MODEL CURS

1 a) $E(V)=0.15$

suma tuturor prob $=1 \Rightarrow 0{,}25+0{,}05+0{,}3+0{,}1+2a=1 \Leftrightarrow 2a=1-0{,}7 \Leftrightarrow a=0{,}15$

$U=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$ $V=\begin{pmatrix} -1 & 1 & b \\ 0{,}55 & 0{,}2 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

$E(V)=0.15 \Rightarrow -1\cdot 0{,}55+1\cdot 0{,}2+b\cdot 0{,}25=0{,}15$ $\boxed{a=0{,}15}$

$-0{,}55+0{,}2+\frac{b}{4}=0{,}15$

$\frac{b}{4}=+0{,}5 \Rightarrow \boxed{b=2}$

b) sunt independente U și V → contraexemplu

$P(U=1, V=-1)=0{,}25$

$P(U=1)\cdot P(V=-1)=0{,}45\cdot 0{,}55 \neq 0{,}25$

$\Rightarrow$ U și V nu sunt independente

c) $E[(U-3)^2]=4\cdot 0{,}45+0\cdot 0{,}55=1{,}8$

$(U-3)^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$

2 3 aruncări cu $p=\frac{1}{6}$

a) $X \sim Bino\left(3, \frac{1}{6}\right) \rightarrow \overset{\text{media}}{E(X)=n\cdot p}=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

b) 432 aruncări

432 cu prob $\frac{1}{6^3}$ ~ la o aruncare

$Bino\left(432, \frac{1}{6^3}\right) \rightarrow E(X)=432\cdot\frac{1}{6^3}=2$

(3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{3a^3}{x^4}, & x>a\\ 0, & x\le a\end{cases}$ $\quad a>0$

$P(X\le 2a)$ și $E(X)$

$$P(X\le 2a)=F(2a)=\int_{-\infty}^{2a} f(x)\,dx = 0+\int_a^{2a} f(x)\,dx=\int_a^{2a}\frac{3a^3}{x^4}\,dx = 3a^3\int_a^{2a}\frac{1}{x^4}\,dx=$$

$$=3a^3\,\frac{x^{-4+1}}{-4+1}\Big|_a^{2a} = \cancel{3}a^3\,\frac{x^{-3}}{-\cancel{3}}\Big|_a^{2a} = -\frac{a^3}{x^3}\Big|_a^{2a} = -\frac{\cancel{a^3}}{8\cancel{a^3}}+\frac{\cancel{a^3}}{\cancel{a^3}}=\frac{7}{8}$$

$$E(X)=\int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_a^{\infty}\frac{3a^3}{x^3}\,dx = 3a^3\,\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\Big|_a^{\infty} = 3a^3\,\frac{1}{-2x^2}\Big|_a^{\infty} = 0-\frac{3a^{\cancel{3}}}{-2\cancel{a^2}}=\frac{3a}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-2x^2}=0$$

(4) X, Y iau valori 0 sau 1

$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$

$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$

X \ Y	0	1
0	0,18	0,42
1	0,32	0,08

0,6-0,18 (din celălalt tabel)

0,4-0,08=0,32

$P(Y=1|X=1)=0{,}2 \Leftrightarrow \dfrac{P(X=1\cap Y=1)}{P(X=1)}=0{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X=1\cap Y=1)=0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}08$

$P(Y=0|X=0)=\dfrac{P(X=0\cap Y=0)}{P(X=0)}=0{,}3$

$\Rightarrow P(X=0\cap Y=0)=0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18$

a) $P(X=Y)$

$P(X=Y=1)+P(X=Y=0)=$
$=0{,}18+0{,}08=\underline{\underline{0{,}26}}$

b) $E(Y)=0{,}5$

c) $E(X\cdot Y)$

$X\cdot Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0{,}92 & 0{,}08\end{pmatrix}$

doar când $X=Y=1$

toate restul adunate

d) $YX_{(2)}=2^1Y+2^0X \Rightarrow$

$\Rightarrow E(YX_{(2)})=2E(Y)+E(X)=$
$=0{,}4+2\cdot 0{,}5=1{,}4$

⑤ $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_X(t) = \begin{cases} c(3-t)^2, & 0<t<3 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

a) det. c

Suma totală = 1

$\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} c(3-t)^2 dt = c\int_0^3 (9-6t+t^2)\,dt = c\left(9t\Big|_0^3 - 6\frac{t^2}{2}\Big|_0^3 + \frac{t^3}{3}\Big|_0^3\right) =$

