

Spectre à basse énergie des opérateurs de Toeplitz

Alix Deleporte

Sous la direction de Nalini Anantharaman

Institut de Recherche Mathématique Avancée

4 avril 2018

Introduction

Spins sur Kagomé

Plan

- 1 La quantification de Toeplitz
 - Construction géométrique
 - Opérateurs de Toeplitz
- 2 Analyse du noyau de Szegő
 - Opérateurs intégraux de Fourier
 - Développement asymptotique du projecteur de Szegő
- 3 Localisation des fonctions propres à basse énergie
 - État de l'art
 - Critères sous-principaux
 - Perspectives

Quantifications

Mécanique classique	Mécanique quantique

Quantifications

Mécanique classique	Mécanique quantique
Variété symplectique M	Espace de Hilbert H

Quantifications

Mécanique classique	Mécanique quantique
Variété symplectique M	Espace de Hilbert H
Fonction $a \in C^\infty(M, \mathbb{R})$	Opérateur auto-adjoint $A \in L(H)$

Quantifications

Mécanique classique	Mécanique quantique
Variété symplectique M	Espace de Hilbert H
Fonction $a \in C^\infty(M, \mathbb{R})$	Opérateur auto-adjoint $A \in L(H)$
Flot hamiltonien de a	Flot de $e^{itA/\hbar}$

Quantifications

Mécanique classique	Mécanique quantique
Variété symplectique M	Espace de Hilbert H
Fonction $a \in C^\infty(M, \mathbb{R})$	Opérateur auto-adjoint $A \in L(H)$
Flot hamiltonien de a	Flot de $e^{itA/\hbar}$
Crochet de Poisson	Crochet de Lie

Quantifications

Mécanique classique	Mécanique quantique
Variété symplectique M	Espace de Hilbert H
Fonction $\alpha \in C^\infty(M, \mathbb{R})$	Opérateur auto-adjoint $A \in L(H)$
Flot hamiltonien de α	Flot de $e^{itA/\hbar}$
Crochet de Poisson	Crochet de Lie

- Quantification : pour un modèle donné de mécanique classique, comment construire un modèle quantique associé ?
- Semi-classique : le modèle quantique dépend d'un petit paramètre \hbar . Que dire de l'asymptotique $\hbar \rightarrow 0$?

Quantification de Weyl et quantification géométrique

Deux approches historiques différentes.

1 Années 30 (motivations physiques) :

- variété $M = \mathbb{R}^{2n}$, symbole $a(q, p)$.
- Espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$.
- Opérateur associé : on remplace p par $-i\hbar\nabla$.
- Exemple : particule massive soumise à un potentiel :

$$|p|^2 + V(q) \rightsquigarrow -\hbar^2\Delta + V$$

Quantification de Weyl et quantification géométrique

Deux approches historiques différentes.

1 Années 30 (motivations physiques) :

- variété $M = \mathbb{R}^{2n}$, symbole $a(q, p)$.
- Espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$.
- Opérateur associé : on remplace p par $-i\hbar\nabla$.
- Exemple : particule massive soumise à un potentiel :

$$|p|^2 + V(q) \rightsquigarrow -\hbar^2\Delta + V$$

2 Années 60 (motivations mathématiques) :

- Variété symplectique vérifiant $[\omega] \in H^2(M, 2\pi\mathbb{Z})$.
- Polarisation : distribution lagrangienne P intégrable.
- Espace de Hilbert : sections L^2 d'un fibré invariants par P .
- Exemple : représentations irréductibles de dimension finie d'un groupe de Lie compact.

Fibrés préquantifiants et variétés de Kähler

- Condition d'intégrabilité \Leftrightarrow Existence d'un fibré en droites complexes $L \rightarrow M$ avec une structure hermitienne h telle que $\text{curv}(h) = \omega$.

Fibrés préquantifiants et variétés de Kähler

- Condition d'intégrabilité \Leftrightarrow Existence d'un fibré en droites complexes $L \rightarrow M$ avec une structure hermitienne h telle que $\text{curv}(h) = \omega$.
- Variété de Kähler (symplectique, complexe et riemannienne) : on prend pour polarisation $T_{1,0}M$.

