Unidad 3: Solución aproximada de ecuaciones de una variable

Carolina Tauro, Estefanía De Elia, Germán Maglione

Programación y métodos numéricos - MAIE

Mayo de 2022

Método de Newton-Raphson (N-R)

Si contamos con información extra acerca de la función en cuestión, por ejemplo si sabemos que f, f' y f'' son continuas *cerca* de una raiz p, entonces podemos usar esta información para construir algoritmos que converjan más rápidamente a la raiz que el método de Bisección. El Método de Newton-Raphon es uno de los más conocidos y usados para encontrar raices, pero requiere tener más conocimiento de la función f.

- Supongamos f, f' y f'' son continuas *cerca* de una raiz p.
- Sea p_0 una aproximación inicial a la raiz p que se encuentra *cerca* de ella.
- Consideremos el punto $(p_0, f(p_0))$ y tracemos la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en dicho punto (la recta L).
- Sea $(p_1, 0)$ el punto de corte de dicha recta con el eje x.
- Puedo escribir la pendiente de la recta L de dos formas distintas, de tal forma que queden relacionados los puntos p_0 y p_1.
- La nueva aproximación a la raiz es p_1

$$m = \frac{0 - f(p_0)}{p_1 - p_0} \qquad (1) \qquad\qquad m = f'(p_0) \qquad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

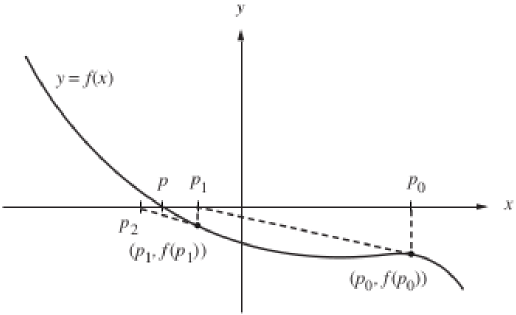


Figure 1: Método de Newton-Raphson.

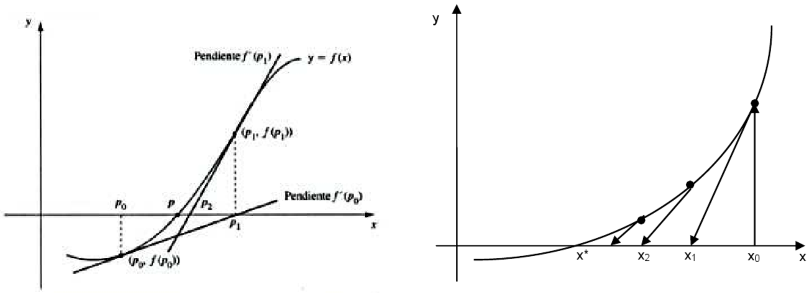


Figure 2: Método de Newton-Raphson.

Este proceso se repite para generar la suceción $\{p_k\} = p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$ que se aproxima al valor de la raiz p.

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)}$$

$$p_3 = p_2 - \frac{f(p_2)}{f'(p_2)}$$

Teorema de N-R

Theorem (Teorema de Newton-Raphson)

Supongamos que la función $f \in C^2[a,b]$ y que existe un número $p \in [a,b]$ tal que $f(p) = 0$. Si $f'(p) \neq 0$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que la suceción $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida por la iteración

$$p_k = g(p_{k-1}) = p_{k-1} - \frac{f(p_{k-1})}{f'(p_{k-1})}, k = 1, 2, \dots \tag{3}$$

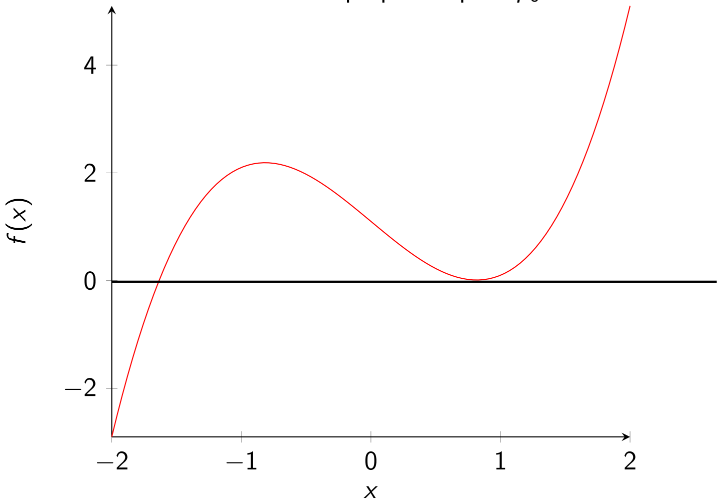
convergerá a p para una aproximación inicial $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