$= c\left(\cancel{27} - \cancel{27} + \frac{27}{3}\right) \Rightarrow c9 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$

b) $F_X = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{9}\int_0^x (3-t)^2 dt = \frac{1}{9}\int_0^x (9-6t+t^2)\,dt =$

$= \frac{1}{9}\left(9t\Big|_0^x - \cancel{6}^{3}\frac{t^2}{\cancel{2}}\Big|_0^x + \frac{t^3}{3}\Big|_0^x\right) = \frac{1}{9}\left(9x - 3x^2 + \frac{x^3}{3}\right) = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27}$

c) $P(1<X<2)$ și $P(X<2 \mid X>1)$

$F_X(2) - F_X(1) = \dots$

$P(X<2 \mid X>1) = \frac{P(X<2 \cap X>1)}{P(X>1)} = \frac{P(1<X<2)}{1-P(X<1)} = \frac{F_X(2)-F_X(1)}{1-F_X(1)}$

⑥ 4 - verzi
5 - albastre $\to$ 15 bile
6 - roșii

$\begin{cases} P_v = \frac{4}{15} \\ P_a = \frac{5}{15} \\ P_r = \frac{6}{15} \end{cases} \to$ prima extragere

se extrag 3 fără returnare

a doua - ~~roșie~~ verde   a treia - roșie

$\frac{4}{15}$ dacă la prima extragere e verde $\Rightarrow$ $\frac{3}{14}$ să mai iasă una verde, $\frac{6}{13}$ să iasă una roșie $\Rightarrow P(\text{caz }1) = \frac{4}{15}\cdot\frac{3}{14}\cdot\frac{6}{13} =$

$\frac{5}{15}$ dacă la prima extragere albastră $\Rightarrow$ $\frac{4}{14}$ verde, $\frac{6}{13}$ roșie $\Rightarrow P(\text{caz }2) = \frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{6}{13} =$

$\frac{6}{15}$ dacă la prima extragere e roșie $\Rightarrow$ $\frac{4}{14}$ verde, $\frac{5}{13}$ roșie $\Rightarrow P(\text{caz }3) = \frac{6}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{5}{13} =$

apoi adunăm caz 1 + caz 2 + caz 3

5 bile

a) prim și ultima pare (2,4)

$$\overbrace{\_\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{3!}\ \_}^{2!} = 2!\cdot 3! = 2\cdot 2\cdot 3 = 12$$

$$\Rightarrow \frac{12}{5!} = \frac{1}{10}$$

b) $\_\ \_\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{3!}$ $(1,3,5) \to A_3^2$ $\Rightarrow \dfrac{A_3^2 \cdot 3!}{5!} = \dfrac{3}{10}$

c) pare alăturate

$\_\ \_\ \_\ \_\ \_$

$\dfrac{2\cdot 4!}{5!}$ → entități (luăm 24 sau 42 entitate)

d) impare

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

pare

$$\frac{3!\cdot 2!}{5!} = \frac{1}{10}$$

(8) 5 cifre → 5 extrageri cu returnare cu

a) cifrele să fie distincte

valori pt. prima cifră

$\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10^5}$ → apoi scade

$\{cf_1, \dots, cf_5\} \to \{0, \dots, 9\} \Rightarrow 10^5$

b) cifre pare distincte

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10^5}$$

c) 3 cifre egale și alte 2 egale

xxxyy   x → 10 val
y → 9 val

apoi le permutăm

perm. cu repetiție: $\dfrac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_k!} = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{5!}{3!\cdot 2!}}{10^5}$$

