Nama: Muh taufik /03320110051

Danang /

Bab 15

Pengujian hipotesis

A. Pendahuluan

Pada bab 14 kita telah mempelajari salah satu bagian darr statistika inferensia, yaitu pendugaan parameter dengan memakai statistika yang di hitung dari sampel. Kini kita akan mempelajari bagian yang sangat penting dari statistika inferensia yang berkaitan dengan pengambilan keputusan, yaitu pengujian hipotesis. Dalam percakapan sehari-hari, sesungguhnya kita sudah banyak berkenalan dengan kata hipotesis. Hipotesis merupakan suatu asumsi atau anggapan yang bias benar atau bias salah mengenai suatuhal dan dibuatuntuk menjelaskan suatu hal tersebut sehingga memerlukan pengecekan lebih lanjut. Asumsi atau anggapan itu seringkali dipakai sebagai dasar dalam memutuskan atau menetapkan sesuatu rangka dalam menyusun perencanaan atau kepentingan lainnya baik dalam bidang ekonomi, bisnis, pendidikan, bahkan politik.

Sebagai pengambaran, perhatikan beberapa contoh asumsi berikut ini. Dalam penyusunan rencana anggaran pendapatan dan belanja Negara (RAPBN), pemerintah menggunakan beberapa asumsi berikut:

a. Pertubuhan ekonomi 4,5% per tahun;
b. Harga minyak mentah dipasaran dunia sebesar 20.000 dolar per barel;
c. Tingkat inflasi mencapai 8% per tahun;
d. Nilai tukar rupiah adalah Rp7500,00 per dolar amerika;
e. Penerimaan Negara dari sector pajak sebesar 170 triliun rupiah.

Bila hipotesis yang dibuat itu secara khusus berkaitan dengan parameter populasi, maka hipotesis itu disebut secara khusus berkaitan dengan parameter populasi, maka hipotesis itu disebut hipotesis statistic.

Hipotesis statistic adalah suatu asumsi atau anggapan atau pernyataan yang mungkin benar atau salah mengenai parameter satu populasi atau lebih.

Langkah-langkah atau prosedur yang dilakukan dengan tujuan untuk memutuskan, apakah kit atau menolak hipotesis mengenai parameter populasi disebut pengujian hipotesis.

Jelasnya, pada pengujian hipotesis kita ingin mengetahui menguji apakah parameter satu populasi, yaitu c sama dengan nilai tertentu, θ_o dan θ_2, kita ingin menguji apakah $\theta_o = \theta_2$. Dan sebagainya.

Misalnya, dalam pelemparan uang logam dalam jumlah yang tak terhingga atau tak terbatas dapat dipandang sebagai suatu populasi. Dalam hal ini kita ingin menguji hipotesis bahwa uang logam itu setimbang (simetri), artinya P(muka) = P(belakang) $= \frac{1}{2}$ atau 0 = $\frac{1}{2}$. Pernyataan ini kita uji dengan sampel,yaitu dengan cara melemparkan sebuah uang logam sebanyak yang kita inginkan, misalnya sebanyak 100 kali.

a. Bila muncul sisi muka 47 kali, maka P(muka) = 0,47, dan kita berani meyimpullkan bahwa uang logam itu setimbang; artinya kita menerima bahma P(muka) = P(belakang) $= \frac{1}{2}$.
b. Bila muncul sisi muka sebanyak 45 kali, maka P(muka) =0,45, kita masi berani menyimpulkan bahwa uang logam itu setimbang, artinya kita menerima bahwa P(muka) = P(belakang) $= \frac{1}{2}$.
c. Tetapi bila muncul sisi muka 30 kali, maka P(muka) = 0,30, sehingga kita tidak berani lagi menyimpulkan bahwa uang logam itu setimbang, artinya tidak cukup alasan untuk menerima bahwa P(muka) = P(belakang) $= \frac{1}{2}$.

Oleh karena hipotesis statistik dilakukan dengan memakai sampel, maka kebenaran atau ketidakbenaran suatu hipotesis statistik tidak pernahdiketahui dengan pasti. Jadi, sekali lagi hipotesis itu bias benar atau juga salah.

Untuk suatu hipotesis yang telah dibuat, hanya ada dua kemungkinan yang akan kita putuskan, yaitu kita akan menolak hipotesis atau kita akan menerima hipotesis, setelah kita menghitung statistic dari sampel. Menolak hipotesis artinya kita menyimpulkan bahw hipotesis tidak benar. Sedangkan menerima hipotesis artinya tidak cukup informasi dari sampel untuk menyimpulkan bahwa hipotesis harus kita tolak. Artinya, walaupun hipotesis itu kita terima, tidak berarti hipotesis itu banar.

Oleh karena itu dalam membuat rumusan keputusan pengujian hipotesis, hendaknya kita selalu membuat pernyataan hipotesis yang diharapkan akan diputuskan untuk ditolak. Hipotesis yang dirumuskan dengan harapan untuk ditolak disebut hipotesis nol yang di tulis H_0. Penolakan hipotesis nol akan menjurus pada penerimaan hipotesis nol akan mengurus pada penerimaan hipotesis tandingan yang ditulis H_1 atau H_a.

Contoh 15.1

1. Pengujian hipotesis bahwa suatu jenis obat baru lebih efektif untuk menurungkan berat badan. Maka rumusan hipotesisnya adalah:
   Hipotesis nol, H_0 : obat baru = obat lama
   Hipotesis alternative H_1 : obat baru lebih baik dari obat lama.
2. Pengujian hipotesis bahwa teknologi baru meningkatkan kualitas buah-buahan. Maka rumus hipotesisnya adalah:
   Hipotesis nol, H_0 : teknologi baru = teknologit lama

Hipotesis alternative H_1 : teknologi baru π teknologi lama.

3. Seorang dokter menyatakan bahwa, lebih dari 60% pesien menderita penyakit paru-paru disuatu rumah sakit adalah karena merokok. Maka hipotesisnya adalah:
   Hipotesis nol, $H_0 : p = 60\% = 0,6$
   Hipotesis alternative $H_1 : p \neq 0,6$.
4. Seorang dosen menyatakan bahwa dalam mata kuliah matematika ekonomi, presentasi belajar mahasiswa laki-laki lebih tinggi daripada presentasi belajar mahasiswa perempuan. Maka hipotesisnya adalah:
   Hipotesis nol, H_0 : prestasi belajar mahasiswa laki-laki = prestasi belajar mahasiswa perempuan
   Hipotesis alternative H_1 : prestasi belajar mahasiswa laki-laki lebih tinggi daripada prestasi belajar mahasiswa perempuan.

