

Pauli component erasing operations

Carlos Pineda¹

José Alfredo de León^{1,2} Alejandro Fonseca³ François Leyvraz¹ David Davalos⁴

¹Universidad Nacional Autónoma de México

²Universidad de San Carlos de Guatemala

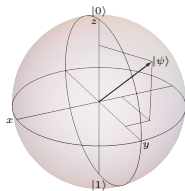
³Universidade Federal de Pernambuco (Brazil)

⁴Slovak Academy of Sciences

arXiv:2205.05808

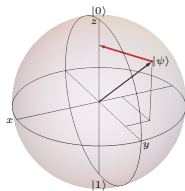
General goal

Quantum channels can project some components. But not all projections are allowed.



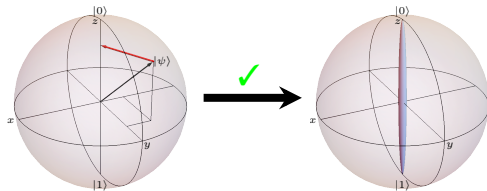
General goal

Quantum channels can project some components. But not all projections are allowed.



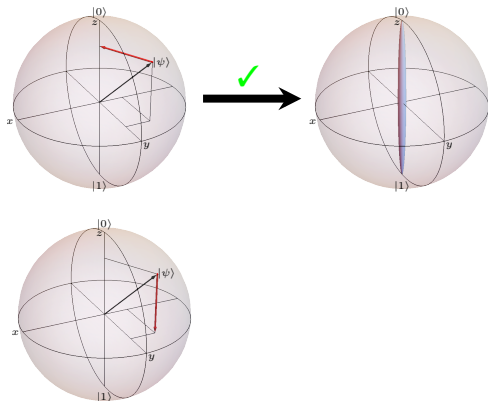
General goal

Quantum channels can project some components. But not all projections are allowed.



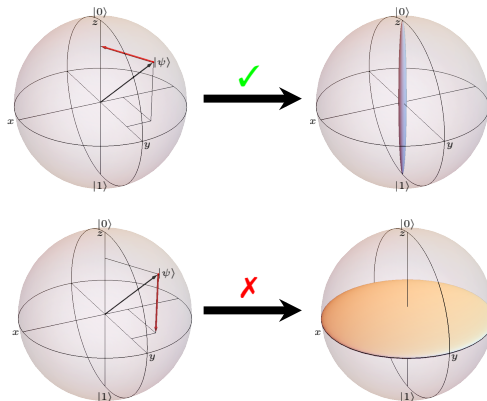
General goal

Quantum channels can project some components. But not all projections are allowed.



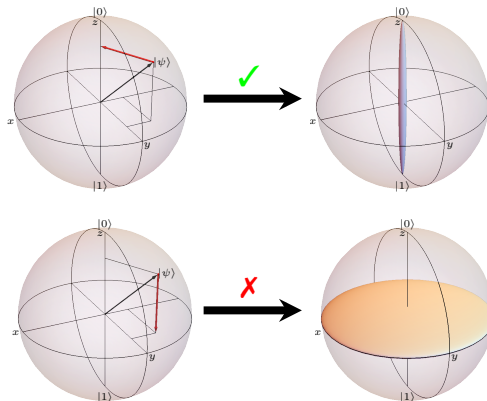
General goal

Quantum channels can project some components. But not all projections are allowed.



General goal

Quantum channels can project some components. But not all projections are allowed.



We want to develop intuition about what's going on and generalize.

Outline

Some tools

PCE maps and PCE channels

The problem and its solution

Generators and decoherence

Some tools

PCE maps and PCE channels

The problem and its solution

Generators and decoherence

Quantum channels

A quantum channel (Λ) generalizes conveniently unitary evolution, in a similar way as a density matrix generalizes a ket.

Quantum channels can describe:

- ▶ Unitary evolution $\Lambda(\rho) = U\rho U^\dagger$
- ▶ Reduced dynamics (decoherence) $\Lambda(\rho) = \text{tr}_{\text{env}} [U\rho \otimes \rho_{\text{env}} U^\dagger]$
- ▶ Measurements

Quantum channels

A quantum channel (Λ) generalizes conveniently unitary evolution, in a similar way as a density matrix generalizes a ket.

