UNIVERSITATEA „BABEŞ-BOLYAI” CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Lucrare de licenţă

SERII FOURIER

Coordonator ştiinţific:
Conferenţiar TRIF Tiberiu

Absolvent:
MOLDOVAN Ioana

2018

Cuprins

Introducere

> „Matematica este un joc care se joacă după anumite reguli simple cu semne fără înţeles pe hârtie."
>
> David Hilbert

Seriile Fourier, denumite astfel în onoarea matematicianului francez, Baptiste Joseph Fourier, sunt un instrument folosit în analiza funcțiilor periodice. Fourier a introdus aceste serii cu scopul de a rezolva ecuaţia propagării căldurii într-o placă metalică. Cercetările lui au condus la concluzia că orice funcţie continuă poate fi reprezentată cu ajutorul unei serii trigonometrice. Până la Fourier erau cunoscute doar soluţii particulare ale ecuaţiei căldurii în cazul în care sursa de căldură era dată de o funcţie periodică de tip sinus sau cosinus. Ideea lui Fourier a fost de a modela surse de căldură de o formă mai complicată cu ajutorul unor combinaţii liniare de funcţii sinus şi cosinus.

Cu toate că motivaţia lui Fourier a fost rezolvarea ecuaţiei căldurii, ideile şi tehnicile lui s-au dovedit ulterior a fi aplicabile în numeroase alte probleme de matematică şi fizică precum cele din electricitate, acustică, optică, prelucrarea semnalelor, prelucrarea imaginilor, mecanică cuantică.

Lucrarea de faţă îşi propune prezentarea dezvoltării în serie Fourier a unei funcţii de variabilă reală, sintetizarea şi demonstrarea unor teoreme de convergenţă şi divergenţă, precum şi rezolvarea unor aplicaţii sugestive cu ajutorul seriilor Fourier. Această lucrare este structurată în patru capitole. Primul capitol descrie noţiunea de *serie Fourier*, relaţiile de ortogonalitate pe care se bazează aceasta, accentul fiind pus pe dezvoltarea unei funcţii reale în serie Fourier. Cel de-al doilea capitol este dedicat enunţării şi demonstrării unor rezultate importante (Teorema 2.3.1, Egalitatea lui Parseval, Criteriul lui Dirichlet) care să precizeze convergenţa seriei Fourier a unei funcţii continue periodice. În paralel cu capitolul precedent, al treilea capitol este menit să evidenţieze fenomenele de divergenţă a seriilor Fourier. În orice caz, ultimul capitol prezintă soluţiile unor aplicaţii rezolvate cu ajutorul seriilor Fourier (Aplicaţii cu referire la conducţia termică, coarda vibrantă, ecuaţia lui Laplace, funcţia Zeta a lui Riemann).

Contribuţia proprie la realizarea lucrării constă în: selectarea şi structurarea materialului bibliografic, prezentarea mai amănunţită a unor demonstraţii şi rezolvarea unor aplicaţii prezentate în ultimul capitol al lucrării (Aplicaţiile 4.0.6 şi 4.0.7).

Capitolul 1

Serii Fourier

1.1 Origini

Seriile Fourier îşi au rădăcinile în problemele de fizică matematică, în clasicile probleme de propagare a undelor şi conducţie termică. Ca exemplu, se consideră problema determinării stării de echilibru a distribuţiei temperaturii $u(r,\theta)$ într-o placă metalică circulară cu rază unitară, dându-se temperatura de pe frontieră $u(1,\theta) = f(\theta)$, unde r şi θ sunt coordonatele polare standard. Aici f este considerată o funcţie arbitrară, nu neapărat continuă, cu proprieteatea că $f(\theta+2\pi) = f(\theta)$. Ţinându-se seama de legile fizicii, soluţia $u(r,\theta)$ va fi o funcţie armonică, care este soluţie a ecuaţiei lui Laplace. Acesta ia forma următoare în coordonate polare:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \tag{1.1}$$

Dacă $f(\theta) = \sin(n\theta)$ sau $\cos(n\theta)$ pentru $n = 1, 2, ...$, această problemă de determinare a valorii pe frontieră poate fi rezolvată prin verificare. Soluţiile sunt $u(r,\theta) = r^n \sin(n\theta)$ şi respectiv $r^n \cos(n\theta)$. Dar ecuaţia lui Laplace este liniară, aşa că se poate aplica principiul superpoziţiei. Acest lucru înseamnă că pentru orice constantă c, soluţia cu condiţia la limita $cf(\theta)$ este $cu(r,\theta)$, iar dacă $v(r,\theta)$ este soluţia corespunzătoare unei alte condiţii la limită $g(\theta)$, atunci soluţia problemei corespunzătoare condiţiei la limită $f + g$ este $u + v$.

Toate acestea sugerează că problema determinării a valorii pe frontieră va fi rezolvată pentru o funcţie periodică arbitrară $f(\theta)$ dacă acea funcţie poate fi dezvoltată în serie infinită de forma

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \Big) \tag{1.2}$$

pentru coeficienţii a_n şi b_n oarecare. Lasând deoparte problema convergenţei, se ajunge la soluţia:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n r^n \cos(n\theta) + b_n r^n \sin(n\theta) \Big). \tag{1.3}$$

O dezvoltare de forma (1.2) se numeşte *serie Fourier*.

Seriile Fourier au fost denumite după fizicianul matematician francez Joseph Fourier (1768-1830) care a conceput metoda şi a dezvoltat-o în importanta sa lucrare despre conducţia termică, *Théorie analytique de la chaleur* (Teoria analitică a căldurii), publicată în 1822. În particular, era greu de crezut că o funcţie discontinuă poate fi reprezentată ca sumă de sinusuri şi cosinusuri, aşa că argumentele lui Fourier au fost privite cu scepticism şi nu au fost rapid acceptate. Mai târziu, Cauchy, Dirichlet, Riemann şi alţii au exprimat rezultatele lui Fourier cu mai mare rigurozitate dezvoltând concepte mai precise în analiza matematică.

Astfel a apărut o teorie matematică extinsă a seriilor Fourier cu o largă aplicabilitate, nu numai în fizica matematică, ci şi în diferite alte domenii precum teoria codării, transmiterea semnalelor, stocarea şi recuperarea datelor, cristalografie, imagistică medicală şi matematica pură. Seriile Fourier sunt prototipul pentru o varietate de expansiuni ortogonale care au luat naştere în mod similar din problemele de fizică matematică.

1.2 Relaţii de ortogonalitate

Seriile Fourier se bazează pe relaţiile de ortogonalitate pentru funcţiile sinus şi cosinus. Făcând analogie cu vectorii din spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$, spunem că două funcţii f şi g integrabile pe un interval $[a, b]$ sunt *ortogonale* dacă

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Relaţiile fundamentale sunt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx = 0, \tag{1.4}$$

pentru $n = 1, 2, \ldots$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0, \tag{1.5}$$

pentru $n, m \in \mathbb{Z}, n \neq m$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx = 0, \tag{1.6}$$

pentru $n, m = 1, 2, \ldots$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \pi, \tag{1.7}$$

pentru $n = 1, 2, \ldots$.

Acestea reies uşor din următoarele identităţi trigonometrice:

1. $\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]$,
2. $\sin(nx)\sin(mx) = \frac{1}{2}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]$,
3. $\cos(nx)\sin(mx) = \frac{1}{2}[\sin(n+m)x - \sin(n-m)x]$,
4. $\cos^2(nx) = \frac{1+cos(2nx)}{2}$, $sin^2(nx) = \frac{1-cos(2nx)}{2}$.

1.3 Definiţie

Presupunem că pentru coeficienţii a_k şi b_k oarecare, seria trigonometrică

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big) \tag{1.8}$$

converge uniform pe intervalul $[-\pi, \pi]$ către o sumă $f(x)$. Alegerea termenului liber din seria (1.8) este justificată de motive de simetrie care se vor vedea în continuare.

Se ştie că o serie uniform convergentă de funcţii continue are ca sumă o funcţie continuă. Deoarece termenii seriei din relaţia (1.8) sunt funcţii continue, iar seria este uniform convergentă, rezultă că funcţia f este continuă pe $[-\pi, \pi]$, deci integrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Aşadar putem integra termen cu termen relaţia (1.8) pe intervalul $[-\pi, \pi]$ şi obţinem

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\, dx \right).$$

Conform relaţiei (1.4), integralele din paranteza din membrul al doilea sunt egale cu zero, deci obţinem

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx. \tag{1.9}$$

Multiplicând ambii membrii ai relaţiei (1.8) cu $\cos(nx)$, obţinem

$$f(x)\cos(nx) = \frac{a_0}{2}\cos(nx) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx)\cos(nx) + b_k \sin(kx)\cos(nx) \Big). \tag{1.10}$$

Deoarece $\cos(nx)$ este o funcţie mărginită, iar seria din relaţia (1.8) este uniform convergentă, rezultă că seria din membrul al doilea al egalităţii (1.10) converge uniform pe $[-\pi, \pi]$. Continuitatea produsului $f(x)\cos(nx)$ rezultă atât din continuitatea factorilor, cât şi din faptul că seria uniform convergentă din membrul al doilea al relaţiei (1.10) are ca termeni funcţii continue. Pe baza convergenţei uniforme putem integra termen cu termen relaţia (1.10) şi obţinem

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx + \right.$$

$$\left. + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx\right). \tag{1.11}$$

Conform relaţiilor de ortogonalitate (1.5), (1.6) şi (1.7), integralele din membrul al doilea sunt egale cu zero, cu excepţia uneia singure, deci obţinem

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \pi a_n.$$

Analog, prin multiplicare cu $\sin(nx)$ se obţine

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \pi b_n.$$

Numerele

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\ n = 0, 1, ... \tag{1.12}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx,\ n = 1, 2, ... \tag{1.13}$$

se numesc *coeficienţii Fourier ai funcţiei f*, iar seria trigonometrică din relaţia (1.8) este cunoscută ca *seria Fourier a funcţiei f*. Din expresia coeficienţilor Fourier observăm că ei au sens pentru orice funcţie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, independent de considerarea unei serii trigonometrice. Adică, coeficienţii Fourier nu sunt ataşaţi unei serii trigonometrice, ci unei funcţii integrabile pe $[-\pi, \pi]$. Oricare ar fi funcţia f integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, relaţiile (1.12) şi (1.13) au sens deoarece produsul dintre o funcţie integrabilă şi o funcţie continuă este o funcţie integrabilă. Deci fiecărei funcţii integrabile pe intervalul $[-\pi, \pi]$ îi corespunde un şir infinit de coeficienţi Fourier daţi de relaţiile (1.12) şi (1.13). După cum arată calculele, seria Fourier a unei funcţii continue f este singura serie trigonometrică de forma (1.8) care ar putea converge uniform către funcţia f pe $[-\pi, \pi]$. În particular, nici o funcţie nu are mai mult de o dezvoltare în serie trigonometrică uniform convergentă.

