

Trabajo Práctico: Eliminatorias Sudamericanas FIFA

Stefanini Fiorella, Mayou Nikita, Solis Delfina, Ferro Manuel

Investigación Operativa y optimización, 2ºC 2025

Resumen

En este informe se aborda el problema de diseñar un fixture deportivo de formato *double Round-Robin* (todos contra todos; ida y vuelta) con estrategias de programación lineal entera. El caso concreto a tratar son las eliminatorias sudamericanas al mundial de fútbol FIFA 2018, organizadas por CONMEBOL, cuyo procedimiento se encuentra ampliamente documentado [1].

Se modela el problema con variables enteras y restricciones lineales para luego resolverlo con el solver especializado SCIP. El objetivo principal es minimizar los double breaks, definidos como la repetición de la misma localía dentro de una misma Fecha FIFA, con el fin de mejorar la equidad del calendario. Adicionalmente, se analiza el impacto de una restricción que evita que un equipo enfrente consecutivamente a Argentina y Brasil, considerados históricamente los seleccionados más fuertes. Los resultados muestran que varios esquemas permiten obtener soluciones óptimas con cero double breaks en tiempos computacionales reducidos, destacándose los esquemas Francés, Inglés e Invertido. El estudio concluye que la programación entera constituye una herramienta eficiente, transparente y reproducible para el diseño de calendarios deportivos.

1 Descripción del problema

Los seleccionados que a fecha de 2018 conformaban CONMEBOL eran los siguientes 10: Argentina, Brasil, Uruguay, Colombia, Ecuador, Chile, Bolivia, Paraguay, Perú y Venezuela (De ahora en más se seguirá esa numeración para la sección de modelado); el formato concreto es apodado ‘Fechas FIFA’ y consiste de 9 ‘dobles fechas’: ventanas de 4 o 5 días donde ocurren 2 fechas y en cada una de ellas se juegan 5 partidos, dando un total de 18 fechas y 90 partidos, de manera que:

- Cada partido es distinto en al menos una de las siguientes: equipos que se enfrentan, condición de localía (quién es local y quién visitante); así cada partido ocurre exactamente 2 veces con las localías invertidas. Notar que, en este contexto, ‘partido’ refiere al conjunto {equipos, localía} y que 2 instancias serán consideradas el mismo partido únicamente cuando coincidan en ambas a la vez.
- cada equipo juega exactamente 1 vez por fecha (por ende 2 veces por cada Fecha FIFA), teniendo 9 fechas de visitante y 9 fechas de local.

Para garantizar el fairplay, en esta edición se implementaron 2 nuevas condiciones: una de carácter general y la otra especializada:

- **Localía continua:** Basado en el previamente establecido concepto del *break* (una consecución de 2 fechas con misma condición de localía), se introduce el concepto del *double break*: un break dentro de la misma Fecha FIFA (como las Fechas FIFA están separadas por meses, se considera que no afecta un ‘break intermedio’). Serán esta esta la variable a minimizar
- **Peor escenario:** Históricamente los 2 seleccionados con mejor desempeño en el torneo han sido Brasil y Argentina, por lo que se considera un ‘escenario injusto’ a la posibilidad de enfrentarse a ambos equipos una detrás del otro en la misma fecha FIFA. El problema se dividirá en casos dependiendo si el modelo se corre con esta restricción o no, y los resultados se presentarán igualmente distinguidos.

2 Modelado

Se quiere describir el problema enunciado en la sección 1 en términos lineales usando exclusivamente variables enteras (algunas variables serán binarias).

2.1 Variables

- $n =$ Cantidad de equipos (en nuestro caso son 10)
- $I = \{1, \dots, n\} =$ Conjunto de los equipos
- $I_s = \{1, 2\} =$ Argentina y Brasil
- $K = \{1, 2, \dots, 18\} =$ Las fechas a asignar
- $K_{impar} = \{1, 3, \dots, 15, 17\} =$ Las fechas impares, conjunto para identificar cada 'Fecha FIFA' ya que comienza en la fecha impar
- $x_{i,j,k} \in \{0, 1\}$ toma valor 1 si el equipo i juega contra el j en la fecha k
- $y_{i,k} \in \{0, 1\}$ toma valor 1 si el equipo i tiene una secuencia Local-Visitante en la fecha k
- $w_{i,k} \in \{0, 1\}$ toma valor 1 si el equipo i tiene una secuencia Visitante-Visitante en la fecha k

