Лекции №№ 4 – 5 (3 марта 2022)

Глава II. Математическое описание линейных непрерывных систем автоматического управления (ЛНСАУ).

2.1. Преобразование Лапласа в теории автоматического управления.

При рассмотрении САУ, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, удобно использовать преобразование Лапласа, позволяющее заменить решение дифференциальных уравнений решением алгебраических уравнений.

Опр. Прямым преобразованием Лапласа называется соотношение

$$\boxed{F(p)=\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt}, \tag{1}$$

ставящее функции $f(t)$ вещественного аргумента в соответствие функцию $F(p)$ комплексной переменной p ($p=\sigma+j\omega$).

При этом функция $f(t)$ называется оригиналом,

а функция $F(p)$ – изображением по Лапласу,

p – переменная преобразования Лапласа.

Условно прямое преобразование Лапласа записывается в виде:

$$F(p)=L\{f(t)\} \text{ (или } L[f(t)]\text{)},$$

где L – оператор прямого преобразования Лапласа.

Также пользуются обозначением:

$$f(t)\div F(p)$$

(Оригинал обозначают строчной, а его изображение – одноименной прописной буквой.)

Для того чтобы функция $f(t)$ имела изображение по Лапласу, необходимо, чтобы она обладала следующими свойствами:

1) $f(t)$ определена и интегрируемая на интервале $[0;+\infty)$;

2) $f(t)\equiv 0$ при $t<0$ [1],

3) $f(t)$ имеет экспоненциальный порядок:

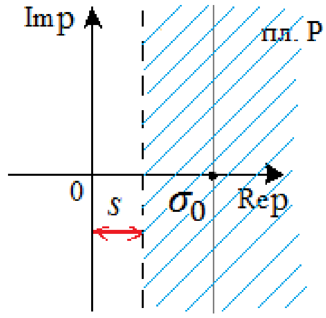
$\exists$ такие константы $s>0$, $M>0$, что

$$|f(t)|<M\cdot e^{st} \tag{2}$$

[1] Т.е. должны рассматриваться сигналы, начинающие действовать в определенный момент времени, принимаемый за начало отсчета: t=0.

Функцию, обладающую указанными свойствами, называют оригиналом.

Интеграл (1) абсолютно сходится при $Re\,p > s$ (где s – постоянная из (2)). Следовательно, изображение $F(p)$ существует в полуплоскости $Re\,p > s$.



Опр. Обратным преобразованием Лапласа называют соотношение

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(p)e^{pt}dp},$$

определяющее по известному изображению оригинал. На выбранной прямой интегрирования $p = \sigma_0 + j\omega$, при $-\infty \xrightarrow{\omega} +\infty$, должно выолняться $\sigma_0 > s$ (т.е. интеграл в данном выражении берется вдоль любой прямой $p = \sigma_0 + j\omega$ (где ω меняется от $-\infty$ до $+\infty$), такой, что $Re\,p = \sigma_0 > s$).

Условно обратное преобразование Лапласа записывается в виде:

$$f(t) = L^{-1}\left[F(p)\right],$$

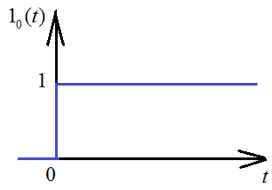
где L^{-1} – оператор обратного преобразования Лапласа.

Изображения по Лапласу[1] часто используемых в ТАУ функций.

Введем понятия:

Функция единичного скачка (единичная функция; функция Хевиса́йда) –

$$\boxed{1_0(t) = \begin{cases} 1, \; при\; t \geq 0 \\ 0, \; при\; t < 0 \end{cases}}$$

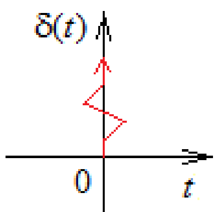


Иногда обозначается как $u(t)$.

(Произведение $f(t)\cdot 1_0(t)$ равно $\begin{cases} f(t), \; при\; t \geq 0 \\ 0, \; при\; t < 0 \end{cases}$)

Дельта-функция (δ-функция; функция Дира́ка; единичный импульс[2]) –

$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases} 0, \; при\; t \neq 0 \\ \infty, \; при\; t = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1}$$



---

[1] Вместо «изображение по Лапласу» также говорят «изображение Лапласа»

[2] Единичный импульс – импульс, интеграл которого равен единице, а продолжительность стремится к нулю.

