Funciones Originales

$\dot{x} = 10(y-x)$ ①

$\dot{y} = 28x - y - x.z$ ②

$\dot{z} = x.y - \frac{8}{3}z$ ③

De las ecuaciones elijo hacer todas las variables respecto a "y", ya que "y" aparece en todas las ecuaciones.

Pude haber elegido a "x", pero elegí "y".

A partir de ①

$10(y-x) = 0$

$y - x = 0$

$y = x$

$x = y$ ④

A partir de ②

$28x - y - x.z = 0$ ⑤ } La dejé como está.

A partir de ③

$x.y - \frac{8}{3}z = 0$

$xy = \frac{8}{3}z$

$\frac{3}{8}xy = z$

$z = \frac{3}{8}xy$ ⑥

Tomamos (6) y sustituimos por (4)

$$Z = \frac{3}{8} x \cdot y$$

$$Z = \frac{3}{8} y \cdot y$$

$$Z = \frac{3}{8} y^2 \quad (7)$$

Tomamos (5), y sustituimos por (4) y (7)

$$28x - y - x \cdot z = 0$$

$$28x - y - y \cdot z = 0$$

$$28x - y - y \cdot \frac{3}{8} x \cdot y = 0$$

$$28y - y - y \cdot \frac{3}{8} y \cdot y = 0$$

$$27y - \frac{3}{8} y^3 = 0$$

$$-\frac{3}{8} y^3 + 27y = 0$$

$$y \underbrace{\left(-\frac{3}{8} y^2 + 27\right)}_{(9)} = 0 \quad (8)$$

Raíces de ⑧

$$y\left(-\frac{3}{8}y^2+27\right)=0$$

Una raíz es $\boxed{y_1=0.}$

Ahora obtenemos las raíces de ⑨, que es una parábola.

En este caso es más rápido factorizar que hacer Baskhara.

Diferencia de cuadrados $(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$

$$-\frac{3}{8}y^2+27=-\frac{3}{8}\left(y^2-72\right)$$

$$=-\frac{3}{8}\left(y^2+\sqrt{72}\right)\left(y^2-\sqrt{72}\right)$$

$$=-\frac{3}{8}\left(y^2+6\sqrt{2}\right)\left(y^2-6\sqrt{2}\right)$$

$\boxed{\begin{array}{l} b^2=72 \\ b=\sqrt{72} \end{array}}$

$$\sqrt{72}=\sqrt{9.8}$$
$$=\sqrt{9.4.2}$$
$$=\sqrt{9}.\sqrt{4}.\sqrt{2}$$
$$=3.2.\sqrt{2}$$
$$=6.\sqrt{2}$$

Entonces:

$$\boxed{y_2=6\sqrt{2}=\sqrt{72}}$$

$$\boxed{y_3=-6\sqrt{2}=-\sqrt{72}}$$

Usé un caso de Factoreo, pero haciendo Baskhara se tiene que llegar a los mismos valores.

Agrego al final como anexo la resolución de Baskhara y la verificación.

Ternas (x, y, z)

Para $y_1 = 0$

Por (4) obtenemos x_1

$x_1 = y_1$

$x_1 = 0$

Por (7) obtenemos z_1

$z_1 = \frac{3}{8} y_1^2$

$= \frac{3}{8} \cdot 0^2$

$= \frac{3}{8} \cdot 0$

$= 0$

$(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$

$(x_2, y_2, z_2) = (\sqrt{72}, \sqrt{72}, 27)$

Para $y_2 = \sqrt{72}$

Por (4) obtenemos x_2

$x_2 = y_2$

$x_2 = \sqrt{72}$

Por (7) obtenemos z_2

$z_2 = \frac{3}{8} y_2^2$

$= \frac{3}{8} \left(\sqrt{72}\right)^2$

$= \frac{3}{8}\ 72$

$= \frac{3}{8} \cdot 9.8$

$= 27$

$(x_3, y_3, z_3) = (-\sqrt{72}, -\sqrt{72}, 27)$

Para $y_3 = -\sqrt{72}$

Por (4) obtenemos x_3

$x_3 = y_3$

$x_3 = -\sqrt{72}$

Por (7) obtenemos z_3

$z_3 = \frac{3}{8} y_3^2$

$= \frac{3}{8} \left(-\sqrt{72}\right)^2$

$= \frac{3}{8} \cdot 72$

$= 27$

Confirmación de $(x_1, y_1, z_1) = (0,0,0)$

$$\dot{x}_1 = 10(y_1 - x_1)$$
$$= 10(0-0)$$
$$= 10.0$$
$$= 0$$

La terna $(x_1, y_1, z_1) = (0,0,0)$ es efectivamente solución del sistema.