2.2 Función Objetivo y Restricciones

La FO propuesta para modelar el problema se define como

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_{impar}} w_{ik}$$

y las restricciones generales del torneo son:

- Todos los equipos juegan exactamente 1 vez en la primer mitad:

$$\sum_{k \in K : k \leq n-1} (x_{ijk} + x_{jik}) = 1 \quad \forall i, j \in I : i \neq j \quad (1)$$

Una vez en la segunda:

$$\sum_{k \in K : k > n-1} (x_{ijk} + x_{jik}) = 1 \quad \forall i, j \in I : i \neq j \quad (2)$$

Cada partido ocurre solo una vez:

$$\sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \quad \forall i, j \in I : i \neq j \quad (3)$$

Y todos los equipos deben jugar exactamente un partido cada fecha:

$$\sum_{i \in I : i \neq j} (x_{ijk} + x_{jik}) = 1 \quad \forall j \in I, k \in K \quad (4)$$

- La condición que se quitará o pondrá dependiendo del modelo que se corra; ningún equipo puede enfrentar a Argentina y a Brasil consecutivamente:

$$\sum_{j \in I_s} (x_{ijk} + x_{jik} + x_{ij(k+1)} + x_{ji(k+1)}) \leq 1 \quad \forall j \in I \setminus I_s, k \in K : k \leq |K| \quad (5)$$

- Para que la variable y_{ik} modele correctamente, se pide:

$$n/2 - 1 \leq \sum_{k \in K_{impar}} y_{ik} \leq n/2 \quad \forall i \in I \quad (6)$$

$$\sum_{j \in I : i \neq j} (x_{ijk} + x_{ij(k+1)}) \leq 1 + y_{ik} \quad \forall i \in I, k \in K_{impar} \quad (7)$$

$$y_{ik} \leq \sum_{j \in I : i \neq j} x_{ijk} \quad \forall i \in I, k \in K_{impar} \quad (8)$$

$$y_{ik} \leq \sum_{j \in I : i \neq j} x_{ij(k+1)} \quad \forall i \in I, k \in K_{impar} \quad (9)$$

- Para que w_{ik} modele correctamente, se pide:

$$\sum_{j \in I: i \neq j} (x_{ijk} + x_{ij(k+1)}) \leq 1 + w_{ik} \quad \forall i \in I, k \in K_{impar} \quad (10)$$

$$w_{ik} \leq \sum_{j \in I: i \neq j} x_{ijk} \quad \forall i \in I, k \in K_{impar} \quad (11)$$

$$w_{ik} \leq \sum_{j \in I: i \neq j} x_{ij(k+1)} \quad \forall i \in I, k \in K_{impar} \quad (12)$$

3 Esquemas propuestos

El modelo general presentado anteriormente no considera ningún aspecto de simetría. Se propusieron distintos esquemas que contemplan la simetría del fixture. A continuación se describen los distintos esquemas implementados. Cada esquema define una estructura de simetría particular entre la primera y la segunda parte del torneo.

Aclaración: En los esquemas que correspondan, estrá la figura del fixture óptimo arrojado por el programa. En este, los países que estén en verde corresponden a locales y los rojos a visitantes.

3.1 Esquema Espejado

Se caracteriza por una simetría perfecta: la segunda rueda es idéntica a la primera, respetando el orden de los oponentes pero invirtiendo la localía.

Para utilizar este esquema tenemos que agregarle la siguiente restricción:

$$x_{i,j,k} = x_{j,i,k+n-1} \quad \forall i, j \in I, i \neq j, \forall k \in \{1, \dots, n-1\} \quad (13)$$

En nuestro caso, resultó infactible en todas las instancias probadas.

- **Con Restricción Arg-Bra:** El solver reportó infactibilidad tras 69.13 segundos.
- **Sin Restricción Arg-Bra:** Aún eliminando la restricción de los equipos top, el modelo resultó infactible en 41.06 segundos.

La estructura del esquema espejo es incompatible con las restricciones base de este torneo

3.2 Esquema Francés

Este esquema, utilizado en las eliminatorias para Rusia 2018 rompe la simetría rígida del esquema espejado. Su característica principal es que la primera fecha se espeja con la última fecha del torneo ($2n - 2$), mientras que las fechas intermedias de la primera rueda (k) se espejan con la fecha $k + n - 2$.

