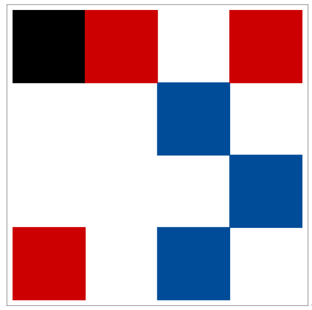




$\xmapsto{\mathrm{Tr}_1}$



Otro mapeo PCE del que resultan las mismas operaciones reducidas de 1 qubit es el siguiente:

.

Acabamos de presentar dos mapeos PCE de 2 qubits, cuyas operaciones reducidas de 1 qubit son iguales. Esto, con ayuda de la representación de los tableros, nos motiva a pensar que lo único necesario para entender las operaciones PCE reducidas es la acción de $\mathcal{E}$ sobre las componentes de la matriz de densidad de 2 qubits, escrita como en (3), de la forma r_{i0} y r_{0j}.

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{i,j} r_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \tag{2}$$

Veamos a continuación una prueba analítica para la hipótesis que acabamos de formular. Recordemos que un mapeo PCE de 2 qubits da como resultado

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{4} \sum_{i,j} r'_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j, \tag{3}$$

con alguna cantidad l de componentes $r'_{ij} = 0$ y $(16 - l)$ componentes que se mantienen invariantes $(r'_{ij} = r_{ij})$. Luego, al calcular cualquiera de las dos operaciones reducidas $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$ da como resultado

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\rho_1) = \mathrm{Tr}_2 \left(\frac{1}{4} \sum_{i,j} r'_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i} r'_{i0} \sigma_i, \tag{4}$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\rho_2) = \mathrm{Tr}_1 \left(\frac{1}{4} \sum_{i,j} r'_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{j} r'_{0j} \sigma_j, \tag{5}$$

por lo cual, para que (4) y (5) sean el resultado de un canal PCE de 1 qubit, el número de componentes que cumplen con $r'_{i0} = r_{i0}$ o r'_{0j} debe ser una potencia de 2.

En conclusión, la condición para que un mapeo PCE de 2 qubits reducido sea un canal PCE de 1 qubit (CP) es independiente del estado del estado inicial del sistema total. Es decir, aunque el sistema total se encuentre en un estado producto $(\rho_1 \otimes \rho_2)$ o no la condición para que el mapeo reducido sea un canal PCE de 1 qubit es independiente de la matriz de densidad inicial total y de cada matriz de densidad reducida (así se fijara cualquiera de los dos qubits). La condición necesaria y suficiente para que un mapeo PCE de 2 qubits reducido sea un canal PCE de 1 qubit es que el número de componentes que el mapeo mantiene invariantes del conjunto $\{r_{i0}\}$ (o $\{r_{0j}\}$) obedezca la regla de 2^n $(1, 2$ o $4)$ componentes invariantes.