1) să conțină doar 1, 2, 3

$\{f_1, \dots, f_5\} \to \{1, 2, 3\} = 3^5$ nu înțeleg ce a făcut el acolo -_-

$\Rightarrow \frac{3^5}{10^5} = \left(\frac{3}{10}\right)^5$

9 urna 1: 2 negre, 3 roșii

urna 2: 3 negre, 2 roșii

par → 2 bile urna 1 cu returnare

impar → 2 bile urna 2 fără returnare

X - nr. bile roșii extrase

se pot extrage 0, 1, 2 bile roșii

a) distribuția lui X

X_1 extragere urna 1: $\sim \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{pmatrix}$

$k=1 \Rightarrow C_2^1 \frac{3}{5}^1 \cdot \left(1-\frac{3}{5}\right)^1 = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$

$k=0 \Rightarrow C_2^0 \frac{3}{5}^0 \cdot \left(1-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \cdot \frac{4}{25} = \frac{4}{25}$

$k=2 = C_2^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(1-\frac{3}{5}\right)^0 = 1 \cdot \frac{9}{25} = \frac{9}{25}$

$X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{25} & \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}$

X_2 extragere urna 2, $\sim$

$n = 2$ - nr extrageri

$n_1 = 2$ - nr. bile bune

$n_2 = 3$ - nr. bile ne-bune

$P(X=k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^n}$

$k=0 \Rightarrow \frac{C_2^0 C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{\frac{5!}{2! \cdot 3!}} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 3}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\underset{2}{\cancel{4}}\cdot 5} = \frac{3}{10}$

$k=1 \Rightarrow \frac{6}{10}$

$k=2 \Rightarrow \frac{1}{10}$

apoi înmulțim fiecare cu $\frac{1}{2} \Rightarrow X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{25}+\frac{3}{10}\right) & \frac{54}{100} & \frac{23}{100} \end{pmatrix}$

$\frac{23}{100}$

b) media lui X

$$E(X) = 0 \cdot \frac{23}{100} + 1 \cdot \frac{54}{100} + 2 \cdot \frac{23}{100} = \dots$$

c) funcția de repartiție

$$F_X = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{23}{100} & x \in [0,1) \\ \frac{23}{100} + \frac{54}{100} = \frac{77}{100} & x \in [1,2) \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

MAI REVEZI

d) primul succes după mai multe insuccese -> distr. geometrică

$Y \sim Geo\left(\frac{23}{100}\right)$ -> din distr. lui X (extr. 2 bile roșii)

$\boxed{P(Y=k) = p(1-p)^k}$ -> prob. să obții 2 bile roșii după k eșecuri (unde p e prob. succes)

$$\boxed{E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(Y=k)} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p(1-p)^k = (1-p)\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} \underset{k=j+1}{=}$$

$$= (1-p)\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \cdot p \cdot (1-p)^j = (1-p)\Big[\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} j \cdot p(1-p)^j}_{E(Y)} + \sum_{j=0}^{\infty} p(1-p)^j\Big] =$$

$$= (1-p)\Big[E(Y) + p\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j}_{\text{progresie geometrică}}\Big] = (1-p)\Big[E(Y) + p\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{(1-p)^n - 1}{(1-p)-1}}\Big] =$$

-> progresie geometrică

$= \frac{1}{p}$

$$= (1-p)[E(Y)+1] \Rightarrow \cancel{E(Y)} = \cancel{E(Y)} + 1 - pE(Y) - p \Rightarrow \boxed{E(Y) = \frac{1-p}{p}}$$

⑩ $F_T(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{t}{10}, & t\in[0,10] \\ 1, & t>10 \end{cases}$ → funcția de repartiție pt. întârzierea lui