Para utilizar este esquema tenemos que agregarle las siguientes restricciones:

$$x_{i,j,1} = x_{j,i,2n-2} \quad \forall i, j \in I, i \neq j \quad (14)$$

$$x_{i,j,k} = x_{j,i,k+n-2} \quad \forall i, j \in I, i \neq j, \forall k \in \{2, \dots, n-1\} \quad (15)$$

En nuestro caso, se hallaron soluciones óptimas tanto activando como desactivando la restricción de Argentina-Brasil. Ambos casos arrojaron soluciones óptimas con 0 breaks.

3.2.1 Francés: Con Restricción Arg-Bra

El solver encontró una solución óptima en 18.59 segundos con 0 double breaks. Se observa un calendario equilibrado que respeta la protección para los equipos cabezas de serie.

Fixture Francés Con Restricciones ARG-BRA

		Fechas																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Equipos	Arg	Par	Peru	Bra	Bol	Ecu	Uru	Ven	Col	Chi	Peru	Bra	Bol	Ecu	Uru	Ven	Col	Chi	Par
	Bra	Uru	Bol	Arg	Col	Par	Peru	Chi	Ecu	Ven	Bol	Arg	Col	Par	Peru	Chi	Ecu	Ven	Uru
	Uru	Bra	Ecu	Bol	Ven	Chi	Arg	Col	Peru	Par	Ecu	Bol	Ven	Chi	Arg	Col	Peru	Par	Bra
	Col	Peru	Chi	Par	Bra	Bol	Ven	Uru	Arg	Ecu	Chi	Par	Bra	Bol	Ven	Uru	Arg	Ecu	Peru
	Ecu	Ven	Uru	Peru	Par	Arg	Chi	Bol	Bra	Col	Uru	Peru	Par	Arg	Chi	Bol	Bra	Col	Ven
	Chi	Bol	Col	Ven	Peru	Uru	Ecu	Bra	Par	Arg	Col	Ven	Peru	Uru	Ecu	Bra	Par	Arg	Bol
	Bol	Chi	Bra	Uru	Arg	Col	Par	Ecu	Ven	Peru	Bra	Uru	Arg	Col	Par	Ecu	Ven	Peru	Chi
	Par	Arg	Ven	Col	Ecu	Bra	Bol	Peru	Chi	Uru	Ven	Col	Ecu	Bra	Bol	Peru	Chi	Uru	Arg
	Peru	Col	Arg	Ecu	Chi	Ven	Bra	Par	Uru	Bol	Arg	Ecu	Chi	Ven	Bra	Par	Uru	Bol	Col
	Ven	Ecu	Par	Chi	Uru	Peru	Col	Arg	Bol	Bra	Par	Chi	Uru	Peru	Col	Arg	Bol	Bra	Ecu

Figure 1: Fixture Francés con restricción Arg-Bra.

3.2.2 Francés: Sin Restricción Arg-Bra

Al relajar la restricción, el tiempo de resolución bajó a 9.67 segundos, manteniendo los 0 double breaks. Aunque computacionalmente más rápido, el fixture resultante podría presentar secuencias deportivas menos equitativas al permitir enfrentar a las potencias de forma consecutiva.

Fixture Francés Sin Restricciones de ARG-BRA

		Fechas																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Equipos	Arg	Par	Chi	Bol	Bra	Uru	Ecu	Ven	Col	Peru	Chi	Bol	Bra	Uru	Ecu	Ven	Col	Peru	Par
	Bra	Ecu	Par	Chi	Arg	Col	Bol	Peru	Uru	Ven	Par	Chi	Arg	Col	Bol	Peru	Uru	Ven	Ecu
	Uru	Peru	Ven	Par	Bol	Arg	Col	Ecu	Bra	Chi	Ven	Par	Bol	Arg	Col	Ecu	Bra	Chi	Peru
	Col	Chi	Ecu	Peru	Ven	Bra	Uru	Bol	Arg	Par	Ecu	Peru	Ven	Bra	Uru	Bol	Arg	Par	Chi
	Ecu	Bra	Col	Ven	Par	Peru	Arg	Uru	Chi	Bol	Col	Ven	Par	Peru	Arg	Uru	Chi	Bol	Bra
	Chi	Col	Arg	Bra	Peru	Bol	Ven	Par	Ecu	Uru	Arg	Bra	Peru	Bol	Ven	Par	Ecu	Uru	Col
	Bol	Ven	Peru	Arg	Uru	Chi	Bra	Col	Par	Ecu	Peru	Arg	Uru	Chi	Bra	Col	Par	Ecu	Ven
	Par	Arg	Bra	Uru	Ecu	Ven	Peru	Chi	Bol	Col	Bra	Uru	Ecu	Ven	Peru	Chi	Bol	Col	Arg
	Peru	Uru	Bol	Col	Chi	Ecu	Par	Bra	Ven	Arg	Bol	Col	Chi	Ecu	Par	Bra	Ven	Arg	Uru
	Ven	Bol	Uru	Ecu	Col	Par	Chi	Arg	Peru	Bra	Uru	Ecu	Col	Par	Chi	Arg	Peru	Bra	Bol

Figure 2: Fixture Francés sin restricción Arg-Bra.

