Mapeos proyectivos en sistemas de varios qubits

VI Congreso Estudiantil de Física y Matemática - Guatemala

J. A. de León[1] C. Pineda[2] D. Dávalos[2] A. Fonseca[2]

[1]Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de San Carlos de Guatemala

[2]Instituto de Física
Universidad Nacional Autónoma de México

28 de septiembre de 2020


José Alfredo de León
David Dávalos
Alejandro Fonseca
Carlos Pineda
Instituto de Física

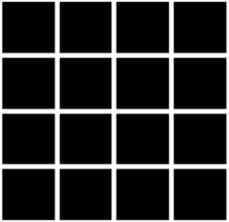
Esquema

Esquema

Introducción

Introducción

Estado de un sistema físico:



Introducción

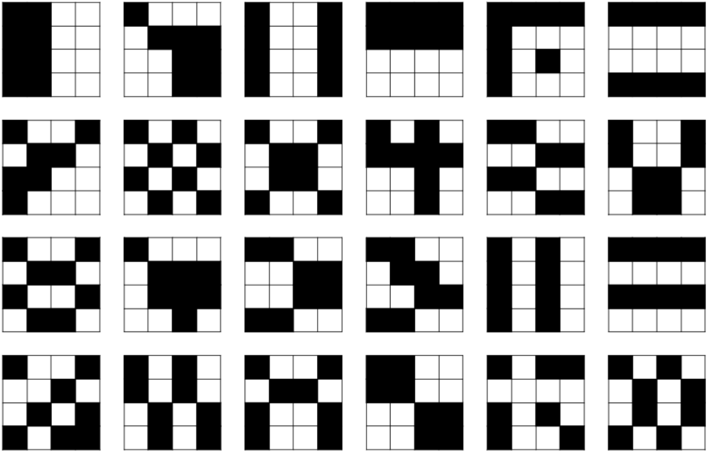
Introducción

Introducción

- Arena: mecańica cuántica
- Tipo de sistemas: abiertos (no ideales)

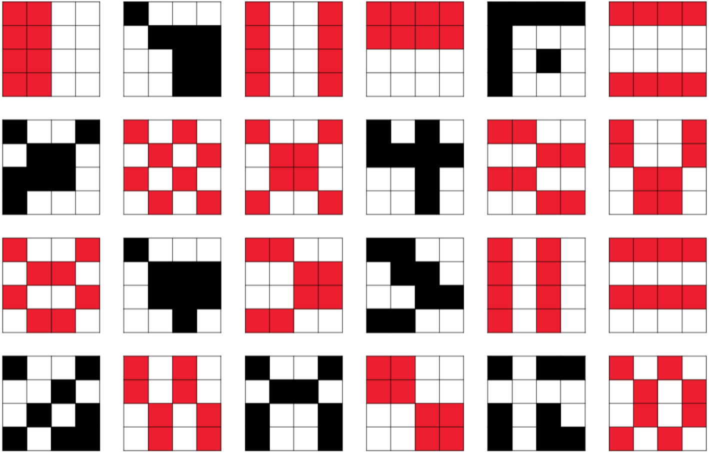
Introducción

Algunos posibles estados con la mitad de la información borrada:



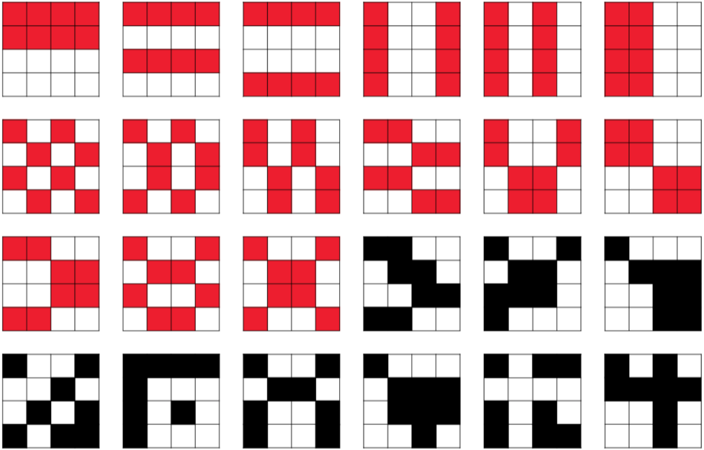
Introducción

Resultados de una evolución física y que no :



