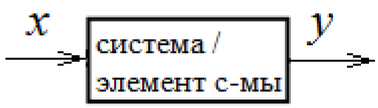
Лекция № 6 (10 марта 2022)

Глава III. Временны́е и частотные характеристики ЛНСАУ и их элементов.

3.1. Понятие динамического звена. Типовые динамические звенья.

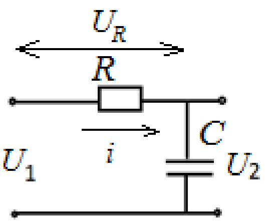
Опр. Под <u>динамическим звеном</u> понимают математическую модель системы или любой ее части, представляющую собой некоторое дифференциальное уравнение, которое выражает зависимость между входной и выходной величинами данной системы (ее части).



Понятие звена – абстрактное понятие.

Одно и то же устройство может описываться различными уравнениями в зависимости от цели исследования. Поэтому нельзя отождествлять физический объект с типом звена, не оговорив входную и выходную величины.

Например: рассмотрим электрическую цепь, содержащую сопротивление R и емкость C.



Пусть входная величина звена –

$x = U_1$,

а и выходная – $y = U_2$ $\quad\rightarrow$

ММ «вход-выход»:

$$\underbrace{RC\frac{dU_2}{dt}}_{U_R} + U_2 = U_1$$

$$RC\frac{dy}{dt} + y = x$$ – инерционное звено (типы звеньев см. ниже)

Если взять за x и y другие переменные, то получим другое динамическое звено:

$x = i$, $\; y = U_R$ $\quad\rightarrow\quad$ $y = Rx$ – безынерционное звено

<u>Классификация звеньев</u> производится именно <u>по виду дифференциального уравнения</u>. Одним и тем же уравнением могут описываться разнообразные устройства (механические, электрические и т.д.). Для ТАУ это будет один и тот же тип звена.

Любую сложную САУ можно представить в виде соединения <u>типовых динамических звеньев</u>, порядок дифференциальных уравнений которых не выше второго.

Типовые динамические звенья

1) <u>Безынерционное (пропорциональное) звено</u> – звено, которое описывается уравнением

$$y(t) = Kx(t),$$

$K = const$ – коэффициент усиления (передачи) звена.

2) <u>Инерционное (апериодическое) звено</u>:

$$T\frac{dy}{dt} + y = Kx\,,$$

где K – коэффициент усиления (передачи) звена, T – постоянная времени звена (измеряется в секундах и характеризует инерционность звена, т.е. скорость его реакции на изменение входного сигнала: T тем больше, чем медленнее изменяется выход. сигнал при изменении входного сигнала.

3) <u>Дифференцирующее звено</u>:

а) <u>идеальное дифференцирующее звено</u>:

$$y = T_0\frac{dx}{dt}$$

(физически нереализуемое звено, т.к. реакция (следствие) y не может опережать причину x) (У физически реализуемого звена $m \le n$ – порядок производной x не может превышать порядок производной y)

На практике не существует такого реального элемента, в котором на выходе точно воспроизводилась бы производная от любого входного сигнала.

б) <u>реальное дифференцирующее звено</u>:

$$T\frac{dy}{dt} + y = T_0\frac{dx}{dt}$$

4) <u>Интегрирующее звено</u>:

$$y(t) = \overset{K}{\frac{1}{T}}\int_0^t x(t)dt$$

5) <u>Упругое звено</u>:

$$T\frac{dy}{dt} + y = K(T_0\frac{dx}{dt} + x)$$

а) <u>упругое дифференцирующее звено</u>: $T_0 > T$

б) <u>упругое интегрирующее звено</u>: $T_0 < T$

6) <u>Форсирующее звено</u>:

$$y = K(T_0\frac{dx}{dt} + x)$$

7) <u>Колебательное звено</u> (частный случай звена второго порядка):

$$T^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi T\frac{dy}{dt} + y = K\,x\,,$$

где $0<\xi<1$ – степень затухания (коэффициент демпфирования[1]), T – постоянная времени, K – коэффициент усиления.

