

# Pauli component erasing (PCE) quantum channels

Jose Alfredo de Leon<sup>1,2</sup>, Alejandro Fonseca<sup>3,2</sup>, Francois Leyvraz<sup>4</sup>, David Davalos<sup>5</sup>, Carlos Pineda<sup>2</sup>

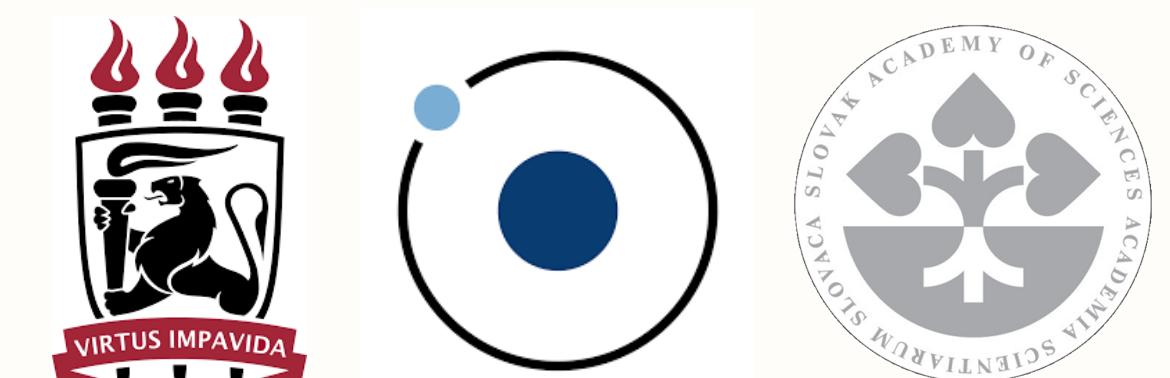
<sup>1</sup>Instituto de Investigación en Ciencias Físicas, ECFM, Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala

<sup>2</sup>Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, México

<sup>3</sup>Departamento de Física, CCEN, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

<sup>4</sup>Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, México

<sup>5</sup>Institute of Physics, Slovak Academy of Sciences, Slovakia



## Resumen

La decoherencia de los sistemas cuánticos puede describirse dentro del marco teórico de los canales cuánticos. Sin embargo, sigue siendo difícil entender por completo la descripción matemática de los canales cuánticos, particularmente para sistemas de muchas partículas. En ese contexto, proponemos los mapeos *Pauli component erasing* (PCE), que preservan o borran por completo las componentes de la matriz de densidad de un sistema de muchos qubits. Para aquellos que son canales cuánticos mostramos su correspondencia con subespacios vectoriales y así hacemos su caracterización. A partir de su estructura de semigrupo derivamos sus generadores y, con esto, determinamos implementaciones físicas para conectar a los canales PCE con procesos Markovianos.

## El problema

Los estados de una partícula de dos niveles, un qubit, pueden visualizarse geométricamente en la esfera de Bloch. Los procesos de disipación y decoherencia se describen como proyecciones de la esfera de Bloch. Sin embargo, como mostramos en la Fig. 1 no todas las proyecciones describen evoluciones físicas.