Perlu diketahui bahwa ada beberapa dasar yang dipakai untuk merumuskan hipotesis, antara lain (1) berdasarkan pengetahuan yang didapat dari teori, (2)berdasarkan hasil penelitian (3) berdasarkan pengalaman (4) bedasarkan keajaman berpikir. Orang yang mempunyai kecerdasan tinggi sering mempunyai pendapat mengenai suatu hal dalam rangka memecahkan suatu persoalan atau dalam konteks yang lain.

B. Kesalahan jenis 1 dan jenis 2

Pada uraian sebelumnya telah dijelaskan bahwa untuk menguji hipotesis, kita menghitung statistic atau besaran berdarkan data yang diperoleh dari sampel. Apapun yang kita peroleh dari sampel yang merupakan perkiraan yang dipakai sebagai dasar untuk memutuskan,kita menolak atau menerima hipotesis nol, mengenai parameter suatu populasi. Dengan demikian, keputusan kita menerima atau menolak hiptesis nol mengandung suatu ketidak pastian, artinya keputusan itu bias benar atau salah. Adanya factor ketidak pastian ini mengkibatkan timbulnya suatu resiko yang harus ditanggung oleh pembuat keputusan itu sendiri.

Dalam pengujian hipotesis dikenal dengan dua jenis kesalahan, yaitu kesalahan jenis 1 dan kesalahan jenis 2. Kesalahan jenis 1 adalah kesalahan akibat menolak hipotesis nol, padahal hipotesis nol benar, sehinnga sesungguhnya harus diterima. Kesalahan jenis ke 2 adalah kesalahan akibat menerima hipotesis nol, padahal hipotesis nol salah, sehingga seharusnya harus ditolak.

Probabilitas melakukan kesalahan jenis 1 disebut taraf nyata atau taraf keberartian atau taraf signifikansi yang ditulis α, yaitu: α =P(kesalahan jenis 1) = P(menolak H_0/ H_0 benar)

Probabilitas melakukan kesalahan jenis ke 2 disebut *B* (baca:beta)yaitu : *B* =P(kesalahan jenis 2) = P (menolak H_0/ H_0 benar).

Hubungan antara hipotesis nol, keputusan, jenis kesalahan, dan probabilitas melakukan jenis kesalahan secara ringkas disajikan pada Tabel 15.1 berikut ini.

Table 15.1
Jenis kesalahan dalam menolak dan menerima hipotesis nol

Keputusan	Keadaan yang sesungguhnya	
	Hipotesis nol (H0) benar	Hipotesis nol (H0) salah
Menolak H0	Keputusan salah (jenis 1) α =P (kesalahan jenis 1)	Kepusan tepat K = 1-*B*
Menerima H0	Keputusan tepat 1-α	Keputusan salah (jenis 2) *B* = P (kesalahan jenis 2)

Secara ringkas, pengujian hipotesis mempunyai sifat-sifat seperti berikut,

a. Ada hubungan antara kesalahan jenis 1 dan kesalahan jenis 2. Memperkecil probabilitas melakukan kesalahan jenis 1 akan memperbesar probabilitas melakukan kesalahan jenis 2.

b. Probabilitas melakukan kesalahan jenis 1 dapat diperkecil dengan menyesuaikan nilai kritis.

c. Makin besar ukuran sampel, maka nilai α dan *B* akan makin kecil.

d. Bila hipotesis nol salah satu nilai *B* akan memcapai maksimum, bilamana nilai parameter yang sesungguhnya dekat dengan nilai yang dihipotesiskan. Makin besar jarak antara nilai sesungguhnya dengan nilai dihipotesikan, makin kecil nilai *B*.

C. Uji satu arah dan uji dua arah

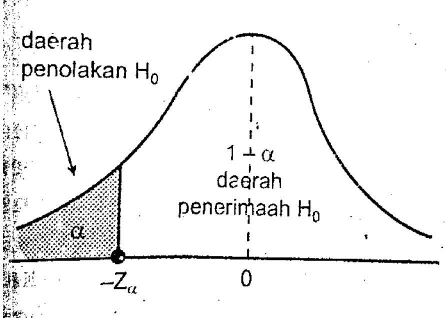
Seperti pada pendugaan parameter 0 dari suatu populasi, bila nilai parameter 0 diasumsikan sama dengan suatu bilangan tertentu (θ_o), sehingga $\theta = \theta_o$, maka hipotesis nol dari masalah ini ditulis dengan cara $H_o : \theta = \theta_o$. Ada dua cara untuk menguji hipotesis nol tersebut yang tergantung dari hiotesis alternatifnya (H1), yaitu hipotesis yang di pakai untuk melawan hipotesis nol (H_o). berdasarkan hipotesis alternatif dikenal dengan dua jenis pengujian, yaitu uji satu arah dan uji dua arah.

Bila hipotesis nol, $H_o : \theta = \theta_o$ dilawan dengan hipotesis alternatif H1 : $\theta>\theta_o$ atau H1 : $\theta\neq\theta_o$ maka pengujian hipotesis ini disebut uji satu arah. Akan tetapi bila hipotesis nol itu dilawan dengan hipotesis alternatif H1:$\theta\neq\theta_o$, maka pengujian hipotesis ini disebut uji dua arah.

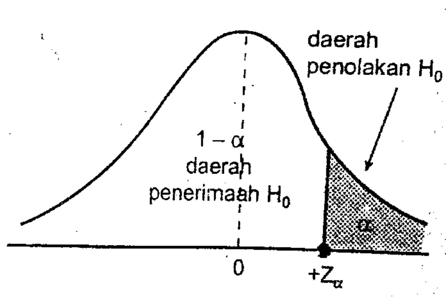
Singkat kata, uji satau arah disebut juga uji eka arah mempunyai bentuk seperti berikut.

$$H_0: \theta = \theta_0 \qquad \text{atau} \qquad H_0: \theta = \theta_0$$
$$H_1: \theta > \theta_0 \qquad\qquad\qquad H_1: \theta < \theta_0$$

Uji satu arah ditandai dengan adanya satu daerah penolakan hipotesis nol (H_o) yang brgantung pada nilai kritis tertentu, dimana nilai kritis ini diperoleh dari table untuk nilai α yang telah dipilih sebelumnya. Berdasarkan nilai kritis tersebut, daerah penolakan H_o dan daerah H_o ditunjukkan pada gambar15.1 dan gambar 15.2 berikut ini.