1.4 Seria Fourier a funcţiilor pare sau impare

Dacă funcţia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ este pară sau impară pe $[-\pi, \pi]$, atunci dezvoltarea ei în serie Fourier se simplifică.

Observaţie 1.4.1. *Dacă funcţia integrabilă f definită pe intervalul $[-\pi, \pi]$ este impară, atunci*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0,$$

iar dacă este pară, atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Astfel, dacă funcţia $f(x)$ este *pară* pe $[-\pi, \pi]$, atunci funcţia $f(x)\cos(kx)$ este pară, iar funcţia $f(x)\sin(kx)$ este impară. Ţinând seama de acestea, vom obţine:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\, dx = 0.$$

Aşadar, *seria Fourier a unei funcţii pare conţine numai cosinusuri*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Analog, dacă funcţia $f(x)$ este *impară* pe $[-\pi, \pi]$, atunci funcţia $f(x)\sin(kx)$ este pară, iar funcţia $f(x)\cos(kx)$ este impară. Deci vom obţine:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx,$$

Aşadar, *seria Fourier a unei funcţii impare conţine numai sinusuri*:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

1.5 Dezvoltarea în serie Fourier a funcţiilor definite pe $[-L, L]$

Teoria construită mai înainte a pornit de la ipoteza că funcţia dată este definită pentru toate valorile reale ale lui x şi că este periodică de perioadă 2π, însă, vom avea cazuri în care funcţia periodică dată va fi definită pe un alt interval.

Fie f o funcţie definită pe intervalul arbitrar $[-L, L]$, $L > 0$, periodică de perioadă $2L$ şi extinsă pe $\mathbb{R}$ prin condiţia de periodicitate $f(x + 2L) = f(x)$. Considerăm funcţiile $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definite prin $h(y) = \frac{yL}{\pi}$ şi $g(z) = (f \circ h)(z)$, funcţia g fiind periodică de perioadă 2π.

Deci avem

$$g(y + 2\pi) = f\big(h(y + 2\pi)\big) = f\Big(\frac{y}{\pi} + 2L\Big) = f\Big(\frac{yL}{\pi}\Big) = (f \circ h)(t) = g(t),$$

pentru orice $y \in \mathbb{R}$.

Astfel obţinem funcţia g pentru y în intervalul $[-\pi, \pi]$ la care sunt aplicabile consideraţiile din subcapitolele precedente. Dacă sunt îndeplinite anumite condiţii, funcţia poate fi dezvoltată în seria Fourier

$$g(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(ny) + b_n \sin(ny)\big), \text{ pentru orice } y \in \mathbb{R},$$

ai cărei coeficienţi sunt numerele

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos(ny)\,dy,\ n = 0, 1, ...,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin(ny)\,dy,\ n = 1, 2... .$$

Utilizând substituţia $y = \frac{\pi x}{L}$, obţinem dezvoltarea funcţiei f în serie Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right),$$

unde

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\ n = 0, 1, ...,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\ n = 1, 2, ...,$$

sunt coeficienţii acesteia.

Observaţie 1.5.1. *Dacă funcţia f este periodică de perioadă $2L$, atunci coeficienţii a_n şi b_n pot fi determinaţi şi din formulele echivalente:*

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\ n = 0, 1, ...,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\ n = 1, 2, ...,$$

unde c este orice număr real.

1.6 Dezvoltarea în serie Fourier după cosinusuri sau sinusuri a unei funcţii definite pe $(0, L)$

Fie f o funcţie definită pe $[0, L]$. De multe ori este util ca funcţia f să se dezvolte în serie Fourier după cosinusuri sau sinusuri. În acest scop, funcţia cosiderată f se prelungeşte pe intervalul $[-L,0]$ astfel încât noua funcţie să fie pară sau impară pe intervalul $[-L,L]$.

Să presupunem că vrem să dezvoltăm funcţia f în serie Fourier după cosinusuri. Aşadar efectuăm extinderea pară pe intervalul $[-L,0]$, obţinând astfel o nouă funcţie pară $g(x)$ pe intervalul $[-L,L]$:

$$g(x)=\begin{cases} f(-x), \text{ pentru } x\in[-L,0] \\ f(x), \text{ pentru } x\in[0,L] \end{cases}$$

Dacă funcţia dată $f(x)$ îndeplineşte condiţiile lui Dirichlet (Teorema 2.4.1.) pe intervalul $[0,L]$, atunci şi noua funcţie $g(x)$ va îndeplini aceste condiţii pe intervalul $[-L,L]$. Prin urmare, seria Fourier corespunzătoare funcţiei g va fi

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big), \tag{1.14}$$

unde

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}g(x)\,dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}g(x)\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx,$$

iar $b_n=0$.

Deoarece relaţia (1.14) are loc în toate punctele de continuitate de pe intervalul $(-L,L)$, în particular va avea loc şi pe intervalul $(0,L)$. Astfel obţinem dezvoltarea căutată numai după cosinusuri:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big).$$

Analog vom proceda şi pentru a obţine dezvoltarea în serie Fourier după sinusuri. Efectuăm o extindere impară a funcţiei f pe intervalul $[-L,0]$, şi astfel vom obţine o nouă funcţie impară pe intervalul $[-L, L]$:

$$h(x) = \begin{cases} -f(-x), \text{ pentru } x \in [-L, 0] \\ f(x), \text{ pentru } x \in [0, L] \end{cases}$$

Dezvoltarea funcţiei impare g în serie Fourier va fi

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

unde $a_0 = a_n = 0$, iar

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} h(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

În particular, în orice punct de continuitate din intervalul $[0, L]$ avem următoarea dezvoltare a funcţiei f numai după sinusuri:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Capitolul 2

Convergenţa seriilor Fourier

2.1 Aproximarea în medie pătratică

O întrebare mult mai delicată este dacă seria Fourier a unei funcţii continue periodice va converge punctual sau uniform către funcţia f. Înainte de a răspunde la această întrebare, vom considera problema celei mai bune aproximări în medie pătratică.

Considerăm funcţia f de pătrat integrabilă definită pe intervalul $[-\pi, \pi]$ şi polinoamele trigonometrice de forma

$$T(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx) \Big) \tag{2.1}$$

de grad mai mic sau egal cu n. Ne punem următoarea întrebare: dintre toate polinoamele trigonometrice $T(x)$, care ne va da cea mai bună aproximare în medie pătratică pentru f? Cu alte cuvinte, cum ar trebui să alegem coeficienţii c_k şi d_k astfel încât integrala

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - T(x) \Big]^2 dx \tag{2.2}$$

să fie minimă? Pentru a răspunde la această întrebare vom considera a_k şi b_k coeficienţii Fourier ai funcţiei f definiţi prin relaţiile (1.12) şi (1.13). Relaţia (2.2) devine

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-T(x)\Big]^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}T^2(x)\,dx.$$

Ţinând cont de forma polinomului trigonometric $T(x)$ şi de dezvoltarea în serie Fourier a lui f, obţinem

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-T(x)\Big]^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-2\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(c_k\cos(kx)+d_k\sin(kx)\Big)\right]dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(c_k\cos(kx)+d_k\sin(kx)\Big)\right]^2dx.$$

Folosind relaţiile de ortogonalitate (1.4), (1.6) şi (1.7), vom obţine

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-T(x)\Big]^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\pi a_0c_0-2\pi\sum_{k=1}^{n}(a_kc_k+b_kd_k)+\frac{1}{2}\pi c_0^2+$$

$$+\pi\sum_{k=1}^{n}(c_k^2+d_k^2). \tag{2.3}$$

Fie

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(c_k\cos(kx)+d_k\sin(kx)\Big) \tag{2.4}$$

suma parţială de ordin n a seriei Fourier a lui f. Alegând $T(x)=s_n(x)$, obţinem

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-s_n(x)\Big]^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\frac{1}{2}\pi a_0^2-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2). \tag{2.5}$$

Din (2.5) rezultă

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-s_n(x)\Big]^2\,dx+\frac{1}{2}\pi a_0^2+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2). \tag{2.6}$$

Înlocuind $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ din relaţia (2.6) în relaţia (2.3), obţinem

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - T(x)\Big]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - s_n(x)\Big]^2 dx + \frac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) - \pi a_0 c_0 -$$

$$-2\pi \sum_{k=1}^{n}(a_k c_k + b_k d_k) + \frac{1}{2}\pi c_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n}(c_k^2 + d_k^2).$$

Deci

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x){-}T(x)\Big]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x){-}s_n(x)\Big]^2 dx{+}\frac{1}{2}\pi(a_0{-}c_0)^2{+}\pi \sum_{k=1}^{n} \Big[(a_k{-}c_k)^2{+}(b_k{-}d_k)^2\Big].$$

Deoarece

$$\frac{1}{2}\pi(a_0 - c_0)^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} \Big[(a_k - c_k)^2 + (b_k - d_k)^2\Big] \geq 0,$$

rezultă că

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - T(x)\Big]^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - s_n(x)\Big]^2 dx, \tag{2.7}$$

cu egalitate dacă $a_0 = c_0$, $a_k = c_k$ şi $b_k = d_k$ oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots$.

