# Analyse microlocale et semiclassique

Alix Deleporte

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Strasbourg

1er mai 2018

# Plan

# La mécanique classique

- Mécanique : étude du déplacement d'objets.

# La mécanique classique

- Mécanique : étude du déplacement d'objets.
- L'espace des configurations du système est de dimension paire. Exemple : position et vitesse en coordonnées.

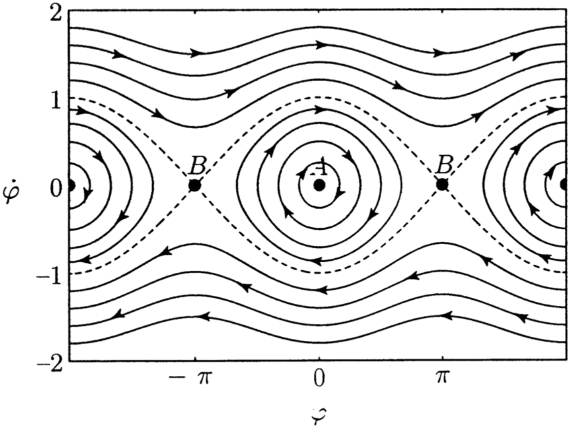
# La mécanique classique

- Mécanique : étude du déplacement d'objets.
- L'espace des configurations du système est de dimension paire. Exemple : position et vitesse en coordonnées.
- Évolution temporelle : flot d'un champ de vecteurs

# La mécanique classique

- Mécanique : étude du déplacement d'objets.
- L'espace des configurations du système est de dimension paire. Exemple : position et vitesse en coordonnées.
- Évolution temporelle : flot d'un champ de vecteurs
- Cas conservatif : on préserve l'énergie.

# Un exemple : le pendule simple



# Géométrie symplectique

- En dimension $> 2 * 1$, les niveaux d'énergie ne suffisent plus à caractériser les trajectoires ; les équations du mouvement sont données par une information plus précise.
- Forme symplectique $\omega$ sur $M$ : forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée sur les champs de vecteurs, fermée.
- Localement, on peut trouver une base $(X_1, \ldots, X_d, P_1, \ldots P_d)$ de champs de vecteurs avec $\omega(X_i, P_i) = 1$ (toute autre combinaison fait zéro).
- Si l'énergie est $H$, le champ de vecteurs $X_H$ est défini par

$$\omega(X_H, Y) = Y \cdot H.$$

# Particule massive dans un champ de potentiel

- Espace des phases $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p$, forme symplectique

$$\omega(\partial_{x_i}, \partial_{p_i}) = 1.$$

- Énergie cinétique + énergie potentielle

$$H = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x).$$

- Champ de vecteurs correspondant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= p_i \\ \dot{p}_i &= -\partial_{x_i} V. \end{aligned}$$

# Histoire de la lumière

Grèce antique Propagation en ligne droite, réflexion sur un miroir plan, absorbsion et diffusion.