Аналитическое выражение δ-функции может быть представлено в виде:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left[1_0(t) - 1_0(t-\tau)\right]$$

$\delta(t)$ может рассматриваться как производная единичной функции:

$$\boxed{\delta(t) = \frac{d1_0(t)}{dt}}$$

– связь между δ-функцией и единичной функцией.

Изображения по Лапласу:

$f(t)$	$F(p)$
$a \cdot 1_0(t) \quad (a = \text{const})$	$\frac{a}{p}$
$a \cdot \delta(t) \quad (a = \text{const})$	a
$b \cdot t \cdot 1_0(t) \quad (b = \text{const})$	$\frac{b}{p^2}$
$t^n \cdot 1_0(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-\alpha t} \cdot 1_0(t)$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$t \cdot e^{-\alpha t} \cdot 1_0(t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
$(\sin\beta t) \cdot 1_0(t)$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$(\cos\beta t) \cdot 1_0(t)$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
$2 \cdot \sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{p \cdot \sqrt{p}}$

Основные свойства преобразования Лапласа.

1^0. *Свойство линейности (теорема о сложении)*: для любых постоянных a_1 и a_2

$$L\left[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right] = a_1 L\left[f_1(t)\right] + a_2 L\left[f_2(t)\right] = a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p),$$

т.е. преобразование Лапласа от суммы функций равно сумме преобразований слагаемых, и постоянные множители можно выносить за знак преобразования.

2^0. *Теорема о дифференцировании оригинала:*

$$L\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(+0) - p^{n-2} \cdot f'(+0) - \ldots - p \cdot f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0),$$

где $f^{(k)}(+0)=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{d^k f(t)}{dt^k}$ (предел справа; $+0=0+\xi$, $\xi>0$, $\xi\to 0$)

Например,

$$L[f'(t)]=p\cdot F(p)-f(+0)$$

$$L[f''(t)]=p^2\cdot F(p)-p\cdot f(+0)-f'(+0)$$

Если $f(+0)=f'(+0)=\ldots=f^{(n-1)}(+0)=0$, то $\boxed{L\left[f^{(n)}(t)\right]=p^n\cdot F(p)}$

– т.е. при нулевых начальных условиях дифференцированию оригинал соответствует умножение изображения на p^n.

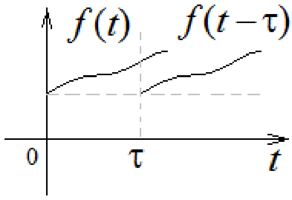
3⁰. Теорема об интегрировании оригинала:

$$L\left[\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(p)}{p}$$

(т.е. интегрированию в области оригиналов соответствует деление изображения на независимую переменную).

4⁰. Теорема о запаздывании:

$$L[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}\cdot L[f(t)]=e^{-p\tau}\cdot F(p)$$



- функция с запаздывающим аргументом

5⁰. Теорема о подобии: при $a>0$ имеет место

$$L[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

6⁰. Теорема о свертке (теорема об умножении изображений):

если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – оригиналы, а $F_1(p)$ и $F_2(p)$ – изображения, то

$$F_1(p)\cdot F_2(p)=L\left[\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau\right]=L\left[\int\limits_0^t f_2(\tau)\cdot f_1(t-\tau)d\tau\right]$$

Интеграл в правой части называют <u>сверткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$</u>.

(Т.е. преобразованию Лапласа свертки функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответствует произведение изображений $F_1(p)$ и $F_2(p)$).

7⁰. Теорема о конечном значении функции:

Если $\exists$ предел $f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$, то он равен

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{p\to 0}p\cdot F(p)$$

8⁰. Теорема о начальном значении функции:

$f(0)=\lim\limits_{p\to\infty} p\cdot F(p)$, если этот предел $\exists$.