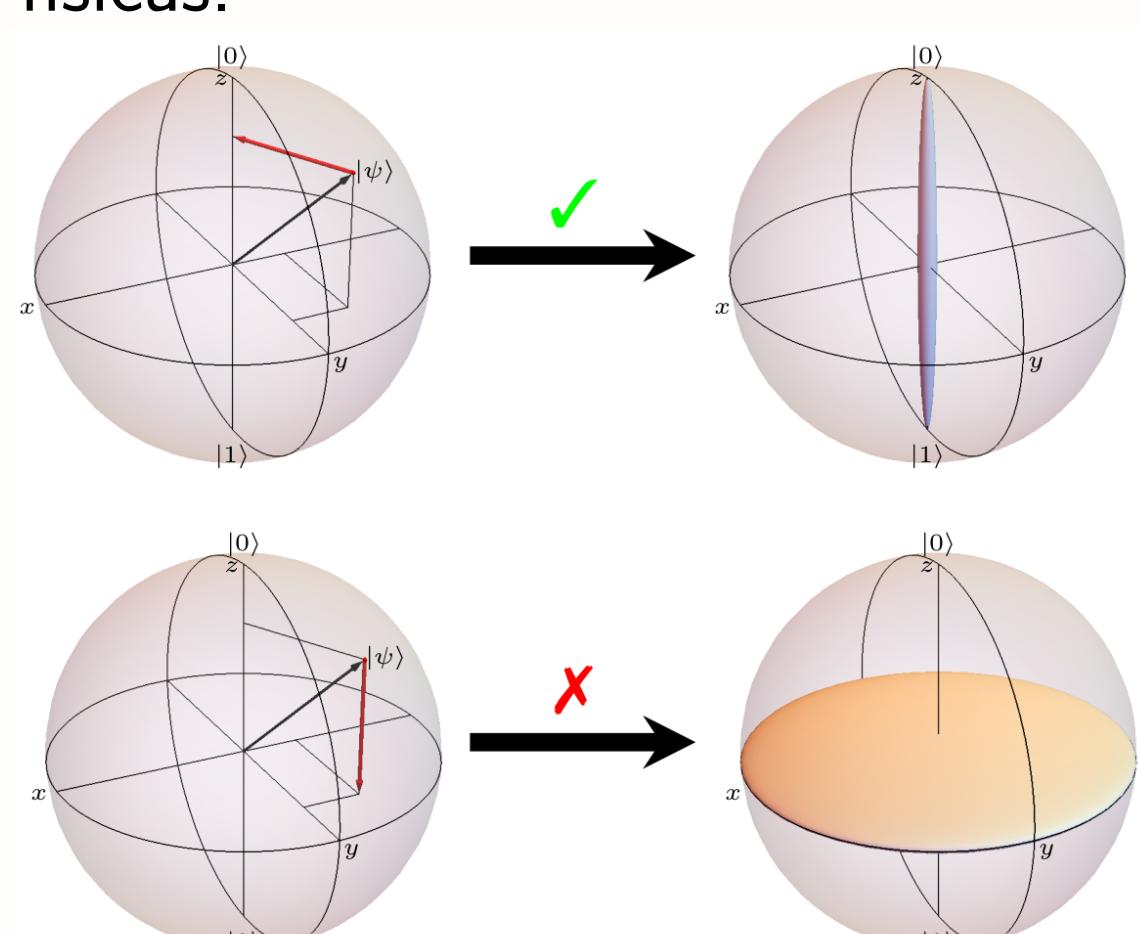


Figura 1: Sólo algunas de las proyecciones de la esfera de Bloch son permitidas.

## Canales cuánticos

Los canales cuánticos son un marco teórico dentro del cual se pueden estudiar la dinámica de sistemas cuánticos, como las transformaciones de la esfera de Bloch en la Fig. 1.

Un canal cuántico es un mapeo de matrices de densidad a matrices de densidad. Es decir,  $\rho \mapsto \mathcal{E}(\rho)$ , donde  $\mathcal{E}$  es un mapeo completamente positivo que preserva la traza de  $\rho$ . Un mapeo  $\mathcal{E}$  está únicamente caracterizado por su matriz de Choi  $\mathcal{D} \propto (\mathbb{1} \otimes \mathcal{E})[\sum_{j,k} |j\rangle\langle j| |k\rangle\langle k|]$ .  $\mathcal{D}$  es una matriz positiva semidefinida si y sólo si  $\mathcal{E}$  es completamente positivo.

## Mapeos PCE

La forma más general de escribir a la matriz de densidad de  $N$  qubits es

$$\rho = \frac{1}{2^N} \sum_{\vec{\alpha}} r_{\vec{\alpha}} \sigma_{\vec{\alpha}}, \quad (1)$$

donde  $\vec{\alpha}$  denota un multi índice ( $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ ),  $\alpha_j = 0, 1, 2, 4$ , y  $\sigma_{\vec{\alpha}} = \sigma_{\alpha_1} \otimes \sigma_{\alpha_2} \otimes \dots \otimes \sigma_{\alpha_N}$ . La condición de normalización de  $\rho$  restringe que  $r_{\vec{0}} = 1$ .

Definimos a un mapeo *Pauli component erasing* (PCE) como un mapeo que actúa sobre  $\rho$  como

$$r_{\vec{\alpha}} \mapsto r_{\vec{\alpha}} r_{\vec{\alpha}}, \quad r_{\vec{\alpha}} = 0, 1. \quad (2)$$

Para que, por definición, un mapeo PCE preserve la traza imponemos que  $r_{\vec{0}} = 1$ . Nos referimos a un mapeo de la

forma (2), pero sin la restricción sobre los valores de  $r_{\vec{\alpha}}$  como un mapeo diagonal de Pauli. En la Fig. 2 introducimos diagramas para representar a los mapeos PCE de 1 y 2 qubits.