Introducción

Resultados de una evolución física y que no :



Introducción

- Operaciones que borran información de un estado
- Caracterizar cuáles de esas operaciones representan procesos físicos

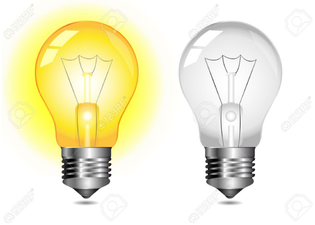
Esquema

Qubits

Qubits

- Análogos cuánticos de los bits.

Bit clásico

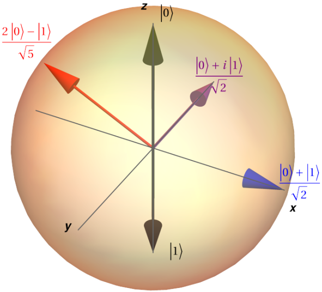


encendido: 1 apagado: 0

Qubits

- Análogos cuánticos de los bits.

Qubit

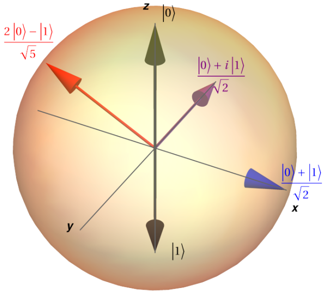


Bola de Bloch

Qubits

- Análogos cuánticos de los bits.
- $|\Psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$, vector en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

Qubit

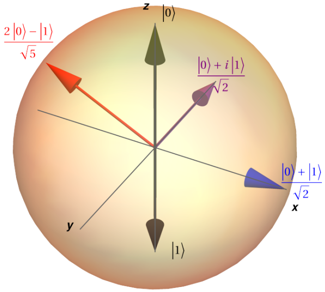


Bola de Bloch

Qubits

- Análogos cuánticos de los bits.
- $|\Psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$, vector en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$
- n qubits: espacio vectorial complejo de dimensión 2^n, $\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2}_{n \text{ veces}}$

Qubit



Bola de Bloch

Matriz de densidad

Matriz de densidad

Toda la información del estado de un sistema cuántico está codificada en su matriz de densidad ρ,

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \, .$$

Matriz de densidad

Toda la información del estado de un sistema cuántico está codificada en su matriz de densidad ρ,

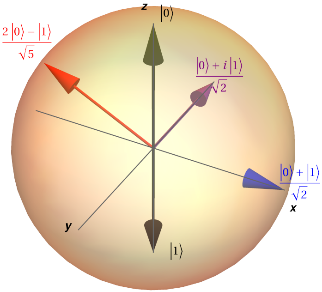
$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \, .$$

Para 1 qubit:

$$\rho = \frac{\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2}$$

$$\rho = \frac{(1)\mathbb{1} + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z}{2},$$

donde $\vec{r}$ es el vector de Bloch ($\|\vec{r}\| \leq 1$) y σ_i son las matrices de Pauli.



Matriz de densidad

Toda la información del estado de un sistema cuántico está codificada en su matriz de densidad ρ,

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \, .$$

Para 1 qubit:

$$\rho = \frac{\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2}$$

$$\rho = \frac{(1)\mathbb{1} + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z}{2},$$

donde $\vec{r}$ es el vector de Bloch ($\|\vec{r}\| \leq 1$) y σ_i son las matrices de Pauli.