$\mathbf{9^0}$. ***Теорема разложения*** (дает возможность найти оригинал по изображению):

1) Если $F(p)=\dfrac{B(p)}{A(p)}$ – дробно-рациональная функция ($A(p)$ и $B(p)$ – полиномы: $A(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n$, $B(p)=b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m$), $m\le n$ и корни p_i, $i=\overline{1,n}$, уравнения $A(p)=0$ являются простыми, то

$$\boxed{f(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{B(p_i)}{A'(p_i)}e^{p_it}}, \qquad (*)$$

(при $t\ge 0$; при $t<0$ $f(t)\equiv 0$)

где $A'(p_i)=\left.\dfrac{dA(p)}{dp}\right|_{p=p_i}$

2) Если $F(p)=\dfrac{B(p)}{pA_1(p)}$ (т.е. полином $A(p)$ имеет нулевой корень ($\sim a_n=0$)), то

$$\boxed{f(t)=\frac{B(0)}{A_1(0)}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{B(p_i)}{p_iA_1'(p_i)}e^{p_it}},$$

(Это соотношение вытекает из (*), если учесть, что $A'(p)=\left(pA_1(p)\right)'=A_1(p)+pA_1'(p)$)

Пример.

Определить функцию $f(t)$, изображение которой имеет вид: $F(p)=\dfrac{5}{p(p+1)}$.

Решение:

$B(p)=5$

$A(p)=pA_1(p)$, $A_1(p)=p+1$ $\quad\to$ находим корни уравнения $A_1(p)=0$: $\quad p=-1$

$A_1'(p)=1$

$f(t)=\dfrac{5}{1}+\dfrac{5}{-1\cdot 1}e^{-t}=5(1-e^{-t})$

Преобразование Фурье.

Опр. Прямым преобразованием Фурье называется интеграл

$$\boxed{F(j\omega)=F\left[f(t)\right]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt}$$

$f(t)\div F(j\omega)$

$f(t)$ должна удовлетворять требованиям:

1) являться абсолютно интегрируемой (т.е. $\int_0^\infty |f(t)|dt < \infty$) на интервале $[0; +\infty)$;

2) на любом конечном интервале должна удовлетворять условиям Дирихле:

а) рассматриваемый интервал можно разбить на конечное число интервалов, в пределах которых $f(t)$ непрерывна и монотонна;

б) если t_0 является точкой разрыва функции $f(t)$, то $\exists$ $f(t_0+0)$ и $f(t_0-0)$

Физический смысл преобразования Фурье – представление функции $f(t)$ в виде бесконечного множества гармонических составляющих, образующих непрерывный спектр.

(Альтернативная формулировка физического смысла ПФ: изображение по Фурье – это представленный в комплексной форме спектр (амплитудно-частотный спектр) функции $f(t)$).

Обратное преобразование Фурье –

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

Физический смысл обратного преобразования Фурье – получение оригинала (процесса во времени) по известному спектру этой функции.

2.2. Математические модели САУ. Типы математических моделей.

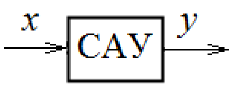
Для расчета и анализа работы системы управления ее заменяют математической моделью (ММ).

Опр. Математической моделью системы называют любое соотношение, заданное аналитически (с помощью уравнений), графически (в виде графиков, структурных схем или графов), или в виде таблицы, которое описывает процессы, протекающие в системе.

Бóльшая часть систем представляется математическими моделями в виде дифференциальных уравнений, на языке которых сформулированы основные законы механики и физики макромира.

Для получения уравнений САУ обычно составляют уравнения для каждого входящего в нее элемента. Совокупность всех уравнений элементов и даст математическую модель системы.

Элементы, образующие систему автоматического управления, представляют собой преобразователи входного воздействия (или величины) в выходную величину, вообще говоря, иной формы и, возможно, иной природы.



Так, например, для электродвигателя в рассмотренном в п. 1.6 примере входной величиной является напряжение, приложенное к якорной цепи, а выходной – скорость вращения вала двигателя.

САУ также является преобразователем входной величины (в общем случае векторной) в выходную (-ые). Будем обозначать их как $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

В связи с этим можно дать второе определение ММ системы:

Опр. Математическая модель системы – это совокупность уравнений, описывающая связь между входными воздействиями на систему и ее выходными регулируемыми переменными.

! Математическая модель одной и той же системы в зависимости от цели управления может быть разной.