Cu alte cuvinte, polinomul Fourier s_n dă cea mai bună aproximare în medie pătratică pentru f dintre toate polinoamele trigonometrice cu grad mai mic sau egal cu n.

2.2 Inegalitatea lui Bessel. Egalitatea lui Parseval

Deoarece

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - T(x)\Big]^2 dx \geq 0,$$

din relaţia (2.6) rezultă că

$$\frac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx.$$

Făcându-l pe n să tindă la infinit, vom vedea că

$$\frac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx. \tag{2.8}$$

Relaţia (2.8) este cunoscută sub numele de *Inegalitatea lui Bessel.* Aceasă inegalitate este valabilă pentru sisteme mai generale de funcţii ortogonale pentru că nu au fost folosite proprietăţi speciale ale funcţiilor sinus şi cosinus în obţinerea ei.

Pentru sistemul trigonometric considerat putem afirma că

$$\frac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx. \tag{2.9}$$

Identitatea (2.9) este cunoscută sub numele de *Egalitatea lui Parseval.* Aceasta va rezulta din relaţia (2.5) dacă vom putea arăta că

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x) - s_n(x)\Big]^2 dx = 0. \tag{2.10}$$

Pentru a putea demonstra acest lucru vom apela la forma trigonometrică a teoremei de aproximare a lui Weierstrass.

Teorema 2.2.1 (Teorema de aproximare a lui Weierstrass)**.** *Fie f o funcţie continuă pe intervalul $[-\pi,\pi]$ cu proprietatea că $f(-\pi) = f(\pi)$. Atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un polinom trigonometric astfel încât $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$, pentru orice x din intervalul $[-\pi,\pi]$.*

Din teorema de densitate a funcţiilor continue în $L_2[-\pi,\pi]$, rezultă că oricare ar fi $\varepsilon_1 > 0$, există o funcţie $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ continuă, cu proprietatea că $g(-\pi) =$

$g(\pi)$ astfel încât

$$\|f(x) - g(x)\|_{L_2[-\pi,\pi]} < \varepsilon_1, \text{ oricare ar fi } x \in [-\pi, \pi].$$

Aplicând lui g forma trigonometrică a teoremei de aproximare a lui Weierstrass, obţinem că oricare ar fi $\varepsilon_2 > 0$, există T un polinom trigonometric astfel încât $|g(x) - T(x)| < \varepsilon_2$, pentru orice x $\in [-\pi, \pi]$.

Deci avem că

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big[g(x) - T(x)\Big]^2 dx < \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_2^2 \, dx. \tag{2.11}$$

Alegând $\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ şi $\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{2\pi}}$, vom obţine

$$\|f(x) - g(x)\|_{L_2[-\pi,\pi]} < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}, \text{ oricare ar fi } x \in [-\pi, \pi] \tag{2.12}$$

$$|g(x) - T(x)| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{2\pi}}, \text{ oricare ar fi } x \in [-\pi, \pi]. \tag{2.13}$$

Ţinând cont de relaţia (2.13), relaţia (2.11) devine

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big[g(x) - T(x)\Big]^2 dx < \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{2\pi}}^2 dx = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Rezultă

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \Big[g(x) - T(x)\Big]^2 dx} = \|g(x) - T(x)\|_{L_2[-\pi,\pi]}^2 < \sqrt{\frac{\varepsilon}{4}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}.$$

Deci

$$\|g(x) - T(x)\|_{L_2[-\pi,\pi]} < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}, \text{ oricare ar fi } x \in [-\pi, \pi]. \tag{2.14}$$

Deoarece

$$\|f(x) - T(x)\|_{L_2[-\pi,\pi]} < \|f(x) - g(x)\|_{L_2[-\pi,\pi]} + \|g(x) - T(x)\|_{L_2[-\pi,\pi]},$$

atunci ţinând cont de relaţiile (2.12) şi (2.14), obţinem

$$\|f(x) - T(x)\|_{L_2[-\pi,\pi]} < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} = \sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi } x \in [-\pi, \pi].$$

Deci

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - T(x)\Big]^2 dx < \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon, \text{ oricare ar fi } x \in [-\pi, \pi]. \tag{2.15}$$

În subcapitolul precedent am văzut că polinomul Fourier s_n dă cea mai bună aproximare în medie pătratică pentru f dintre toate polinoamele trigonometrice de grad cel mult n. Dacă T are gradul m, atunci oricare ar fi n $\geq$ m, avem că

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - s_n(x)\Big]^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - T(x)\Big]^2 dx.$$

Conform relaţiei (2.15) avem că

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - s_n(x)\Big]^2 dx < \varepsilon.$$

Tracând la limită, obţinem că (2.10) are loc, deci egalitatea lui Parseval este demonstrată.

2.3 Convergenţa punctuală

Scopul nostru este de a determina condiţii care să ne asigure faptul că seria Fourier asociată unei funcţii f converge către aceasta. Pentru a obţine o formă convenabilă a sumei parţiale, vom începe cu un calcul elementar.

Lema 2.3.1. *Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ şi orice $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea*

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\Big(x\big(n + \frac{1}{2}\big)\Big)}{2\sin\Big(\frac{1}{2}x\Big)}. \tag{2.16}$$

Demonstraţie. Multiplicând relaţia (2.16) cu $2\sin(\frac{1}{2}x)$, aceasta va fi echivalentă cu

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos(kx) = \sin\left(x\left(n+\frac{1}{2}\right)\right). \tag{2.17}$$

Vom folosi următoarea identitate:

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos(kx) = \frac{1}{2}\Big[\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\Big].$$

Deci relaţia (2.17) va fi echivalentă cu

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \sum_{k=1}^{n}\Big[\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\Big].$$

Deci obţinem

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)x\right)+\sin\left(\left(2+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\left(\left(2-\frac{1}{2}\right)x\right)+...$$

$$+\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right). \tag{2.18}$$

Termenii din membrul stâng al relaţiei (2.18) se vor reduce între ei, astfel lema este demonstrată. □

Funcţia

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(x\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)},\ n = 1, 2, ...$$

este cunoscută sub numele de *nucleul lui Dirichlet*. Ţinându-se cont de Lema 2.3.1 şi de faptul că

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx = 0,\ \text{pentru } k = 1, 2, ...,$$

funcţia aceasta are următoarea proprietate:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1,\ n = 1, 2, ... \,. \tag{2.19}$$

Nucleul lui Dirichlet este o funcţie pară, periodică de perioadă 2π. Adică

$$D_n(-x) = D_n(x) \text{ şi } D_n(x + 2\pi) = D_n(x), \text{ oricare ar fi } x \in [-\pi, \pi].$$

Cu ajutorul Lemei 2.3.1 putem determina o formă utilă pentru suma parţială de ordin n a seriei Fourier a funcţiei f definită prin relaţia (2.4).

Fie f o funcţie integrabilă pe intervalul $[-\pi, \pi]$ cu prorpietatea că $f(-\pi) = f(\pi)$ pe care o vom extinde pe $\mathbb{R}$ prin periodicitate de perioadă 2π. Ţinând cont de relaţiile (1.9), (1.12) şi (1.13), putem scrie

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(kx)\cos(kt) + \sin(kx)\sin(kt)] f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(\cos(kx)\cos(kt) + \sin(kx)\sin(kt) \big) \right] f(t)\,dt$$

Deci rezultă

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos\big(k(x - t)\big) \right] f(t)\,dt. \tag{2.20}$$

Ştiind că

$$D_n(x) = \frac{\sin\Big(x\big(n + \frac{1}{2}\big)\Big)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx),$$

egalitatea din relaţia (2.20) devine

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x - t) f(t)\,dt. \tag{2.21}$$

Ţinând cont de faptul că D_n este funcţie pară şi că atât D_n, cât şi f sunt funcţii periodice de perioadă 2π, relaţia (2.21) devine

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x - x - t) f(x + t)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x + t)\,dt.$$

Relaţia

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x+t)\,dt$$

este cunoscută sub numele de *formula lui Dirichlet pentru suma parţială de ordin n a seriilor Fourier*.

Avem

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\big[f(x+t) - f(x) + f(x)\big]\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\big[f(x+t) - f(x)\big]\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x)\,dt$$

.