3.3 Esquema Inglés

Es una variación donde la simetría se altera en el centro del torneo. Consiste en jugar la primer mitad con rivales distintos, repetir el rival de la fecha 9 en la 10, y luego jugar en el mismo orden de rivales de la fecha 2 a 8, invirtiendo localías en la segunda mitad.

Para utilizar este esquema tenemos que agregarle las siguientes restricciones:

$$x_{i,j,n-1} = x_{j,i,n} \quad \forall i, j \in I, i \neq j \quad (16)$$

$$x_{i,j,k} = x_{j,i,k+n} \quad \forall i, j \in I, i \neq j, \forall k \in \{2, \dots, n-2\} \quad (17)$$

En este caso también se hallaron soluciones óptimas tanto activando como desactivando la restricción de Argentina-Brasil. Ambos casos arrojaron soluciones óptimas con 0 double breaks.

3.3.1 Inglés: Con Restricción Arg-Bra

Este modelo se resolvió en 7.62 segundos. La solución óptima presenta 0 double breaks.

		Fechas																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Equipos	Arg	Chi	Ven	Col	Bol	Ecu	Peru	Par	Uru	Bra	Bra	Chi	Ven	Col	Bol	Ecu	Peru	Par	Uru
	Bra	Bol	Ecu	Chi	Uru	Par	Ven	Col	Peru	Arg	Arg	Bol	Ecu	Chi	Uru	Par	Ven	Col	Peru
	Uru	Ecu	Bol	Par	Bra	Peru	Col	Chi	Arg	Ven	Ven	Ecu	Bol	Par	Bra	Peru	Col	Chi	Arg
	Col	Peru	Chi	Arg	Ecu	Ven	Uru	Bra	Par	Bol	Bol	Peru	Chi	Arg	Ecu	Ven	Uru	Bra	Par
	Ecu	Uru	Bra	Ven	Col	Arg	Chi	Peru	Bol	Par	Par	Uru	Bra	Ven	Col	Arg	Chi	Peru	Bol
	Chi	Arg	Col	Bra	Par	Bol	Ecu	Uru	Ven	Peru	Peru	Arg	Col	Bra	Par	Bol	Ecu	Uru	Ven
	Bol	Bra	Uru	Peru	Arg	Chi	Par	Ven	Ecu	Col	Col	Bra	Uru	Peru	Arg	Chi	Par	Ven	Ecu
	Par	Ven	Peru	Uru	Chi	Bra	Bol	Arg	Col	Ecu	Ecu	Ven	Peru	Uru	Chi	Bra	Bol	Arg	Col
	Peru	Col	Par	Bol	Ven	Uru	Arg	Ecu	Bra	Chi	Chi	Col	Par	Bol	Ven	Uru	Arg	Ecu	Bra
	Ven	Par	Arg	Ecu	Peru	Col	Bra	Bol	Chi	Uru	Uru	Par	Arg	Ecu	Peru	Col	Bra	Bol	Chi

Figure 3: Fixture Inglés con restricción Arg-Bra.

3.3.2 Inglés: Sin Restricción Arg-Bra

El desempeño fue similar al caso anterior, 7.88 segundos con 0 double breaks.

