Mapeos proyectivos en sistemas de qubits

José Alfredo de León[1], Carlos Pineda[2],
David Dávalos[2], Alejandro Fonseca[3]

[1]Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, U. de San Carlos de Guatemala
[2]Instituto de Física, U. Nacional Autónoma de México
[3]Departamento de Física, U. Federal de Pernambuco

I Congreso Guatemalteco de Física
09 de julio de 2021

Outline

Motivación

¿por qué estudiar canales cuánticos?

Sistema ideal:

sistema_cerrado.pdf

Motivación

¿por qué estudiar canales cuánticos?

Sistemas reales: abiertos

sistema_abierto01.pdf

sistema_abierto02.pdf

Matriz de densidad

¿cómo representar a los estados de un sistema abierto?

La herramienta más apropiada para representar al estado de un sistema cuántico abierto es la matriz de densidad ρ.

Por ejemplo, supongamos un sistema cuyo estado es $|\psi\rangle$, su matriz de densidad se escribe

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \, .$$

Matriz de densidad

¿cómo representar a los estados de un sistema abierto?

Una matriz ρ representa a un estado cuántico si y sólo si

1. $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$,
2. $\rho^\dagger = \rho$,
3. $\rho \geq 0$.

Canales cuánticos

¿cómo describir la dinámica de los sistemas abiertos?

La teoría de los canales cuánticos es un formalismo para describir la evolución de los sistemas abiertos.

Una operación lineal $\mathcal{E}$ que actúa sobre ρ como

$$\mathcal{E}(\rho) = \rho'$$

es un canal cuántico si

1. Preserva las características de la matriz de densidad,
2. Es una operación completamente positiva.

Canales cuánticos

¿cómo describir la dinámica de los sistemas abiertos?

La teoría de los canales cuánticos es un formalismo para describir la evolución de los sistemas abiertos.

Una operación lineal $\mathcal{E}$ que actúa sobre ρ como

$$\mathcal{E}(\rho) = \rho'$$

es un canal cuántico si

1. Preserva las características de la matriz de densidad,
2. Es una operación completamente positiva.

Canales cuánticos

¿cómo describir la dinámica de los sistemas abiertos?

La teoría de los canales cuánticos es un formalismo para describir la evolución de los sistemas abiertos.

Una operación lineal $\mathcal{E}$ que actúa sobre ρ como

$$\mathcal{E}(\rho) = \rho'$$

es un canal cuántico si

1. Preserva las características de la matriz de densidad,
2. Es una operación completamente positiva. ¿¿¿???

Completa positividad

¿Para qué o qué?

Supongamos una operación $\mathcal{E}$ que actúa sobre el sistema A.

No es suficiente que $\mathcal{E}(\rho_A) \geq 0$, también $(\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}_k)[\rho_{total}] \geq 0$.

Canal cuántico

Una operación $\mathcal{E}$ es un canal cuántico si y sólo si

$$(\mathcal{E} \otimes \mathbb{1})[|\text{Bell}\rangle\langle\text{Bell}|] \quad (\propto \text{matriz de Choi de } \mathcal{E})$$

es (1) de traza unitaria, (2) Hermítica y (3) positiva.

Resumen

Sistemas cuánticos abiertos

1. Estados cuánticos: matriz de densidad ρ
2. Dinámica: canales cuánticos

Introducción

Formalismo

Qubits

Operaciones PCE

Qubit

Un qubit es un sistema cuántico de dos niveles.

$$\rho = \frac{\mathbb{1} + r_1\sigma_x + r_2\sigma_y + r_3\sigma_z}{2},$$

(r_1, r_2, r_3) especifican las coordenadas cartesianas de un punto en la esfera de Bloch,

$$\rho = (1, r_1, r_2, r_3).$$

Rotación de la esfera de Bloch

Las rotaciones de la esfera de Bloch con canales cuánticos de 1 qubit.

$$\longmapsto$$

$$(1, r_1, r_2, r_3) \longmapsto (1, r_1, -r_3, r_2).$$

Canal *bit-flip* de 1 qubit

El *bit-flip* actúa sobre la esfera de Bloch como

$$\longmapsto$$

Transforma a las componentes r_i de la matriz de densidad como

$$(1, r_1, r_2, r_3) \longmapsto (1, r_1, (1-2p)r_2, (1-2p)r_3).$$

Matriz de densidad de n qubits

En la base de productos tensoriales de las matrices de Pauli, la matriz de densidad de n qubits se escribe

$$\rho = \frac{1}{2^n} \sum_{j_1,\ldots,j_n=0}^{3} r_{j_1,\ldots,j_n} \sigma_{j_1} \otimes \ldots \otimes \sigma_{j_n}, \qquad r_{0,\ldots,0} = 1.$$

Llamaremos "componentes de Pauli" a las $r_{j_1,\ldots,j_n}$.