Gambar 15.1
Uji Satu Arah untuk $H_1 : \theta < \theta_0$

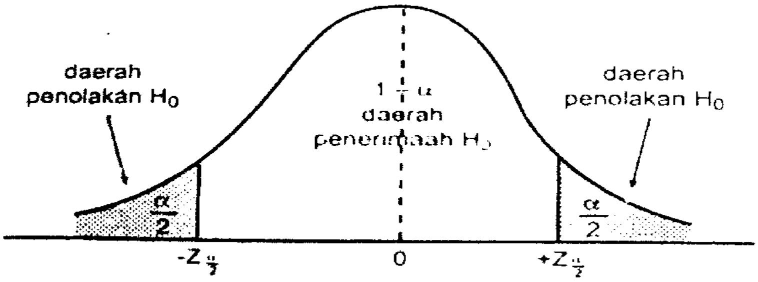


Gambar 15.2
Uji Satu Arah untuk $H_1 : \theta > \theta_0$

Pada gambar 15.1 dan gambar 15.2 daerah penolakan H_o adalah luas daerah yan g diarsir, yaitu ditunjukkan oleh α. Sedangakan daerah penerimaan H_o ditunjukkan oleh 1-α. Nilai yang membatasi daerah penolakan dan daerah penerimaan H_o adalah $Z\alpha$ yang disebut gengan nilai kritis, dimana nilai $Z\alpha$ ini diperoleh dari table untuk α yang telah ditentukan sebelumnya. Daerah penolakan H_o seringkali disebut juga daerah kritis.

$$H_o : \theta = \theta_o \text{ dan } H1 : \theta \neq \theta_o$$

Uji dua arah ditandai dengan adanya dua daerah penolakan hipotesis nol (H_o) yang juga bergantung pada nilai kritis tertentu. Daerah penolakan dan daerah penerimaan H_o ditunjukan pada gambar 15.3 berikut ini.



Gambar 15.3 *Uji Dua Arah untuk $H_1 : 0 \neq \theta_0$*

Pada uji dua arah tersebut, sebagaimana ditunjukan oleh gambar 15.3 daerah penolakan H_o ada dua, yaitu luas daerah dibagian paling kiri dan luas daerah paling kanan yang masing-masing besarnya adalah $\alpha/2$ dimana α telah ditentukan sebelumnya. Sedangkan daerah penerimaan H_o ditunjukkan oleh luas daerah $1-\alpha$. Nilai kritis ada dua yaitu $-Z\alpha/2$ dan $Z\alpha/2$ yang diperoleh dari table untuk nilai α yang telah ditentukan sebelumnya.

Dalam pengujian hipotesis, penentuan jenis pengujian yang akan dipakai apakah uji satu arah atau uji dua arah sangat bergantung pada informasi atau data awal yang tersedia mengenai parameter populasi. Langkah penengtuan jenis pengujian ini merupakan langakah awal yang sangat strategis karena akan menentukan langkah atau prosedur perhitungan berikut:

1. Tetapkan dulu rumusan hipotesis dengan tepat, baik hipotesis nol (H_o) dan hipotesis alternatif H1 apakah termasuk uji satu arah atau uji dua arah.
2. Tetapkanlah taraf nyata α yang diinginkan, sehingga dengan memakai nilai α tersebut dapat diperoleh nilai kritis dari table, denga demikian dapat digambarkan daerah penolakan H_o dan daerah penerimaaan H_o.
3. Tetapkanlah statistic uji Z_h yang cocok untuk menguji hipotesis nol. Rumus ststistik ini sangat bergantung pada parameter populasi yang diuji apakah θ $=u$, θ $=p$, atau karakteristik populasi yang lain.
4. Hitunglah nilai statistic uji (Zh) berdasarkan data dan informasi yang diketahui baik dari populasi maupun dari sampel yang diambil dari populasi tersebut.
5. Simpulkan; tolak H_o bila nilai statistic uji (Zh) jatuh ato terletak didaerah penolakan H_o, yaitu bilamana nilai $Zh > Zh$ atau $Zh < -Z\alpha$ untuk uji satu arah dan nilai $Zh <> Z\alpha/2$ atau $Zh < -Z\alpha/2$ untuk uji dua arah.dan terima H_o bila nilai statistic uji Zh jatuh atau terletak di daerah penerimaan H_o yaitu $Zh < -Z\alpha$ atau $Zh > Z\alpha$ untuk uji satu arah dan $-Z\alpha/2 < Z\alpha < Z\alpha/2$ untuk uji dua arah.

D. Pengujian hipotesis dengan sampel besar

Perhitungan dan prosedur yang dilakukan dalam pengujian hipotesis ditentukan oleh beberapa hal, seperti juga, pendugaan parameter populasi, yaitu ukuran populasi, ukuran sampel, dan data serta informasi lain yang tersedia pada populasi dan populasi terbatas, bersama-sama dengan ukuran sampel, apakah sampel besar dan sampel kecil akan membedakan bagamana pengujian hipotesis itu dilakaukan. Berkenaan dengan parameter proporsi $\theta=p$, parameter beda dua rata-rata, yaitu $\theta=u$, parameter proporsi $\theta=p$, parameter dua rata-rata, yaitu $\theta=u1-u2$, dan parameter dua proporsi, yaitu $\theta=p1-p2$, akan menentukan bagaimana pengujian hipotersis itu dilakukan. Oleh karena itu, yang pertama akan dilakuakan adalah pengujian hipotesis dengan memakai sampel besar untuk ,enguji parameter populasi tersebut; dan pada bagian berikutnya akan dilikukan pengujian hipotesis dengan memakai sampel kecil.