Fibrés préquantifiants et variétés de Kähler

- Condition d'intégrabilité \Leftrightarrow Existence d'un fibré en droites complexes $L \rightarrow M$ avec une structure hermitienne h telle que $\text{curv}(h) = \omega$.
- Variété de Kähler (symplectique, complexe et riemannienne) : on prend pour polarisation $T_{1,0}M$.
- Espace de Hilbert : $H_0(M, L)$. Limite semi-classique : on remplace L par $L^{\otimes N}$, de courbure $N\omega$.

Fibrés préquantifiants et variétés de Kähler

- Condition d'intégrabilité \Leftrightarrow Existence d'un fibré en droites complexes $L \rightarrow M$ avec une structure hermitienne h telle que $\text{curv}(h) = \omega$.
- Variété de Kähler (symplectique, complexe et riemannienne) : on prend pour polarisation $T_{1,0}M$.
- Espace de Hilbert : $H_0(M, L)$. Limite semi-classique : on remplace L par $L^{\otimes N}$, de courbure $N\omega$.
- Kodaira : si M est compacte, $\dim H_0(M, L^{\otimes N})$ est donnée par Riemann-Roch (polynôme en N de degré $\dim_{\mathbb{C}} M$).

Quantification de Toeplitz

Définition

- Le projecteur de Szegő S_N est le projecteur orthogonal de $L^2(M, L^{\otimes N})$ dans $H_0(M, L^{\otimes N})$.
- Si $a \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, l'opérateur de Toeplitz associé est

$$T_N(a) = S_N a : H_0(M, L^{\otimes N}) \mapsto H_0(M, L^{\otimes N}).$$

Exemple : \mathbb{C}^n

- On peut expliciter les espaces de Hardy et le projecteur de Szegő.

$$H_0(\mathbb{C}^n, L^{\otimes N}) \simeq \left\{ f \text{ entière}, \int_{\mathbb{C}^n} f(z) e^{-N|z|^2} < +\infty \right\}$$

$$S_N(z, w) = \frac{N^n}{\pi^n} \exp \left(-\frac{N}{2} |z - w|^2 + iN \Im(z \cdot \bar{w}) \right)$$

Exemple : \mathbb{C}^n

- On peut expliciter les espaces de Hardy et le projecteur de Szegő.

$$H_0(\mathbb{C}^n, L^{\otimes N}) \simeq \left\{ f \text{ entière}, \int_{\mathbb{C}^n} f(z) e^{-N|z|^2} < +\infty \right\}$$

$$S_N(z, w) = \frac{N^n}{\pi^n} \exp \left(-\frac{N}{2} |z - w|^2 + iN \Im(z \cdot \bar{w}) \right)$$

- Recette de quantification :

$$T_N(z \mapsto \bar{z}^\alpha z^\beta) = N^{-\alpha} \partial^\alpha z^\beta.$$

Plan

- 1 La quantification de Toeplitz
 - Construction géométrique
 - Opérateurs de Toeplitz
- 2 Analyse du noyau de Szegő
 - Opérateurs intégraux de Fourier
 - Développement asymptotique du projecteur de Szegő
- 3 Localisation des fonctions propres à basse énergie
 - État de l'art
 - Critères sous-principaux
 - Perspectives

Théorème de la phase stationnaire

On veut étudier des intégrales de la forme

$$\int e^{iN\phi(x)} a(x) dx$$

dans la limite $N \rightarrow +\infty$, où ϕ et a sont des fonctions lisses.

Théorème de la phase stationnaire

On veut étudier des intégrales de la forme

$$\int e^{iN\phi(x)} a(x) dx$$

dans la limite $N \rightarrow +\infty$, où ϕ et a sont des fonctions lisses.

- Là où $\nabla\phi$ ne s'annule pas, on peut intégrer par parties autant qu'on veut, contribution $O(N^{-\infty})$.

Théorème de la phase stationnaire

On veut étudier des intégrales de la forme

$$\int e^{iN\phi(x)} a(x) dx$$

dans la limite $N \rightarrow +\infty$, où ϕ et a sont des fonctions lisses.

- Là où $\nabla\phi$ ne s'annule pas, on peut intégrer par parties autant qu'on veut, contribution $O(N^{-\infty})$.
- Là où ϕ a un point critique de Morse, après un changement de variable, on a un développement asymptotique car

$$\int e^{iN|x|^2} a(x) dx = N^{-\frac{d}{2}} \sum_{k=0}^K \frac{N^{-k}}{k!} \Delta^k a(0) + O(N^{-k+1}).$$

Phases complexes

- Si ϕ est à valeurs complexes, l'équation $\nabla \phi = 0$ peut ne pas avoir de solutions dans \mathbb{R}^d .