Quantum channels can describe:

- ▶ Unitary evolution $\Lambda(\rho) = U\rho U^\dagger$
- ▶ Reduced dynamics (decoherence) $\Lambda(\rho) = \text{tr}_{\text{env}} [U\rho \otimes \rho_{\text{env}} U^\dagger]$
- ▶ Measurements

Quantum channels are linear operators acting on the spaces of operators, i.e. superoperators.

Quantum channels, some properties

Quantum channels map states into states $\mathcal{E}(\rho) = \rho'$

- ▶ They are linear $\mathcal{E}(\alpha\varsigma + \sigma) = \alpha\mathcal{E}(\alpha\varsigma) + \mathcal{E}(\sigma)$,
- ▶ preserve the trace $\text{tr}\mathcal{E}(\sigma) = \text{tr}\sigma$,
- ▶ preserve hermiticity $\mathcal{E}(\sigma) = \mathcal{E}(\sigma)^\dagger$ if $\sigma = \sigma^\dagger$, and
- ▶ preserve positivity, $\mathcal{E}(\sigma) \geq 0$ if $\sigma \geq 0$.

Quantum channels, some properties

Quantum channels map states into states $\mathcal{E}(\rho) = \rho'$

- ▶ They are linear $\mathcal{E}(\alpha\varsigma + \sigma) = \alpha\mathcal{E}(\varsigma) + \mathcal{E}(\sigma)$,
- ▶ preserve the trace $\text{tr}\mathcal{E}(\sigma) = \text{tr}\sigma$,
- ▶ preserve hermiticity $\mathcal{E}(\sigma) = \mathcal{E}(\sigma)^\dagger$ if $\sigma = \sigma^\dagger$, and
- ▶ preserve positivity, $\mathcal{E}(\sigma) \geq 0$ if $\sigma \geq 0$.

They send extended states to extended states.

- ▶ Complete positivity, $(\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}_k)(\sigma) \geq 0$ if $\sigma \geq 0$.

There are *maps* that send states to states, but not extended states to extended states, for example the transpose.

Quantum channels, complete positivity

- Complete positivity means that for all k , and all $\rho \geq 0$,

$$(\mathcal{E}_n \otimes \mathbb{1}_k)(\rho) \geq 0.$$

Quantum channels, complete positivity

- ▶ Complete positivity means that for all k , and all $\rho \geq 0$,

$$(\mathcal{E}_n \otimes \mathbb{1}_k)(\rho) \geq 0.$$

- ▶ It is enough to study the maximally mixed state for $k = n$ levels:

$$(\mathcal{E}_n \otimes \mathbb{1}_n)(|\text{Bell}_n\rangle\langle\text{Bell}_n|) = \rho_{\mathcal{E}} \geq 0.$$

This induces a correspondence between states and quantum channels called Choi–Jamiołkowski isomorphism.

Quantum channels, complete positivity

- ▶ Complete positivity means that for all k , and all $\rho \geq 0$,

$$(\mathcal{E}_n \otimes \mathbb{1}_k)(\rho) \geq 0.$$

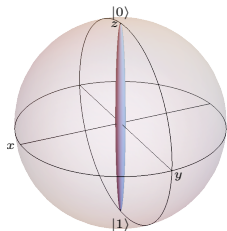
- ▶ It is enough to study the maximally mixed state for $k = n$ levels:

$$(\mathcal{E}_n \otimes \mathbb{1}_n)(|\text{Bell}_n\rangle\langle\text{Bell}_n|) = \rho_{\mathcal{E}} \geq 0.$$

This induces a correspondence between states and quantum channels called Choi–Jamiołkowski isomorphism.

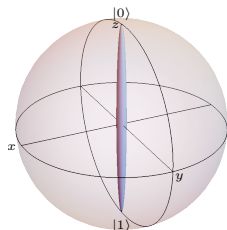
- ▶ We must check, diagonalizing $\rho_{\mathcal{E}}$, (which is proportional to the Choi matrix) if all its eigenvalues are semipositive.