Ţinând cont de relaţia (2.19), obţinem

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\big[f(x+t) - f(x)\big]\,dt. \tag{2.22}$$

Pentru a arăta că $s_n(x)$ tinde către $f(x)$ când n tinde la ∞, trebuie să demonstrăm că membrul drept al relaţiei (2.22) tinde către zero. Din păcate, este posibil ca seria Fourier a unei funcţii continue periodice să fie divergentă în anumite puncte (principiul condensării singularităţilor). Pentru a demonstra că seria Fourier converge către funcţie într-un punct dat, ar trebui să impunem ipoteze mai puternice decât continuitatea. Vom considera că funcţia satisface o condiţie mai fină în vecinătatea punctului în care se studiază convergenţa. Formularea precisă de netezime este următoarea:

Teorema 2.3.1 (Teorema de convergenţă)**.** *Fie f o funcţie de pătrat integrabilă pe intervalul $[-\pi, \pi]$ şi fie s_n suma parţială de ordin n a seriei Fourier a funcţiei f. Fie f extinsă pe axa reală prin condiţia de periodicitate $f(x+2\pi) = f(x)$. Presupunem că într-un punct $x \in \mathbb{R}$ prelungirea funcţiei satisface următoarea condiţie de tip Lipschitz:*

$$|f(x+t) - f(x)| \le C\,|t|\,,\ |t| < \delta$$

unde C şi δ sunt constante independente de x. Atunci $s_n(x)$ tinde către $f(x)$ când n tinde la ∞.

Înainte de a începe demonstraţia, să observăm o consecinţă remarcabilă a acestei teoreme. Coeficienţii Fourier a_k şi b_k sunt determinaţi de valoarea funcţiei f pe un interval de lungime 2π, totuşi convergenţa seriei Fourier rezultate într-un punct fixat x este guvernată numai de comportamentul funcţiei f într-o vecinătate arbitrară a lui x. Acest fenomen este cunoscut sub numele de *principiul de localizare al lui Riemann.*

Demonstraţie. Corolarul inegalităţii lui Bessel privind coeficienţii Fourier ai unei funcţii de pătrat integrabile g ne spune că aceştia tind către 0 când n tinde către ∞. Astfel avem:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)\,dt = 0. \tag{2.23}$$

Vom scrie relaţia (2.22) în felul următor:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\Big(x\big(n+\frac{1}{2}\big)\Big)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}[f(x+t)-f(t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_x(t)\sin\Big(t\Big(\frac{1}{2}+n\Big)\Big)\,dt,$$

unde

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x+t)-f(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Pe baza ipotezei lui f, vom avea

$$|\varphi_x(t)| = \frac{|f(x+t)-f(t)|}{2\left|sin\big(\frac{t}{2}\big)\right|} \leq \frac{C(t)}{\left|sin\big(\frac{1}{2}t\big)\right|},\ \text{pentru } |t|\leq\delta.$$

Deoarece $\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| \leq 1$, vom obţine că $|\varphi_x(t)| \leq C$, pentru $|t| \leq \delta$. Pe de altă parte, dacă $t \in [\pi,\pi]$ şi $|t| > \delta$, atunci avem

$$\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \sin\frac{|t|}{2} > \sin\frac{\delta}{2} = \sin\left|\frac{\delta}{2}\right| > 0.$$

Aşadar funcţia $\varphi_x(t)$ este de pătrat integrabilă pe intervalul $[-\pi,\pi]$. Ştiind că

$$\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)n\right)=\sin(nt)\cos\left(\frac{1}{2}t\right)+\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\cos(nt),$$

avem că

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_x(t)\left[\sin(nt)\cos\left(\frac{1}{2}t\right)+\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\cos(nt)\right]dt.$$

Rezultă

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_x(t)\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\sin(nt)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_x(t)\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\cos(nt)\Big]\,dt. \tag{2.24}$$

Deci integrala din relaţia (2.24) poate fi privită ca sumă de coeficienţi Fourier ai funcţiilor de pătrat integrabile $\varphi_x(t)\cos\left(\frac{1}{2}t\right)$ şi $\varphi_x(t)\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$. Ţinând cont de corolarul inegalităţii lui Bessel (2.23), avem că integralele din relaţia (2.24) tind către 0 când n tinde la infinit. Deci $s_n(x)$ tinde către $f(x)$, oricare ar fi x din $[-\pi,\pi]$, când n tinde la ∞, adică $\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=f(x)$, oricare ar fi $x\in[-\pi,\pi]$. $\square$

2.4 Criteriul lui Dirichlet

Definiţie 2.4.1. *Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$, o funcţie şi $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ un punct de acumulare al mulţimii D. Notăm*

$$f(x_0-0)=\lim_{x\nearrow x_0}f(x)$$

limita la stânga a funcţiei f în punctul x_0 şi

$$f(x_0+0)=\lim_{x\searrow x_0}f(x)$$

limita la dreapta a funcţiei f în punctul x_0, în ipoteza că ambele limite există.

Teorema 2.4.1 (Criteriul lui Dirichlet)**.** *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă 2π, continuă (cu excepţia eventual a unui număr finit de puncte de discontinuitate de prima speţă) şi monotonă pe porţiuni pe intervalul $[-\pi,\pi]$. Atunci* *seria Fourier asociată acestei funcţii,*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big),$$

este convergentă în toate punctele şi suma ei este:

1. $f(x)$*, în fiecare punct de continuitate* x*;*

2. $\frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$*, dacă* x *este punct de discontinuitate pentru* f*.*

Observaţie 2.4.1. *Condiţiile din Teorema 2.4.1 sunt cunoscute sub numele de condiţiile lui Dirichlet.*

Observaţie 2.4.2. *Teorema 2.4.1 are loc şi pentru funcţii de perioadă* $2L$*,* $L > 0$*.*

Capitolul 3

Divergenţa seriilor Fourier

3.1 Principul condensării singularităţilor

În paralel cu cercetările din secolul al XIX-lea menite să fundamenteze procedeele clasice de aproximare (interpolarea Lagrange, dezvoltarea în serie Fourier, formulele de cuadratură) s-au evidenţiat şi fenomene de divergenţă a acestor procedee pentru anumite funcţii, numite astăzi *funcţii singulare* sau *puncte singulare.* Apărut ca o sinteză a cercetărilor menţionate, *principiul condensării singularităţilor* precizează prin termenul de *superdensitate*, cardinalitatea şi structura topologică a mulţimiilor punctelor singulare specifice acestor procedee de aproximare.

Fie X şi Y două spaţii normate şi $\mathcal{A} \subset Y^X$ o familie de aplicaţii de la X la Y. Vrem să cercetăm structura mulţimii

$$S_{\mathcal{A}} = \big\{x \in X \mid \sup\{\|A(x)\| \mid A \in \mathcal{A}\} = \infty\big\}$$

numite *mulţimea singularităţilor lui A*. În acest scop, introducem următoarele definiţii:

Definiţie 3.1.1. *O submulţime Y a unui spaţiu topologic X se numeşte:*

- ***densă*** *în X dacă aderenţa lui Y este egală cu X.*
- ***rară*** *în X dacă are interiorul vid.*

- ***numărabilă*** *în* X *dacă* $Y \sim \mathbb{N}$, *adică dacă* Y *şi* $\mathbb{N}$ *au acelaşi cardinal.*

- ***de cateoria întâi*** *în* X *dacă există o familie numărabilă* $\{Y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *de submulţimi rare* Y_n *ale lui* X, *cu* $Y = \cup\{Y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- ***reziduală*** *în* X *dacă* Y *este complementara unei mulţimi de categoria întâi în* X.

Definiţie 3.1.2. *O submulţime* S *a unui spaţiu topologic* T *se numeşte* ***superdensă*** *în* T *dacă* S *este densă, nenumărabilă şi reziduală în* T.

Teorema 3.1.1 (Princiupiul condensării singularităţilor)**.** *Fie* X *şi* Y *două spaţii normate pe acelaşi* K *şi* $\mathcal{A} \subset (X, Y)^*$. *Dacă* X *este complet şi dacă*

$$\sup\{\|A(x)\| \mid A \in \mathcal{A}\} = \infty,$$

atunci mulţimea $S_{\mathcal{A}}$ *a singularităţilor lui* A *este superdensă în* X.

Demonstraţie. Notând

$$X_n = \cup\big\{\{x \in X \mid \|A(x)\| > n\} \mid A \in \mathcal{A}\big\},\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

observăm că $x \in S_{\mathcal{A}}$ dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $A \in \mathcal{A}$, cu $\|A(x)\| > n$, adică dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $x \in X_n$, ceea ce revine la $x \in \cap\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Rezultă

$$S_{\mathcal{A}} = \cap\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{3.2}$$

Fiecare mulţime X_n este deschisă în X. Într-adevăr, asociind fiecărei aplicaţii $A \in \mathcal{A} \subset (X, Y)^*$ funcţia $f_A : X \to \mathbb{R}$, dată de $f_A(x) = \|A\|$, observăm că f_A este continuă. Ca urmare, mulţimea

$$\{x \in X \mid \|A\| > n\} = \{x \in X \mid f_A(x) > n\} = f_A^{-1}\big((n, \infty)\big)$$

este deschisă în X ceea ce arată, potrivit lui (3.1), că şi X_n este deschisă în X.

Avem $\overline{X}_n = X$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. În caz contrar, există un $n \in \mathbb{N}$ şi există un

$x_0 \in X \setminus \overline{X}_n$. Pentru $X \setminus X_n \in \mathcal{V}(x_0)$ există o bilă $B = \big\{x \in X \mid \|x_0 - x\| \leq r\big\}$, unde $r > 0$, astfel încât

$$B \subset X \setminus X_n. \tag{3.3}$$

Să observăm că

$$\|A(x)\| \leq \frac{2n}{r}\|x\|, \text{ oricare ar fi } A \in \mathcal{A} \text{ şi oricare ar fi } x \in X. \tag{3.4}$$

Într-adevăr, când $x \neq 0$, din

$$\frac{r}{\|x\|}x + x_0 \in B$$

şi (3.3) obţinem

$$\frac{r}{\|x\|}x + x_0 \notin X_n$$

de unde, conform (3.1)

$$\Big\|A\Big(\frac{r}{\|x\|}x + x_0\Big)\Big\| \leq n, \text{ oricare ar fi } A \in \mathcal{A}.$$

Analog, întrucât $x_0 \notin X_n$, avem şi $\|A(x_0)\| \leq n$, oricare ar fi $A \in \mathcal{A}$.