		Fixture Inglés Sin Restricciones ARG-BRA																	
		Fechas																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Equipos	Arg	Bol	Bra	Ven	Chi	Par	Col	Uru	Peru	Ecu	Ecu	Bol	Bra	Ven	Chi	Par	Col	Uru	Peru
	Bra	Par	Arg	Col	Peru	Chi	Bol	Ecu	Uru	Ven	Ven	Par	Arg	Col	Peru	Chi	Bol	Ecu	Uru
	Uru	Chi	Peru	Ecu	Col	Ven	Par	Arg	Bra	Bol	Bol	Chi	Peru	Ecu	Col	Ven	Par	Arg	Bra
	Col	Ven	Chi	Bra	Uru	Ecu	Arg	Par	Bol	Peru	Peru	Ven	Chi	Bra	Uru	Ecu	Arg	Par	Bol
	Ecu	Peru	Ven	Uru	Bol	Col	Chi	Bra	Par	Arg	Arg	Peru	Ven	Uru	Bol	Col	Chi	Bra	Par
	Chi	Uru	Col	Bol	Arg	Bra	Ecu	Peru	Ven	Par	Par	Uru	Col	Bol	Arg	Bra	Ecu	Peru	Ven
	Bol	Arg	Par	Chi	Ecu	Peru	Bra	Ven	Col	Uru	Uru	Arg	Par	Chi	Ecu	Peru	Bra	Ven	Col
	Par	Bra	Bol	Peru	Ven	Arg	Uru	Col	Ecu	Chi	Chi	Bra	Bol	Peru	Ven	Arg	Uru	Col	Ecu
	Peru	Ecu	Uru	Par	Bra	Bol	Ven	Chi	Arg	Col	Col	Ecu	Uru	Par	Bra	Bol	Ven	Chi	Arg
	Ven	Col	Ecu	Arg	Par	Uru	Peru	Bol	Chi	Bra	Bra	Col	Ecu	Arg	Par	Uru	Peru	Bol	Chi

Figure 4: Fixture Inglés sin restricción Arg-Bra.

3.4 Esquema Invertido

En este esquema, la simetría es total respecto al centro del calendario. La primera fecha se juega contra la última, la segunda contra la anteúltima, y así sucesivamente. La fecha k es espejo de la fecha $2n - 1 - k$.

Para utilizar este esquema tenemos que agregarle la siguiente restricción:

$$x_{i,j,k} = x_{j,i,2n-1-k} \quad \forall i, j \in I, i \neq j, \forall k \in \{1, \dots, n-1\} \quad (18)$$

Es interesante notar que en este caso la instancia con restricciones adicionales (Arg-Bra True) se resolvió más rápido (32.51 segundos) que la instancia relajada (56.92 segundos).

3.4.1 Invertido: Con Restricción Arg-Bra

Se obtuvo una solución óptima con 0 double breaks. La inclusión de la restricción ayudó a podar el espacio de búsqueda, resultando en un tiempo menor comparado con la versión sin restricciones.

Fixture Invertido Con Restricciones ARG-BRA

		Fechas																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Equipos	Arg	Par	Uru	Ven	Bol	Col	Ecu	Chi	Peru	Bra	Bra	Peru	Chi	Ecu	Col	Bol	Ven	Uru	Par
	Bra	Ecu	Col	Chi	Uru	Peru	Ven	Bol	Par	Arg	Arg	Par	Bol	Ven	Peru	Uru	Chi	Col	Ecu
	Uru	Col	Arg	Ecu	Bra	Chi	Bol	Par	Ven	Peru	Peru	Ven	Par	Bol	Chi	Bra	Ecu	Arg	Col
	Col	Uru	Bra	Bol	Par	Arg	Peru	Ven	Ecu	Chi	Chi	Ecu	Ven	Peru	Arg	Par	Bol	Bra	Uru
	Ecu	Bra	Par	Uru	Chi	Ven	Arg	Peru	Col	Bol	Bol	Col	Peru	Arg	Ven	Chi	Uru	Par	Bra
	Chi	Peru	Ven	Bra	Ecu	Uru	Par	Arg	Bol	Col	Col	Bol	Arg	Par	Uru	Ecu	Bra	Ven	Peru
	Bol	Ven	Peru	Col	Arg	Par	Uru	Bra	Chi	Ecu	Ecu	Chi	Bra	Uru	Par	Arg	Col	Peru	Ven
	Par	Arg	Ecu	Peru	Col	Bol	Chi	Uru	Bra	Ven	Ven	Bra	Uru	Chi	Bol	Col	Peru	Ecu	Arg
	Peru	Chi	Bol	Par	Ven	Bra	Col	Ecu	Arg	Uru	Uru	Arg	Ecu	Col	Bra	Ven	Par	Bol	Chi
	Ven	Bol	Chi	Arg	Peru	Ecu	Bra	Col	Uru	Par	Par	Uru	Col	Bra	Ecu	Peru	Arg	Chi	Bol

Figure 5: Fixture Invertido con restricción Arg-Bra.

3.4.2 Invertido: Sin Restricción Arg-Bra

El modelo halló el óptimo, también con 0 double breaks. La Figura 6 muestra la distribución de partidos para esta variante.