Para n qubits:

$$\rho = \frac{1}{2^n}\mathbb{1} + \sum_{i=1}^{2^{2n}-1} \tau_i \Omega_i,$$

de donde vamos a ocupar a los productos tensoriales de las matrices de Pauli como los operadores Ω_i.

Sistemas cuánticos abiertos

Los sistemas cuánticos que pueden estar en interacción con su entorno se conocen como **sistemas cuánticos abiertos**;

Sistemas cuánticos abiertos

Los sistemas cuánticos que pueden estar en interacción con su entorno se conocen como **sistemas cuánticos abiertos**;

$$\mathcal{H}_{\text{total}} = \mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_E.$$

Sistemas cuánticos abiertos

Los sistemas cuánticos que pueden estar en interacción con su entorno se conocen como **sistemas cuánticos abiertos**;

$$\mathcal{H}_{\text{total}} = \mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_E.$$

El formalismo de los **canales cuánticos** es una herramienta matemática que se utiliza para describir la evolución de los sistemas cuánticos abiertos.

$$\rho \longrightarrow \boxed{\;\Phi\;} \longrightarrow \rho'$$

Canales cuánticos

Un canal cuántico es un mapeo lineal que transforma a la matriz de densidad del sistema como

$$\rho' = \Phi(\rho),$$

donde Φ representa matemáticamente la evolución física entre un estado inicial y un estado final del sistema.

Canales cuánticos

Un canal cuántico es un mapeo lineal que transforma a la matriz de densidad del sistema como

$$\rho' = \Phi(\rho),$$

donde Φ representa matemáticamente la evolución física entre un estado inicial y un estado final del sistema.

Para que Φ sea un canal cuántico no es suficiente con que sea una transformación de matrices de densidad en matrices de densidad. Adicionalmente, se requiere la condición de **completa positividad**.

Algunos canales cuánticos de 1 qubit...

- Se parametrizan en función de una probabilidad p con la que podría ocurrir la acción del canal.
- Acción de un canal cuántico: deformación de la bola de Bloch.

En resumen:

- Un qubit es un sistema cuántico de dos niveles.
- La matriz de densidad ρ es una herramienta para describir a un estado cuántico.
- Los sistemas cuánticos abiertos son sistemas que interactúan con su entorno.
- Los canales cuánticos son una manera de de describir la dinámica de los sistemas abiertos.

Esquema

Planteamiento del problema

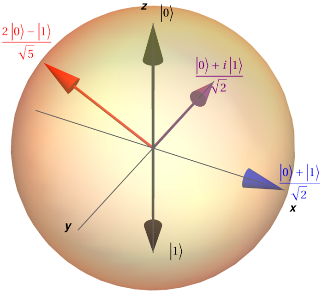
Para un sistema de n qubits ¿cómo se caracterizan los canales cuánticos del resto de los mapeos que borran componentes arbitrarias de la matriz de densidad?

1 qubit

¿Cuáles de los mapeos que borran componentes de la matriz de densidad ρ de 1 qubit son canales cuánticos?

$$\rho = \frac{r_0 \mathbb{1} + r_x \sigma_x + r_y \sigma_y + r_z \sigma_z}{2},$$

con $r_0 = 1$.



1 qubit

Dejar intacta la bola de Bloch:

blochSphere.pdf $\longrightarrow$ blochSphere.pdf

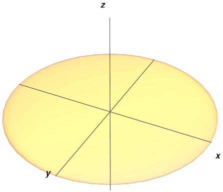
$$(r_x, r_y, r_z) \longrightarrow (r_x, r_y, r_z)$$

1 qubit

Deformar la bola de Bloch en un disco:

`blochSphere.pdf`

$\longrightarrow$



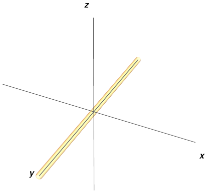
$$(r_x, r_y, r_z) \longrightarrow (r_x, r_y, 0)$$