9 min dacă întârzie pierde autobuzul

a) prob. să piardă autobuzul

$P(T>9) = 1-F(9) \overset{10}{=} 1 - \frac{9}{10} = \boxed{\frac{1}{10}}$

b) val. medie a întârzierii

$f_T(x) = (F_T(x))' = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{1}{10}, & t\in[0,10] \\ 0, & t>10 \end{cases}$

$E(x) = \frac{1}{10}\int_0^{10} x\,dx = \frac{x^2}{20}\Big|_0^{10} = \frac{100}{20} = 5$

c) din 5 să piardă autobuzul în 2

5 extrageri cu returnare, 2 succese

$Bino\left(5; \frac{1}{10}\right)$, $k=2$, $k=3$, $k=4$, $k=5$

↓

prob. întârziere

$C_5^2\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(1-\frac{1}{10}\right)^3 + C_5^3\left(\frac{1}{10}\right)^3\left(1-\frac{1}{10}\right)^2 + C_5^4\left(\frac{1}{10}\right)^4\left(1-\frac{1}{10}\right)^1 + C_5^5\left(\frac{1}{10}\right)^5\left(1-\frac{1}{10}\right)^0$

d) eșecuri până la succes ⇒ geo

$Y \sim Geo\left(\frac{1}{10}\right)$ cu prob. de succes $\frac{1}{10}$ (succes aici e să piardă autobuzul)

(11) dreptunghi $[1,2]\times[2,4]\subset\mathbb{R}^2$

a) prob. ca punctul să fie dreptunghiul $\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right]\times\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]$

uniform aleator → unif

$X \sim Unif\,[1,2]$
$Y \sim Unif\,[2,4]$ independente → le pot înmulți

$$P\left(\frac{4}{3}\le X\le\frac{5}{3},\ \frac{5}{2}\le Y\le\frac{7}{2}\right)=P\left(\frac{4}{3}\le X\le\frac{5}{3}\right)\cdot P\left(\frac{5}{2}\le Y\le\frac{7}{2}\right)=$$

$$=\left(F_X\left(\frac{5}{3}\right)-F_X\left(\frac{4}{3}\right)\right)\cdot\left(F_Y\left(\frac{7}{2}\right)-F_Y\left(\frac{5}{2}\right)\right)$$

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & x\in[1,2]\\ 0 & \text{altfel}\end{cases}\qquad f_Y(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in[2,4]\\ 0 & \text{altfel}\end{cases}$$

$$F_X=\begin{cases}\int_1^x dt=t\Big|_1^x=x-1 & ,\ x\in[1,2]\\ 0 & ,\ \text{altfel}\end{cases}\qquad F_Y=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot t\Big|_2^x=\frac{x}{2}-1 & ,\ x\in[2,4]\\ 0 & ,\ \text{altfel}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{5}{3}-\cancel{1}-\frac{4}{3}+\cancel{1}\right)\left(\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}-\cancel{1}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}+\cancel{1}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

b) $D\sim$ v.a. = distanța punct → origine

$D=X^2+Y^2$ (Pitagora)

$$\Rightarrow E(D)=E(X^2+Y^2)=E(X^2)+E(Y^2)=\frac{7}{3}+\frac{56}{6}=\frac{14+56}{6}=\frac{70}{6}=\frac{35}{3}$$

$$\int_1^2 x^2\cdot 1\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$\int_2^4 x^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_2^4=\frac{64}{6}-\frac{8}{6}=\frac{56}{6}$$

1) $N \sim Unid(5) \rightarrow$ adică ia valori de la 1 la 5

$N \rightarrow$ nr. cifre / cod binar de N cifre de 0 și 1 cu $p = \frac{1}{2}$

a) $P(X = 1011 \mid N = 4) =$ (dacă nr. de 4 cifre sigur $N = 4$) $= \frac{1}{2^4}$

$\downarrow$

2^4 cazuri posibile pt. coduri de 4 cifre

din toate $N = 4$ avem 1 caz favorabil

b) Suma $= 3$

avem 3 de 1 $\Rightarrow N = 3$ sau $N = 4$

Bayes: $\{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\} \} \rightarrow$ avem 5 partiții

