Mapeos proyectivos en sistemas de qubits

José Alfredo de León[1], Carlos Pineda[2], David Dávalos[2], Alejandro Fonseca[3]

[1]Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, U. de San Carlos de Guatemala
[2]Instituto de Física, U. Nacional Autónoma de México
[3]Departamento de Física, U. Federal de Pernambuco

I Congreso Guatemalteco de Física
09 de julio de 2021

Outline

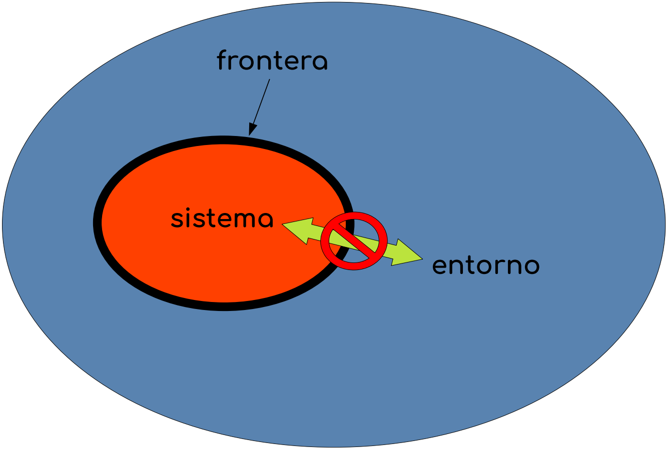
Sistemas cuánticos abiertos

Qubits

Operaciones PCE

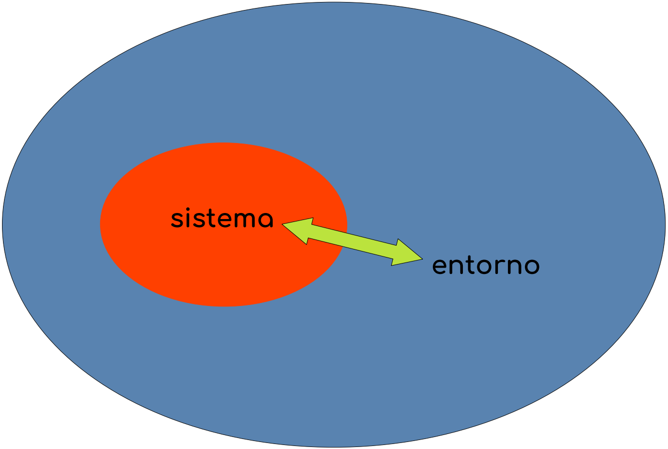
Sistemas cuánticos abiertos

¿Qué son?



Sistemas cuánticos abiertos

¿Qué son?



Sistemas cuánticos abiertos

Matriz de densidad ρ

Si un sistema se encuentra en alguno de los estados $|\psi_i\rangle$ con probabilidad p_i, la matriz de densidad del sistema se define como

$$\rho \equiv \sum_i p_i \, |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \, .$$

Una matriz ρ es una matriz de densidad asociada a un ensamble de estados $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ si y sólo si

1. $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$,
2. $\rho \geq 0$.

Sistemas cuánticos abiertos

Matriz de densidad ρ

Si un sistema se encuentra en alguno de los estados $|\psi_i\rangle$ con probabilidad p_i, la matriz de densidad del sistema se define como

$$\rho \equiv \sum_i p_i \, |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \, .$$

Una matriz ρ es una matriz de densidad asociada a un ensamble de estados $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ si y sólo si

1. $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$,
2. $\rho \geq 0$.

Sistemas cuánticos abiertos

Matriz de densidad ρ

Si un sistema se encuentra en alguno de los estados $|\psi_i\rangle$ con probabilidad p_i, la matriz de densidad del sistema se define como

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \,.$$

Una matriz ρ es una matriz de densidad asociada a un ensamble de estados $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ si y sólo si

1. $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$,
2. $\rho \geq 0$.

