Maestría en Aplicaciones de Información Espacial.
Programación y Métodos Numéricos orientados al tratamiento de imágenes satelitales

**Trabajo Práctico N°4**

Carolina Tauro, Estefanía De Elia, César Germán Maglione
19 – 22 de mayo de 2022

**Problema 1:** Elaborá un programa que implemente el método de Euler para resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(t, x_1, x_2), \quad x_1(t_0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2 &= g(t, x_1, x_2), \quad x_2(t_0) = x_2^0. \end{aligned}$$

Los datos de entrada deben ser:

$t_0$: tiempo inicial,

$x_1(t_0) = x_1^0$,

$x_2(t_0) = x_2^0$,

$t_f$: tiempo final,

$h$: incremento del tiempo.

La salida debe ser una tabla de tres columnas con el tiempo $t_k$ y la aproximación a la solución exacta $x_1^k$ y $x_2^k$.

**Problema 2:** Usando el programa del ejercicio anterior, resolvé el problema de competencia entre *conejos* y *ovejas* descripto por las ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 - x_1^2 - 2x_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 - x_2^2 - x_1x_2 \end{aligned}$$

para diferentes condiciones iniciales.

**a)** Encontrar los puntos críticos del sistema de ecuaciones.

**b)** Realizar un gráfico en el espacio de la fases (diagrama de fases) usando trayectorias con diferentes condiciones iniciales.

**c)** Analizar qué significado tienen las ecuaciones del sistema y las soluciones obtenidas desde el punto de vista biológico.

**d)** Analizar la estabilidad de los puntos críticos.

**Problema 3:** Consideremos dos especies, conejos y lobos, que interactuan según el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dadas por el modelo de Lotka–Volterra :

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= aC - bCL,\\ \frac{dL}{dt} &= -eL + fCL,\end{aligned}$$

donde $C(t)$ y $L(t)$ representan, respectivamente, las poblaciones de conejos y de lobos al tiempo $t$. Los parámetros $a$, $b$, $e$, $f$ son constantes positivas del problema.
Para la combinación de parámetros $a = 3$, $b = 2$, $e = 3$ y $f = 2$:

**a)** Encontrar los puntos críticos del sistema de ecuaciones.

**b)** Realizar un gráfico en el espacio de la fases (diagrama de fases) usando trayectorias con diferentes condiciones iniciales.

**c)** Analizar el significado que tienen las ecuaciones del sistema y las soluciones obtenidas desde una perspectiva biológica.

**d)** Analizar la estabilidad de los puntos críticos.

**Problema 4:** Adaptá el programa del Problema 1 para resolver un sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando el método de Euler.
Utilizá este programa para integrar numéricamente las *ecuaciones de Lorenz* (Lorenz, 1963):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x)\\ \dot{y} &= rx - y - xz\\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}$$

donde $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b = 8/3$ son parámetros del problema. Comenzando con la condición inicial: $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ y $z(0) = 0$, graficá $y(t)$ en función de $t$ y $z$ en función de $x$.