

Tarea 7. Bose-Hubbard

Bryan Daniel Gomez Montes

UNAM — April 25, 2022

1 Bose-Hubbard

1.1 Objetivo

Se implemento el modelo de Bose-Hubbard en la aproximación de desacoplamiento con un Hamiltoniano [1] dado como:

$$\hat{H} = -zt\psi \left(\hat{b}^\dagger + \hat{b} \right) + zt\psi^2 + \frac{1}{2}U\hat{n}(\hat{n} - 1) - \mu\hat{n} \quad (1)$$

con z = número de vecinos más cercanos, t = parámetro de movilidad de los bosones en la red, U = parámetro de interacción, μ = potencial químico y $\psi = \langle b \rangle$ el parámetro de orden

con $n = b^\dagger b$ y en forma matricial:

$$n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N \end{pmatrix} \quad (2)$$

con N = numero de dimension

$$b^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (4)$$

1.2 El método

Para la parte numerica se implemento en forma matricial el Hamiltoniano, luego se diagonalizo para obtener el estado base y con ello el parametro de orden, se establece una tolerancia para volver a colocar el valor del estado base hasta llegar a un valor minimo deseado. Despues de clacular el parametro de ordens e utilizó el estado base obtenido para calcular las fluctuaciones dadas como:

$$\sigma_n^2 = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 \quad (5)$$

Para la parte analitica se utilizo teoria de perturbaciones en donde para un escalamiento de zt tenemos:

$$\bar{\mu}_{\pm} = \frac{1}{2}\bar{U}(2g-1) - 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\bar{U}^2 - 2\bar{U}(2g+1) + 1} \quad (6)$$

con $\bar{\mu} = \frac{\mu}{zt}$ y $\bar{U} = \frac{U}{zt}$ con $g = 1, 2, 3...$ idnicando el estado de sitio o aislante de Mott.

Tambien se hizo un escalamiento dividiendo entre U y la expresion obtenida es la siguiente:

$$y = \frac{-\tilde{g} + 2x\tilde{g} + \tilde{g} - x^2 - x}{1 + x} \quad (7)$$

con $\tilde{y} = \frac{zt}{U}$, $\tilde{x} = \frac{\mu}{U}$ y $\tilde{g} = [x + 1]$ con $[.]$ = la parte entera

2 Resultados

Se implementaron las funciones $BH_ztU(psi0, t, mu, dimension, tolerancia)$ para el caso de dividir entre zt y la funcion $BH_psi2(psi0, u, mu, dimension, tolerancia)$ para el caso de dividir entre U . En particular para la implementacion del algoritmo tras diseñar las matrices n , b y b^\dagger mediante un ciclo while se implementó el algoritmo de autoconsistencia en donde dada una tolerancia se va haciendo cada vez mas pequeño el estado base y con ello el parametro de orden al tolerancia fue de 0.0001.

A continuación se presentan las gráficas del parametro de orden, fluctuaciones y numero de iteraciones para llegar a un parametro de orden con magnitud cercana a la tolerancia.

- Dimension 6.

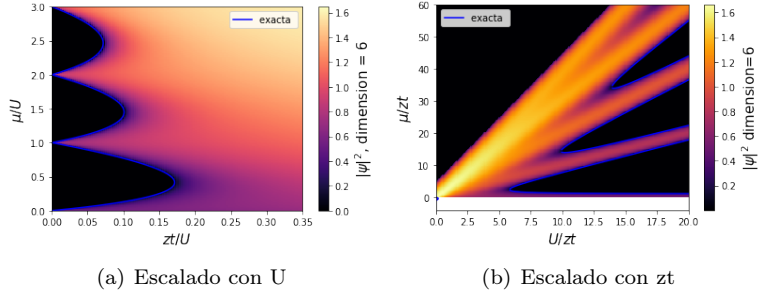


Figure 1: Parametro de orden para dimension 6. La linea azul corresponde a la ecuacion 6 (con $g = 1, 2, 3$) y 7

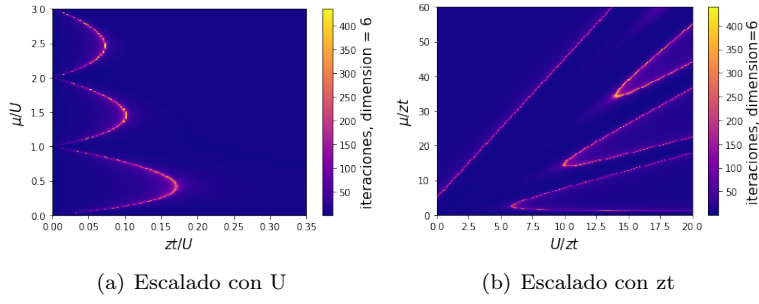


Figure 2: Iteraciones para dimension 6.