1. Pengujian parameter rata-rata (u) populasi

Pandanglah masalah pengujian hipotesis bahwa rata-rata (u) suatu populasi sama dengan suatu nilai $u_o$yang dilawan dengan hipotesis alternatif bahwa rata-rata populasi tersebut tidak sama dengan u_o, yaitu sebagai berikut.

$$H_o: u = u_o \text{ dan } H1 : u \neq u_o$$

Bila simpangan baku (σ_χ) dari populasi itu diketahui dan sampel yang dipakai adalah sebanyak n, maka statistic uji yang dipakai untuk menguji hipotesis rata-rata populasi tersebut adalah:

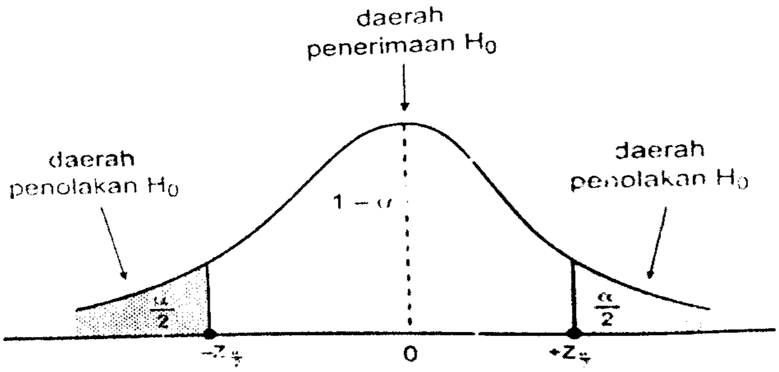
Rumus 15.1 $$Z_h = \frac{X-\mu_0}{\sigma_x}$$

Dimana :

$\sigma_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$, bilamana populasi tidak terbatas

$\sigma_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N_{-n}}{N_{-1}}}$, bilamana populasi terbatas.

Sedangkan bila σ_χ dari populasi yang tidak diketahui, maka nilai σdapat ditaksir (didekati) dengan nilai $S_\chi$yang dihitung dari sampel. Untuk taraf nyata α, maka nilai kritis dari statistic uji Z diatas adalah Zα/2 yang diperoleh dari table kurva normal standar komulatif Z.dengan nilai kritis Zα/2 itu dapat dibuat daerah penolakan dan daerah penerimaan hipotesis nol (H_o), yaitu sebagai berikut.



Gambar 15.4

Daerah Penolakan dan Penerimaan H_o Uji Paramter $\mu = \mu_o$

Dengan memakai daerah penolakan H_o dan daerah penerimaan H_o pada gambar 15.4, maka hipotesis nol (H_o) akan diltolak jika nilai statistic uji Zh>Zα/2 atau Zh<-Zα/2, yaitu bila nilai Zh berada didaerah penolakan hipotesis nol (H_o). sedangkan hipotesis nol (H_o) akan diterima, jika nilai statistic uji berada pada daerah penerimaan H_o,yaitu bila -Zα/2 <Zh<Zα/2.

2. **Pengujian parameter proporsi (p) populasi**

Misalkan kita memiliki suatu populasi yang megandung jenis tertentu dengan proporsi p=x/n. dengan memakai sampel berukuran n yang mengandung jenis tertentu, yaitu p=x/n , kita ingin menguji hipotesis parameter proporsi p yang diasumsikan nilainya sama dengan P_o, yaitu $p=p_o$, maka rumusan hipotesis untuk pengujian hipotesis tersebut adalah:

Uji Dua Arah	Uji Satu Arah		Uji Satu Arah
$H_0 : p = p_0$	$H_0 : p = p_0$	atau	$H_0 : p = p_0$
$H_1 : p \neq p_0$	$H_1 : p > p_0$		$H_1 : p < p_0$

Rumus: 15.2 $$Z_h = \frac{p - p_0}{\sigma_p}$$

Dimana:

$\sigma_p = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$, bilamana populasi tidak terbatas

$\sigma_p = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N_{-n}}{N_{-n}}}$, bilamana populasi terbatas

3. **Pengujian parameter beda dua rata-rata (u1-u2) dari dua populasi**

Misalkan kita mempunyai dua populasi berdistribusi normal masing-masing mempunyai rata-rata u1 dan u2 dengan simpangan baku $^{O}1$ dan $^{O}2$. Pada populasi pertama itu kita ambil sampel acak berukuran n1dan misalkan dari hasil perhitungan diperoleh rata-rata X1 dan simpangan baku S2, begitu juga dari populasi kedua diambil sampel acak berukuran n2 kemudian dihitung rata-rata X2 dan simpangan baku S2,di mana sampel pertama dan sampel kedua saling bebas. Misalkan juga bahwa simpagan baku dua populasi itu diketahui, katakanalah, $^{O}1$ dan $^{O}2$. Maka pengujian hipotesis untuk parameter beda dua rata-rata (u1-u2) dari kedua populasi itu adalah sebagai berikut.

Uji Dua Arah	Uji Satu Arah		Uji Satu Arah
$H_0 : \mu = \mu_2$	$H_0 : \mu = \mu_2$	atau	$H_0 : \mu = \mu_2$
$H_1 : \mu \neq \mu_2$	$H_1 : \mu > \mu_2$		$H_1 : \mu < \mu_2$

Statistik uji yang dipakai untuk menguji hipotesis tersebut adalah:

Rumus 15.3

$$\boxed{Z_h = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}}}$$

Dimana:

$$\sigma_{x_1 - x_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$, bila dua populasi tak terbatas

$$\sigma_{x_1 - x_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \cdot \sqrt{\frac{(N_1 + N_2) - (n_1 + n_2)}{N_1 + N_2 - 1}}$$, bila dua populasi terbatas

4. Pengujian parameter beda dua proporsi dari dua populasi

Misalkan kita mempunyai dua populasi,populasi pertama berdiri atas unsur x_1 dengan proporsi $p_1 = \frac{x_1}{n_1}$, dan populasi kedua terdiri atas unsur x_2 dengan proporsi $p_2 = \frac{x_2}{n_2}$, pada populasi pertamakita ambil sampel acak sebanyak n_1 yang terdiri unsur $x_1$dengan proporsi $p_1 = \frac{x_1}{n_1}$, dan pada populasi kedua diambil sampel acak sebanyak n_2 yang terdiri atas unsur x_2 dengan proporsi $p_2 = \frac{x_2}{n_2}$, . maka pengujian hipotesis untuk parameter beda dua proporsi $(p_1 - p_2)$ adalah sebagai berikut .