Quantum channels



$$\mathcal{E}[1 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}] = 1 + r_z \sigma_z$$

Quantum channels



$$\mathcal{E}[1 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}] = 1 + r_z \sigma_z$$

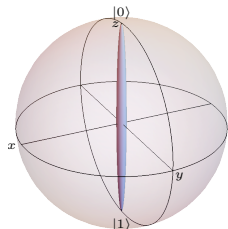
$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\rho_{\mathcal{E}}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$$

GOOD!

Quantum channels



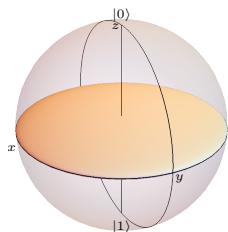
$$\mathcal{E}[1 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}] = 1 + r_z \sigma_z$$

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

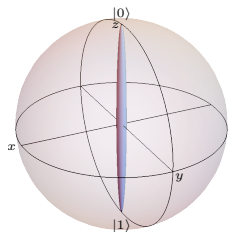
$$\lambda_{\rho_{\mathcal{E}}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

GOOD!



$$\mathcal{E}[1 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}] = 1 + r_x \sigma_x + r_y \sigma_y$$

Quantum channels



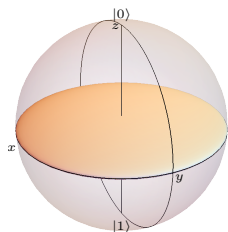
$$\mathcal{E}[1 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}] = 1 + r_z \sigma_z$$

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\rho_{\mathcal{E}}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$$

GOOD!



$$\mathcal{E}[1 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}] = 1 + r_x \sigma_x + r_y \sigma_y$$

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\rho_{\mathcal{E}}} = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$$

BAD!

Some tools

PCE maps and PCE channels

The problem and its solution

Generators and decoherence

Single qubit PCE

A single qubit state can be expressed as

$$\rho = \frac{\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2} = \frac{\mathbb{1} + r_x \sigma_x + r_y \sigma_y + r_z \sigma_z}{2},$$

Single qubit PCE

A single qubit state can be expressed as

$$\rho = \frac{\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2} = \frac{\mathbb{1} + r_x \sigma_x + r_y \sigma_y + r_z \sigma_z}{2},$$

PCE maps project over some of these components:

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{\mathbb{1} + \vec{r}' \cdot \vec{\sigma}}{2}, \quad r'_i = \tau_i r_i, \quad \tau_i \in \{0, 1\}.$$

Single qubit PCE

A single qubit state can be expressed as

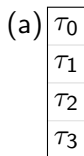
$$\rho = \frac{\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2} = \frac{\mathbb{1} + r_x \sigma_x + r_y \sigma_y + r_z \sigma_z}{2},$$

PCE maps project over some of these components:

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{\mathbb{1} + \vec{r}' \cdot \vec{\sigma}}{2}, \quad r'_i = \tau_i r_i, \quad \tau_i \in \{0, 1\}.$$

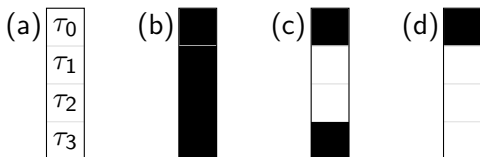
- ▶ They map density matrices to density matrices
- ▶ The previous maps are examples of PCE maps
- ▶ They are a subset of Pauli maps
- ▶ They are not always completely positive

Single qubit PCE and its diagrams



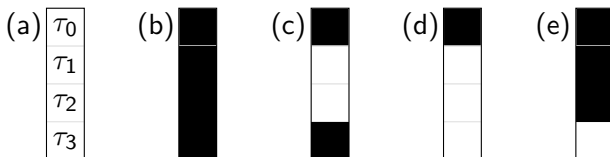
- ▶ Each component is represented by a square.
- ▶ It is either black (if its preserved) or white (if its erased)

Single qubit PCE and its diagrams



- ▶ Each component is represented by a square.
- ▶ It is either black (if its preserved) or white (if its erased)
- ▶ (b) is the identity channel, (c) is dephasing and (d) depolarizing.