$$\dot{y}_1 = 28x_1 - y_1 - x_1 . z_1$$
$$= 28.0 - 0 - 0.0$$
$$= 0 - 0 - 0$$
$$= 0$$

$$\dot{z}_1 = x_1 . y_1 - \frac{8}{3} z_1$$
$$= 0.0 - \frac{8}{3}.0$$
$$= 0 - 0$$
$$= 0$$

Confirmación de $(x_2, y_2, z_2) = (\sqrt{72}, \sqrt{72}, 27)$

$$\dot{x}_2 = 10(y_2 - x_2)$$
$$= 10(\sqrt{72} - \sqrt{72})$$
$$= 10 \cdot 0$$
$$= 0$$

$$\dot{y}_2 = 28x_2 - y_2 - x_2 \cdot z_2$$
$$= 28\sqrt{72} - \sqrt{72} - \sqrt{72} \cdot 27$$
$$= 27\sqrt{72} - 27\sqrt{72}$$
$$= 0$$

$$\dot{z}_2 = x_2 \cdot y_2 - \frac{8}{3} z_1$$
$$= \sqrt{72} \cdot \sqrt{72} - \frac{8}{3} 27$$
$$= 72 - 8 \cdot 9$$
$$= 72 - 72$$
$$= 0$$

La terna $(x_2, y_2, z_2) = (\sqrt{72}, \sqrt{72}, 27)$ es efectivamente solución del sistema.

Confirmación de $(x_3, y_3, z_3) = (-\sqrt{72}, -\sqrt{72}, 27)$

$$\dot{x}_3 = 10(y_3 - x_3)$$
$$= 10\left(-\sqrt{72} - (-\sqrt{72})\right)$$
$$= 10\left(-\sqrt{72} + \sqrt{72}\right)$$
$$= 10 . 0$$
$$= 0$$

$$\dot{y}_3 = 28x_3 - y_3 - x_3 . z_3$$
$$= 28(-\sqrt{72}) - (-\sqrt{72}) - (-\sqrt{72}).27$$
$$= -28\sqrt{72} + \sqrt{72} + 27\sqrt{72}$$
$$= -27\sqrt{72} + 27\sqrt{72}$$
$$= 0$$

$$\dot{z}_3 = x_3 \cdot y_3 - \frac{8}{3} z_3$$
$$= (-\sqrt{72})(-\sqrt{72}) - \frac{8}{3} 27$$
$$= 72 - 8.9$$
$$= 72 - 72$$
$$= 0$$

La terna $(x_3, y_3, z_3) = (-\sqrt{72}, -\sqrt{72}, 27)$ es efectivamente solución del sistema.

Resolvemos la parábola de (9)

$$-\frac{3}{8}y^2+27=0$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\frac{81}{2}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{2}}=\frac{9}{\sqrt{2}}=\frac{9}{2}\cdot\sqrt{2}$$

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=0^2-4\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot 27$$
$$=0+\frac{12}{8}\cdot 27$$
$$=\frac{3}{2}\cdot 27$$
$$=\frac{81}{2}$$

$\Delta>0 \Rightarrow$ La parábola tiene dos raíces reales.

$$\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-0\pm\frac{9}{2}\sqrt{2}}{2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)}=\frac{\pm\frac{9}{2}\sqrt{2}}{\frac{-3}{4}}=\pm\frac{9\cdot 4}{2(-3)}\sqrt{2}$$

$$=\pm\left(-6\sqrt{2}\right)$$

$$y_2=+\left(-6\sqrt{2}\right)=-6\sqrt{2}=-\sqrt{72}$$

$$y_3=-\left(-6\sqrt{2}\right)=6\sqrt{2}=\sqrt{72}$$

Recordemos:

$$6\sqrt{2}=\sqrt{6^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6^2\cdot 2}=\sqrt{36\cdot 2}=\sqrt{72}$$

Verificamos las raíces de la parábola

$$p(y_2) = -\frac{3}{8} y_2^{\,2} + 27 = 0$$

$$= -\frac{3}{8}\left(6.\sqrt{2}\right)^2 + 27$$

$$= -\frac{3}{\cancel{8}_{1}} . \cancel{36}^{9} . \cancel{2}^{1} + 27$$

$$= -3.9 + 27$$

$$= -27 + 27$$

$$= 0$$ ✓

Efectivamente y_2 y y_2 son raíces de la parábola.

$$p(y_3) = -\frac{3}{8} y_3^{\,2} + 27 = 0$$

$$= -\frac{3}{8}\left(-6\sqrt{2}\right)^2 + 27$$

$$= -\frac{3}{8} . 36 . 2 + 27$$

$$= -27 + 27$$

$$= 0$$ ✓

$$\sqrt{72} = \sqrt{9.8} = \sqrt{9.4.2}$$

$$= \sqrt{9}.\sqrt{4}.\sqrt{2}$$

$$= 3.2.\sqrt{2}$$

$$= 6\sqrt{2}$$