# Histoire de la lumière

**Grèce antique** Propagation en ligne droite, réflexion sur un miroir plan, absorbsion et diffusion.

**Ibn al-Haytham (965-1040)** Lentilles et miroirs courbes.

# Histoire de la lumière

**Grèce antique** Propagation en ligne droite, réflexion sur un miroir plan, absorbsion et diffusion.

**Ibn al-Haytham (965-1040)** Lentilles et miroirs courbes.

**Newton** La lumière est faite de particules.

**Huygens** La lumière est faite d'ondes qui se propagent.

# Histoire de la lumière

**Grèce antique** Propagation en ligne droite, réflexion sur un miroir plan, absorbsion et diffusion.

**Ibn al-Haytham (965-1040)** Lentilles et miroirs courbes.

**Newton** La lumière est faite de particules.

**Huygens** La lumière est faite d'ondes qui se propagent.

**Newton, Young** Expériences de diffraction et d'interférences.

# Histoire de la lumière

**Grèce antique** Propagation en ligne droite, réflexion sur un miroir plan, absorbsion et diffusion.

**Ibn al-Haytham (965-1040)** Lentilles et miroirs courbes.

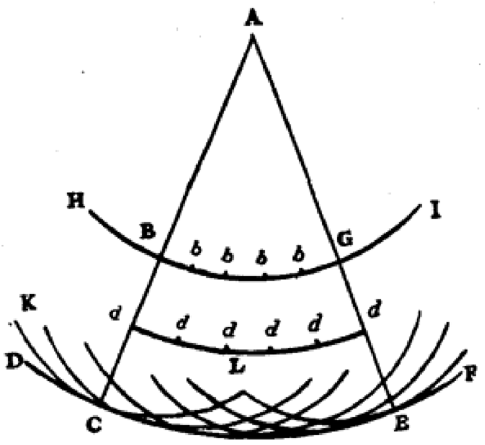
**Newton** La lumière est faite de particules.

**Huygens** La lumière est faite d'ondes qui se propagent.

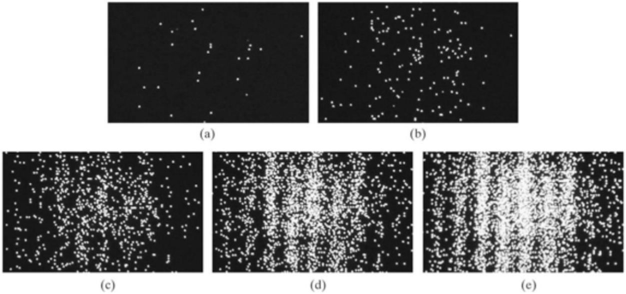
**Newton, Young** Expériences de diffraction et d'interférences.

**Maxwell** Équations d'évolution de la lumière.

# Principe de Huygens



# Interférences d'un électron



# Description d'un système quantique

- Espace des états : Hilbert $\mathcal{H}$.
- Énergie : Opérateur auto-adjoint $A$.
- Évolution :

$$i\partial_t u = Au$$

- Exemple : $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ et $A = -\hbar^2\Delta + V$.

# Principe de correspondance.

- Les objets de la vie courante se déplacent « en ligne droite ».
- Nécessité d'un équivalent quantique$\rightarrow$ classique du principe de Huygens.

# Plan

# La transformée de Fourier

- Idée de Fourier : représenter un signal (= une fonction du temps et/ou de l'espace) par ses fréquences.
- Composante de fréquence $\xi \in \mathbb{R}^d$ : onde monochromatique

$$x \mapsto \exp(ix \cdot \xi).$$

- Transformation de Fourier :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx.$$

# Équations différentielles intéressantes

- Propagation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u.$$

- Équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = -\Delta u.$$

- Équation de Schrödinger libre :

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

- Équation de Dirac libre :

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = (mc^2 \alpha_0 + c\alpha_1 \partial_{x_1} + c\alpha_2 \partial_{x_2} + c\alpha_3 \partial_{x_3})u.$$

# Résolution par transformée de Fourier

Exemple pour l'équation de Schrödinger libre : Les ondes monochromatiques sont des fonctions propres des opérateurs de dérivation.

$$i\partial_t \hat{u}(\xi) = |\xi|^2 \hat{u}(\xi) \rightsquigarrow \hat{u}(t,\xi) = e^{it|\xi|^2}\hat{u}(0,\xi).$$

$$u(t,x) = e^{-it|x|^2}\int e^{itx\cdot y}e^{it|y|^2}u(0,y)dy.$$

# Autres résolutions par noyaux

Equation de Laplace : $\Delta u = 0$ dans le disque, $u = f$ fixée sur le bord.
Solution : noyau de Poisson :

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f(e^{it})dt.$$

# Opérateurs pseudodifférentiels

L'opérateur différentiel $a(x)\partial_{x_j}$ s'écrit par une double transformée de Fourier :

$$a(x)\partial_{x_j} f(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi}(i\xi_j a(x))f(y)dyd\xi.$$

Opérateurs pseudodifférentiels : on généralise à une fonction quelconque de $x, \xi, y$ :

# Opérateurs pseudodifférentiels

L'opérateur différentiel $a(x)\partial_{x_j}$ s'écrit par une double transformée de Fourier :

$$a(x)\partial_{x_j} f(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi}(i\xi_j a(x))f(y)dyd\xi.$$