При построении ММ всегда делают какие-либо допущения и упрощения, чтобы не усложнять исследование. Поэтому математическая модель никогда не бывает тождественна рассматриваемой системе. С другой стороны, модель должна как можно полнее отражать свойства реальной системы. Необходимость нахождения компромисса между двумя противоречивыми требованиями к модели (ее простоты и в то же время полноты) приводит к тому, что процедура составления модели зачастую разбивается на этапы. На начальном этапе исследования рекомендуется принимать простейшую модель, а затем ее постепенно усложняют, чтобы учесть дополнительные факторы, которые на начальном этапе были отброшены как несущественные.

Если ММ получилась слишком подробной и сложной (для конкретной задачи), то исследователь может попытаться упростить ее (понизить размерность, линеаризовать и т.д.)

Существует 2 типа математических моделей систем автоматического управления:

- линейные

и

- нелинейные

Опр. ММ называется линейной, если она состоит только из линейных уравнений (алгебраических, дифференциальных или разностных). Соответствующая ей система автоматического управления является линейной.

Пример линейной ММ: $a_0 y' + a_1 y = bx$

Если хотя бы одно из уравнений мат. модели является нелинейным, то ММ и соответствующая ей система называются нелинейными.

Пример нелинейной ММ: $F(y''', y'', y', y, x', x) = 0$

На практике физические системы в основном нелинейны и нестационарны[1].

Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции: реакция системы на сложное воздействие равна сумме реакций на каждую составляющую воздействия в отдельности.

[1] т.е. их параметры зависят от времени

Так, например, если входным воздействиям $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответствуют выходные переменные $y_1(t)$ и $y_2(t)$:

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{САУ}} \longrightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{САУ}} \longrightarrow y_2(t),$$

то входной переменной $\left(x_1(t)+x_2(t)\right)$ будет соответствовать выходная переменная $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$:

$$x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{САУ}} \longrightarrow y_1(t)+y_2(t)$$

При изучении нелинейных систем принцип суперпозиции неприменим. Это чрезвычайно осложняет их количественный анализ. Кроме того, само решение нелинейных дифференциальных уравнений в большинстве случаев является сложным. Поэтому обычно предпринимаются попытки заменить нелинейную модель линейной и исследовать последнюю.

Процесс преобразования нелинейных уравнений в линейные называется <u>линеаризацией</u>.

Пример.

Рассмотрим ММ системы управления следующего вида:

$F(\ddot{y},\dot{y},y,\dot{x},x)=0$ – нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка,

где x – входная переменная,
y – выходная переменная.

Пусть заданному режиму соответствуют значения:

$$\left.\begin{array}{l} x=x^0=\text{const},\ \dot{x}=0 \\ y=y^0=\text{const},\ \dot{y}=0,\ \ddot{y}=0 \end{array}\right\}$$ обозначим данную рабочую точку как т. М

В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что входная и выходная переменные изменяются так, что их отклонения от заданных значений остаются все время достаточно малыми.

Обозначим отклонения реальных значений x и y от требуемых через Δx и Δy. Тогда

$x(t)=x^0+\Delta x(t)$[1], $\dot{x}=\Delta\dot{x}$,

$y=y^0+\Delta y$, $\dot{y}=\Delta\dot{y}$, $\ddot{y}=\Delta\ddot{y}$.

Подставим эти выражения в исходное уравнение и, рассматривая $F(\ddot{y},\dot{y},y,\dot{x},x)$ как функцию независимых переменных $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y, $\dot{x}$ и x, разложим ее в ряд Тейлора вблизи рабочей точки М:

$$\underbrace{F(\cdot)\big|_M}_{=0\ \text{в силу исходного уравнения}}+\left.\frac{\partial F(\cdot)}{\partial\ddot{y}}\right|_M\cdot\Delta\ddot{y}+\left.\frac{\partial F(\cdot)}{\partial\dot{y}}\right|_M\cdot\Delta\dot{y}+\left.\frac{\partial F(\cdot)}{\partial y}\right|_M\cdot\Delta y+\left.\frac{\partial F(\cdot)}{\partial\dot{x}}\right|_M\cdot\Delta\dot{x}+\left.\frac{\partial F(\cdot)}{\partial x}\right|_M\cdot\Delta x+\begin{pmatrix}\textit{члены высшего}\\ \textit{порядка малости}\end{pmatrix}=0$$

[1] Зависимость от времени далее будем опускать.