Fixture Invertido Sin Restricciones ARG-BRA

		Fechas																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Equipos	Arg	Peru	Chi	Bra	Uru	Par	Col	Ecu	Ven	Bol	Bol	Ven	Ecu	Col	Par	Uru	Bra	Chi	Peru
	Bra	Ecu	Ven	Arg	Par	Bol	Uru	Col	Peru	Chi	Chi	Peru	Col	Uru	Bol	Par	Arg	Ven	Ecu
	Uru	Ven	Bol	Peru	Arg	Col	Bra	Chi	Ecu	Par	Ecu	Chi	Bra	Col	Arg	Peru	Bol	Ven	
	Col	Bol	Par	Ecu	Ven	Uru	Arg	Bra	Chi	Peru	Peru	Chi	Bra	Arg	Uru	Ven	Ecu	Par	Bol
	Ecu	Bra	Peru	Col	Bol	Chi	Par	Arg	Uru	Ven	Ven	Uru	Arg	Par	Chi	Bol	Col	Peru	Bra
	Chi	Par	Arg	Bol	Peru	Ecu	Ven	Uru	Col	Bra	Bra	Col	Uru	Ven	Ecu	Peru	Bol	Arg	Par
	Bol	Col	Uru	Chi	Ecu	Bra	Peru	Ven	Par	Arg	Arg	Par	Ven	Peru	Bra	Ecu	Chi	Uru	Col
	Par	Chi	Col	Ven	Bra	Arg	Ecu	Peru	Bol	Uru	Uru	Bol	Peru	Ecu	Arg	Bra	Ven	Col	Chi
	Peru	Arg	Ecu	Uru	Chi	Ven	Bol	Par	Bra	Col	Col	Bra	Par	Bol	Ven	Chi	Uru	Ecu	Arg
	Ven	Uru	Bra	Par	Col	Peru	Chi	Bol	Arg	Ecu	Ecu	Arg	Bol	Chi	Peru	Col	Par	Bra	Uru

Figure 6: Fixture Invertido sin restricción Arg-Bra.

3.5 Esquema Back-to-Back

Este esquema propone jugar los partidos de ida y vuelta de manera inmediata consecutiva. Es decir, si el equipo i juega contra j en una fecha impar k , juega la revancha contra j en la fecha siguiente $k + 1$.

Para utilizar este esquema tenemos que agregarle la siguiente restricción:

$$x_{i,j,k} = x_{j,i,k+1} \quad \forall i, j \in I, i \neq j, \forall k \in K_{odd} \quad (19)$$

Las variantes estándar de este esquema resultaron infactibles de forma inmediata.

Para subsanar esto, se implementó una flexibilización de las restricciones. Quitamos la restricción de que los equipos se enfrenten todos contra todos en las dos mitades del torneo.

3.5.1 Back-to-Back: Con Restricción Arg-Bra (Relajado)

El modelo resultó infactible (0.02 s).

3.5.2 Back-to-Back: Sin Restricción Arg-Bra (Relajado)

Únicamente eliminando la restricción de Arg-Bra se logró una solución factible y óptima en 3.15 segundos, con 0 double breaks. Este es el único escenario viable para este formato.

		Fechas																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Equipos	Arg	Par	Par	Col	Col	Chi	Chi	Bol	Bol	Peru	Peru	Bra	Bra	Uru	Uru	Ecu	Ecu	Ven	Ven
	Bra	Col	Col	Uru	Uru	Ecu	Ecu	Par	Par	Bol	Bol	Arg	Arg	Peru	Peru	Ven	Ven	Chi	Chi
	Uru	Peru	Peru	Bra	Bra	Bol	Bol	Ecu	Ecu	Chi	Chi	Ven	Ven	Arg	Arg	Col	Col	Par	Par
	Col	Bra	Bra	Arg	Arg	Ven	Ven	Peru	Peru	Par	Par	Bol	Bol	Chi	Chi	Uru	Uru	Ecu	Ecu
	Ecu	Chi	Chi	Par	Par	Bra	Bra	Uru	Uru	Ven	Ven	Peru	Peru	Bol	Bol	Arg	Arg	Col	Col
	Chi	Ecu	Ecu	Bol	Bol	Arg	Arg	Ven	Ven	Uru	Uru	Par	Par	Col	Col	Peru	Peru	Bra	Bra
	Bol	Ven	Ven	Chi	Chi	Uru	Uru	Arg	Arg	Bra	Bra	Col	Col	Ecu	Ecu	Par	Par	Peru	Peru
	Par	Arg	Arg	Ecu	Ecu	Peru	Peru	Bra	Bra	Col	Col	Chi	Chi	Ven	Ven	Bol	Bol	Uru	Uru
	Peru	Uru	Uru	Ven	Ven	Par	Par	Col	Col	Arg	Arg	Ecu	Ecu	Bra	Bra	Chi	Chi	Bol	Bol
	Ven	Bol	Bol	Peru	Peru	Col	Col	Chi	Chi	Ecu	Ecu	Uru	Uru	Par	Par	Bra	Bra	Arg	Arg

Figure 7: Fixture Back-to-Back (Relajado) sin restricción Arg-Bra.