Una operación lineal $\mathcal{E}$ que actúa sobre la matriz de densidad ρ como

$$\mathcal{E}(\rho) = \rho'$$

es un canal cuántico si

1. Preserva las características de la matriz de densidad,
2. Es una operación completamente positiva.

Una operación lineal $\mathcal{E}$ que actúa sobre la matriz de densidad ρ como

$$\mathcal{E}(\rho) = \rho'$$

es un canal cuántico si

1. Preserva las características de la matriz de densidad,
2. Es una operación completamente positiva.

Una operación lineal $\mathcal{E}$ que actúa sobre la matriz de densidad ρ como

$$\mathcal{E}(\rho) = \rho'$$

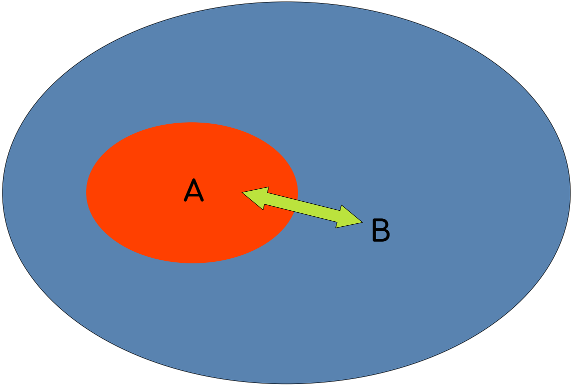
es un canal cuántico si

1. Preserva las características de la matriz de densidad,
2. Es una operación completamente positiva.

Completa positividad

¿Para qué o qué?

Supongamos una operación $\mathcal{E}$ que actúa sobre el sistema A.

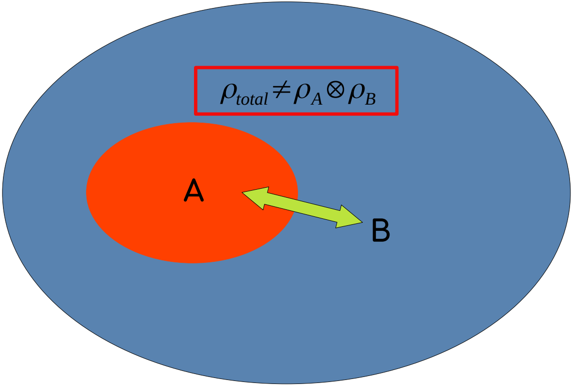


No es suficiente que $\mathcal{E}(\rho_A) \geq 0$, también $\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}(\rho_{total}) \geq 0$.

Completa positividad

¿Para qué o qué?

Supongamos una operación $\mathcal{E}$ que actúa sobre el sistema A.



No es suficiente que $\mathcal{E}(\rho_A) \geq 0$, también $\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}(\rho_{total}) \geq 0$.

Completa positividad
Definición

Una operación $\mathcal{E}$ es completamente positiva si y sólo si

$$\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}(\rho_{\mathcal{E}}) \geq 0,$$

donde $\rho_{\mathcal{E}}$ es el estado maximamente entrelazado entre dos copias idénticas del sistema sobre el que actúa $\mathcal{E}$.

Sistemas cuánticos abiertos

Qubits

Operaciones PCE

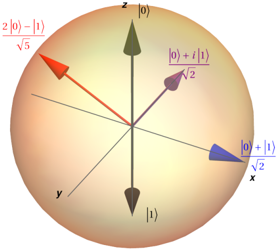
¿Qué es un qubit?

Un qubit es un sistema cuántico de dos niveles.

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} r_i \sigma_i$$

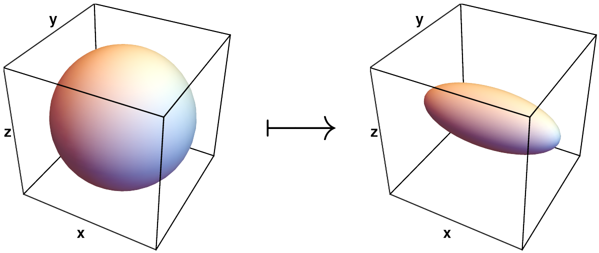
$$\rho = \frac{\mathbb{1} + r_1\sigma_x + r_2\sigma_y + r_3\sigma_z}{2},$$

(r_1, r_2, r_3) especifican las coordenadas cartesianas de un punto en la esfera de Bloch.



Canal *bit-flip* de 1 qubit

El *bit-flip* actúa sobre la esfera de Bloch como



Transforma a las componentes r_i de la matriz de densidad como

$$(1, r_1, r_2, r_3) \longmapsto (1, r_1, (1-p)r_2, (1-p)r_3).$$

Matriz de densidad de n qubits

En la base de productos tensoriales de las matrices de Pauli, la matriz de densidad de n qubits se escribe

$$\rho = \frac{1}{2^n} \sum_{j_1,\ldots,j_n=0}^{3} r_{j_1,\ldots,j_n} \sigma_{j_1} \otimes \ldots \otimes \sigma_{j_n}, \qquad r_{0,\ldots,0} = 1.$$

Llamaremos 'componentes de Pauli' a las $r_{j_1,\ldots,j_n}$.