Пренебрегая членами более высокого порядка малости, чем приращения и их производные,[1] получаем линейное уравнение системы в виде:

$a_0\Delta \ddot{y}+a_1\Delta \dot{y}+a_2\Delta y+b_0\Delta\dot{x}+b_1\Delta x=0$,

где коэффициенты a_i и b_j – постоянные, если $F(\cdot)$ не зависит явно от *t* и заданный режим является статическим (т.е. величины y^0 и x^0 не зависят от времени).

Это уравнение является приближенным. Неизвестными функциями времени в нем являются отклонения Δx и Δy (от рабочей точки). Поэтому его называют уравнением в приращениях.

Такая линеаризация – разложением нелинейных функций, входящих в уравнения, в ряд Тейлора вблизи точки, соответствующей заданному режиму, отбрасывая нелинейные относительно отклонений и их производных члены, – называется линеаризацией вблизи рабочей точки или касательной аппроксимацией.

Для того чтобы линеаризация вблизи рабочей точки была возможна, должны выполняться условия:

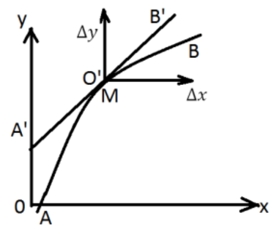
1. отклонения входной величины (Δx) и выходной величины (Δy) от заданных значений достаточно малы;
2. функция $F(\cdot)$ является аналитической в рабочей точке (в этой точке может быть представлена сходящимся рядом Тейлора).

Геометрически линеаризация нелинейной модели означает, что гиперповерхность $F(\cdot)=0$ заменяется гиперплоскостью, касательной к этой поверхности в рабочей точке, и перенос начала координат в эту точку.

В двумерном случае:

замена исходной кривой AB отрезком касательной $A'B'$

и перенос начала координат в эту точку (т. М):



2.3. Формы представления ММ систем.

Существует 2 основных подхода к представлению систем управления моделями: один использует представление процессов в системах и самих систем в переменных «вход-выход», а другой подход использует представление в переменных состояния.

1. Модель в форме уравнения «вход-выход».

Модель односвязной стационарный линейной системы с сосредоточенными параметрами в переменных «вход-выход» имеет вид:

$$a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\dot{y}+a_n y=b_0 x^{(m)}+b_1 x^{(m-1)}+\ldots+b_m x \qquad (1)$$

(описание с помощью дифференциального уравнения высокого порядка),
где x – входное (управляющее) воздействие,

[1] $(\Delta x)^2$, $(\Delta\dot{x})^2$, $(\Delta y)^2$ и т.д. – нелинейные относительно отклонений и их производных члены.

y – выходная переменная,

n – порядок системы ($m \le n$ из условия физической реализуемости системы)

Данный метод описания является наиболее ранним. Он обладает в основном техническим преимуществом: исследователь имеет дело с физическими переменными.

2. Описание системы в пространстве состояний (~ модель в форме уравнений состояния; модель вход – переменные состояния –выход; модель в переменных состояния)

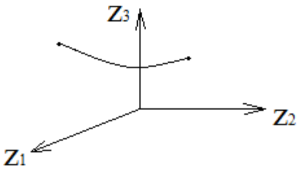
Дифференциальное уравнение высокого порядка сводится к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка (СДУ в нормальной форме Коши).

Опр. Переменные состояния – комплекс переменных (как контролируемых, так и неконтролируемых, т.е. недоступных измерению), которые определяют состояние (~ поведение) системы в каждый момент времени.

Опр. Под состоянием системы понимается минимальная информация о системе, необходимая для определения ее выходной переменной по входной.

Состояние в фиксированный момент времени – точка в n-мерном пространстве (пространстве состояний).

Опр. Пространством состояний называется метрическое пространство, каждый элемент которого полностью определяет состояние рассматриваемой системы в фиксированный момент времени и ее состояние в последующие моменты времени, если известно управляющие воздействие.



– т.е. траекторию можно рассчитать, зная $\vec{z}$ и управляющее воздействие $\vec{x}$

Размерность вектора $\vec{z}$ равна n.