Observar: la función $g(x)$ se llama **función de iteración de Newton-Raphson**:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{4}$$

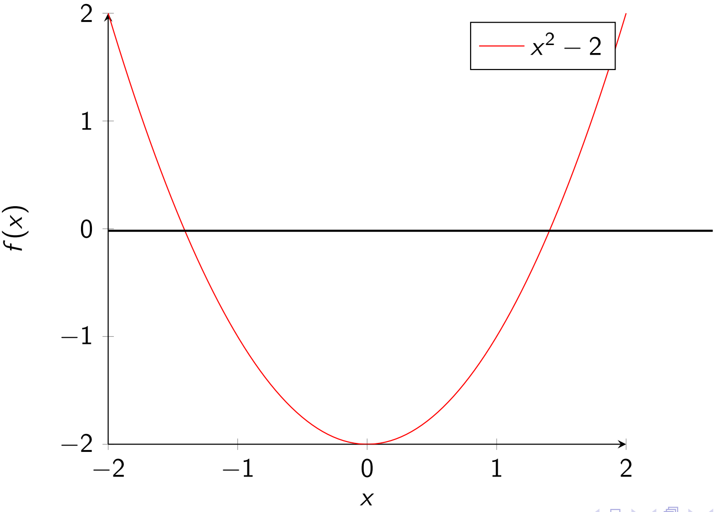
Elección del p_0

Ejercicio: Qué valor de p_0 elegirías para llegar a cada una de las raices de esta función? Cuáles son valores inapropiados para p_0?



Ejemplo

Ejercicio: Usar el método de Newton para encontrar una aproximación para el valor de $\sqrt{A}$



Método de N-R: Pros & Cons

Pros

Converge más rápidamente
Permite encontrar raices múltiples

Cons

Depende del conocimiento de la derivada.

Errores

Podemos considerar dos parámetros de error:

- El error en el eje y está dado por: $Error_y = |f(r_{aprox}) - f(r)| = |f(r_{aprox}) - 0|$
- El error en el eje x está dado por: $Error_x = |r - r_{aprox}| \sim |r_{n+1} - r_n|$

Observar: la diferencia entre dos términos consecutivos puede ser pequeña pero aun así estar lejos de la raíz, por lo que conviene combinar los dos criterios de error.

Bisección: $Error_x = |r - c| \leq |\frac{b_n - a_n}{2}| = |\frac{b_0 - a_0}{2^n}|$

Orden de la convergencia

Supongamos que la suceción $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a la raiz p entonces definimos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p - p_{n+1}|}{|p - p_n|^R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|E_{n+1}|}{|E_n|^R} = A \tag{5}$$

con $A \neq 0$ y $R > 0$.
El orden de la convergencia está dado por el valor de R.

- Si $R = 1$ entonces la convergencia es lineal.
- Si $R = 2$ entonces la convergencia es cuadrática.

Observar que el método de bisección converge linealmente y el de N-R lo hace en forma cuadrática.

Bisección: $\frac{E_{n+1}}{E_n} = |\frac{b_0 - a_0/2^{n+1}}{b_0 - a_0/2^n}| = \frac{2^n}{2^{n+1}} = 1/2$
Por lo que $E_{n+1} = 1/2E_n$ entonces converge linealmente.

Método de la Secante

Surge como una variación del método de Newton-Raphson, en lugar de tomar la tangente se toma la secante. De manera que la derivada se aproxima por una diferencia dividida.

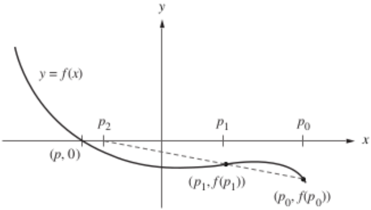


Figure 3: Método de la secante.

Solución suma recursiva

# paso	i=i+1	x_i	Suma=Suma+x_i
1er	i=0+1=1	x_1	suma=0+x_1=x_1
2do	i=1+1=2	x_2	suma=$x_1 + x_2$
3er	i=2+1=3	x_3	suma=$x_1 + x_2 + x_3$
4to	i=3+1=4	x_4	suma=$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
N-esimo	i=(N-1)+1=N	x_N	suma=$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_N$