Matriz de densidad de n qubits

En la base de productos tensoriales de las matrices de Pauli, la matriz de densidad de n qubits se escribe

$$\rho = \frac{1}{2^n} \sum_{j_1,\ldots,j_n=0}^{3} r_{j_1,\ldots,j_n} \sigma_{j_1} \otimes \ldots \otimes \sigma_{j_n}, \qquad r_{0,\ldots,0} = 1.$$

Llamaremos 'componentes de Pauli' a las $r_{j_1,\ldots,j_n}$.

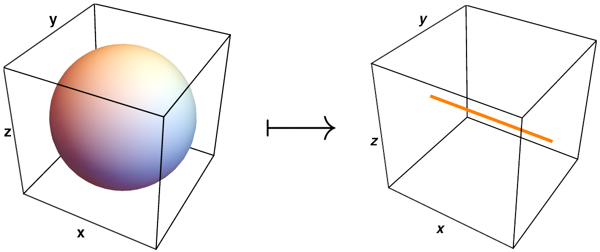
Sistemas cuánticos abiertos

Qubits

Operaciones PCE

Motivación (1/2)

Un caso particular del canal *bit-flip* es cuando

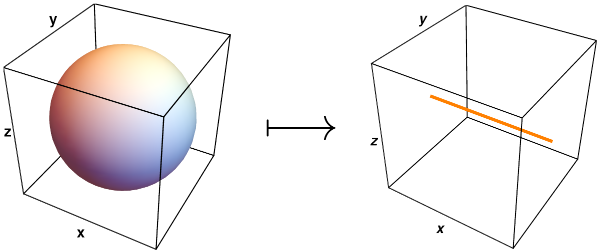


Las componentes de Pauli r_i se transforman como

$$(1, r_1, r_2, r_3) \longmapsto (1, r_1, 0, 0).$$

Motivación (1/2)

Un caso particular del canal *bit-flip* es cuando



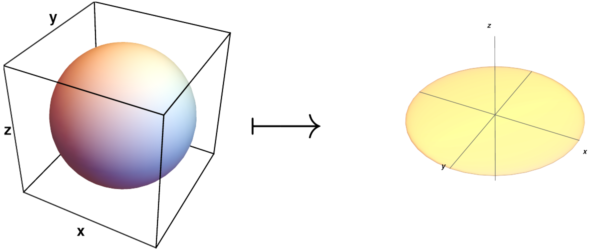
Las componentes de Pauli r_i se transforman como

$$(1, r_1, r_2, r_3) \longmapsto (1, r_1, 0, 0).$$

¿Son canales cuánticos todas las operaciones que borran cualesquiera de las componentes de Pauli de 1 qubit?

Motivación (2/2)

No. Las operaciones Λ que borran dos componentes de Pauli no son canales cuánticos.

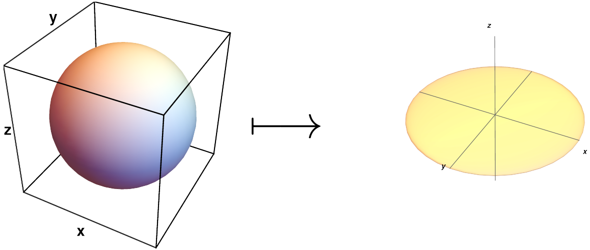


$$(1, r_1, r_2, r_3) \longmapsto (1, r_1, r_2, 0).$$

$\Lambda \otimes \mathbb{1}(|\mathrm{Bell}\rangle\langle\mathrm{Bell}|) \ngeq 0$, por consiguiente Λ no es completamente positiva.

Motivación (2/2)

No. Las operaciones Λ que borran dos componentes de Pauli no son canales cuánticos.



$$(1, r_1, r_2, r_3) \longmapsto (1, r_1, r_2, 0).$$

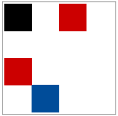
$\Lambda \otimes \mathbb{1}(|\text{Bell}\rangle\langle\text{Bell}|) \not\geq 0$, por consiguiente Λ no es completamente positiva.

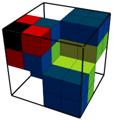
Operaciones PCE

Una operación PCE (*Pauli component erasing*) es una operación lineal que transforma a las componentes de Pauli de una matriz de densidad ρ de n qubits como

$$r_{j_1,\ldots,j_n} \longmapsto \tau_{j_1,\ldots,j_n} r_{j_1,\ldots,j_n}, \qquad \tau_{j_1,\ldots,j_n} = 0, 1.$$

Una operación PCE borra o deja invariantes las componentes de Pauli.