Single qubit PCE and its diagrams



- ▶ Each component is represented by a square.
- ▶ It is either black (if its preserved) or white (if its erased)
- ▶ (b) is the identity channel, (c) is dephasing and (d) depolarizing.
- ▶ (e) is the map that projects to the xy plane

N qubit PCEs

- An N qubit state can be written as

$$\rho = \frac{1}{2^N} \sum_{\vec{\alpha}} r_{\vec{\alpha}} \sigma_{\vec{\alpha}},$$

with $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, and $\sigma_{\vec{\alpha}} := \sigma_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{\alpha_N}$.

N qubit PCEs

- An N qubit state can be written as

$$\rho = \frac{1}{2^N} \sum_{\vec{\alpha}} r_{\vec{\alpha}} \sigma_{\vec{\alpha}},$$

with $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, and $\sigma_{\vec{\alpha}} := \sigma_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{\alpha_N}$.

- A PCE map is such that

$$r_{\vec{\alpha}} \mapsto \tau_{\vec{\alpha}} r_{\vec{\alpha}}, \quad \tau_{\vec{\alpha}} = 0, 1.$$

This are the objects we are interested in.

N qubit PCEs

- ▶ An N qubit state can be written as

$$\rho = \frac{1}{2^N} \sum_{\vec{\alpha}} r_{\vec{\alpha}} \sigma_{\vec{\alpha}},$$

with $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, and $\sigma_{\vec{\alpha}} := \sigma_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{\alpha_N}$.

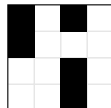
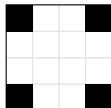
- ▶ A PCE map is such that

$$r_{\vec{\alpha}} \mapsto \tau_{\vec{\alpha}} r_{\vec{\alpha}}, \quad \tau_{\vec{\alpha}} = 0, 1.$$

This are the objects we are interested in.

- ▶ For 2 qubits, we have equivalent diagrams:

$\tau_{(0,0)}$	$\tau_{(0,1)}$	$\tau_{(0,2)}$	$\tau_{(0,3)}$
$\tau_{(1,0)}$	$\tau_{(1,1)}$	$\tau_{(1,2)}$	$\tau_{(1,3)}$
$\tau_{(2,0)}$	$\tau_{(2,1)}$	$\tau_{(2,2)}$	$\tau_{(2,3)}$
$\tau_{(3,0)}$	$\tau_{(3,1)}$	$\tau_{(3,2)}$	$\tau_{(3,3)}$



Some tools

PCE maps and PCE channels

The problem and its solution

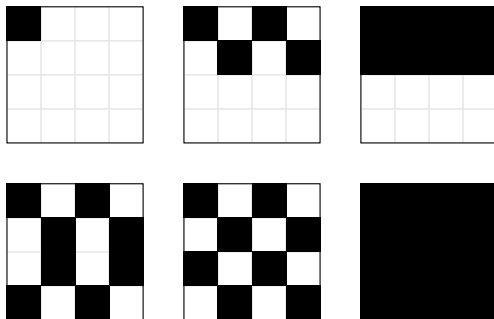
Generators and decoherence

Planteamiento del problema

¿Cuales mapas PCE son canales cuánticos válidos?

Esto nos ayudará a entender mejor la geometría de canales cuánticos de muchos cuerpos.

Ejemplos y reglas



- ▶ Solo se admiten PCEs que preservan 2^k componentes.
- ▶ No todos los que preservan 2^k componentes son canales.
- ▶ Hay el mismo número de canales que preservan 2^k y 2^{2N-k} componentes.
- ▶ Hay un conjunto generador que conserva la mitad de componentes.

Diagonalizacion de la matriz de Choi

- El canal tiene la forma $\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2^N} \sum_{\vec{\alpha}} \tau_{\vec{\alpha}} |\sigma_{\vec{\alpha}}\rangle\langle\sigma_{\vec{\alpha}}|$.

Diagonalizacion de la matriz de Choi

- ▶ El canal tiene la forma $\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2^N} \sum_{\vec{\alpha}} \tau_{\vec{\alpha}} |\sigma_{\vec{\alpha}}\rangle\langle\sigma_{\vec{\alpha}}|$.
- ▶ Y su estado correspondiente cumple que $\rho_{\mathcal{E}} \propto \sum_{\vec{\alpha}} \tau_{\vec{\alpha}} \bigotimes_{j=1}^N \sigma_{\alpha_j} \otimes \sigma_{\alpha_j}^*$.