Opérateurs pseudodifférentiels : on généralise à une fonction quelconque de $x, \xi, y$ :

$$Pf(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi}p(x,\xi,y)f(y)dyd\xi.$$

# Opérateurs pseudodifférentiels

L'opérateur différentiel $a(x)\partial_{x_j}$ s'écrit par une double transformée de Fourier :

$$a(x)\partial_{x_j} f(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi}(i\xi_j a(x))f(y)dyd\xi.$$

Opérateurs pseudodifférentiels : on généralise à une fonction quelconque de $x, \xi, y$ :

$$Pf(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi,y)f(y)dyd\xi.$$

On peut calculer la composée de deux pseudodiff dans la limite des grandes fréquences .

# Opérateurs pseudodifférentiels

L'opérateur différentiel $a(x)\partial_{x_j}$ s'écrit par une double transformée de Fourier :

$$a(x)\partial_{x_j} f(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi}(i\xi_j a(x))f(y)dyd\xi.$$

Opérateurs pseudodifférentiels : on généralise à une fonction quelconque de $x, \xi, y$ :

$$P_\hbar f(x) = \int e^{\frac{i}{\hbar}(x-y)\cdot\xi} p_\hbar(x,\xi,y)f(y)dyd\xi.$$

On peut calculer la composée de deux pseudodiff dans la limite $\hbar \to 0$.

# Phase stationnaire

Méthode de la phase stationnaire : étude des intégrales du type

$$\int e^{it\phi(x)} a(x) dx$$

dans la limite $t \to +\infty$.
Là où $d\phi \neq 0$ on peut faire des intégrations par parties successives et sortir autant de facteurs $t^{-1}$ que l'on veut.
Les points où $d\phi = 0$ donnent une contribution qui a un développement asymptotiques en puissances de $t^{-1}$.
C'est l'ingrédient essentiel dans l'étude des opérateurs pseudo-différentiels et leurs généralisations.

# Réflexion sur un miroir

- Source en $S$ qui émet une onde de pulsation $\omega$, oeil en $E$.
- Chaque chemin $\gamma$ de $S$ à $E$ donne une contribution $\frac{e^{i\omega\ell(\gamma)}}{\ell(\gamma)^2}$.
- Quand $\omega \to +\infty$, les seuls chemins qui comptent sont de longueur critique.

# Plan

# Indice d'opérateurs

- Un opérateur linéaire continu $A$ est dit *de Fredholm* lorsque son noyau $\ker A$ et l'orthogonal de l'image coker A sont de dimension finies.
- Exemple : l'application dérivée de $C^1_{per}([0,1]) \mapsto C^0_{per}([0,1])$ a un noyau de dimension 1 et un conoyau de dimension 1.
- On appelle *indice* d'un opérateur de Fredholm la différence $\dim\ker A - \dim \mathrm{coker} A$.
- Exemple : $d_{DR} : H^{pair}(M) \mapsto H^{impair}(M)$ a comme indice de Fredholm $\chi(M)$.

# Indices de différentielles et laplacien

- Si $A : E \mapsto F$ est de Fredholm avec $E$ et $F$ des Hilbert alors $A^*A$ et $AA^*$, autoadjoints, ont le même spectre excepté un surplus de valeurs propres nulles ; donc par exemple, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{ind}(A) = \mathrm{tr}\, e^{-tA^*A} - \mathrm{tr}\, e^{-tAA^*}.$$

- Si $A$ est une différentielle alors $A^*A$ et $AA^*$ sont des laplaciens.
- Pour connaître la classe d'Euler il suffit de maîtriser le comportement en temps long de l'équation de la chaleur.

# Formule de Chern-Gauss-Bonnet

- Pour obtenir $\chi(M)$ il faut regarder la différentielle sur un fibré de type spineur.
- Si $M$ est de dimension $2k$, alors

$$\chi(M) = (2\pi)^{-k} \int_M \mathrm{Pf}(\Omega).$$

- $\mathrm{Pf}$ dénote le *Pfaffien* d'une matrice antisymétrique $(X_{i,j})$, avec

$$\left( \sum X_{i,j} e_i \wedge e_j \right)^{\wedge k} = k! \mathrm{Pf}(X) e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2k}.$$

- $\Omega$ est un tenseur de courbure.