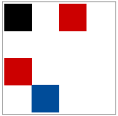


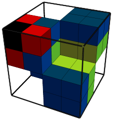
Operaciones PCE

Una operación PCE (*Pauli component erasing*) es una operación lineal que transforma a las componentes de Pauli de una matriz de densidad ρ de n qubits como

$$r_{j_1,\ldots,j_n} \longmapsto \tau_{j_1,\ldots,j_n} r_{j_1,\ldots,j_n}, \qquad \tau_{j_1,\ldots,j_n} = 0, 1.$$

Una operación PCE borra o deja invariantes las componentes de Pauli.



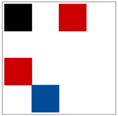


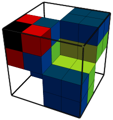
Operaciones PCE

Una operación PCE (*Pauli component erasing*) es una operación lineal que transforma a las componentes de Pauli de una matriz de densidad ρ de n qubits como

$$r_{j_1,\ldots,j_n} \longmapsto \tau_{j_1,\ldots,j_n} r_{j_1,\ldots,j_n}, \qquad \tau_{j_1,\ldots,j_n} = 0, 1.$$

Una operación PCE borra o deja invariantes las componentes de Pauli.





Problema: ¿cuáles son las características del suconjunto de canales cuánticos de las operaciones PCE?

Los eigenvalores de la matriz de Choi de una operación PCE de n qubits son

$$\vec{\lambda} = \underbrace{(a \otimes \ldots \otimes a)}_{n \text{ veces}} \vec{\tau}$$

con

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y $\vec{\tau}$ un vector de 4^n componentes.

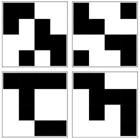
Canales cuánticos PCE

Regla 2^k

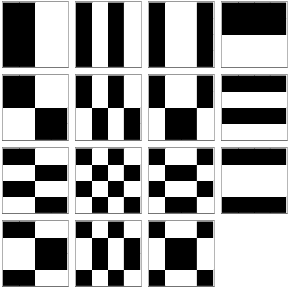
Los canales cuánticos PCE son operaciones que dejan 2^k componentes de Pauli $r_{j_1,\dots,j_n}$ invariantes. Sin embargo, no sólo importa cuántas $r_{j_1,\dots,j_n}$, sino también cuáles.

2 qubits, 8 componentes invariantes:

Operaciones PCE que no son canales cuánticos:



Todos los canales cuánticos PCE que borran 15 componentes:



Canales cuánticos PCE

Regla espejo

El número de canales PCE según la cantidad de componentes de Pauli invariantes obedece una regla 'espejo'.

3 qubits:

canales PCE	1	63	651	1395	651	63	1
componentes	**1**	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**

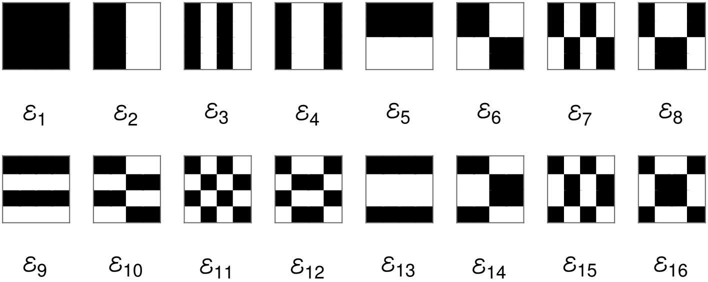
operaciones PCE	1	63	39711	5.5×10^{7}	1.2×10^{14}	9.2×10^{17}	1
componentes	**1**	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**

Canales cuánticos PCE

Generadores

Los canales cuánticos PCE pueden escribirse como concatenación de canales generadores.

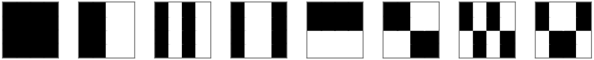
Generadores canales PCE de 2 qubits:



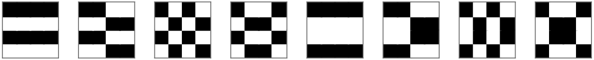
Ejemplo

2 qubits

<u>Generadores:</u>



$\mathcal{E}_1$ $\mathcal{E}_2$ $\mathcal{E}_3$ $\mathcal{E}_4$ $\mathcal{E}_5$ $\mathcal{E}_6$ $\mathcal{E}_7$ $\mathcal{E}_8$

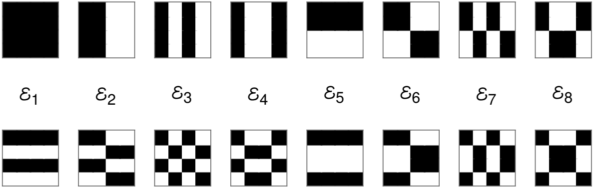


$\mathcal{E}_9$ $\mathcal{E}_{10}$ $\mathcal{E}_{11}$ $\mathcal{E}_{12}$ $\mathcal{E}_{13}$ $\mathcal{E}_{14}$ $\mathcal{E}_{15}$ $\mathcal{E}_{16}$