Diagonalizacion de la matriz de Choi

- ▶ El canal tiene la forma $\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2^N} \sum_{\vec{\alpha}} \tau_{\vec{\alpha}} |\sigma_{\vec{\alpha}}\rangle\langle\sigma_{\vec{\alpha}}|$.
- ▶ Y su estado correspondiente cumple que $\rho_{\mathcal{E}} \propto \sum_{\vec{\alpha}} \tau_{\vec{\alpha}} \bigotimes_{j=1}^N \sigma_{\alpha_j} \otimes \sigma_{\alpha_j}^*$.
- ▶ Las matrices tensoriales conmutan $[\sigma_{\vec{\alpha}} \otimes \sigma_{\vec{\alpha}}^*, \sigma_{\vec{\alpha}'} \otimes \sigma_{\vec{\alpha}'}^*] = 0$.

Diagonalizacion de la matriz de Choi

- ▶ El canal tiene la forma $\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2^N} \sum_{\vec{\alpha}} \tau_{\vec{\alpha}} |\sigma_{\vec{\alpha}}\rangle\langle\sigma_{\vec{\alpha}}|$.
- ▶ Y su estado correspondiente cumple que $\rho_{\mathcal{E}} \propto \sum_{\vec{\alpha}} \tau_{\vec{\alpha}} \bigotimes_{j=1}^N \sigma_{\alpha_j} \otimes \sigma_{\alpha_j}^*$.
- ▶ Las matrices tensoriales conmutan $[\sigma_{\vec{\alpha}} \otimes \sigma_{\vec{\alpha}}^*, \sigma_{\vec{\alpha}'} \otimes \sigma_{\vec{\alpha}'}^*] = 0$.
- ▶ Los eigenvectores comunes cumplen $(\sigma_{\vec{\alpha}} \otimes \sigma_{\vec{\alpha}}^*) \mathbf{v}_{\vec{\beta}} = \frac{1}{2^N} A_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} \mathbf{v}_{\vec{\beta}}$ con

$$A = a^{\otimes N}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizacion de la matriz de Choi

- ▶ El canal tiene la forma $\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2^N} \sum_{\vec{\alpha}} \tau_{\vec{\alpha}} |\sigma_{\vec{\alpha}}\rangle\langle\sigma_{\vec{\alpha}}|$.
- ▶ Y su estado correspondiente cumple que $\rho_{\mathcal{E}} \propto \sum_{\vec{\alpha}} \tau_{\vec{\alpha}} \bigotimes_{j=1}^N \sigma_{\alpha_j} \otimes \sigma_{\alpha_j}^*$.
- ▶ Las matrices tensoriales conmutan $[\sigma_{\vec{\alpha}} \otimes \sigma_{\vec{\alpha}}^*, \sigma_{\vec{\alpha}'} \otimes \sigma_{\vec{\alpha}'}^*] = 0$.
- ▶ Los eigenvectores comunes cumplen $(\sigma_{\vec{\alpha}} \otimes \sigma_{\vec{\alpha}}^*) \mathbf{v}_{\vec{\beta}} = \frac{1}{2^N} A_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} \mathbf{v}_{\vec{\beta}}$ con

$$A = a^{\otimes N}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Esto implica que los eigenvectores cumplen $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{1}{2^N} A_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} \tau_{\vec{\beta}}$.
- ▶ Diagonalizamos la matriz de Choi ($\propto \rho_{\mathcal{E}}$) para canales de Pauli.

Una relación entre índices de un canal

Basándonos en que

- ▶ A es casi idempotente: $A^{-1} = \frac{1}{4^N} A$
- ▶ Si $\lambda_{\vec{\alpha}} \geq 0$ (como debe ser para canales cuánticos), entonces $\sum_{\vec{\alpha} \in \Omega} \lambda_{\vec{\alpha}} = 0$ implica $\lambda_{\vec{\alpha}} = 0, \forall \vec{\alpha} \in \Omega$,