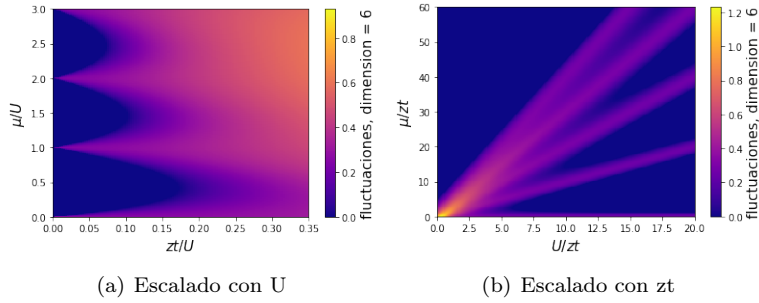


Figure 3: Fluctuaciones para dimension 6.

- Dimension 55

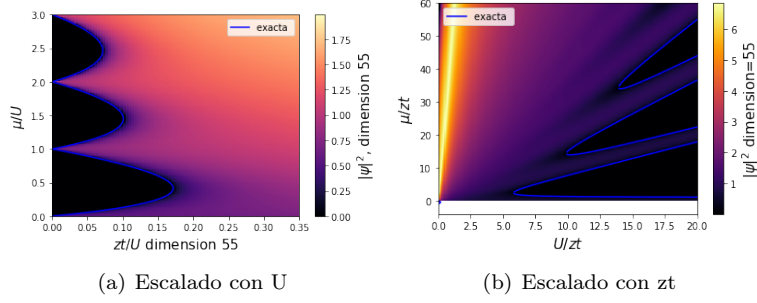


Figure 4: Parametro de orden para dimension 55. La linea azul corresponde a la ecuacion 6 (con $g = 1, 2, 3$) y 7

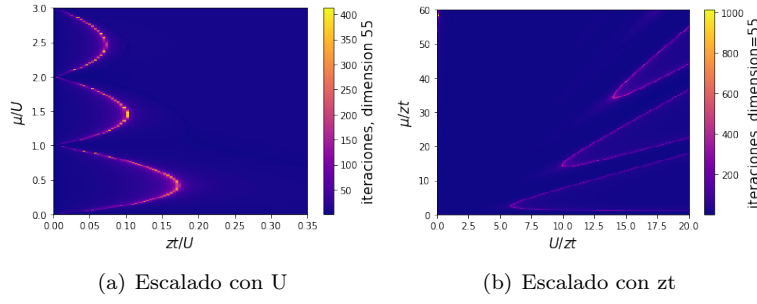


Figure 5: Iteraciones para dimension 55.

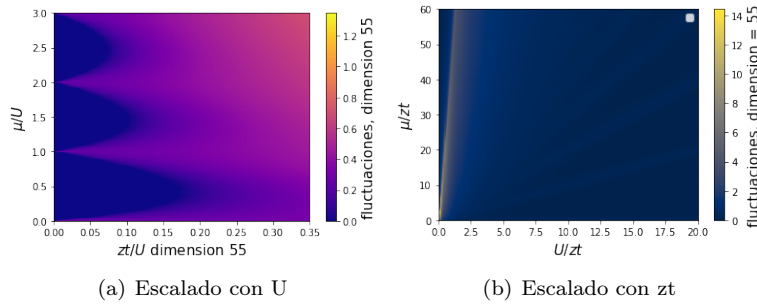


Figure 6: Fluctuaciones para dimension 55.

3 Conclusiones

Los resultaods numericos s coinciden con los resultados analíticos como se puede ver en la figura 1 y 4. Respecto a las fluctuaciones se observa que no existen fluctuaciones en donde ocurre el estado de aislante de Mott.

Ademas se puede ver que las iteraciones rodean justo al estado aislante de Mott y estan en funcion del numero de dimensiones utilizada, para una dimension de 6 la iteraciones rodean el estado aislante de Mott y ademas tienen una linea diagonal como se observa en la figura 2, mientras que para la dimension de 55 la linea diagonal desaparece asemejandose mas al resultado analítico [1].

Para el caso de las fluctuaciones de dimension 55 se observa que el estado aislante de Mott es muy tenue para el escalado con zt , pero sigue existiendo como pequeños globulitos.

References

- [1] Caballero-Benítez, S. F. (2022). Materia cuántica en cavidades de alta reflectancia (Many-body CQED) (Version 1). arXiv. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2201.06641>
- [2] van Oosten, D., van der Straten, P., Stoof, H. T. C. (2001). Quantum phases in an optical lattice. In Physical Review A (Vol. 63, Issue 5). American Physical Society (APS). <https://doi.org/10.1103/physreva.63.053601>