1 qubit

Deformar la bola de Bloch en una línea:

blochSphere.pdf

$\longrightarrow$



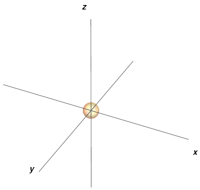
$$(r_x, r_y, r_z) \longrightarrow (0, r_y, 0)$$

1 qubit

Deformar la bola de Bloch en un punto en el origen:

blochSphere.pdf

$\longrightarrow$



$$(r_x, r_y, r_z) \longrightarrow (0, 0, 0)$$

En conclusión, para 1 qubit

- son canales cuánticos los mapeos que mantienen invariantes 1, 2 y 4 componentes de ρ,

$$\rho = \frac{r_0 \mathbb{1} + \mathrm{r_x} \sigma_x + \mathrm{r_y} \sigma_y + \mathrm{r_z} \sigma_z}{2}, \qquad r_0 = 1.$$

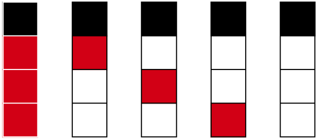
- Vamos a adoptar una nueva representación de ρ de 1 qubit

$$\rho = \begin{array}{|c|}\hline r_0 \\ \hline r_x \\ \hline r_y \\ \hline r_z \\ \hline\end{array}.$$

- Vamos a adoptar una nueva representación de ρ de 1 qubit

$$\rho = \begin{array}{|c|} \hline r_0 \\ \hline r_x \\ \hline r_y \\ \hline r_z \\ \hline \end{array} .$$

- En esta nueva representación los canales cuánticos de 1 qubit son aquellos cuyas matrices de densidad resultantes son



.

2 qubits

La matriz de densidad de 2 qubits

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^{3} r_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j,$$

2 qubits

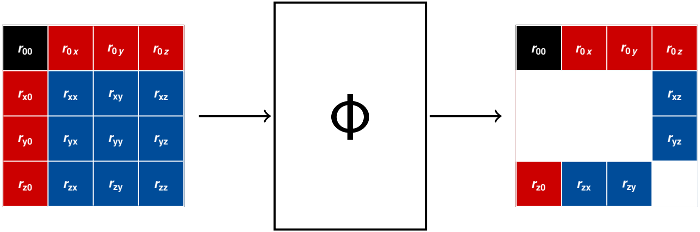
La matriz de densidad de 2 qubits

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^{3} r_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j,$$

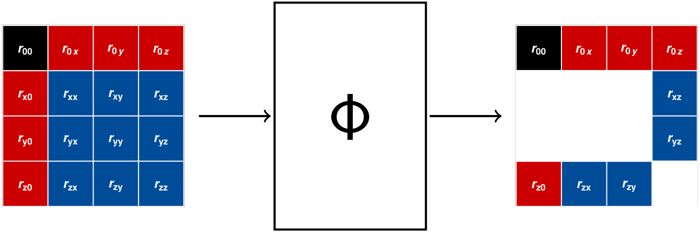
traducido a la representación de cuadritos pintados:

r_{00}	r_{0x}	r_{0y}	r_{0z}
r_{x0}	r_{xx}	r_{xy}	r_{xz}
r_{y0}	r_{yx}	r_{yy}	r_{yz}
r_{z0}	r_{zx}	r_{zy}	r_{zz}

Un mapeo en el que estamos interesados es

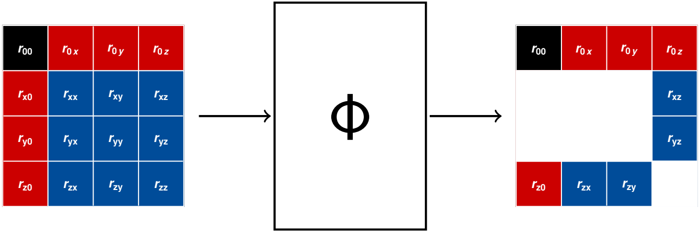


Un mapeo en el que estamos interesados es



- 15 componentes que se pueden dejar invariantes o borrar

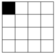
Un mapeo en el que estamos interesados es



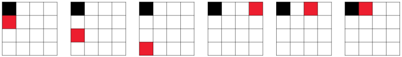
- 15 componentes que se pueden dejar invariantes o borrar
- 2^{15} (32,768) mapeos posibles

- 67 son canales cuánticos.