Astfel obţinem relaţia (3.4) pentru orice $A \in \mathcal{A}$:

$$\frac{r}{\|x\|}\|A(x)\| = \Big\|A\Big(\frac{r}{\|x\|}x\Big)\Big\| \leq \Big\|A\Big(\frac{r}{\|x\|}x + x_0\Big)\Big\| + \|A(x_0)\| \leq 2n.$$

Inegalitatea (3.4) conduce la

$$\|A\| \leq \frac{2n}{r}, \text{ oricare ar fi } A \in \mathcal{A},$$

de unde se ajunge la contradicţia

$$\infty = \sup\{\|A\| \mid A \in \mathcal{A}\} \leq \frac{2n}{r} < \infty.$$

Cum X_n este deschisă şi densă în X, rezultă că $X \setminus X_n$ este închisă şi rară. Din

(3.2) vom avea că

$$S_{\mathcal{A}} = X \setminus \big(X \setminus \cap \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}\big) = X \setminus \cup \{X \setminus X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

este complementara unei mulţimi de categoria întâi, adică $S_{\mathcal{A}}$ este reziduală. Întrucât spaţiul metric asociat lui X este complet, rezultă conform teoremei lui Baire că X este spaţiu Baire. Astfel rezultă că intersecţia $S_{\mathcal{A}}$ din (3.2) este densă în X. Deoarece

$$\sup \big\{\|A\| \mid A \in \mathcal{A}\big\} = \infty,$$

avem $\overline{S}_{\mathcal{A}} = X \neq \{0\}$, există un $x_0 \in S_{\mathcal{A}}$, cu $x_0 \neq 0$. Aşadar avem că

$$\{\lambda x_0 \mid \lambda > 0\} \subset S_{\mathcal{A}}, \tag{3.5}$$

căci $\lambda > 0$ implică

$$\sup \big\{\|A(\lambda x_0)\| \mid A \in \mathcal{A}\big\} = \lambda \sup \big\{\|A(x_0)\| \mid A \in \mathcal{A}\big\} = \infty,$$

deci $\lambda x_0 \in S_{\mathcal{A}}$. Din (3.5) şi din faptul că $x_0 \neq 0$, deducem că

$$C = \operatorname{card}\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda > 0\} = \operatorname{card}\{\lambda x_0 \mid \lambda > 0\} \leq S_{\mathcal{A}}.$$

□

3.2 Divergenţa nemărginită a seriilor Fourier

Fie T un interval compact $[a, b]$, unde $a < b$ şi cu $E : T \times T \to K$ o funcţie continuă de două variabile. Operatorul $A : C(T) \to C(T)$ definit prin

$$A(x)(s) = \int_T E(s,t)x(t)\,dt,\ x \in C(T),\ s \in T, \tag{3.6}$$

în care spaţiul vectorial $C(T)$ este înzestrat cu norma uniformă

$$\|x\| = \sup\{|x(t)| \mid t \in T\},\ x \in C(T),$$

este liniar şi continuu, căci

$$\|A(x)\| = \sup\left\{\left|\int_T E(s,t)x(t)\,dt\right| \mid s \in T\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{\int_T |E(s,t)|\;dt \mid s \in T\right\} \cdot \|x\|, \text{ oricare ar fi } x \in C(T).$$

De aici deducem şi

$$\|A\| \leq \sup\left\{\int_T |E(s,t)|\;dt \mid s \in T\right\} \tag{3.7}$$

Operatorul liniar şi continuu A, definit prin (3.6), se numeşte *operatorul integral cu nucleu continuu E*. Vom arăta că (3.7) are loc cu egalitate. În acest scop vom utiliza următoarea lemă:

Lema 3.2.1. *Dacă funcţia $e : T \to K$ este o funcţie continuă, atunci funcţionala $x^* : C(T) \to K$, definită prin*

$$x^*(x) = \int_T e(t)x(t)\,dt,\; x \in C(T), \tag{3.8}$$

este liniară şi continuă cu norma dată de

$$\|x^*\| = \int_T |e(t)|\;dt. \tag{3.9}$$

Demonstraţie. Se verifică imediat inegalitatea analoagă cu relaţia (3.7):

$$\|x^*\| \leq \int_T |e(t)|\;dt.$$

Inegalitatea

$$\|x^*\| \geq \int_T |e(t)|\;dt,$$

deci implicit şi egalitatea (3.9), reiese din (3.8) şi din următoarele relaţii:

$$\int_T |e(t)|\;dt, = \int_T \frac{|e(t)|}{1+n\,|e(t)|}\,dt + \int_T e(t)\frac{n\overline{e(t)}}{1+n\,|e(t)|}\,dt \leq$$

$$\leq \int_T \frac{1}{n}\, dt + x^*\left(\frac{n\bar{e}}{1+n\,|e|}\right) \leq \frac{b-a}{n} + \|x^*\|, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Teorema 3.2.1. *Norma operatorului integral $A : C(T) \to C(T)$, cu nucleul continuu E, este dată de formula*

$$\|A\| = \sup\left\{ \int_T |E(s,t)|\, dt \mid s \in T \right\}.$$

Demonstraţie. Există $s_0 \in T$ cu

$$\int_T |E(s_0,t)|\, dt = \sup\left\{ \int_T |E(s,t)|\, dt \ \mid s \in T \right\}. \tag{3.10}$$

Utilizând Lema 3.2.1. pentru funcţia continuă $e : T \to K$ dată de $e(t) = E(s_0,t)$, $t \in T$, constatăm că funcţionala asociată, $x^* : C(T) \to K$, definită prin (3.8), deci prin $x^*(x) = A(x)(s_0)$, satisface, în baza lui (3.10) şi (3.9),

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| \ \mid x \in C(T), \|x\| \leq 1\} \geq \sup\{|x^*(x)| \ \mid x \in C(T),\ \|x\| \leq 1\ \} =$$

$$= \|x^*\| = \int_T |e(t)|\, dt = \sup\left\{ \int_T |E(s,t)|\, dt \ \mid s \in T \right\}.$$

$\square$

Fie sistemul trigonometric $E = \{e_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ al funcţiilor $e_k : [0,1] \to \mathbb{C}$, date de

$$e_k(t) = e^{2\pi i k t},\ t \in [0,1],\ \text{unde } i^2 = -1,$$

precum şi seria Fourier

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k,$$

asociată unui element x al spaţiului Hilbert complex $L^2[0,1]$, după sistemul ortonormal şi complet E în $L^2[0,1]$, unde

$$c_k = (x|e_k) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\, dt,\ x,\ y \in L^2[0,1]$$

sunt coeficienţii Fourier.

Orice $x \in L^2[0,1]$ se dezvoltă în serie Fourier dupe E, adică

$$\int_0^1 \left| x(s) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k(s) \right|^2 ds \to 0, \text{ când n tinde la infinit.} \tag{3.11}$$

În fiecare punct din $[0,1]$ şi pentru fiecare funcţie dintr-o clasă „foarte numeroasă" de funcţii continue, seria Fourier este nemărginit divergentă.

Fie $s \in [0,1]$. Asociem fiecărei funcţii x din spaţiul Banach complex $C[0,1]$ şirul $(T_{n,s}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor parţiale ale seriei Fourier calculate în punctul s

$$T_{n,s}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k(s).$$

Teorema 3.2.2 (W. Rudin). *Pentru fiecare $s \in [0,1]$, mulţimea funcţiilor de divergenţă nemărginită:*

$$\Big\{ x \in C[0,1] \mid \sup\{|T_{n,s}(x)| \mid n \in \mathbb{N}\} = \infty \Big\}$$

este superdensă în $C[0,1]$.