Phases complexes

- Si ϕ est à valeurs complexes, l'équation $\nabla\phi = 0$ peut ne pas avoir de solutions dans \mathbb{R}^d .
- Il faut prolonger ϕ et α de manière analytique, ou quasianalytique, dans \mathbb{C}^d , puis changer de contour d'intégration.

Phases complexes

- Si ϕ est à valeurs complexes, l'équation $\nabla\phi = 0$ peut ne pas avoir de solutions dans \mathbb{R}^d .
- Il faut prolonger ϕ et α de manière analytique, ou quasianalytique, dans \mathbb{C}^d , puis changer de contour d'intégration.

Énoncés précis beaucoup plus techniques.

Opérateurs intégraux de Fourier

■ Opérateurs à noyaux :

$$Af(x) = \int A(x, y)f(y)dy.$$

Opérateurs intégraux de Fourier

- Opérateurs à noyaux :

$$Af(x) = \int A(x, y) f(y) dy.$$

- Application de la phase stationnaire : étude des opérateurs à noyaux de la forme

$$A(x, y) = \int_{\xi \in E} e^{i\xi \cdot \Phi(x, y)} a(x, \xi, y) d\xi.$$

Opérateurs intégraux de Fourier

- Opérateurs à noyaux :

$$Af(x) = \int A(x, y) f(y) dy.$$

- Application de la phase stationnaire : étude des opérateurs à noyaux de la forme

$$A(x, y) = \int_{\xi \in E} e^{i\xi \cdot \Phi(x, y)} a(x, \xi, y) d\xi.$$

- Opérateurs différentiels : $\Phi(x, y) = x - y$, $E = \mathbb{R}^d$, et a est un polynôme en ξ .

Expression du projecteur de Szegő

Théorème (Boutet-Sjöstrand, Shiffman-Zelditch)

Sur une variété Kähler compacte, dans les cartes locales, le projecteur de Szegő S_N correspond au N -ième mode de Fourier d'un OIF invariant par une action de \mathbb{S}^1 .

$$S_N(x, y) = e^{N\Phi(x, y)} \sum_{k=0}^K N^{n-k} a_n(x, y) + O(N^{-n-K-1}).$$

Conséquences

- On a $\Re \Phi(x, y) < 0$ si $x < y$ donc S_N décroît très vite loin de la diagonale, comme pour le cas \mathbb{C}^d .

Conséquences

- On a $\Re \Phi(x, y) < 0$ si $x < y$ donc S_N décroît très vite loin de la diagonale, comme pour le cas \mathbb{C}^d .
- Près de zéro on a

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2}|x - y|^2 + i\Im(x \cdot \bar{y}) + O((x, y)^3),$$

donc le cas \mathbb{C}^d est un modèle local universel dans l'asymptotique $N \rightarrow +\infty$.

Exemples

1 \mathbb{CP}^1 : dans la projection stéréographique, on a

$$S_N(z, w) = \frac{N}{\pi} \left(\frac{1 + z\bar{w}}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} \right)^N.$$

2 \mathbb{H} : dans le modèle du disque de Poincaré, on a

$$S_N(z, w) = \frac{N}{\pi} \left(\frac{\sqrt{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}}{1 - z\bar{w}} \right)^N.$$

Plan

- 1 La quantification de Toeplitz
 - Construction géométrique
 - Opérateurs de Toeplitz
- 2 Analyse du noyau de Szegő
 - Opérateurs intégraux de Fourier
 - Développement asymptotique du projecteur de Szegő
- 3 Localisation des fonctions propres à basse énergie
 - État de l'art
 - Critères sous-principaux
 - Perspectives

Localisation

Définition

Une suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ où chaque u_N est un élément de $H_0(M, L^{\otimes N})$ se *localise* sur un fermé $Z \subset M$ lorsque, pour tout ouvert V à distance non-nulle de Z , on a, quand $N \rightarrow +\infty$,

$$\int_V |u_N|_h^2 d\text{Vol} = O(N^{-\infty}).$$

Exemple

Pour $x = (m, v) \in L^*$, la forme $e_x^N : u \mapsto \langle v^{\otimes N}, u(m) \rangle_{L^*, L}$ est continue de $H_0(M, L^{\otimes N})$ dans \mathbb{C} . Son dual normalisé ψ_x^N , état cohérent en x , est localisé en x .

Localisation près du lieu minimal

Proposition

Soit $h \in C^\infty(M)$ et $E \in h(M)$.