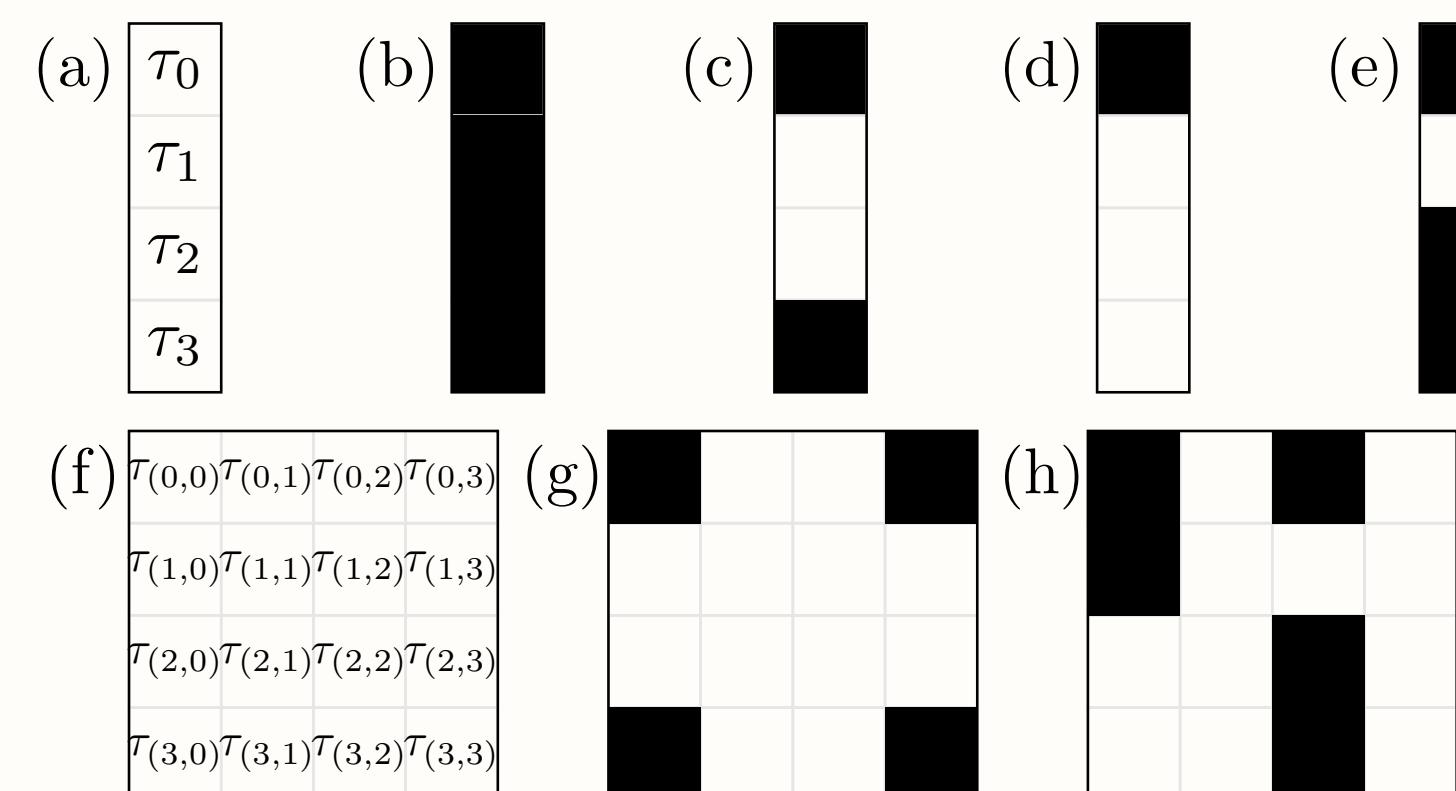


Figura 2: En (a) y (f) introducimos la correspondencia entre las  $\tau_{\vec{\alpha}}$  de un mapeo PCE [vea eq. (2)] y las posiciones de los cuadros en los diagramas. Un cuadro negro (blanco) se corresponde con  $\tau_{\vec{\alpha}} = 1$  ( $\tau_{\vec{\alpha}} = 0$ ). En (b) se muestra la identidad de 1 qubit, en (c) y (e) los canales ilustrados en la Fig. 1, en (d) el completamente depolarizante, (g) corresponde a un canal cuántico que es el producto tensorial del canal (c) en cada qubit y en (h) mostramos un mapeo PCE de 2 qubits que no es un canal cuántico.