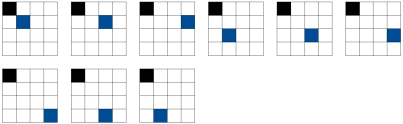
C^1 : 1



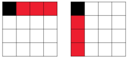
C^2_1 : 15



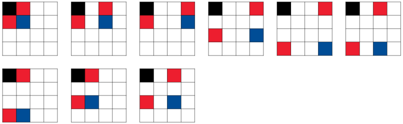
C^2_2 :



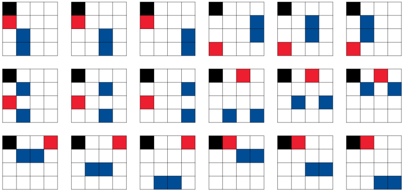
C^4_1 : 35



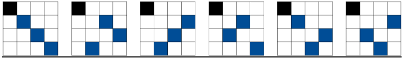
C^4_2 :



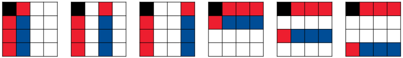
C^4_3 :



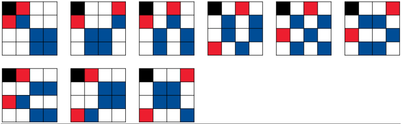
C^4_4 :



C^8_1 : 15



C^8_1 :



C^{16} : 1

¿Qué aprendimos de 2 qubits?

¿Qué aprendimos de 2 qubits?

- El número de componentes invariantes que dejan estos canales cuánticos debe ser una potencia de 2,

¿Qué aprendimos de 2 qubits?

- El número de componentes invariantes que dejan estos canales cuánticos debe ser una potencia de 2,

no. de comp. invariantes	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
no. de canales cuánticos	1	15	35	15	1

¿Qué aprendimos de 2 qubits?

- El número de componentes invariantes que dejan estos canales cuánticos debe ser una potencia de 2,

no. de comp. invariantes	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
no. de canales cuánticos	1	15	35	15	1

- Estos canales cuánticos son equivalentes ante intercambio de qubits (transposiciones en los tableros).

¿Qué aprendimos de 2 qubits?

- El número de componentes invariantes que dejan estos canales cuánticos debe ser una potencia de 2,

no. de comp. invariantes	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
no. de canales cuánticos	1	15	35	15	1

- Estos canales cuánticos son equivalentes ante intercambio de qubits (transposiciones en los tableros).
- También son equivalentes ante permutaciones de las componentes x, y y z de cada partícula (permutación de las filas o columnas 1-3).

¿Qué aprendimos de 2 qubits?

- El número de componentes invariantes que dejan estos canales cuánticos debe ser una potencia de 2,

no. de comp. invariantes	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
no. de canales cuánticos	1	15	35	15	1

- Estos canales cuánticos son equivalentes ante intercambio de qubits (transposiciones en los tableros).
- También son equivalentes ante permutaciones de las componentes x, y y z de cada partícula (permutación de las filas o columnas 1-3).
- La acción individual de un canal cuántico de 2 qubits sobre cada partícula del sistema debe ser un canal cuántico de 1 qubit.