Uji Dua Arah	Uji Satu Arah		Uji Satu Arah
$H_0 : p_1 = p_2$	$H_0 : p_1 = p_2$	atau	$H_0 : p_1 = p_2$
$H_1 : p_1 \neq p_2$	$H_1 : p_1 > p_2$		$H_1 : p_1 < p_2$

Statistik uji yang dipakai untuk menguji hipotesis adalah:

Rumus : $Z_h = \frac{(p_1 - p_2) - (p_1 - p_2)}{\sigma_{p_1 - p_2}}$

Dimana $\sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$, bila dua populasi tak terbatas

$\sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1}\right)} . \sqrt{\frac{(N_1 + N_2) - (n_1 + n_2)}{N_1 + N_2 - 1}}$, bila dua populasi terbatas dan

$p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}, q = 1 - p$

Sesungguhnya $\sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$, tetapi karena pada umumnya p_1 dan p_2 tidak diketahui, maka $\sigma_{p_1-p_2}$ harus ditaksir dengan rumus seperti di atas.

E. Pengujian hipotesis dengan sampel kecil

Sejalan dengan statistic t yang dipakai untuk menduga parameter rata-rata u dari suatu populasi maupun untuk menduga parameter rata-rata (u1-u2) sebagaimana telah dijealaskan pada bab14 dan gengan mengikuti prosedur yang sama dengan pengujian hipotesis dengan memakai sampel besar, kiranya dapat dengan mudah dimegerti cara pengujian hipotesis dengan memakai sampel kecil. Kecuali rumus statistic yang dipakai untuk menguji dan penentuan nilai kritis, semua langkah pengujian hipotesis dengan sampel besar dapat dipakai untuk pengujian hipotesis dengan sampel kecil , karena semuanya sama; seperti perumusan hipotesis, penegtuan taraf signifikansi, membuat daerah penolakan dan penerimaan H_o, dan cara menyimpulkannya.

1. **Pengujian parameter rata-rata (u) dari populasi dimana ^{o}2 tidak diketahui.**

   Statistic uji yang dipakai untuk menguji hipotesis:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ atau $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ atau $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ $\quad$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ $\quad$ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

adalah statistik t, yaitu:

Rumus 15.5

$$\boxed{t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}}$$

Di mana $\sigma_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$, bila populasi tak terbatas $\sigma_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N_{-n}}{N_{-1}}}$, bila populasi tak terbatas

Akan tetapi karena simpanan baku σ_x tidak diketahui, maka nilai σ_x ditaksir dengan nilai $\frac{Sx}{0}$ yang dihitung dari sampel.

2. **Pengujian parameter beda dua rata-rata (u1-u2) dari dua populasi.**

   Statistic uji yang dipakai untuk menguji hipotesis:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ atau $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ atau $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ $\quad$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ $\quad$ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

Adalah statistik t, yaitu:

RUMUS 15.6 =

$$t_h = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_1)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

(1) Bila $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ tidak diketahui pada populasi, maka:

$\sigma_{x_1 - x_2} = s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$, untuk populasi tak terbatas dimana:

$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\ s_1^2 + (n_1 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$, dengan derajat kebebasan

$\vartheta = n_1 + n_2 - 2$

(2) Bila $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ dan tidak diketahui pada populasi , maka:

$\sigma_{x_1 - x_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$, maka untuk populasi tak terbatas derajat kebebasan

$$\sigma = \frac{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}{\frac{\frac{s_1^2}{n_1}}{n_1 - 1} + \frac{\frac{s_2^2}{n_2}}{n_2 - 1}}$$

(3) Bila populasi terbatas, maka simpangan baku $\sigma_{x_1 - x_2}$ harus dikalikan dengan faktor koreksi $\sqrt{\frac{(N_1 + N_2) - (n_1 + n_2)}{N_1 + N_2 - 1}}$

3. Simpangan baku gabungan

S_p^2 **=** $\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ **=** $\frac{(11)(4)^2 = (9)(5)^2}{20}$ **= 20,05**

S_p **=** $\sqrt{20,05}$ **= 4,478**

Simpangan baku distribusi sampel beda dua rata-rata adalah:

$\sigma_{x_1 - x_2} = S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} = (4{,}478)\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}} = 1{,}917$, Maka diperoleh nilai statstik uji t_h, yaitu

$$t_h = \frac{(x_1 - x_2) - (\mu_1 - \mu_1)}{\sigma\, x_1 - x_2} = \frac{(85-81)-0}{1{,}917} = 2{,}09.$$

4. **Kesinpulan:**

Terima H_o, karena nilai t_h = 2,09 < 2,528 = $t_{(0{,}01;20)}$ atau nilai t_h = 2,09 berada di daerah penerimaan H_o (sebelah kanan). Artinya, hasil belajar rnahasiswa yang diajar dengan metode biasa dan metode baru perbedaannya adalah tidak signifikan. Dengan kata lain, data dan sampel tidak mendukung pernyataan bahwa metode pengajaran biasa tetap lebih baik dari pada metode pengajaran baru. Jadi, informasi yang diperoleh dan sampel membuktikan bahwa dua metode mengajar itu ternyata sama saja.

Contoh :
Diketahui dua kelompok mahasiswa di suatu universitas. Kelompok A terdiri atas mahasiswa laki-laki dengan n_1 = 5. Kelompok B terdiri atas mahasiswa perempuan dengan n_2 = 5. Dua kelompok mahasiswa itu dipakai ‘sebagai sampel untuk mengüii daya tahan belajar miahasiswa setelah minum kopi yang cukup kental menjelang pelaksanaan ujian akhir samester. Daya tahan belajar mahasiswa (dalam jam) dan dua

kelompok mahasiswa tersebut adalah seperti pada Tabel 15.2 berikut ini.