3.6 Esquema Min-Max

A diferencia de los anteriores, este no impone una simetría fija, sino que relaja las reglas para permitir cualquier calendario siempre que la distancia entre el partido de ida y el de vuelta entre dos equipos esté acotada por un mínimo c y un máximo d .

Separación Mínima (c): Para todo par de equipos y fecha válida, la suma de sus enfrentamientos (ida + vuelta) en una ventana de tamaño c debe ser a lo sumo 1 (es decir, no pueden volver a jugar tan rápido).

$$\sum_{r=k}^{k+c} (x_{i,j,r} + x_{j,i,r}) \leq 1 \quad \forall i, j \in I, i \neq j, \forall k \in \{1, \dots, |K| - c\} \quad (20)$$

Separación Máxima (d): Si el equipo j juega de local contra i en la fecha k (lado derecho de la inecuación), entonces el partido de vuelta (donde i es local contra j) debe ocurrir en alguna fecha r dentro de la distancia d permitida ($|k - r| \leq d$).

$$\sum_{\substack{r=k-d \\ r \neq k}}^{k+d} x_{i,j,r} \geq x_{j,i,k} \quad \forall i, j \in I, i \neq j, \forall k \in K \quad (21)$$

Se presentan solo los resultados del caso con restricción de los partidos contra Argentina y Brasil, con $c=5$ y $d=13$.

3.6.1 Min-Max: Con Restricción Arg-Bra

El modelo encontró 2 soluciones óptimas, con cero double breaks en un total de 8373.36 segundos. En la Figura 8 podemos ver el fixture de una de las soluciones.

		Fechas																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Equipos	Arg	Bra	Ven	Col	Chi	Uru	Bol	Par	Peru	Ecu	Col	Bra	Ven	Par	Peru	Ecu	Chi	Uru	Bol
	Bra	Arg	Chi	Bol	Peru	Par	Col	Ecu	Uru	Ven	Bol	Arg	Chi	Ecu	Uru	Ven	Peru	Par	Col
	Uru	Ven	Ecu	Peru	Par	Arg	Chi	Col	Bra	Bol	Peru	Ven	Ecu	Col	Bra	Bol	Par	Arg	Chi
	Col	Bol	Peru	Arg	Ven	Chi	Bra	Uru	Ecu	Par	Arg	Bol	Peru	Uru	Ecu	Par	Ven	Chi	Bra
	Ecu	Chi	Uru	Ven	Bol	Peru	Par	Bra	Col	Arg	Ven	Chi	Uru	Bra	Col	Arg	Bol	Peru	Par
	Chi	Ecu	Bra	Par	Arg	Col	Uru	Ven	Bol	Peru	Par	Ecu	Bra	Ven	Bol	Peru	Arg	Col	Uru
	Bol	Col	Par	Bra	Ecu	Ven	Arg	Peru	Chi	Uru	Bra	Col	Par	Peru	Chi	Uru	Ecu	Ven	Arg
	Par	Peru	Bol	Chi	Uru	Bra	Ecu	Arg	Ven	Col	Chi	Peru	Bol	Arg	Ven	Col	Uru	Bra	Ecu
	Peru	Par	Col	Uru	Bra	Ecu	Ven	Bol	Arg	Chi	Uru	Par	Col	Bol	Arg	Chi	Bra	Ecu	Ven
	Ven	Uru	Arg	Ecu	Col	Bol	Peru	Chi	Par	Bra	Ecu	Uru	Arg	Chi	Par	Bra	Col	Bol	Peru

Figure 8: Fixture MinMax con restricción Arg-Bra.

3.6.2 Min-Max: Sin Restricción Arg-Bra

El modelo encontró una solución óptima con 0 double breaks en 3173.99 segundos.

