Maestría en Aplicaciones de Información Espacial.

Programación y Métodos Numéricos orientados al tratamiento de imágenes satelitales

Trabajo Práctico N°3

Carolina Tauro, Estefanía De Elia, César Germán Maglione

12 – 19 de mayo de 2022

Problema 1: Considerá la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden:

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t), \quad N(0) = N_0. \tag{1}$$

a) ¿Qué comportamiento modela? ¿Cuál es su dominio de definición? Describí el significado del parámetro α (considerá su signo), y qué representa el valor N_0.

b) Realizá un análisis gráfico para determinar si existen puntos críticos y de qué tipo son.

c) Encontrá la solución exacta del problema usando el método de separación de variables.

d) Resolvé la ecuación numéricamente utilizando el método de Euler. Usá el resultado del punto anterior para estimar el error cometido en cada paso de tiempo.

Problema 2: Generalizando el problema anterior, elaborá un programa que implemente el método de Euler para integrar numéricamente el problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Los datos de entrada del programa deben ser:

t_0: tiempo inicial.

t_f: tiempo final.

x_0: $x(t_0)$, dato inicial.

h : incremento de tiempo.

Mientras que los datos de salida serán:

T : vector del tiempo (abscisas).

X : vector de aproximaciones a $x(t)$ (ordenadas).

Problema 3: Usando el programa del ejercicio anterior, resolvé el problema de valor inicial

$$\dot{x} = \frac{t - x}{2}$$

en el intervalo $[0, 3]$ con $x(0) = 1$ y para los siguientes cuatro valores de $h = 1$, 0,5, 0,25, 0,125. Resolvé exactamente el problema determinando su dominio de definición y compará el error final (en $t = 3$) en los cuatro casos.
Donde: $x(t) = t - 2 + c\exp(-t/2)$ con $c = 3$.

Problema 4: La llamada ecuación logística

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{2}$$

describe el crecimiento *autolimitado* de una población dada (suponiendo que no interactúa con otras especies y que tiene fuentes limitadas de alimentos). Fue propuesta por Verhulst en 1838 y permite describir al menos cualitativamente varios fenómenos poblacionales observados en la naturaleza. En esta ecuación $N(t)$ es el número de individuos de la colonia al tiempo t y K es una constante positiva.

Una solución N^* se dice estacionaria si satisface $dN^*/dt = 0$, y por ende no cambia en el tiempo. Observando la ecuación (2) es fácil verficar que solo existen dos soluciones estacionarias: $N_1 = 0$ y $N_2 = K$.

Determiná el dominio de definición de la ecuación y cuál de las dos soluciones estacionarias es estable y cuál es inestable resolviendo numéricamente la ecuación diferencial con el método de Euler para $r = 2$, $K = 100$, en el intervalo $0 \leq t \leq 50$ con $h = 0{,}1$ y considerando cinco condiciones iniciales diferentes:

a) $N(0) = 0$

b) $N(0) = 2$

c) $N(0) = 50$

d) $N(0) = 120$

e) $N(0) = 200$.

Graficá simultaneamente las cinco soluciones t vs. $N(t)$ en el intevalo $0 \leq t \leq 50$.

Ejercicios Complementarios

Problema 5: Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales:

a)

$$\dot{x} = r + x - \ln(1 + x)$$

b)

$$\dot{x} = x(r - e^x)$$

c)

$$\dot{x} = rx - \sinh(x)$$

determinar el dominio de definición de la ecuación y los puntos estacionarios. ¿Cuáles de estos puntos son estables y cuáles son inestables? Dibujar cualitativamente la solución $x(t)$ para diferentes condiciones iniciales. Hacer un análisis considerando diferentes valores de r.