Una relación entre índices de un canal

Basándonos en que

- ▶ A es casi idempotente: $A^{-1} = \frac{1}{4^N} A$
- ▶ Si $\lambda_{\vec{\alpha}} \geq 0$ (como debe ser para canales cuánticos), entonces $\sum_{\vec{\alpha} \in \Omega} \lambda_{\vec{\alpha}} = 0$ implica $\lambda_{\vec{\alpha}} = 0, \forall \vec{\alpha} \in \Omega$,

podemos decir que si $\tau_{\vec{\alpha}} = 1$ entonces $\tau_{\vec{\gamma}} = \tau_{\vec{\gamma}'}$ si

$$A_{\vec{\beta}\vec{\gamma}} = A_{\vec{\beta}\vec{\gamma}'}, \quad \forall \vec{\beta} : A_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} = 1.$$

Esta es una relación entre los índices que son preservados en un canal.

Una relación entre índices de un canal

Basándonos en que

- ▶ A es casi idempotente: $A^{-1} = \frac{1}{4^N} A$
- ▶ Si $\lambda_{\vec{\alpha}} \geq 0$ (como debe ser para canales cuánticos), entonces $\sum_{\vec{\alpha} \in \Omega} \lambda_{\vec{\alpha}} = 0$ implica $\lambda_{\vec{\alpha}} = 0, \forall \vec{\alpha} \in \Omega$,

podemos decir que si $\tau_{\vec{\alpha}} = 1$ entonces $\tau_{\vec{\gamma}} = \tau_{\vec{\gamma}'}$ si

$$A_{\vec{\beta}\vec{\gamma}} = A_{\vec{\beta}\vec{\gamma}'}, \quad \forall \vec{\beta} : A_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} = 1.$$

Esta es una relación entre los índices que son preservados en un canal.

Se puede reformular diciendo que si $\tau_{\vec{\alpha}} = \tau_{\vec{\beta}} = 1$, entonces $\tau_{\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}} = 1$ con la suma entre componentes definida por:

\oplus	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Un espacio vectorial *hermoso*

- ▶ Tenemos operación suma (\oplus) cerrada, y, si consideramos el campo $\{0, 1\}$, multiplicación por escalar.
- ▶ Es decir, tenemos un espacio vectorial (sin producto interior).

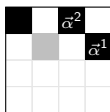
Un espacio vectorial *hermoso*

- ▶ Tenemos operación suma (\oplus) cerrada, y, si consideramos el campo $\{0, 1\}$, multiplicación por escalar.
- ▶ Es decir, tenemos un espacio vectorial (sin producto interior).
- ▶ Dado que las componente preservadas de cada canal son cerradas bajo adición, a cada canal está asociado a un subespacio vectorial (y viceversa).

Un espacio vectorial *hermoso*

- ▶ Tenemos operación suma (\oplus) cerrada, y, si consideramos el campo $\{0, 1\}$, multiplicación por escalar.
- ▶ Es decir, tenemos un espacio vectorial (sin producto interior).
- ▶ Dado que las componente preservadas de cada canal son cerradas bajo adición, a cada canal está asociado a un subespacio vectorial (y viceversa).

Ejemplos:



Dos de sus elementos son

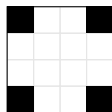
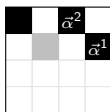
$$\vec{\alpha}^{(1)} = (0, 2), \vec{\alpha}^{(2)} = (1, 3)$$

pero $\vec{\alpha}^{(1)} \oplus \vec{\alpha}^{(2)} = (1, 1)$ y no se preserva. Entonces, este diagrama no corresponde a un canal.

Un espacio vectorial *hermoso*

- ▶ Tenemos operación suma (\oplus) cerrada, y, si consideramos el campo $\{0, 1\}$, multiplicación por escalar.
- ▶ Es decir, tenemos un espacio vectorial (sin producto interior).
- ▶ Dado que las componente preservadas de cada canal son cerradas bajo adición, a cada canal está asociado a un subespacio vectorial (y viceversa).

Ejemplos:



Dos de sus elementos son

$$\vec{\alpha}^{(1)} = (0, 2), \vec{\alpha}^{(2)} = (1, 3)$$

pero $\vec{\alpha}^{(1)} \oplus \vec{\alpha}^{(2)} = (1, 1)$ y no se preserva. Entonces, este diagrama no corresponde a un canal.