3 qubits

La matriz de densidad de 3 qubits

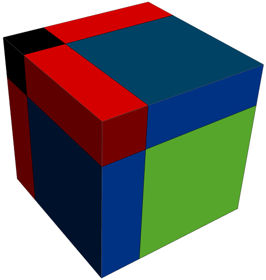
$$\rho = \frac{1}{8} \sum_{i,j,k=0}^{3} r_{ijk} \sigma_i \otimes \sigma_j \otimes \sigma_k,$$

3 qubits

La matriz de densidad de 3 qubits

$$\rho = \frac{1}{8} \sum_{i,j,k=0}^{3} r_{ijk} \sigma_i \otimes \sigma_j \otimes \sigma_k,$$

traducido a la descripción de *cubos pintados*

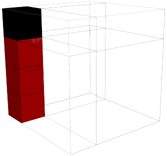


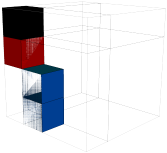
Resultados 3 qubits[1]

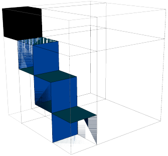
[1] Numéricamente, hemos podido analizar los mapeos que dejan hasta 4 componentes invariantes en ρ

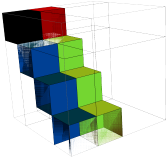
Resultados 3 qubits[1]

Resultados que entendemos de resultados previos:





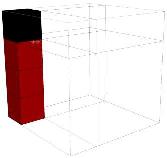
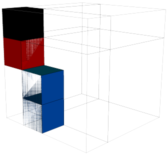
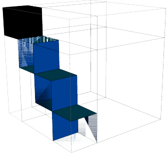
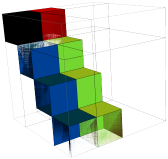




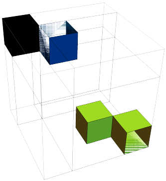
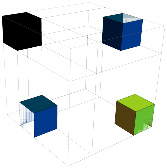
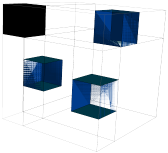
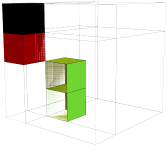
[1] Numéricamente, hemos podido analizar los mapeos que dejan hasta 4 componentes invariantes en ρ

Resultados 3 qubits[1]

Resultados que entendemos de resultados previos:

Resultados que no entendemos (**¿aún?**) de resultados previos:

[1] Numéricamente, hemos podido analizar los mapeos que dejan hasta 4 componentes invariantes en ρ

Características de los canales cuánticos de n qubits

Características de los canales cuánticos de n qubits

- El número de componentes invariantes en ρ son potencias de 2.

Características de los canales cuánticos de n qubits

- El número de componentes invariantes en ρ son potencias de 2.
-

$n = 1$				1	3	1				5
$n = 2$			1	15	35	15	1			67
$n = 3$		1	63	561	?	¿561?	¿63?	1		?
$n = \vdots$	$\iddots$				$\vdots$				$\ddots$	??

Características de los canales cuánticos de n qubits

- El número de componentes invariantes en ρ son potencias de 2.
-

$n = 1$				1	3	1				5
$n = 2$			1	15	35	15	1			67
$n = 3$		1	63	561	?	¿561?	¿63?	1		?
$n = \vdots$	$\iddots$				$\vdots$				$\ddots$	??

Hipótesis del arcoiris: correspondencia 1:1 entre canales que mantienen invariantes 2^k y 2^{n-k} componentes.

Características de los canales cuánticos de n qubits

- Los canales son equivalentes ante intercambio de partículas y de permutación de las componentes individuales de cada qubit en el sistema.

Características de los canales cuánticos de n qubits

- Los canales son equivalentes ante intercambio de partículas y de permutación de las componentes individuales de cada qubit en el sistema.
- La acción de un canal sobre cualquier subsistema es otro canal.

Características de los canales cuánticos de n qubits

- Los canales son equivalentes ante intercambio de partículas y de permutación de las componentes individuales de cada qubit en el sistema.
- La acción de un canal sobre cualquier subsistema es otro canal.

Esto no es suficiente para caracterizar a estos canales cuánticos.