Los mapeos PCE no son trivialmente canales cuánticos. En general, un mapeo PCE [vea Eq. (2)] no es completamente positivo. Para determinar si un mapeo PCE es completamente positivo y, por consiguiente, un canal cuántico investigamos la diagonalización de la matriz de Choi de un mapeo diagonal de Pauli.

## Diagonalización de la matriz de Choi

Diagonalizamos exactamente la matriz de Choi  $\mathcal{D}$  de un mapeo diagonal de Pauli de  $N$  qubits y mostramos que los eigenvalores de  $\mathcal{D}$  se pueden escribir como

$$\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{1}{2^N} \sum_{\vec{\beta}} A_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} \tau_{\vec{\beta}}, \quad (3)$$

donde

$$A = a^{\otimes N}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Para que un mapeo PCE sea completamente positivo y, por consiguiente, un canal cuántico los eigenvalores (3) deben satisfacer  $\lambda_{\vec{\alpha}} \geq 0$ .

## Canales cuánticos PCE como espacios vectoriales

Los canales cuánticos PCE tienen una estructura algebraica bella y simple a partir de la cual se pueden derivar sus propiedades.

Si reescribimos  $\vec{\alpha}$  con dos índices binarios como  $\vec{\alpha} = \{(\mu_1, \dots, \mu_N), (\nu_1, \dots, \nu_N)\}$ ,  $\mu_j \nu_j = 0, 1$  es fácil de probar la siguiente propiedad,

$$\tau_{\vec{\alpha}} \tau_{\vec{\beta}} = \tau_{\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}}, \quad \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} : \alpha \neq \beta \wedge \tau_{\vec{\alpha}} = \tau_{\vec{\beta}} = 1. \quad (5)$$

Es decir, el conjunto  $\{\vec{\alpha} : \tau_{\vec{\alpha}} = 1\}$  junto con la operación  $\oplus$  forman un grupo. Si además, uno equipa a este grupo con el campo  $\{0, 1\}$  se deduce que cada canal cuántico PCE está asociado con un subespacio vectorial, y viceversa.

## Generadores

A partir de la estructura de grupo de los canales cuánticos PCE se deduce la existencia de un conjunto generador. Los

diagramas (c)-(e) de la Fig. 3 son ejemplos de generadores PCE de 2 qubits, cualquier intersección entre dos de ellos (concatenación de canales) da como resultado el canal en (b).