TABEL 15,2

Nomor Mahasiswa	1	2	3	4	5
Kelompok A	2,0	2,0	2,3	2,1	2,4
Kelompok B	2,2	1,9	2,5	2,3	2,4

Ujilah perbedaan daya tahan belajar dua kelompok mahasiswa di suatu universitas tersebut dengan memakai taraf signifikansi $\propto$ = 0,02, bila diasumsikan bahwa dua populasi mahasiswa berdistribusi normal dengan variansi yang sama!

Jawab:
Dua populasi dianggap tak terbatas, berdistribusi normal, dengan vaniansi yang sama ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) Data daya tahan belajar mahasiswa kelompok A:

$$x_1 = \frac{\sum X}{n} = \frac{2{,}2+2{,}0+2{,}3+2{,}1+2{,}4}{5} = \frac{10{,}8}{5} = 2{,}16$$

$$S_1^2 = \frac{\sum(X-X)^2}{n-1} = \frac{n\sum X^2-(\sum X)^2}{n(n-1)}$$

$$\sum X^2 = (2{,}0)^2 + (2{,}0)^2 + (2{,}3)^2 + (2{,}1)^2 + (2{,}4)^2 = 23{,}46$$

Maka $S_1^2 = \frac{5(23{,}46)-(10{,}8)^2}{5(4)} = 0{,}033$

Data daya tahan belajar mahasiswa kelompok **B**:

$x_2 = \frac{\sum X}{n} = \frac{2,2+2,0+2,3+2,1+2,4}{5} = \frac{11,3}{5} = 2,26$

$\sum X^2 = (2,2)^2 + (1,9)^2 + (2,5)^2 + (2,3)^2 + (2,4)^2 = 23,46$

$S_2^2 = \frac{5(25,75)-(11,3)^2}{5(4)} = \frac{1,06}{20} = 0,053$

Variasi gabungan S_p^2 adalah:

$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1-n_2-2} = \frac{(4)(0,033)+(4)(0,053)}{8} = 0,043$

$S_p = \sqrt{0,043} = 0,207$

$\sigma X_1 - X_2 = S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} = (0,207)\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}} = 0,131$

1. Hipotesis: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 : H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
2. Taraf signifikan α = 0,02, uji dua arah, $\frac{\alpha}{2}$ = 0,01, derajat kebebasan

   $\vartheta = 8$, maka diperoleh nilai kritis $t(\frac{\alpha}{2}, \vartheta) = t_{(0,01;8)}$ =2,896 atau

   $t_{(0,01;8)} = -2,896$

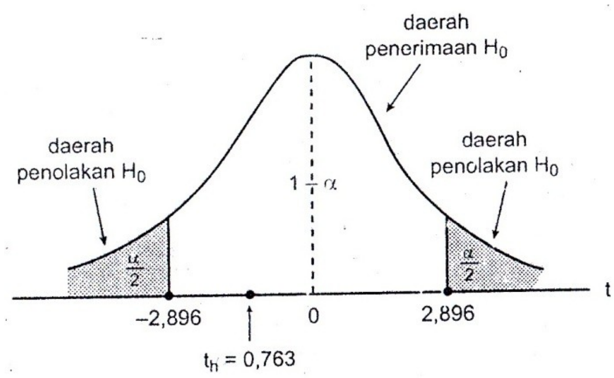
3. Statistik uji yang dipakai adalah:

   $t_h = \frac{(x_1-x_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\, x_1 - x_2} = \frac{(2,16-2,26)-0}{0,131}$ = *-0,763*

4. Kesimpulan: terima H_0 karena t_h = -0,763 **>** **-** 2,396 **=** $t_{(0,01;8)}$ dimana nilai t_h**=** -0,763 berada di daerah penerimaan H_0. Artinya *rata-rata*

daya tahan belajar dua kelompok mahasiswa setelah minum kopi pekat ternyata perbedaannya tidak signifikan pada taraf signifikansi α = 0,02.

Untuk lebih jelasnya perhatikan daerah penolakan dan penerimaan H_0 pada Gambar 15.8 berikut ini



Gambar 15.8

Cara lain yang dapat dipakai untuk menguji hipotesis tersebut adalah dengan mernakai cara berikut.

Rumus 15.7 $t_h = \frac{d - d_0}{S_0 / \sqrt{n}}$

di mana: d = rata-rata beda atau selisih nilai dua kelompok = $\frac{\sum d}{n}$ = $\frac{\sum(x_{1} - x_{2}}{n}$

d0 = nilai beda yang dihipotesiskan = 0
Sd = simpangan baku nilai-niiai d

Untuk Contoh 15.9,
1. H_o : d = u_1 - u_2 = 0 dan H_1 : d $\neq$ 0
2. Taraf signifikansi α = 0,02, uji dua arah, derajat kebebasan ϑ = n- 1

= 5 - 1 = 4, maka nilai kritisnya $t_{(0,014;4)}$ = -3,747 atau $t_{(0,014;4)}$ = 3747

3.statistik uji yang di pakai adalah: = $t_h = \frac{d - d_o}{S_o / \sqrt{n}}$

Gunakan table berikut untuk perhitungan.

TABEL 15,3

No	1	2	3	4	5	
Kelas A	2,0	2,0	2,3	2,1	2,4	
Kelas B	2,2	1,9	2,5	2,3	2,4	
D	-0,2	0,1	-0,2	-0,2	0,0	∑d = -0,5
d^2	0,04	0,01	0,04	0,04	0,00	$\sum d^2$ = 0,13

Dari tabel diperoleh: Nilai rata-rata d = $\frac{\sum d}{n}$ = $\frac{-0,5}{5}$ = -0,1

Variansi S_d^2 = $\frac{n\sum d^2 - (\sum d)^2}{n(n-1)}$ = $\frac{5(-0,013) - (-0,5)^2}{5(4)}$ = $\frac{0,4}{20}$ = 0,02

Simpangan baku $S_d = \sqrt{0,02}$ = 0,141

Maka nilai statistic uji t_h adalah:

$t_h = \frac{d - d_o}{S_o / \sqrt{n}} = \frac{-0,1-0}{(1,141) / \sqrt{5}}$ **= 0,141**

Kesimpulan; terima H_o, karena nilai t_h = -1,58 > -3,747 = $t_{(0.141}$, atau nilai t_h = -1,58 berada pada daerah penenimaan H_o,. Artinya, rata-rata daya tahan belajar mahasiswa dan dua ke1ompok itu setelah minum kopi pekat ternyata perbedaannya tidak signifikan pada $\alpha = 0{,}02$

SOAL-SOAL DENGAN PEMBAHASAN

1. Seorang pejabat Direktorat Jenderal Pajak menduga bahwa persentase wajib pajak yang belum membayar pajak kurang dari 40%. Untuk membuktikan dugaan tersebut, diambil sampel acak sebanyak 18 orang dan ternyata ada 6 orang yang belum membayar pajak. Dengan memakai taraf nyata 5%, apakah dugaan tersebut benar?