Формальное описание систем в пространстве состояний состоит из двух частей:

$$\begin{cases} \dot{\vec{z}} = F(\vec{z},\vec{x},t) + H(t)\vec{\xi}(t) & \text{– система дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши} \\ \vec{y} = \underbrace{G(\vec{z},\vec{x},t)}_{\textit{нелинейная матричная функция}} + P(t)\vec{\eta}(t) & \text{– уравнение связи (уравнение выхода) – позволяет найти искомый процесс на выходе (} \vec{y} \text{), зная } \vec{z} \text{ и } \vec{x} \end{cases} \quad (2)$$

где $\vec{z} = (z_1,...,z_n)^T$ – вектор переменных состояния (их число всегда равно порядку системы или степени дифференциального уравнения, описывающего систему между входом и выходом);

$\vec{x} = (x_1,...,x_m)^T$ – вектор управления, состоящий из входных воздействий / вектор управляющих воздействий

$\vec{y} = (y_1,...,y_p)^T$ – вектор выходных переменных;

$\vec{\xi}$ – n-мерный вектор шумов (случайное влияние), H – матрица взаимного влияния шумов;

$\vec{\eta}$ – вектор погрешностей измерений, P – матрица корреляции погрешностей измерений;

t – время.

ММ (2) – мат. модель многосвязной нелинейной нестационарной стохастической системы.

Для многосвязной линейной стационарной детерминированной системы ММ в переменных состояния имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\vec{z}} = A\vec{z} + B\vec{x} \\ \vec{y} = C\vec{z} + D\vec{x} \end{cases} \tag{3}$$

где A – матрица состояния размерности $n \times n$, B – матрица управления ($n \times m$), C – матрица наблюдения ($p \times n$), D – матрица влияния (или матрица связи вход-выход ($p \times m$).

Представление систем в форме уравнений состояния является более единообразным и удобным, позволяя однотипно доказывать теоремы в системах различного порядка, получать единообразные алгоритмы численного решения задач. Это наиболее общий способ задания широкого класса объектов, включая нелинейные многосвязные системы.

Метод пространства состояний является основой современной ТАУ.

Уравнение «вход-выход» можно преобразовать к модели в переменных состояния, но такое преобразование является неоднозначным: для одной системы можно выбрать бесконечное множество наборов переменных состояния (важно, чтобы эти переменные были линейно независимы). Обратное преобразование является однозначным, но должны выполняться определенные условия.

Наиболее простое описание в ПС получается, если в качестве переменных состояния выбираются выходная переменная y и ее производные до $(n-1)$ порядка включительно:

$z_1 = y$, $z_2 = \dot{y}$, ..., $z_n = y^{(n-1)}$

Тогда вместо (1)[1] (для случая, 1) когда управление x задано аналитически (т.е. в явном виде): $x_1 = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \ldots + b_m x$ или 2) когда $\vec{x} \in R^1$) будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \dfrac{1}{a_0}(-a_1 z_n - \ldots - a_n z_1) + \dfrac{1}{a_0} x_1 \\ y = z_1 \end{cases}$$ – уравнения в форме Фробениуса (нормальная форма УС)

Здесь матрицы A, B, C и D имеют вид:

[1] ММ одноканального объекта

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \dots & 1 \\ \frac{-a_n}{a_0} & \dots & \dots & \dots & \frac{-a_1}{a_0} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_0} \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\ D = [\varnothing].$$

При заданных начальных условиях ММ дает возможность по управляющему воздействию $\vec{x}$ найти выходную переменную $\vec{y}$.

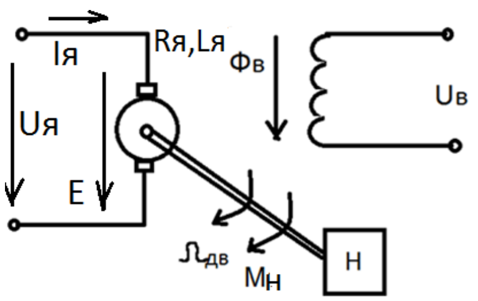
НУ для модели «вход-выход»: $y(t_0) = y_0$, $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$, $y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$ (кроме того, надо задать начальные значения для x и производных x: $x(t_0) = x_0$, ..., $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, $x^{(m-1)}(t_0) = x_0^{(m-1)}$.)

НУ для ММ в переменных состояния: $\vec{z}(t_0) = \vec{z}_0$.

2.4. Пример составления математической модели.

Рассмотрим пример составления математической модели двигателя постоянного тока с независимым возбуждением и якорным управлением.