Demonstraţie. Avem

$$T_{n,s}(x) = \sum_{k=-n}^{n} (x|e_k)e_k(s) = \sum_{k=-n}^{n} e_k(s) \int_0^1 x(t)\overline{e_k(t)}\, dt = \tag{3.12}$$

$$\sum_{k=-n}^{n} \int_0^1 x(t) e^{2\pi iks} \cdot e^{-2\pi ikt} = \int_0^1 D_n(s-t)x(t)\, dt,$$

unde $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este nucleul lui Dirichlet, dat de

$$D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ik\theta},\ \theta \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Introducem funcţionalele liniare şi continue $x^*_{n,s} : C[0,1] \to \mathbb{C}$, prin formula

$$x^*_{n,s} = T_{n,s}(x),\ x \in C[0,1].$$

Din relaţia (12) şi din Lema (3.2.1), cu $e(t) = D_n(s-t),\ t \in [0,1]$, deducem

$$\|x^*_{n,s}\| = \int_0^1 |D_n(s-t)|\ dt = \int_0^1 |D_n(\theta)|\ d\theta. \tag{3.14}$$

Ţinând cont de faptul că D_n este periodică de perioadă 1 şi utilizând schimbarea de variabilă $\theta = s - t$ obţinem

$$\int_0^1 |D_n(s-t)|\ dt = -\int_s^{s-1} |D_n(\theta)|\ d\theta = \int_{s-1}^s |D_n(\theta)|\ d\theta =$$

$$= \int_{s-1}^0 |D_n(\theta)|\ d\theta + \int_0^1 |D_n(\theta)|\ d\theta + \int_1^s |D_n(\theta)|\ d\theta$$

Utilizând acum schimbarea de variabilă $\alpha = \theta - 1$, obţinem

$$\int_0^1 |D_n(s-t)|\ dt = -\int_0^{s-1} |D_n(\theta)|\ d\theta + \int_0^1 |D_n(\theta)|\ d\theta + \int_0^{s-1} |D_n(\alpha+1)|\ d\theta$$

Rezultă

$$\int_0^1 |D_n(s-t)|\ dt = \int_0^1 |D_n(\theta)|\ d\theta.$$

Înmulţind relaţia (3.13) cu $e^{2\pi i \frac{\theta}{2}}$, apoi cu $-e^{-2\pi i \frac{\theta}{2}}$ şi adunând rezultatele, vom obţine

$$\left(e^{2\pi i \frac{\theta}{2}} - e^{-2\pi i \frac{\theta}{2}}\right) D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \left(e^{2\pi i\theta(k+\frac{1}{2})} - e^{2\pi i\theta(k-\frac{1}{2})}\right)$$

Rezultă

$$\left(e^{2\pi i \frac{\theta}{2}} - e^{-2\pi i \frac{\theta}{2}}\right) D_n(\theta) = \left(e^{2\pi i\theta(n+\frac{1}{2})} - e^{2\pi i\theta(n-\frac{1}{2})}\right)$$

Aplicând următoarea interpretare a funcţiei sinus furnizată de formula lui Euler:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ex}}{2i}, \text{ pentru orice număr real } x,$$

obţinem

$$D_n(\theta) = \frac{\sin\Big(2\pi\theta(n+\frac{1}{2})\Big)}{\sin(\pi\theta)}, \text{ când } \theta \in \mathbb{Z}, \tag{3.15}$$

şi

$$D_n(\theta) = 2n+1, \text{ când } \theta \notin \mathbb{Z}. \tag{3.16}$$

Din relaţiile (3.14), (3.15) şi (3.16) şi din faptul că

$$|\sin(\alpha)| \leq |\alpha|\,, \text{ oricare ar fi } \alpha \in \mathbb{R},$$

deducem

$$\|x^*_{n,s}\| = \int_0^1 \frac{\left|\sin\Big(2\pi\theta(n+\frac{1}{2})\Big)\right|}{|\sin(\pi\theta)|}\,d\theta \geq \int_0^1 \frac{\left|\sin\Big(2\pi\theta(n+\frac{1}{2})\Big)\right|}{\pi\theta}\,d\theta$$

Efectuând schimbarea de variabilă $\varphi = 2\pi\theta(n+\frac{1}{2})$, avem

$$\int_0^1 \frac{\left|\sin\Big(2\pi\theta(n+\frac{1}{2})\Big)\right|}{\pi\theta}\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi(n+\frac{1}{2})} \frac{|\sin(\varphi)|}{\varphi},$$

astfel obţinem

$$\|x^*_{n,s}\| \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi(n+\frac{1}{2})} \frac{|\sin(\varphi)|}{\varphi} > \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{|\sin(\varphi)|}{2k\pi}\,d\varphi.$$

Deci avem că

$$\|x^*_{n,s}\| > \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{2k\pi} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

ceea ce conduce la

$$\sup\Big\{\|x^*_{n,s}\| \mid n \in \mathbb{N}\Big\} = \infty.$$

Aplicând Teorema 3.1.1 spaţiilor Banach $X = Y = C[0,1]$ şi familiei $\mathcal{A} = \{x^*_{n,s} \mid n \in \mathbb{N}\}$ de funcţionale liniare şi continue $x^*_{n,s}$, rezultă că mulţimea $S_{\mathcal{A}}$ a singularităţilor lui $\mathcal{A}$, care coincide cu mulţimea din enunţ:

$$\Big\{x \in C[0,1] \mid \sup\{|T_{n,s}(x)| \mid n \in \mathbb{N}\} = \infty\Big\} =$$

$$= \Big\{x \in C[0,1] \mid \sup\{\big|T^*_{n,s}(x)\big| \mid n \in \mathbb{N}\} = \infty\Big\} = S_{\mathcal{A}}$$

este superdensă în $C[0,1]$. $\square$

Capitolul 4

Aplicaţii şi soluţii

Aplicaţia 4.0.1

Dezvoltaţi in serie Fourier funcţia $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$, ştiind că f este periodică de perioadă 2π.

Soluţie:
Avem că $2L = 2\pi$, de unde rezultă că $L = \pi$.
Cum $x \in (0, 2\pi)$, alegem c=0. Astfel vom avea

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\, dx = \frac{8\pi^2}{3}.$$

În continuare vom determina coeficienţii Fourier ai funcţiei f:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$$

Integrala se va rezolva prin părţi, astfel vom obţine

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{x^2\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right) - 2x\left(\frac{-\cos(nx)}{n^2}\right) + 2\left(\frac{-\sin(nx)}{n^3}\right)\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2},$$

pentru $n \neq 0$.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin(nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{x^2\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right) - 2x\left(\frac{-\sin(nx)}{n^2}\right) + 2\left(\frac{\cos(nx)}{n^3}\right)\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}$$

Astfel avem

$$f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right),$$

oricare ar fi $x \in (0, 2\pi)$.

Aplicaţia 4.0.2

Demonstraţi că

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soluţie:

Pentru $x = 0$ avem că seria Fourier de la Aplicaţia (4.0.1) devine

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}. \tag{4.1}$$

Ţinând cont de condiţiile lui Dirichlet şi de faptul ca punctul $x_0 = 0$ este punct de discontinuitate pentru funcţia f, atunci avem că seria (4.1) converge către $\frac{0+4\pi^2}{2} = 2\pi^2$. Deci

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

De unde rezultă

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aplicaţia 4.0.3

Dezvoltaţi in serie Fourier numai după cosinusuri funcţia $f(x) = \sin(x)$, pentru $0 < x < \pi$.

Soluţie:
O serie Fourier conţine numai cosinusuri daca funcţia f este pară. Prin urmare, vom extinde definirea funcţiei f pentru ca aceasta să devină o funcţie pară. Cu această prelungire, funcţia va fi definită pe un interval de lungime 2π, periodică de perioadă 2π. Astfel avem $2L = 2\pi$, de unde rezultă $L = \pi$.

Avem că $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\big(-\cos(x)\big)\Big|_0^\pi = \frac{4}{\pi}$$

şi

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 2\pi\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,dx.$$

Folosind formula

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2},\ \text{pentru orice } x \text{ şi } y \text{ din } \mathbb{R},$$

obţinem

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big[\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\Big]\,dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos\big((n+1)x\big)}{n+1}+\frac{\cos\big((n-1)x\big)}{n-1}\right]\Bigg|_0^\pi = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos\big((n+1)\pi\big)}{n+1}+\frac{\cos\big((n-1)\pi\big)-1}{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Ţinând cont de formulele

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y),$$

pentru orice x şi y din $\mathbb{R}$, obţinem

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1+\cos(n\pi)}{n+1} + \frac{\cos(n\pi)+1}{n-1}\right] = \frac{-2\Big(1+\cos(n\pi)\Big)}{(n^2-1)\pi}, \text{ pentru } n \neq 1.$$

Pentru $n = 1$, avem

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2(x)}{2}\Big|_0^\pi = 0.$$

Deci

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Big(1+\cos(n\pi)\Big)}{n^2-1}\cos(nx).$$

Astfel dezvoltarea lui $f(x) = \sin(x)$ numai în cosinusuri este

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(2x)}{2^2-1} + \frac{\cos(4x)}{4^2-1} + \frac{\cos(6x)}{6^2-1} + ...\right),$$

pentru $0 < x < \pi$.

Aplicaţia 4.0.4

Dezvoltaţi în serie Fourier funcţia $f(x) = x$, pentru $0 < x < 2$,
$a)$ numai după sinusuri;
$b)$ numai după cosinusuri.

Soluţie:
$a)$ Extindem definirea funcţiei f prin periodicitate de perioadă 4 la o funcţie impară. Aceasta este uneori numită *prelungirea impară a funcţiei f*.

Deci avem că $2L = 4$, de unde rezultă că $L = 2$. Deoarece f este o funcţie impară atunci avem că $a_n = 0$ şi

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_0^2 x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= \left\{ -\frac{2x}{n\pi}\left(\frac{\cos(n\pi x)}{2}\right) - \left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\right)\left(\frac{\sin(n\pi x)}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2 = -\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi).$$

Deci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-4}{n\pi}\right)\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Astfel dezvoltarea lui $f(x) = x$ numai în sinusuri este

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - ...\right],$$

pentru $0 < x < 2$.

b) Extindem definirea funcţiei f prin periodicitate de perioadă 4 la o funcţie pară. Aceasta este uneori numită *prelungirea pară a funcţiei* f.

Deci avem că $2L = 4$, de unde rezultă că $L = 2$. Deoarece f este o funcţie pară atunci avem că $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx = 2$$

şi

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx.$$

Deci

$$a_n = \left\{\frac{2x}{n\pi}\left(\frac{\sin(n\pi x)}{2}\right) - \left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\right)\left(\frac{\cos(n\pi x)}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2 = -\frac{4}{n\pi}\Big[\cos(n\pi) - 1\Big],$$

pentru $n \neq 0$.
Deci

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2 \pi^2} \right) \Big[\cos(n\pi) - 1 \Big] \cos \left(\frac{n\pi x}{2} \right).$$

Astfel dezvoltarea lui $f(x) = x$ numai în cosinusuri este

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left[\cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) + \frac{1}{3^2} \cos \left(\frac{3\pi x}{2} \right) + \frac{1}{5^2} \cos \left(\frac{5\pi x}{2} \right) + ... \right],$$

pentru $0 < x < 2$.