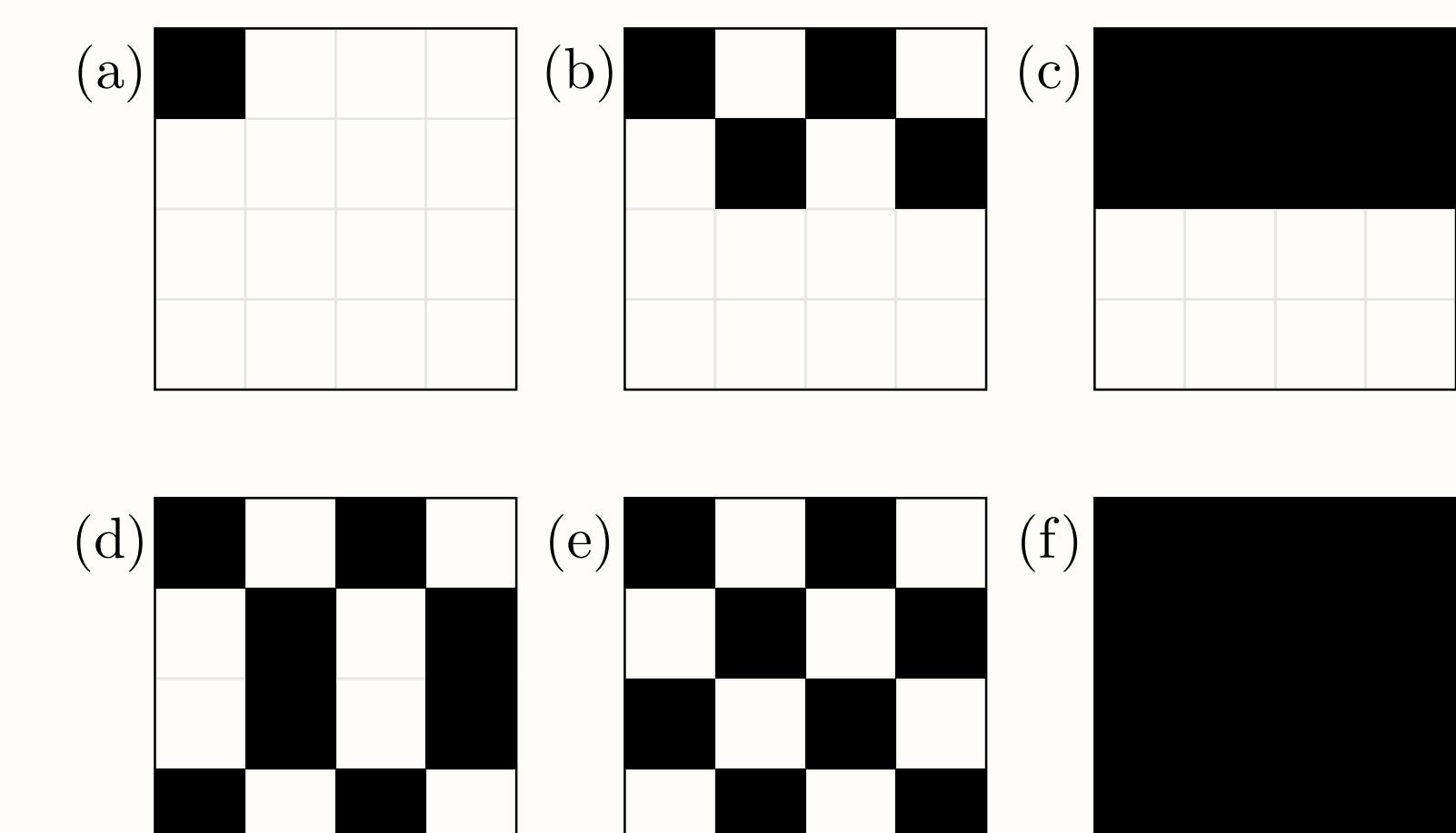


Figura 3: Ejemplos de diagramas para varios canales cuánticos PCE de 2 qubits: (a) el canal completamente depolarizante, (b) un canal PCE que preserva cuatro componentes, la componente de normalización, una componente local del qubit 1 y dos correlaciones entre los dos qubits. En (c), (d) y (e) mostramos los tres generadores  $\mathcal{G}_{(1,0)}$ ,  $\mathcal{G}_{(3,2)}$  y  $\mathcal{G}_{(2,2)}$ , respectivamente; y en (f) mostramos el mapeo de la identidad.

Más aún, como mostramos en la Fig. 4, existe una relación entre los generadores PCE y la matriz  $a$  en (4) que establece la simetría de reflexión respecto a una partícula.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{array}{cccc} \mathcal{G}_0 & \mathcal{G}_1 & \mathcal{G}_2 & \mathcal{G}_3 \end{array}$$

Figura 4: Conexión entre las filas y columnas de la matriz  $a$  en (4) y de los generadores PCE  $\mathcal{G}_{\vec{\alpha}}$  de 1 qubit.

## Canales PCE y decoherencia

Los canales PCE pueden identificarse como procesos de disipación en el límite  $t \rightarrow \infty$  y como puntos particulares de un modelo de colisiones sin memoria. Ambas implementaciones antes mencionadas se derivan a partir de la forma de Kraus de los generadores PCE, que tienen la forma simple siguiente,

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad K_1 = \frac{\sigma_{\vec{\alpha}}}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

## Conclusiones

- Introducimos los mapeos PCE.
- Diagonalizamos exactamente a la matriz de Choi de un mapeo diagonal de Pauli de  $N$  qubits.
- Caracterizamos a los canales cuánticos PCE mediante su estructura de espacio vectorial.
- Estudiamos que los canales cuánticos PCE pueden implementarse como puntos límite de procesos Markovianos.

## Referencia

- [1] Pauli component erasing quantum channels. Jose Alfredo de Leon, Alejandro Fonseca, Francois Leyvraz, David Davalos, Carlos Pineda. arXiv:2205.05808. [Aceptado para publicarse en Physical Review A]

## Contacto

josedleon@estudiantes fisica.unam.mx