Jawab:

Misalkan p = proporsi wajib pajak yang belum membayar pajak. Populasi wajib pajak dianggap tak terbatas.

Dari sampel diperoleh p= $\frac{6}{18}$ = 0,33

1) Hipotesis: H_o : p = 40% = 0,4 dan h_1: p < 0,4 Uji satu arah dengan sampel kecil n = 18.

2) α = 5%, dan ϑ = 17, nilai kritis $t_{(0,05;17)}$ = 1,740 atau -1,740

3) Statistik uji; populasi dianggap tak terbatas.

$$t_h = \frac{p-p_o}{\alpha_p} = \frac{0{,}33-0{,}4}{\alpha_p}$$

$\alpha_p = \sqrt{\frac{P_o(1-P_o)}{n}} = \sqrt{\frac{0,4(0,6)}{16}} = 0,115$

Maka $t_h = \frac{0,33-0,4}{0,115} = -0,580$

4) Karena $t_h = -0,580 > -1,740 = t_{(0,05;17)}$ kesimpulanya kita terima H_o.

   Jadi, informasi yang diperoleh dan sampel tidak mendukung pernyataan bahwa persentase wajib pajak yang belum membayar pajak kurang dari 40%.

2. Dari sampel acak sebanyak 400 ibu rumah tangga yang dipilih oleh sebuah team dan pemilik, supermarket A memper1ihatkan bahwa 20% lebih ibu-ibu rumah tangga menyukai kopi bubuk merek N. Untuk meningkatkan proporsi ibu rumah tangga yang menyukai kopi bubuk merek N, pihak pemasaran melakukan pemasangan advertensi terhadap produksinya. K.emudia, dilakukan penelitian dengan sampel acak sebesar 600 ibu rumah tangga dan memperlihatkan bahwa 22% ibu-ibu menyukai kopi bubuk merek N. Dengan menggunakan α sebesar 5%, apakah pemasangan advertensi mampu meningkatkan proporsi ibu-ibu yang menyukai kopi bubuk merek N?

Jawab:

Sebelum dipasang advertensi:

$n_1 = 400$, $P_1 = 0,2$, $x_1 = \frac{20}{100} \text{ x } 400 = 80$

Sesudah dipasang advertensi:

n_1 = 600, p_2 = 0,22, X_2 $\frac{22}{100}$ X 600= 132

Proporsi gabungan

P = $\frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$ = $\frac{80+132}{400+600}$ = 0,212, dan q = 0,788

Populasi ibu-ibu yang menyukai N sebelum dan sesudah pemasangan advertensi masing-masing dianggap tak terbatas dan berdistribusi normal dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 tidak

diketahui, tetapi σ_1^2 = σ_2^2 = σ^2

σ_{p1-p2} = $\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}$ = $\sqrt{(0{,}212)(0{,}788)(\frac{1}{400} + \frac{1}{600})}$ = 0,026

Pengujian hipotesis beda dua proporsi dengan memakai sampel besar:

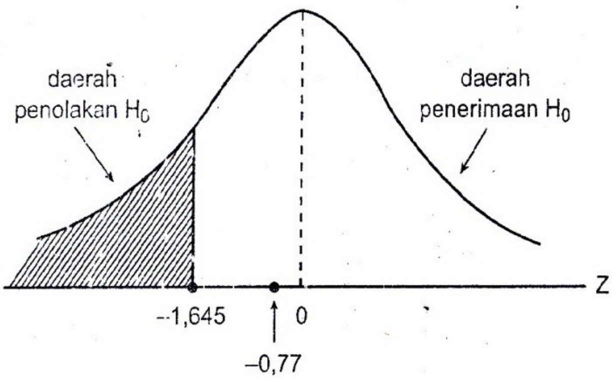
1) H_o : $P_1 = P_2$ dan H_1 : $P_1 = P_2$

2) $\alpha = 5\%$ uji satu arah, niai kritis $Z_\alpha = Z_{0{,}05} = 1{,}645$ atau -1,645

3) Statistik Uji.

$Z_h = \frac{(p1-p2)-(p1-p2)}{\alpha_{p1-p2}}$ = $\frac{(10{,}2-0{,}22)-0}{0{,}026}$ = **-0,778**

4) Daerah penolakan dan daerah penerimaan H



Gambar 15,9

Kesimpulan: terima H_o, karena nilai hitung Z_h = -0,77 > -1,645, di mana Z_h **=-0,77** berada di daerah penerimaan H_o. Artinya, informasi yang diperoleh dari sampel tidak mendukung pernyataan bahwa pemasangan advertensi dapat meningkatkan proporsi ibu-ibu rumah tangga menyukai kopi berbeda merek N, karena perbedaan proporsi sebelum dan sesudah dipasang advertensi ternyata tidak signifikan pada α = 5%.

3. Daya tahan tali yang dihasilkan suatu pabrik mempunyai rata-rata 1.800 lb dan standar deviasi 100 lb. Disebutkan bahwa dengan memakai teknologi baru dalam proses produksi, maka daya tahan tali yang diproduksi dapat ditingkatkan. untuk menguji pernyataan itu sebuah sampel yang terdiri atas 50 bua tali diujicobakan dan ternyata rata-rata daya tahannya adalah 1.850 lb. Dapatkah kita menyetujui pernyataan di atas bilai gunakan taraf signifikansi α =1%?

Ja wab:

Misalkan μ rata-rata daya tahan tali = 1.800 σ_x = standar deviasi daya tahan tali = 100.

Dari sampel diperoleh: n = 50 dan X = 1.850. Dengan teknologi baru daya tahan tali dapat ditingkatkan.