		Fechas																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Equipos	Arg	-Peru	Col	Uru	Ven	Par	Chi	Ecu	Bol	Bra	Col	Par	Ven	Peru	Chi	Bra	Uru	Ecu	Bol
	Bra	Bol	Par	Ven	Chi	Col	Ecu	Uru	Peru	Arg	Bol	Ven	Col	Ecu	Par	Arg	Chi	Uru	Peru
	Uru	Chi	Bol	Arg	Col	Ven	Peru	Bra	Ecu	Par	Chi	Col	Peru	Bol	Ven	Par	Arg	Bra	Ecu
	Col	Ecu	Arg	Chi	Uru	Bra	Ven	Peru	Par	Bol	Arg	Uru	Bra	Chi	Ecu	Bol	Ven	Peru	Par
	Ecu	Col	Chi	Bol	Par	Peru	Bra	Arg	Uru	Ven	Par	Peru	Chi	Bra	Col	Ven	Bol	Arg	Uru
	Chi	Uru	Ecu	Col	Bra	Bol	Arg	Par	Ven	Peru	Uru	Bol	Ecu	Col	Arg	Peru	Bra	Par	Ven
	Bol	Bra	Uru	Ecu	Peru	Chi	Par	Ven	Arg	Col	Bra	Chi	Par	Uru	Peru	Col	Ecu	Ven	Arg
	Par	Ven	Bra	Peru	Ecu	Arg	Bol	Chi	Col	Uru	Ecu	Arg	Bol	Ven	Bra	Uru	Peru	Chi	Col
	Peru	Arg	Ven	Par	Bol	Ecu	Uru	Col	Bra	Chi	Ven	Ecu	Uru	Arg	Bol	Chi	Par	Col	Bra
	Ven	Par	Peru	Bra	Arg	Uru	Col	Bol	Chi	Ecu	Peru	Bra	Arg	Par	Uru	Ecu	Col	Bol	Chi

Figure 9: Fixture MinMax sin restricción Arg-Bra.

4 Comparación

A continuación presentamos dos tablas donde se comparan las performances de los esquemas para el caso en el que consideramos las restricciones respecto a los partidos contra Argentina y Brasil y el caso en el que no, respectivamente.

Esquema	Soluciones óptimas	Breaks	Tiempo de ejecución
Espejo	Infactible	Infactible	69.13 s
Francés	2	0	18.59 s
Inglés	2	0	7.62 s
Invertido	1	0	32.51 s
Back-to-Back (relajado)	Infactible	Infactible	0.02 s
Min-Max	2	0	8373.36 s

Table 1: Resultados computacionales por esquema con restricción Argentina–Brasil

Esquema	Soluciones óptimas	Breaks	Tiempo de ejecución
Espejo	Infactible	Infactible	41.06 s
Francés	2	0	9.67 s
Inglés	2	0	7.88 s
Invertido	1	0	56.92 s
Back-to-Back (relajado)	1	0	3.15 s
Min-Max	1	0	3173.99 s

Table 2: Resultados computacionales por esquema sin restricción Argentina–Brasil

5 Conclusiones

El desarrollo de este trabajo permite afirmar que los fixtures diseñados mediante programación entera no solo son eficientes, sino también reproducibles con las herramientas y el conocimiento adecuados. A diferencia de los métodos manuales o sorteos opacos, los modelos matemáticos permiten que todas las federaciones involucradas en las eliminatorias de la CONMEBOL puedan auditar el proceso de construcción del calendario, despejando cualquier duda sobre favoritismos o manipulación de fechas.

En cuanto al desempeño computacional, la gran mayoría de los esquemas propuestos (Francés, Inglés, Invertido) se resolvieron en tiempos despreciables (segundos o pocos minutos), con la notable excepción del esquema Min-Max, cuyo tiempo de ejecución rondó entre 2 y 4 horas. Asignando a Argentina y Brasil como los equipos 1 y 2, y sorteando al resto, se obtuvieron consistentemente soluciones factibles con 0 double breaks.

6 Referencias

[1] El paper ‘*Scheduling the South American Qualifiers to the 2018 FIFA World Cup by integer programming*’ de Guillermo Durán y compañía es el material en el que hemos basado fuertemente este documento.

[2] **Link Resolución de modelos:**

https://colab.research.google.com/drive/1ySR7_WU70PAAzNbtbXM2rIc4lgOU01hB?usp=sharing

[3] **Link Gráficos:** https://colab.research.google.com/drive/1216cgQYDX_3EtdlrMHKdkkd1A7o9bkgj?usp=sharing