Схема ДПТ:



Здесь $U_я$ – напряжение, подаваемое на якорную обмоОВ электродвигателя, которое будем считать входным (или управляющим) воздействием (x);

$I_я$, $R_я$ и $L_я$ – ток в обмотке якоря, сопротивление и индуктивность якорной цепи соответственно;

E – противоЭДС, т.е. напряжение, возникающее в обмотке якоря в результате его вращения в магнитном поле;

ОВ – обмотка возбуждения, $\Phi_в$ – поток возбуждения;

$\Omega_{дв}$ – скорость вращения вала двигателя, которую будем считать выходной (или управляемой) величиной (y);

$M_н$ – момент нагрузки на валу двигателя (= моменту сопротивления внешних сил), который является возмущающим воздействием (f).

Запишем основные уравнения, характеризующие процессы в двигателе:

1. Уравнение электрического равновесия якорной цепи имеет вид:

(описывает переходный электрический процесс в обмотке якоря)

$$U_я(t) = R_я I_я(t) + L_я \frac{dI_я(t)}{dt} + E(t)$$

Или, с учетом того, что при $\varPhi_в = const$ $E \cong C_e \cdot \Omega_{дв}$ (C_e – коэффициент пропорциональности между противоЭДС и скоростью вращения вала двигателя при $\varPhi_в = const$):

$$\boxed{U_я(t) = R_я I_я(t) + L_я \frac{dI_я(t)}{dt} + C_e \cdot \Omega_{дв}(t)} \qquad (1)$$

2. Уравнение равновесия моментов на валу двигателя следующее:

$$\boxed{\underbrace{J\frac{d\Omega_{дв}(t)}{dt} + M_н(t)}_{\text{вращающий момент, создающий вращение нагрузки с определенной скоростью}} = \underbrace{C_м \cdot I_я(t)}_{\text{вращающий момент двигателя, развиваемый за счет взаимодействия потока возбуждения } \varPhi_в \text{ с током } I_я \text{ в обмотке якоря}}} \qquad (2)$$

где $C_м$ – коэффициент пропорциональности между развиваемым двигателем моментом и током якорной цепи при $\varPhi_в = const$,

J – приведенный момент инерции всех подвижных частей, связанных с валом двигателя.

Введем обозначения: $\underline{y = \Omega_{дв}}$ – выходная переменная; $\underline{x = U_я}$ – управляющее воздействие;

$\underline{f = M_н}$ – возмущение. Выберем $\underline{z_1 = y = \Omega_{дв}}$, $\underline{z_2 = I_я}$ – переменные состояния;

Тогда математическая модель двигателя постоянного тока в форме уравнений состояния будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 \overset{из\_(2)}{=} \dfrac{C_м}{J} z_2 - \dfrac{1}{J} f \\ \dot{z}_2 \overset{из\_(1)}{=} -\dfrac{C_e}{L_я} z_1 - \dfrac{R_я}{L_я} z_2 + \dfrac{1}{L_я} x \\ y = z_1 \end{cases}$$

2.5. Понятия управляемости и наблюдаемости САУ. Критерии управляемости и наблюдаемости Р. Калмана.

Дадим понятия управляемости и наблюдаемости системы.

Термин «управляемость» физически означает возможность перевода системы из любого начального состояния (режима работы) $\vec{z}(t_0) = \vec{z}_0$ в любое конечное состояние $\vec{z}(t_1) = \vec{z}_1$ за конечное время $\Delta t = t_1 - t_0$ путем приложения допустимого управления $\vec{x}(t)$.

Термин «наблюдаемость» физически означает возможность определения начального состояния системы $\vec{z}(t_0)=\vec{z}_0$ по реакции $\vec{y}(t)$ на выходе системы на интервале времени $[t_0, t_1]$ при заданном управляющем воздействии $\vec{x}(t)$.

Дадим строгие определения:

Опр. Система называется управляемой в момент времени $t=t_0$, если для любого заданного состояния $\vec{z}(t_0)=\vec{z}_0$ и любого другого заданного состояния $\vec{z}(t_1)=\vec{z}_1$ можно выбрать такое управление $\vec{x}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, которое переводит систему из состояния $\vec{z}_0$ в состояние $\vec{z}_1$ за конечное время $\Delta t = t_1 - t_0$.