Ejemplo

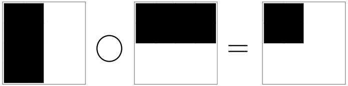
2 qubits

<u>Generadores:</u>



$\mathcal{E}_1$ $\mathcal{E}_2$ $\mathcal{E}_3$ $\mathcal{E}_4$ $\mathcal{E}_5$ $\mathcal{E}_6$ $\mathcal{E}_7$ $\mathcal{E}_8$

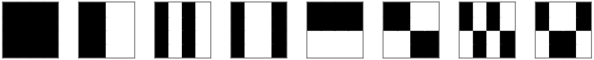
$\mathcal{E}_9$ $\mathcal{E}_{10}$ $\mathcal{E}_{11}$ $\mathcal{E}_{12}$ $\mathcal{E}_{13}$ $\mathcal{E}_{14}$ $\mathcal{E}_{15}$ $\mathcal{E}_{16}$



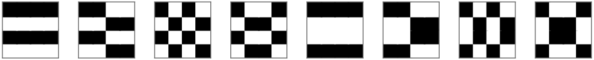
Ejemplo

2 qubits

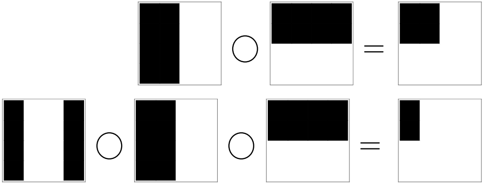
Generadores:



$\mathcal{E}_1$ $\mathcal{E}_2$ $\mathcal{E}_3$ $\mathcal{E}_4$ $\mathcal{E}_5$ $\mathcal{E}_6$ $\mathcal{E}_7$ $\mathcal{E}_8$



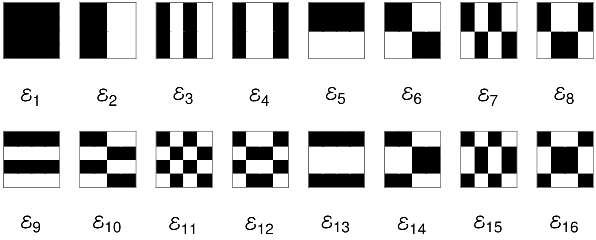
$\mathcal{E}_9$ $\mathcal{E}_{10}$ $\mathcal{E}_{11}$ $\mathcal{E}_{12}$ $\mathcal{E}_{13}$ $\mathcal{E}_{14}$ $\mathcal{E}_{15}$ $\mathcal{E}_{16}$

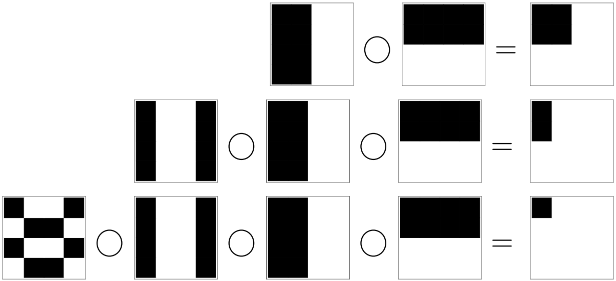


Ejemplo

2 qubits

Generadores:





Canales PCE

n qubits

Un canal PCE de n qubits puede escribirse como

$$\Phi = \underbrace{\mathcal{E}_{j_1} \circ \mathcal{E}_{j_2} \circ \ldots \circ \mathcal{E}_{j_l}}_{\text{máximo } 2^n},$$

con $\mathcal{E}_{j_i}$ los generadores.

Los generadores $\mathcal{E}_{j_i}$ son las únicas formas que están físicamente permitidas de borrar la mitad de las componentes de Pauli de un sistema de n qubits.

Canales PCE

n qubits

Un canal PCE de n qubits puede escribirse como

$$\Phi = \underbrace{\mathcal{E}_{j_1} \circ \mathcal{E}_{j_2} \circ \ldots \circ \mathcal{E}_{j_l}}_{\text{máximo } 2^n},$$

con $\mathcal{E}_{j_i}$ los generadores.

Los generadores $\mathcal{E}_{j_i}$ son las únicas formas que están físicamente permitidas de borrar la mitad de las componentes de Pauli de un sistema de n qubits.

¡Muchas gracias!

Contacto:
José Alfredo de León
deleongarrido.jose@gmail.com