Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2025

Práctica de Laboratorio N° 1: Diferencias Finitas (Introducción)

Ejercicio 1 Sea $u(x) = \sin(x)$. Queremos aproximar $u'(x)$ en $x = 1$. Considerar las siguientes discretizaciones de u' y medir el error cometido para distintos valores de h. ¿Cuál es el orden estimado en cada caso?

$$D_+(x) \sim \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$
$$D_-(x) \sim \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$
$$D_0(x) \sim \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$
$$D_3(x) \sim \frac{2u(x+h) + 3u(x) - 6u(x-h) + u(x-2h)}{6h}$$

Ejercicio 2 Queremos aproximar la derivada k-ésima de una función $u(x)$ en un punto $\bar{x}$, utilizando un conjunto arbitrario de nodos $x_1, \dots, x_n$ (no necesariamente equiespaciados). La fórmula de aproximación es:

$$u^{(k)}(\bar{x}) \approx \sum_{j=1}^{n} c_j u(x_j),$$

donde los coeficientes c_j se calculan resolviendo un sistema lineal basado en desarrollos de Taylor.

(a) Escribir una función que, dados:

- un vector de nodos $x = [x_1, \dots, x_n]$,
- un punto $\bar{x}$,
- una derivada de orden k,

devuelva los coeficientes $c_1, \dots, c_n$ que aproximan $u^{(k)}(\bar{x})$. *Sugerencia: Utilizar el ejercicio 3 de la Práctica 1.*

(b) Usar la función para aproximar la derivada primera de $u(x) = \sin(x)$ en el punto $\bar{x} = 0$, usando los nodos $x = [0, 0.1, 0.15, 0.3]$. Calcular el error respecto al valor exacto $u'(0) = 1$.

(c) Repetir el experimento para $k = 2$, es decir, calculando $u''(0)$ y comparando con el valor exacto $u''(0) = 0$.

(d) Explorar cómo cambia el error si se usan stencils centrados vs. asimétricos.

Ejercicio 3 Dada una constante $a > 0$, considere el problema de valores iniciales para $t > 0$.

$$y'(t) = -ay(t) \qquad y(0) = 1$$

Para cada paso temporal Δt fijo se consideran las discretizaciones

$$\begin{array}{rcll} \frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} &=& -ay^n & \text{Euler explícito} \\ \frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} &=& -ay^{n+1} & \text{Euler implícito} \\ \frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} &=& -a\left(\frac{1}{2}y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n\right) & \text{Método } \theta = \frac{1}{2} \end{array}$$

Grafique la solución obtenida para $a = 7$, $\Delta t = 0.1$ y $0 < t < 3$. Utilizar distintos valores de Δt y analizar que sucede en cada caso.

Ejercicio 4 Considere el siguiente problema de valor inicial:

$$u'(t) = -\cos(t), \quad u(0) = 1,$$

cuya solución exacta es:

$$u(t) = \sin(t).$$

Queremos aproximar la solución hasta el tiempo $T = 3$ utilizando el método de Euler explícito para distintos valores del paso temporal k.

(a) Calcule la solución numérica utilizando el método de Euler explicito para $\Delta t = 0.1$, 0.01 y 0.001.

(b) Para cada valor de Δt, grafique la solución numérica junto con la solución exacta.

(c) Calcule el error global al tiempo final $t = 3$, es decir,

$$E^n = |u^n - u(t_n)|.$$

(d) Estime el orden de convergencia del método a partir de los errores obtenidos.

Ejercicio 5 Considere el siguiente problema de valor inicial:

$$u'(t) = \lambda(u(t) - \cos(t)) - \sin(t), \quad u(0) = 1,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es una constante. Para cualquier valor de λ, la solución exacta es:

$$u(t) = \cos(t).$$

(a) Tomando $\lambda = -10$, utilice el método de Euler explícito para aproximar la solución en el intervalo $[0, 2]$ con paso $\Delta t = 10^{-3}$.

(b) Calcule el valor numérico u^n en $t_n = 2$, y comparelo con la solución exacta $u(2)$.

(c) Calcule el error global $E^n = |u^n - u(t_n)|$.

(d) Analice por qué el error es menor que en el caso del ejercicio anterior, a pesar de usar el mismo paso k.

(e) ¿Que sucede si ahora se toma $\lambda = -2100$?