1) $H_o: \mu$ =1.800dan $H_i: \mu$ >1.800

2) α = 1%, nilai kritis $Z_{0,01}$ = 2,326

3) Statistik uji, dengan sampel besar:

$$Z_h = \frac{X-\mu_o}{\sigma_x}, \sigma_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{50}} = 14{,}14$$

Maka $Z_h = \frac{1.850-1.800}{14{,}14}$ =3.54

5) Maka nilai Z_h = 3,54 > 2,326= $Z_{0.01}$, kesimpulannya tolak H_o. Dengan kata lain, rata-rata daya tahan tali sebelum sesudah dipakai teknologi baru perbedaannya ternya signifikan pada taraf signifikansi α = 1%. Artinya teknologi baru itu terbukti mampu meningkatkan daya tahan tali.

4. Pengelola pusat perbelanjaan akan melakukan reposisi jika perubahan pada target marketnya. Untuk itu dilakul pengkajian apakah pengeluaran rata-rata pengunjung lebih besar dari Rp400.000,00 setiap kali kunjungan seperti yang diharapkannya. Dalam melakukan pengkajian tersebut diambil sampel acak sebesar 20 responden dan besarnya pengeluaran tiap responden setiap kali kunjungan adalah sebagai berikut (dalam ribuan rupiah).
450 300 480 500 370 290 410 360 405 520
360 380 420 470 400 .350 310 370 390 425
Dengan hipotesis rata-rata, lakukan pengkajian apakah benar besarnya uang rata-rata yang dibelanjakan tiap responden setiap kali kunjungan lebih besar

dari Rp400.000,00? Gunakan α sebesar 5% dan asumsikan besarnya uang yang dibelanjakan berdistribusi normal!

Jawab:

Misalkan μ = rata-rata pengeluaran pengunjung = 400.000.
Populasi dianggap berdistirbusi normal, dengan ukuran tak terbatas dengan simpangan baku σ_x tak diketahui.

Sampel berukuran n = 20 (kecil), data dalam ribuan rupiah.

X= $\frac{\sum X}{n}$ = $\left(\frac{450+300+480+\cdots+425}{20}\right)$ x1.000 = 398.000

$\sum X^2$ = 3.245.550

$$S_x^2 = \frac{n\sum X^2 - (\sum X)^2}{n(n-1)} = \frac{20(3.245.550) - (7.960)^2}{20(19)} = 4.077.368$$

$$S_x = \sqrt{4.077.368} = 63{,}85$$

Maka diperoleh $\sigma_x = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \frac{63{,}85}{\sqrt{20}} = 14{,}277$

1). $H_o : \mu = 400.000$ dan $H_1 : \mu > 400.000$

2). $\alpha =$ 5%, ϑ=20-1=19, nilai kritis $t_{(\alpha,\vartheta)} = t_{(0,05;19)} = 1{,}729$ atau -1,729

3). Uji statistik,

$$t_h = \frac{X - \mu_o}{\sigma_x} = \frac{398.000 - 400.000}{14{,}277} = -140{,}085$$

4) Diperoleh nilai T_h = -140,085 <-1,729 = $t_{(0,05;19)}$

Kesimpulan: tolak H_o, dengan kata lain, berdasarkan data yang diperoleh dan sampel ternyata rata-rata uang yang dibelanjakan tiap responden setiap kali kunjungan lebih besar dan Rp400.000,00. Dalam hal ini, rata-rata uang yang dibelanjakan oleh responden yang dihitung dan sampel, yaitu Rp398.000,00 dibandingkan dengan rata-rata uang yang dibelanjakan oleh responden berdasarkan populasi yaitu $=$ Rp400.000,00 ternyata perbedaannya signifikan pada α $=$ 5%.

5. Suatu industri lampu pijar ingin mengetahui perkembangan hasil industrinya dengan jalan mengambil sampel sebanyak 160 buah lampu pijar merek DOP, yang menunjukkan daya hidup rata-rata 1.410 jam dengan standar deviasi 130 jam Di samping itu diambil juga sampel random lain sebanyak 21O buah lampu pijar merek SINAR yang mempunyai daya hidup rata-rata 2.110 jam dengan standar deviasi 90 jam. Ujilah hipotesis yang menyatakan daya tahan kedua merek lampu tersebut adalah berbeda! Gunakan α $=$ 5% dan asumsikan dua populasi berdistribusi normal.

Ja wab:

Populasi lampu pijar merek DOP dan populasi lampu pijar merek SINAR dianggap: berdistribusi normal, tak terbatas dengan variansi yang tidak diketahui.

$\mu_1 =$ rata-rata daya hidup lampu merek DOP

$\mu_2 =$ rata-rata daya hidup lampu merek SINAR

Sampel yang diambil dari dua populasi adalah besar, yaitu:

Merk DOP; n_1 $=$ 160, X_1 $=$ 1.410, dan S_1 $=$ 130

Merk SINAR; n_2 $=$ 210, X_2= 2.110, dan S_2 $=$ 90

Karena σ_1 dan σ_2 dari populasi tidak diketahui dan sampel cukup besar maka kita taksir dengan nilai S_1 $=$ 130 dan S_2 $=$ 9, sehingga:

$$\sigma_{x_1-x_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{(130)^2}{160}+\frac{(90)^2}{210}} = 12{,}0$$

1) Hipotesis: H_o: $\mu_1 = \mu_2$ dan $H_1 = \mu_1 \neq \mu_2$

2) α = 5%, uji dua arah, nilai kritis $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,025} = +1,96$ atau -1,96. Daerah

penolakan ada di bagian kiri nilai kritis $Z_{0,025} = -1,96$ dan ada dibagian kanan nilai kritis $Z_{0,025} = +1,96$

3) Statistik Uji:

$$Z_h = \frac{(X_1 - X_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{x_1} - X_2} = \frac{1.410 - 2.110) - 0}{12,0} = -58,33$$

4) Maka.diperoleh nilai $Z_h = -58,33 < -1,96 = Z_{0,025}$

Kesimpulan:

tolak H_o, dengan kata lain, rata-rata daya hidup dua merek lampu tersebut ternyata perbedaannya signifikan pada taraf signifikansi $\alpha = 5\%$.