Si (u_N) est une suite de fonctions propres normalisées de $T_N(h)$ avec valeur propre $\lambda_N = E + O(N^{-\epsilon})$, alors (u_N) est localisée sur $\{h = E\}$.

Proof. Le développement du noyau de Szegő donne un calcul fonctionnel

$$T_N(f)T_N(g) = T_N(fg) + N^{-1}T_N(C_1(f, g)) + N^{-2}T_N(C_2(f, g)) + \dots$$

Où C_i est un opérateur bidifférentiel de degré $2i$. On peut donc estimer $\langle u_N, T_N((h - E)^{2n}), u_N \rangle$ □

Valeur caractéristique

Si q est une forme quadratique définie positive sur \mathbb{R}^{2n} , alors il existe une base symplectique $(e_i, f_i)_{1 \leq i \leq n}$ pour laquelle

$$Q\left(\sum x_i e_i + y_i f_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i^2 + y_i^2).$$

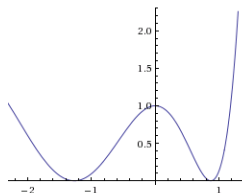
Proposition

$$\inf \operatorname{Sp} T_N(Q) = N^{-1} \left(\frac{\operatorname{tr}(Q)}{4} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \right).$$

On pose $\mu(Q) = \inf \operatorname{Sp} T_1(Q)$.

Cas d'un symbole à plusieurs puits

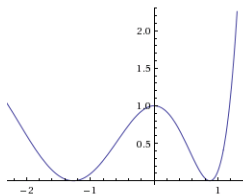
Que dire si h est minimale en des points critiques non-dégénérés?



Ce qu'on minimise, c'est le μ de la hessienne en ce point.

Cas d'un symbole à plusieurs puits

Que dire si h est minimale en des points critiques non-dégénérés?



Théorème (D.)

Les vecteurs propres de plus petite valeur propre se concentrent uniquement en les points « minimaux ».

Ce qu'on minimise, c'est le μ de la hessienne en ce point.

Cas général

Théorème (D.)

Dès qu'il existe $C, \alpha > 0$ tel que, pour tout $t \geq 0$, on ait

$$\text{dist}(\{h \leq t\}, \{h = 0\}) \leq Ct^\alpha,$$

alors les vecteurs propres d'énergie plus petite que $\min \text{Sp}(T_N(h)) + CN^{-\epsilon}$ se concentrent uniquement sur

$$\{h(x) = 0, \mu(\text{Hess}(h)(x)) \text{ est minimal}\}$$

Cas particulier 1 : Morse-Bott

- On suppose que h s'annule à l'ordre 2 sur une sous-variété Z de rang symplectique constant/

Cas particulier 1 : Morse-Bott

- On suppose que h s'annule à l'ordre 2 sur une sous-variété Z de rang symplectique constant/
- On a une forme normale locale pour h à symplectomorphisme près.

Cas particulier 1 : Morse-Bott

- On suppose que h s'annule à l'ordre 2 sur une sous-variété Z de rang symplectique constant/
- On a une forme normale locale pour h à symplectomorphisme près.
- Développement asymptotique de la première fonction propre et de la valeur propre associée, gap spectral $N^{-\frac{3}{2}}$.
- Loi de Weyl dans des fenêtres de taille jusque ϵN^{-1} .

Cas particulier 2 : Point de croisement

- $\{h = 0\}$ contient un nombre fini de points près duquel il est constitué de deux sous-variétés isotropes avec intersection transverse.

Cas particulier 2 : Point de croisement

- $\{h = 0\}$ contient un nombre fini de points près duquel il est constitué de deux sous-variétés isotropes avec intersection transverse.
- On a une forme normale locale pour h à symplectomorphisme près.

Cas particulier 2 : Point de croisement

- $\{h = 0\}$ contient un nombre fini de points près duquel il est constitué de deux sous-variétés isotropes avec intersection transverse.
- On a une forme normale locale pour h à symplectomorphisme près.
- Développement asymptotique de la première fonction propre et de la valeur propre associé, gap spectral $N^{-\frac{4}{3}}$.
- Loi de Weyl dans des fenêtres de taille jusque ϵN^{-1} .

Travaux en cours

1 Dynamique effective à petite énergie.

Travaux en cours

- 1 Dynamique effective à petite énergie.
- 2 Estimées exponentielles en régularité analytique.