$\underset{H_1}{\{1\}}, \underset{H_2}{\{2\}}, \underset{H_3}{\{3\}}, \underset{H_4}{\{4\}}, \underset{H_5}{\{5\}}$

$$\boxed{P(S) = \sum_{i=1}^{5} P(S \mid H_i) \cdot P(H_i)}$$

$$\sum_{i=1}^{5} P(S = 3 \mid N = i) \cdot \underbrace{P(N = i)}_{= \frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \sum_{i=3}^{5} P(S = 3 \mid N = i) =$$

$\downarrow$

că pt 1 și 2 n-avem suma 3

$=$ (3 extrageri de 1 cu returnare din i încercări) $\rightarrow$ Bino $=$ (vezi formula)

$$= \frac{1}{5} \sum_{i=3}^{5} C_i^3 \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{= \left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} \sum_{i=3}^{5} C_i^3$$

13) m_0 media lor (providers) $= 60$ min

$\overline{X_{36}} = 70$ minute

$\sigma_0 = 15$ minute

$\alpha = 0,05$

$H_0 \rightarrow$

* ipoteza nulă și ipoteza alternativă (H_1)

$H_0 : m \leq 60$

$H_1 : m > 60$

testăm media (când var. e cunoscută)

$$z = \frac{\overline{X_n} - m_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} = \frac{70 - 60}{\frac{15}{6}} = 4$$

suntem pe caz III

$z_{1-0.05} = 1,69$ (dată)

$\Rightarrow z \geq z_{0.95}$ se respinge H_0 pt. H_1

$\Rightarrow$ angajații stau mai mult de 60 min

* interval de încredere pt. abaterea standard (adică pt $\sqrt{\text{varianță}}$)

$$\left(\sqrt{\frac{n-1}{\underset{1-0,025}{\overset{}{C_{1-\frac{\alpha}{2}}}}}\cdot \sigma_0^2}, \sqrt{\frac{n-1}{\underset{0,025}{C_{\frac{\alpha}{2}}}}\cdot \sigma_0^2}\right)$$ dacă era varianța nu puneam $\sqrt{\ }$

$$\left(\sqrt{\frac{36-1}{53,20}\cdot 15^2}, \sqrt{\frac{36-1}{20,57}\cdot 15^2}\right)$$ apoi calcule $= (12.17, 19.57)$

(14) $X_1, \dots, X_{10} \in (0,1)$ date statistice pt. caracteristica X

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x^{2\theta-1} & \text{dacă } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{dacă } x \in (0,1] \end{cases}$$ unde $\theta > 0$

metoda verosimilității maxime

$$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) \;/\ln \Leftrightarrow \ln L(x,\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i,\theta) =$$

nu mai e

$$= \sum_{i=1}^{10} \ln(2\cdot\theta\cdot x^{2\theta-1}) = \sum_{i=1}^{n}(\ln 2 + \ln\theta + (2\theta-1)\ln x_i) \quad /()' \text{ în funcție de } \theta$$

$$\Rightarrow \underset{0}{\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}} = \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{\theta} + 2\ln x_i\right) \Leftrightarrow \frac{10}{\theta} + 2\sum_{i=1}^{10}\ln x_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{10}{\theta} = -2\sum_{i=1}^{10}\ln x_i$$

pt. că e aproximat

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\cancel{10}\,5}{-\cancel{2}\sum_{i=1}^{10}\ln x_i} = -\frac{5}{\sum_{i=1}^{10}\ln x_i}$$

metoda momentelor

$$E(x) = \int_{\mathbb{R}} x\cdot 2\theta x^{2\theta-1}\,dx = 2\theta\int_0^1 \underset{x^{2\theta}}{x\cdot x^{2\theta-1}}\,dx = 2\theta\cdot\left.\frac{x^{2\theta+1}}{2\theta+1}\right|_0^1 = 2\theta\cdot\frac{1}{2\theta+1} = \frac{2\theta}{2\theta+1}$$