Sus elementos son

$$\vec{\alpha}^{(0)} = (0, 0), \quad \vec{\alpha}^{(1)} = (0, 3)$$

$$\vec{\alpha}^{(2)} = (3, 0), \quad \vec{\alpha}^{(3)} = (3, 3)$$

que son cerrados bajo \oplus . Es decir *si* representa un canal.

Algunas consecuencias

Lo que habíamos observado, surge como consecuencia de la estructura vectorial de los canales.

- ▶ El numero de elementos de un espacio vectorial con campo escalar de q elementos tiene q^k vectores. Es decir nuestros canales preservan exactamente 2^k componentes.
- ▶ Analizando el numero de subespacios de dimensión k y las bases que lo pueden generar encontramos el número de canales que preservan 2^k componentes $S_{N,K} = \prod_{m=0}^{K-1} \frac{2^{2N-m}-1}{2^{K-m}-1}$.
- ▶ Verificamos la simetría $S_{N,K} = S_{N,2N-K}$
- ▶ Existen subespacios maximales (siguiente slide).

Some tools

PCE maps and PCE channels

The problem and its solution

Generators and decoherence

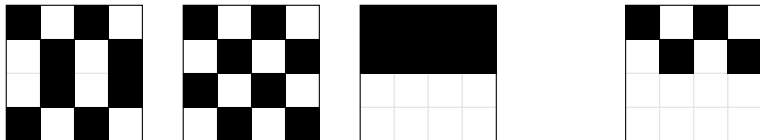
Aparición de los generadores

- ▶ Cualquier subespacio vectorial puede generarse como la intersección de subespacios maximales no triviales.
- ▶ Cualquier canal puede generarse como la composición de canales que preservan la mitad de componentes.

Aparición de los generadores

- ▶ Cualquier subespacio vectorial puede generarse como la intersección de subespacios maximales no triviales.
- ▶ Cualquier canal puede generarse como la composición de canales que preservan la mitad de componentes.

Ejemplo:

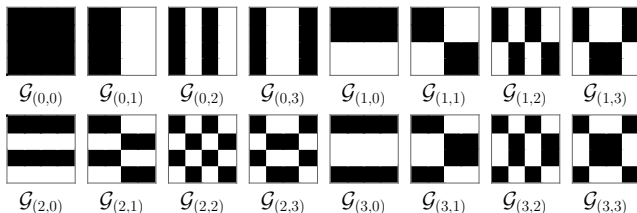


Cualquier par (de los primeros canales) genera el ultimo canal.

Algunas propiedades de los generadores

Algunas consecuencias:

- ▶ Las generadores tienen simetrías izquierda/derecha y arriba/abajo. Se puede comprobar de las propiedades mostradas anteriormente.
- ▶ Cada generador se puede clasificar mediante la acción sobre cada qubit.



Decoherencia generalizada

Podemos construir los procesos físicos que generan estos canales, notando que los operadores de Kraus que corresponden a los generadores son

$$\mathcal{G}_{\vec{\alpha}} \longrightarrow \left\{ \frac{\mathbb{1}}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_{\vec{\alpha}}}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Este se puede interpretar muy fácilmente y generar su ecuación de Lindblad.

Otros PCEs se pueden ser creados e interpretados a partir de los generadores que lo produzcan.

Conclusions and outlook

- ▶ Se introducen los Pauli Component Erasing maps.
- ▶ Se logra diagonalizar de manera simple la matriz de Choi de cualquier canal de Pauli.
- ▶ Se asocian a los PCEs espacios vectoriales, lo que simplifica su tratamiento
- ▶ Se encuentran los generadores y sus operadores de Kraus, lo que permitirá asociarlos a procesos físicos existentes.

Conclusions and outlook

- ▶ Se introducen los Pauli Component Erasing maps.
- ▶ Se logra diagonalizar de manera simple la matriz de Choi de cualquier canal de Pauli.
- ▶ Se asocian a los PCEs espacios vectoriales, lo que simplifica su tratamiento
- ▶ Se encuentran los generadores y sus operadores de Kraus, lo que permitirá asociarlos a procesos físicos existentes.

Outlook

- ▶ qudits
- ▶ Allow $\tau = 0, 1, -1$
- ▶ Study the geometry of the set of channels