Ejercicio 6 (Condiciones de Dirichlet). Se desea resolver numéricamente la ecuación de Poisson en una dimensión con condiciones de borde de tipo Dirichlet

$$\begin{cases} U_{xx}(x) = & f(x), \quad \text{para } x \in (0,1) \\ U(0) = & \alpha \\ U(1) = & \beta. \end{cases} \tag{1}$$

Para ello se considera la malla uniforme $\{x_j = hj,\ j = 0, 1, 2, \ldots m+1\}$ con $h = 1/(m+1)$. Para los puntos de la malla $x_j \in (0,1)$ El esquema de diferencias centradas para la derivada segunda(Ej. 1) conduce al sistema de ecuaciones:

$$\frac{1}{h^2}\left(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}\right) = f(x_j) \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \ldots m.$$

Utilizando las condiciones de borde $u_0 = \alpha, u_{m+1} = \beta$ se obtiene el sistema

$$A^h u^h = F^h \tag{2}$$

donde $u^h = [u_1, u_2, \ldots, u_m]^T$ es el vector de incógnitas, mientras que la matriz tridiagonal A^h y el vector F^h están dados por:

$$A^h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad F^h = \begin{bmatrix} f(x_1) - \alpha/h^2 \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - \beta/h^2 \end{bmatrix}$$

Se define el error de truncado en la malla como

$$\tau_j^h = (A^h U)_j - U''(x_j), \qquad \tau^h = [\tau_1^h, \cdots, \tau_m^h]$$

donde U es la solución de (1). Para h fijo, definimos el error puntual en x_j como

$$e_j^h = U(x_j) - u_j^h, \qquad e^h = [e_1^h, \cdots, e_m^h]$$

(a) Implemente una función que permita obtener la solución U dado f.

(b) Grafique el tiempo de ejecución en función de n si se utilizan matrices llenas o matrices ralas (ver `SparseArrays`).

(c) Para $f = \sin(2\pi x)$, utilizando la solución exacta grafique $\|e^h\|_\infty$ en función de h y en escala logarítmica, para valores de $h \to 0$. ¿Cuál es la pendiente que se observa?

Ejercicio 7 (Condiciones de Neumann). Se desea resolver numéricamente la ecuación de Poisson en una dimensión con condiciones de Neumann en $x = 0$ y de Dirichlet en $x = 1$,

$$\begin{cases} U_{xx}(x) = & f(x), \quad \text{para } x \in (0,1) \\ U_x(0) = & 0 \\ U(1) = & 0. \end{cases} \tag{3}$$

(a) Implemente una función que permita obtener la solución U dado f.

(b) Comparando contra la solución exacta en el caso $f = \sin(2\pi x)$ y tomando $e_m = \|U - u\|_\infty$, estudie numéricamente cuál es el orden de aproximación que se observa para la solución.

Ejercicio 8 (Capa límite) Considere la *ecuación de convección-difusión*

$$\begin{cases} U_t + aU_x = & \kappa U_{xx} + \phi, \quad \text{para } x \in (0,1) \quad t > 0 \\ U(x,0) = & U_0(x) \qquad x \in (0,1), \\ U(0,t) = & \alpha \qquad t > 0 \\ U(1,t) = & \beta \qquad t > 0 \end{cases} \tag{4}$$

para constantes de difusividad $\kappa > 0$ y de convección $a \in \mathbb{R}$ dadas. Llamando $\mathrm{Pe} = a/\kappa$ al *número de Péclet* y tomando $\varepsilon = 1/\mathrm{Pe}$, verifique que una solución $u(x,t)$ de (4) independiente de t (estacionaria), satisface una ecuación de la forma

$$\varepsilon U_{xx} - U_x = f, \qquad U(0) = \alpha \quad U(1) = \beta. \tag{5}$$

cuya solución exacta para el caso $f(x) = -1$ está dada por

$$U_\varepsilon(x) = \alpha + x + (\beta - \alpha - 1)\left(\frac{e^{x/\varepsilon} - 1}{e^{1/\varepsilon} - 1}\right)$$

(a) Grafique la solución exacta para el caso $\alpha = 1, \beta = 3$ a medida que $\varepsilon \to 0$. Interprete el significado del término *capa límite* que se suele aplicar al comportamiento de $U_\varepsilon(x)$ para x cerca del borde $\{x = 1\}$ y $\varepsilon \to 0$. ¿Cómo explicaría el fénomeno de capa límite?

(b) Resuelva numéricamente la ecuación (5) usando diferencias centradas para las derivadas primera y segunda, y una malla de tamaño h. Grafique el error para distintos valores de h y ε. ¿Qué ocurre si $h >> 2\varepsilon$?

(c) Resuelva la ecuación (5) pero ahora usando diferencias centradas para la derivada segunda y diferencias forward para la derivada primera. Compare los resultados con los obtenidos anteriormente.