↳ teoretic

$$E(x) = \frac{X_1+\dots+X_{10}}{10} \left(=\overline{X_{10}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2\theta}{2\theta+1} = \overline{X_{10}} \Leftrightarrow 2\theta = 2\theta\overline{X_{10}} + \overline{X_{10}} \Leftrightarrow 2\theta(1-\overline{X_{10}}) = \overline{X_{10}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\overline{X_{10}}}{2(1-\overline{X_{10}})}$$

5) $X_1, \dots, X_n$ v.a. independente cu acc. distr.

$$P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 0{,}5 \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

$$Y_i = \max\{X_i, X_{i+1}\} \quad \forall 1 \le i \le n-1$$

a) distr. de probabilitate pt. Y_i

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$Y_i = \max\{X_i, X_{i+1}\}$$

$$P(Y_i = -1) = P(\max\{X_i, X_{i+1}\} = -1) = P(\overbrace{X_i = -1 \cap X_{i+1}}^{\text{independente} \Rightarrow} = -1) = P(X_i = -1) \cdot P(X_{i+1} = -1) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$$

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

b) val. medie și varianța pt. Y_i

$$E(Y_i) = -1 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}75 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$Var(Y_i) = E(Y_i^2) - E^2(Y_i) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$E(Y_i^2) = (-1)^2 \cdot 0{,}25 + 1^2 \cdot 0{,}75 = 1$$

c) $Z_n = \frac{1}{n}(X_1^3 + X_2^3 + \dots + X_n^3)$. Spre a val converge a.s.?

LTNM spune că $\rightarrow E(X_i^3) = (-1)^3 \cdot 0{,}5 + 1^3 \cdot 0{,}5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

16) media $= 10 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10}$

a) prob ≤ 15 min $= F(15)$

$$F_X = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}t}\,dt = \frac{1}{\cancel{10}} \cdot (-\cancel{10}) \cdot e^{-\frac{1}{10}x}\Big|_0^x = -e^{-\frac{x}{10}} + 1 & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(15) = -e^{-\frac{3}{2}} + 1$$

c) $P(X>15)=0,1$ care e media timpului?

$E(x)=\frac{1}{\lambda}=?$

$P(X>15)=1-F(15)=1-(-e^{-15\cdot\lambda}+1)=e^{-15\cdot\lambda}$

$\Rightarrow e^{-15\lambda}=0.1 \ /\ln$

$-15\lambda=\ln 0,1 \Rightarrow \lambda=-\frac{\ln 0,1}{15} \Rightarrow E(x)=-\frac{15}{\ln 0,1}=\ominus\frac{15}{\ln 10^{-1}}=+\frac{15}{\ln 10}$

(17) $n=25$ ~~minute~~

$\overline{X_{25}}=8,1$

$S_n=1,6 \to$ deviatie/abatere standard

$\alpha=0,05$

a) abaterea standard de prelucrare e 1,5 minute?

$H_0: \sigma_0=1,5$

$H_1: \sigma_0\neq 1,5$

σ - deviatie/abatere

σ^2 - varianța (deviație^2/abatere^2)

$\underbrace{c=\frac{n-1}{\sigma_0^2}\cdot S_n^2}=\frac{24}{(1,5)^2}\cdot(1,6)^2=21,094$

$c_{\frac{\alpha}{2}}=14,4012$

$c_{1-\frac{\alpha}{2}}=39,3641$

$c_{\frac{\alpha}{2}}<c<c_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$ se acceptă H_0

b) media timpului de prelucrare e 7,8 minute

$H_0: m_0=7,8$

$H_1: m_0\neq 7,8$

nu știm varianța

$t=\frac{\overline{X_n}-m_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}=\frac{8,1-7,8}{\frac{1,6}{5}}=0,9375$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}=t_{0,975}=2,0639$

$|t|<t_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$ se acceptă H_0