Observaţie 4.0.1. *Se poate observa că seriile de la a) şi b) reprezintă dezvoltarea lui $f(x)$ pentru $0 < x < 2$, dar cea de-a doua converge mai rapid.*

Aplicaţia 4.0.5

a) Scrieţi egalitatea lui Parseval corespunzătoare seriei Fourier de la Aplicaţia (4.0.4) *b*).

b) Determinaţi suma S a seriei

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + ... + \frac{1}{n^4} + ... \, .$$

Soluţie:
a) Se ştie că $L = 2,\ a_0 = 2,\ a_n = -\frac{4}{n\pi} \Big[\cos(n\pi) - 1 \Big],$ pentru $n \neq 0$ şi $b_n = 0$.
Deci egalitatea lui Parseval,

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

devine

$$\frac{1}{2} \int_{-2}^{2} x^2 \, dx = \frac{4}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{16}{n^4 \pi^4} \Big[\cos(n\pi) - 1 \Big]^2 + 0 \right).$$

De aici rezultă

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{64}{\pi^4} \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + ... \right).$$

Astfel avem
$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+...=\frac{\pi^4}{96}.$$

b)
$$S=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+...=\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+...\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+...\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+...\right)+\frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+...\right)$$
Conform punctului *a*) avem
$$S=\frac{\pi^4}{96}+\frac{S}{16},$$
de unde rezultă
$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{n^4}+...=\frac{\pi^4}{96}.$$

Aplicaţia 4.0.6

Demonstraţi că pentru $0\leq x\leq \pi$,
$$a)\; x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\cos(2x)}{1^2}+\frac{\cos(4x)}{2^2}+\frac{\cos(6x)}{3^2}+...\right)$$
$$b)\; x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin(x)}{1^3}+\frac{\sin(3x)}{3^3}+\frac{\sin(5x)}{5^3}+...\right)$$

Soluţie:
a) Vom dezvolta funcţia $f(x)=x(\pi-x)$, pentru $x\in[0,\pi]$ în serie Fourier numai după cosinusuri. În acest scop, vom extinde definirea funcţiei f la o funcţie pară pe intervalul $[-\pi,\pi]$ prin periodicitate de perioadă 2π. Astfel avem $b_n=0$,
$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\,dx=\frac{\pi^2}{3},$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\cos(nx)\,dx=$$

$$= 2\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx.$$

Integrând prin părţi ambele integrale, vom obţine

$$a_n = \Big[\frac{2x}{n}\sin(nx) - \frac{2}{n^2}\cos(nx)\Big]\Big|_0^\pi + \Big[-\frac{2x^2}{n\pi}\sin(nx) - \frac{4x}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{4}{n^3\pi}\sin(nx)\Big]\Big|_0^\pi$$

Deci

$$a_n = -\frac{2}{n^2}\Big[\cos(n\pi) + 1\Big].$$

Astfel avem

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\Big[\cos(n\pi) + 1\Big]\cos(nx),$$

de unde rezultă

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}.$$

pentru $x \in [0, \pi]$.

b) Acum vom dezvolta funcţia $f(x) = x(\pi - x)$, pentru $x \in [0, \pi]$ în serie Fourier numai după sinusuri. În acest scop, vom extinde definirea funcţiei f la o funcţie impară pe intervalul $[-\pi, \pi]$ prin periodicitate de perioadă 2π. Astfel avem $a_0 = a_n = 0$ şi

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin(nx)\,dx =$$

$$= 2\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin(nx)\,dx.$$

Vom integra prin părţi şi vom obţine

$$b_n = \Big[-\frac{2x}{n}\cos(nx) + \frac{2}{n^2}\sin(nx)\Big]\Big|_0^\pi + \Big[+\frac{2x^2}{n\pi}\cos(nx) - \frac{4x}{n^2\pi}\sin(nx) - \frac{4}{n^3\pi}\cos(nx)\Big]\Big|_0^\pi$$

Deci

$$b_n = -\frac{4}{n^3\pi}\Big[\cos(n\pi) - 1\Big].$$

Astfel avem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n^3\pi}\Big[\cos(n\pi) - 1\Big]\sin(nx),$$

de unde rezultă

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\big((2n-1)x\big)}{n^3}.$$

pentru $x \in [0, \pi]$.

Aplicaţia 4.0.7

Folosind rezultatele din Aplicaţia 4.0.6, determinaţi:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$$

Soluţie:

$a)$ Pentru $x = 0$, din Aplicaţia 4.0.6 a), avem

$$0 = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...\right)$$

De unde rezultă

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$b)$ Pentru $x = \frac{\pi}{2}$, din Aplicaţia 4.0.6 a), avem

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{n^2}$$

Deci

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

de unde rezultă
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

c) Pentru $x=\frac{\pi}{2}$, din Aplicaţia 4.0.6 a) şi b) avem
$$\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{n^2}$$
şi
$$\frac{\pi^2}{4}=\frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^2}-...\right)$$
Ţinând cont de
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},$$
avem că
$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^2}-...\right)=\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{12}.$$
Deci
$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^2}{4},$$
de unde rezultă
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

Aplicaţie cu referire la conducţia termică

Determinaţi temperatura unei bare, ştiind că valoarea problemei pe frontieră este
$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<3,\ t>0,$$
$u(0,t)=u(3,t)=0$, temperatura iniţială este de $u(x,0)=25°C$ şi $|u(x,t)|<M$.

Soluţie:

Fie $u = XT$, atunci avem $XT' = 2X''T$ de unde rezultă

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{2T}. \tag{4.2}$$

Fiecare raport din relaţia (4.2) reprezintă o constantă. Observăm că acea constantă nu o putem alege $+\lambda^2$ pentru că astfel condiţia pe frontieră pentru valorile reale ale lui λ nu va fi satisfăcută. Prin urmare, constanta pe care o vom alege va fi $-\lambda^2$ şi astfel obţinem

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

şi

$$T' + 2\lambda^2 T = 0,$$

cu soluţiile

$$X = A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)$$

şi

$$T = c_1 e^{-2\lambda^2 t}.$$

Aşadar, o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale este

$$u(x,t) = XT = c_1 e^{-2\lambda^2 t}\big(A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)\big) =$$

$$= e^{-2\lambda^2 t}\big(A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)\big),$$

unde A şi B sunt constante.
Ştiind că $u(0,t) = 0$, obţinem

$$e^{-2\lambda^2 t} A = 0.$$

De unde rezultă că $A = 0$, deci obţinem

$$u(x,t) = B e^{-2\lambda^2 t} \sin(\lambda x)$$

Ştiind că $u(3,t) = 0$, obţinem

$$B e^{-2\lambda^2 t} \sin(\lambda x) = 0.$$

Dacă $B = 0$, atunci soluţia ar fi cea nulă, deci rezultă că $\sin(\lambda x)$ trebuie să fie 0. Astfel avem că $\lambda = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Deci o soluţie este

$$u(x,t) = Be^{\frac{-2k^2\pi^2 t}{9}} \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right).$$

Pentru a satisface condiţia iniţială $u(x, 0) = 25$, trebuie să suprapunem un număr infinit de soluţii (principiul superpoziţiei), adică

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{\frac{-2k^2\pi^2 t}{9}} \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right).$$

Conform ipotezei avem

$$u(x,0) = 25 = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right),\ 0 < x < 3.$$

Vom folosi dezvoltarea în serie Fourier a numărului 25. Considerăm funcţia $f(x) = 25$, pentru orice $x \in (0, 3)$ pe care vrem să o dezvoltăm în serie Fourier numai după sinusuri. Astfel îi vom extinde definirea la o funcţie impară pe intervalul (-3, 3), prin periodicitate de perioadă 6. Deci avem $L = 3$, iar

$$B_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{3}\int_0^3 25\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx = \frac{50\big(1 - cos(k\pi)\big)}{k\pi}.$$

Deci

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{50\big(1 - cos(k\pi)\big)}{k\pi} e^{\frac{-2k^2\pi^2 t}{9}} \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right),$$

de unde rezultă

$$u(x,t) = \frac{100}{\pi}\Big[e^{\frac{-2\pi^2 t}{9}} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \frac{1}{3}e^{-2\pi^2 t}\sin(\pi x) + ...\Big].$$

Observaţie 4.0.2. *Această problemă ilustrează importanţa seriilor Fourier în rezolvarea problemelor de determinare a valorilor pe frontieră.*

Ecuaţia lui Laplace

O placă pătrată cu latura de o unitate are feţele izolate, 3 dintre laturile sale ţinute la o temperatură de $0°C$, iar cea de-a patra latură ţinută la temperatura u_1. Determinaţi starea de echilibru a temperaturii în orice punct de pe placă.