Motivación (1/2)

Un caso particular del canal *bit-flip* es cuando

$$\longmapsto$$

Las componentes de Pauli r_i se transforman como

$$(1, r_1, r_2, r_3) \longmapsto (1, r_1, 0, 0).$$

¿Son canales cuánticos todas las operaciones que borran cualesquiera de las componentes de Pauli de 1 qubit?

Motivación (2/2)

No. Las operaciones Λ que borran dos componentes de Pauli no son canales cuánticos.

$$(1, r_1, r_2, r_3) \longmapsto (1, r_1, r_2, 0).$$

$(\Lambda \otimes \mathbb{1})[|\text{Bell}\rangle\langle\text{Bell}|] \ngeq 0$, por consiguiente Λ no es completamente positiva.

Operaciones PCE

Una operación PCE (*Pauli component erasing*) es una operación lineal que transforma a las componentes de Pauli de una matriz de densidad ρ de n qubits como

$$r_{j_1,\ldots,j_n} \longmapsto \tau_{j_1,\ldots,j_n} r_{j_1,\ldots,j_n}, \qquad \tau_{j_1,\ldots,j_n} = 0, 1.$$

Una operación PCE borra o deja invariantes las component's de Pauli.

Problema: ¿cuáles son las características del suconjunto de canales cuánticos de las operaciones PCE?

Los eigenvalores de $(\mathcal{E} \otimes \mathbb{1})[|\text{Bell}\rangle\langle\text{Bell}|]$ son

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{2^n} \underbrace{(a \otimes \ldots \otimes a)}_{n \text{ veces}} \vec{\tau}$$

con

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y $\vec{\tau}$ un vector de 4^n componentes cuyas componentes son los 0's y 1's que definen a la operación PCE $\mathcal{E}$. ¡¡Esta es la diagonalización exacta de una matriz de dimensión 4^n!!

Canales PCE de 1 y 2 qubits

De 8 operaciones posibles:

5 son canales cuánticos:

De $\sim$32,000, 67 son canales cuánticos:

Canales cuánticos PCE

Regla 2^k

De todas las operaciones PCE, sólo aquellas que dejan invariantes 2^k componentes de Pauli siguen siendo candidatos a canales cuánticos (sólo cantidatos).

2 qubits, 8 componentes invariantes:

No canales cuánticos:

Canales cuánticos:

Canales cuánticos PCE

Generadores

Los canales cuánticos PCE pueden escribirse como concatenación de canales generadores,

$$\Phi = \underbrace{\mathcal{E}_{j_1} \circ \mathcal{E}_{j_2} \circ \ldots \circ \mathcal{E}_{j_l}}_{\text{máximo } 2^n},$$

con $\mathcal{E}_{j_i}$ los generadores.

Los generadores $\mathcal{E}_{j_i}$ son las únicas formas que están físicamente permitidas de borrar la mitad de las componentes de Pauli de un sistema de n qubits $+ \mathbb{1}$.

Ejemplo: 2 qubits

Canales PCE a partir de generadores

Generadores:

Resumen

- Una operación PCE es una operación que actúa sobre un sistema de n qubits y que borra o deja invariantes a sus componentes de Pauli.
- El problema que estudiamos es caracterizar a las operaciones PCE que son canales cuánticos (las que satisfacen la condición de completa positividad).

Resumen

- Diagonalización de la matriz de Choi: $\vec{\lambda} = a^{\otimes n}\vec{\tau}$
- Una operación PCE Φ se puede entender como la concatenación de canales cuánticos que describen las únicas formas permitidas por la mecánica cuántica de borrar la mitad todas componentes de Pauli del estado de un sistema de qubits.

¡Muchas gracias!

Contacto:
José Alfredo de León
deleongarrido.jose@gmail.com