Esquema

Dificultades

Dificultades

- **(numérica)** El número de mapeos posibles según el número de qubits crece como 2^{4^n-1} (8, 32768, 9.2×10^{18}, 5.8×10^{76}, 7×10^{187}, $\ldots$).

Dificultades

- **(numérica)** El número de mapeos posibles según el número de qubits crece como 2^{4^n-1} (8, 32768, 9.2×10^{18}, 5.8×10^{76}, 7×10^{187}, $\ldots$).
- Para $n > 3$ no existe una representación geométrica útil que nos ayude a entender a los canales.

Preguntas por contestar

Preguntas por contestar

- ¿Por qué estos canales siguen la regla de la potencia de 2 para el número de componentes invariantes?

Preguntas por contestar

- ¿Por qué estos canales siguen la regla de la potencia de 2 para el número de componentes invariantes?
- ¿Es cierta la hipótesis del arcoiris? ¿Cuál es la correspondencia?

Preguntas por contestar

- ¿Por qué estos canales siguen la regla de la potencia de 2 para el número de componentes invariantes?
- ¿Es cierta la hipótesis del arcoiris? ¿Cuál es la correspondencia?
- ¿Existen transformaciones unitarias que conecten a elementos de distintas clases de equivalencia?

Preguntas por contestar

- ¿Por qué estos canales siguen la regla de la potencia de 2 para el número de componentes invariantes?
- ¿Es cierta la hipótesis del arcoiris? ¿Cuál es la correspondencia?
- ¿Existen transformaciones unitarias que conecten a elementos de distintas clases de equivalencia?
- ¿Existen reglas sencillas, equivalentes a la condición de completa positividad, que expliquen los patrones de los dibujos?

Propuestas

Propuestas

- Estudiar la representación en operadores de Krauss de estos canales cuánticos.

Propuestas

- Estudiar la representación en operadores de Krauss de estos canales cuánticos.
- Estudiar el espectro de Schmidt de la matriz de Choi asociada a los canales cuánticos.

Propuestas

- Estudiar la representación en operadores de Krauss de estos canales cuánticos.
- Estudiar el espectro de Schmidt de la matriz de Choi asociada a los canales cuánticos.
- Estudiar el isomorfismo de Jamiołkowski.

Propuestas

- Estudiar la representación en operadores de Krauss de estos canales cuánticos.
- Estudiar el espectro de Schmidt de la matriz de Choi asociada a los canales cuánticos.
- Estudiar el isomorfismo de Jamiołkowski.
- Utilizar las reglas que entendemos de estos canales para reducir los mapeos a analizar de forma numérica.

Trabajo futuro

Trabajo futuro

- Estudiar el efecto que tienen estos canales cuánticos sobre el entrelazamiento.

Trabajo futuro

- Estudiar el efecto que tienen estos canales cuánticos sobre el entrelazamiento.
- Estudiar los canales que atenúan las componentes de la matriz de densidad.

¡Gracias!

Contacto: deleongarrido.jose@gmail.com

Matriz de densidad 2.0

Una matriz ρ es una matriz de densidad si y solo si

1. $\rho = \rho^{\dagger}$, Hermiticidad
2. $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$, traza unitaria
3. $\rho \geq 0$, postiividad

Completa positividad

Un mapeo Φ se dice que es completamente positivo si y sólo si para una extensión dimensional arbitraria k

$$\mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_k$$

el mapeo $\Phi \otimes \mathbb{1}_k$ es positivo.

Análisis numérico

El algoritmo que se sigue es

1. Calcular la representación matricial de Φ.
2. Aplicar la transformación de *reshuffle* para calcular la matriz de Choi asociada D_Φ.
3. Verificar la positividad de D_Φ.

El algoritmo ha sido implementado en `Python` y `Wolfram`.

Referencias

- Nielsen, M., & Chuang, I. (2010). Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511976667
- Bengtsson, I., & Życzkowski, K. (2017). Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/9781139207010