Soluţie:

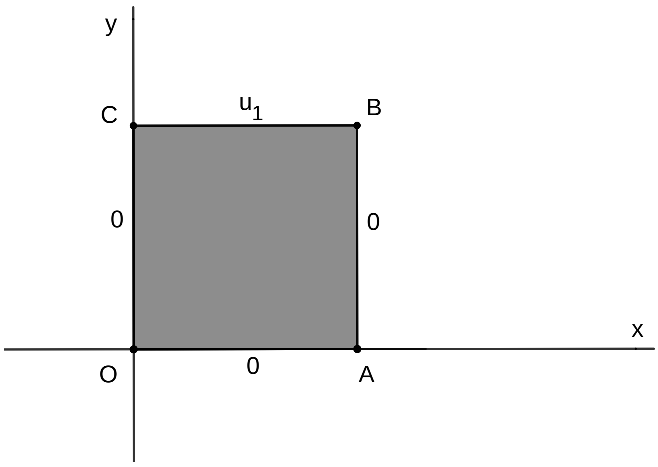

Figura 4.1

Alegem ca latura care are temperatura u_1 să fie cea în care $y = 1$, aşa cum se poate vedea în Figura 4.1. Deoarece starea de echilibru u nu depinde de timp, vom avea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Ecuaţia lui Laplace în spaţiul bidimensional este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Condiţiile de pe frontieraă sunt următoarele:

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0, \ u(x, 1) = u_1 \text{ şi } |u(x, y)| < M.$$

Pentru a rezolva această problemă, vom considera $u = XY$ şi vom obţine $X''Y +$

$XY'' = 0$, de unde rezultă
$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}. \tag{4.3}$$
Fiecare raport din relaţia (4.3) reprezintă o constantă, pe care o vom nota cu $-\lambda^2$. Astfel avem
$$X'' + \lambda^2 X = 0$$
şi
$$Y'' - \lambda^2 Y = 0,$$
cu soluţiile
$$X = a_1 \cos(\lambda x) + b_1 \sin(\lambda x)$$
şi
$$Y = a_2 \cosh(\lambda y) + b_2 \sinh(\lambda y).$$
Deci o posibilă soluţie este
$$u(x,y) = \big(a_1 \cos(\lambda x) + b_1 \sin(\lambda x)\big) \cdot \big(a_2 \cosh(\lambda y) + b_2 \sinh(\lambda y)\big).$$
Din $u(0,y) = 0$ rezultă $a_1 = 0$, iar din $u(x,0) = 0$ rezultă $a_2 = 0$. Deci
$$u(x,y) = b_1 \sin(\lambda x) \cdot b_2 \sinh(\lambda y).$$
Din $u(1,y) = 0$, rezultă $\sin(\lambda) = 0$, deci $\lambda = k\pi$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. Aşadar avem
$$u(x,y) = b_1 \sin(k\pi x) \cdot b_2 \sinh(k\pi y) = B \sin(k\pi x) \cdot \sinh(k\pi y).$$
unde B este o constantă.
Utilizând principiul superpoziţiei pentru a satisface ultima condiţie, avem
$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\pi x) \cdot \sinh(k\pi y), \tag{4.4}$$

apoi din $u(x,1) = u_1$, obţinem

$$u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\pi x)\sinh(k\pi).$$

Mai departe vom folosi dezvoltarea în serie Fourier pentru a determina coeficienţii B_k. Considerăm funcţia $f(x) = u_1$ pentru $0 < x < 1$ pe care o vom dezvolta în serie Fourier numai după sinusuri. Astfel vom extinde definirea lui f la o funcţie impară pe intervalul (-1, 1), prin periodicitate de perioadă 2. Deci avem $L = 1$, iar

$$B_k \sinh(k\pi) = 2\int_0^1 u_1 \sin k\pi x\, dx = \frac{2u_1\big(1 - cos(\pi x)\big)}{k\pi},$$

de unde rezultă

$$B_k = \frac{2u_1\big(1 - cos(\pi x)\big)}{k\pi \sinh(k\pi)}. \tag{4.5}$$

Din relaţiile (4.4) şi (4.5), obţinem

$$u(x,y) = \frac{2u_1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2u_1\big(1 - cos(\pi x)\big)}{k\sinh(k\pi)} \sin(k\pi x)\cdot\sinh(k\pi y).$$

Observaţie 4.0.3. *Aceasta este o problema Dirichlet deoarece am rezolvat ecuaţia lui Laplace $\nabla^2 u = 0$, pentru u în interiorul regiunii R considerate, în cazul în care u este specificat a fi pe frontiera regiunii R.*

Aplicaţie la coarda vibrantă

O coardă de lungime L este întinsă între punctele $(0,0)$ şi $(L,0)$ de pe axa Ox. La momentul $t = 0$, are o formă dată de $f(x)$, pentru $0 < x < L$, iar în rest este lăsată liberă. Determinaţi deplasarea coardei în orice moment ulterior.

Soluţie:

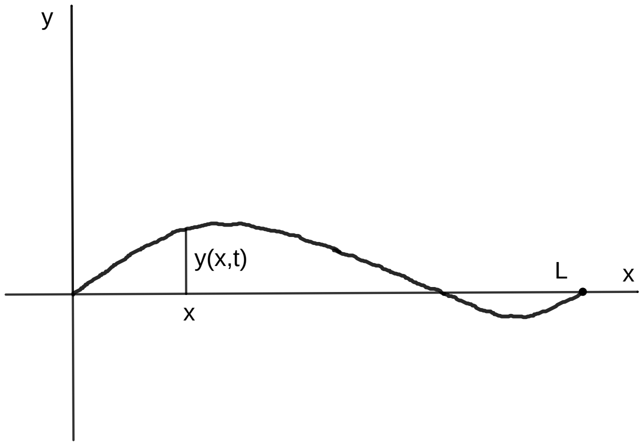

Figura 4.2

Ecuaţia coardei vibrante este

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ 0 < x < L,\ t > 0,$$

unde $y(x,t)$ este deplasarea coardei faţă de axa Ox la momentul t, după cum se poate vedea în Figura 4.2.
Capetele coardei se află în puntele fixe $x = 0$ şi $x = L$ de pe axa Ox, deci

$$y(0,t) = y(L,t) = 0,\ t > 0.$$

Viteza iniţială a coardei este zero,

$$y_t(x,0) = 0,\ 0 < x < L.$$

Pentru a rezolva această problemă, considerăm $y = XT$. Atunci avem $XT'' = a^2X''T$, de unde rezultă

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}. \tag{4.6}$$

Fiecare raport din relaţia (4.4) reprezintă o constantă, pe care o vom nota cu $-\lambda^2$. Astfel avem

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

şi

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$$

de unde rezultă soluţiile

$$X = A_1 \sin(\lambda x) + B_1 \cos(\lambda x)$$

şi

$$T = A_2 \sin(\lambda a t) + B_2 \sin(\lambda a t).$$

Astfel o posibiliă soluţie este dată de

$$y(x,t) = \big[A_1 \sin(\lambda x) + B_1 \cos(\lambda x)\big] \cdot \big[A_2 \sin(\lambda a t) + B_2 \sin(\lambda a t)\big]$$

Din $y(0,t) = 0$, rezultă $B_1 = 0$ şi

$$y(x,t) = A_1 \sin(\lambda x) \cdot \big[A_2 \sin(\lambda a t) + B_2 \sin(\lambda a t)\big] = \sin(\lambda x)\big[A \sin(\lambda a t) + B \sin(\lambda a t)\big]$$

şi

$$y_t(x,yt) = \sin(\lambda x)\big[A\lambda a \cos(\lambda a t) - B\lambda a \sin(\lambda a t)\big],$$

unde A, B sunt constante.
Din $y(L,t) = 0$, avem

$$y(L,t) = \sin(\lambda L)\big[A \sin(\lambda a t) + B \sin(\lambda a t)\big] = 0,$$

de unde rezultă $\sin(\lambda L) = 0$, pentru că cel de-al doilea factor nu poate fi zero, deci $\lambda = \frac{k\pi}{L}$, $k \in \mathbb{Z}$. Din $y_t(x,0) = 0$, rezultă

$$A\lambda a \sin(\lambda x) = 0.$$

Deci $A = 0$, pentru că factorul cu sinus nu poate fi 0. Astfel avem

$$y(x,t) = B \sin\Big(\frac{k\pi x}{L}\Big) \cos\Big(\frac{k\pi a t}{L}\Big).$$

Pentru a satisface condiţia $y(x,0) = f(x)$, este necesar să apelăm la principiul superpoziţiei, deci

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi at}{L}\right).$$

Din condiţia $y(x,0) = f(x)$, obţinem

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Ţinând cont de coeficienţii dezvoltării în serie Fourier a funcţiei $f(x)$, pentru $x \in (0,L)$, obţinem

$$B_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx.$$

Astfel ajungem la soluţia

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi at}{L}\right).$$

Bibliografie

[1] FIHTENHOLŢ G.M., *Curs de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică, Bucureşti 1965.

[2] MUNTEAN I. *Analiză funcţională*, Cluj-Napoca, 1993.

[3] MURRAY R. SPIEGEL, *Theory and problems of Fourier Analysis with applications to Boundary value problems*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company.

[4] PETER L. DUREN, *Invitation to Classical Analysis*, Volumul 17 din *Pure and applied undergraduate texts, The Sally series*, Editura American Mathematical Society, 2012.

[5] SOLOMON M., MIRON N., *Analiză matematică, volumul II*, Editura Didactică şi Pedagogică.

[6] WREDE R., MURRAY R. SPIEGEL, *Advenced Calculus*, a treia ediţie, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Companies.

[7] *civile.utcb.ro/cmat/cursrt/ec1.pdf*.

[8] *www.utgjiu.ro/math/miovanov/book/ms_curs/cap4.pdf*.

[9] *https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series*.

[10] *https://ro.wikipedia.org/wiki/Serie_Fourier*.