Опр. Система называется наблюдаемой в момент времени $t=t_0$, если по известным измеряемым на интервале $[t_0, t_1]$ входным $\vec{x}(t)$ и выходным $\vec{y}(t)$ переменным можно однозначно определить начальное состояние $\vec{z}(t_0)=\vec{z}_0$.

Задача восстановления переменных состояния $\vec{z}(t)$ по данным измерения выходных переменных $\vec{y}(t)$ и входных переменных $\vec{x}(t)$ актуальна, т.к. часто не все переменные состояния доступны для измерения. В то же время информация о переменных состояния z_1, ..., z_n в каждый момент времени нужна для осуществления управления.

Оценка управляемости и наблюдаемости линейной стационарной системы осуществляется по модели в переменных состояния на основе критериев управляемости и наблюдаемости Р. Калмана[1].

Теорема (Критерий управляемости Р. Калмана)

Линейная *n*-мерная система

$$\begin{cases} \dot{\vec{z}} = A\vec{z} + B\vec{x} \\ \vec{y} = C\vec{z} + D\vec{x} \end{cases}$$

управляема тогда и только тогда, когда матрица управляемости Калмана[2]

$$\left\| B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \ \dots \ \vdots A^{n-1}B \right\|$$

имеет ранг *n*, т.е. выполняется равенство

$$rang \left\| B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \ \dots \ \vdots A^{n-1}B \right\| = n.$$

Здесь n – размерность пространства состояний (порядок системы): $\vec{z} \in R^n$;
$\vec{x} \in R^m$ – вектор управляющих воздействий;
$\vec{y} \in R^p$ – вектор выходных переменных.

Формирование матрицы управляемости Калмана выполняется по итерационному алгоритму: $A^2B = A \cdot AB, \ \dots \ , A^{n-1}B = A \cdot A^{n-2}B$

---

[1] Ру́дольф Э́миль Ка́лман (19 мая 1930 – 2 июля 2016) – американский инженер и исследователь в области теории управления.
[2] является блочной матрицей

Всего указанная матрица содержит n блоков по m столбцов каждый.

Из любых n столбцов можно составить определитель размерности $n \times n$. Если хотя бы один из таких определителей не равен нулю, то система управляема.

Теорема (Критерий наблюдаемости Р. Калмана)

Для того, чтобы линейная стационарная система

$$\begin{cases} \dot{\vec{z}} = A\vec{z} + B\vec{x} \\ \vec{y} = \underset{[p\times n]}{C}\,\vec{z} \end{cases}$$

была полностью наблюдаема, необходимо и достаточно матрица наблюдаемости

$$\left\| C^T \vdots A^T C^T \vdots (A^T)^2 C^T \vdots \ \dots \ \vdots (A^T)^{n-1} C^T \right\|$$

имела ранг n, т.е. чтобы выполнялось условие

$$rang\left\| C^T \vdots A^T C^T \vdots (A^T)^2 C^T \vdots \ \dots \ \vdots (A^T)^{n-1} C^T \right\| = n.$$

(Матрицу D, не уменьшая общности, можно считать нулевой, т.к. вход предполагается известным, вследствие чего она и не входит в условие наблюдаемости).

Пример.

Оценить управляемость и наблюдаемость системы, описываемой уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 3z_1 + 2z_2 + x_1 \\ \dot{z}_2 = 6z_1 + 4z_2 + x_2 \\ y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 \end{cases}$$

Решение:

Для данной системы

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{Vmatrix},\ B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\ C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\ D = [\varnothing].$$

Для управляемости системы необходимо и достаточно, чтобы

$rang\left\| B \vdots AB \vdots A^2 B \vdots \ \dots \ \vdots A^{n-1} B \right\| = n$, где n – порядок системы.

$n = 2:$ $\quad rang\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \vdots & 6 & 4 \end{Vmatrix} \overset{?}{=} 2, \ \Rightarrow$ да $\Rightarrow$ система управляема.

Для полной наблюдаемости системы необходимо и достаточно, чтобы

$$rang\left\| C^T \vdots A^T C^T \vdots (A^T)^2 C^T \vdots \ \dots \ \vdots (A^T)^{n-1} C^T \right\| = n..$$

$rang\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 & 6 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 & 4 \end{Vmatrix} \overset{?}{=} 2, \ \Rightarrow$ да $\Rightarrow$ система полностью наблюдаема.