Характеристическое уравнение:

$T^2p^2+2\xi Tp+1=0$

имеет корни $p_{1,2}=\dfrac{-2\xi T\pm\sqrt{(2\xi T)^2-4T^2}}{2T^2}=\dfrac{-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1}}{T}$

При $0<\xi<1$ эти корни являются комплексно сопряженными.

Если $\xi\geq 1$, то корни являются действительными (→ не колебательное звено, а 2 последовательно соединенных инерционных звена (~ апериодическое звено второго порядка)).

Если $\xi=0$, то корни чисто мнимые (→ консервативное звено).

Иногда уравнение колебательного звена записывают в виде:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\xi\omega_0\frac{dy}{dt}+\omega_0^2y=K_1x,$$

где $K_1=K\omega_0^2$, $\omega_0={}^1\!/_T$ – резонансная частота.

3.2. Характеристики динамических звеньев (систем).

При изучении свойств САУ и их отдельных элементов используют следующие характеристики.

1) Дифференциальные уравнения (= уравнения динамики) – определяют связь между входными и выходными переменными звена (или САУ) в каждый момент времени. Уравнения динамики полностью описывает поведение звена (системы) в переходном режиме.

Ранее были рассмотрены две основные формы представления дифференциальных уравнений систем (их элементов):

– математическая модель в форме уравнения «вход-выход»,
– ММ в форме уравнений состояния.

В общем случае линейная стационарная система (или звено) с одним входом и одним выходом описывается следующим дифференциальным уравнением (ММ в форме уравнения «вход-выход»):

[1] Демпфирование колебаний (от нем. dämpfen – уменьшать, заглушать) – принудительное подавление колебаний, либо уменьшение их амплитуды до допустимых значений с помощью устройств, поглощающих энергию колебаний – демпферов.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \ldots + b_m x\,, \qquad (1)$$

где n – порядок системы, $n \geq m$ (т.к. при $n < m$ САУ физически нереализуемы).

Для (1) задаются *начальные условия*: $y(t_0) = y_0$, $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$, $y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$ (кроме того, надо задать начальные значения для x и производных x: $x(t_0) = x_0$, ..., $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, $x^{(m-1)}(t_0) = x_0^{(m-1)}$).

! Дифференциальное уравнение определяют тип динамического звена.

Пример: инерционное звено – $Ty' + y = Kx$

2) Уравнения статики – описывают поведение элемента или САУ в установившемся (статическом) режиме при постоянных входных воздействиях.

Пример: уравнение статики двигателя – $\Omega_{\text{дв}} = K_{\text{дв}} \cdot U_{\text{я}} - K_{\text{м}} \cdot M_{\text{н}}$

Статический режим можно описать графически с помощью статических характеристик.

Статической характеристикой звена (или САУ) называют график зависимости $x_{\text{вых}} = f(x_{\text{вх}})$ выходной переменной от входной, построенный по уравнению статики.

Статическую характеристику также можно построить экспериментально, подавая на вход звена (системы) постоянное воздействие и измеряя выходную переменную после переходного процесса.

В лаб. работе: статические характеристики двигателя:

- регулировочная – $\Omega_{\text{дв}} = f(U_{\text{я}})\big|_{\text{при } M_{\text{н}}=const}$
- нагрузочная – $\Omega_{\text{дв}} = f(M_{\text{н}})\big|_{\text{при } U_{\text{я}}=const}$

3) Передаточная функция звена (САУ) – это отношение изображений по Лапласу выходной и входной величин звена (САУ) при нулевых предначальных условиях:

$$\boxed{W(p) = \left.\frac{Y(p)}{X(p)}\right|_{\substack{y(-0)=y'(-0)=\ldots=y^{(n-1)}(-0)=0 \\ x(-0)=x'(-0)=\ldots=x^{(m-1)}(-0)=0}}}$$

Предначальные условия: значения выходной величины и ее производных (y, y', ..., $y^{(n-1)}$), а также входной величины и ее производных (x, x', ..., $x^{(m-1)}$) в момент $t = 0$ слева.

$$t = -0: \; t = 0 - \xi\,, \quad \begin{matrix} \xi > 0 \\ \xi \to 0 \end{matrix}$$

Нулевые ПНУ означают, что до момента подачи входного воздействия звено (система) находилось в покое.

Если линейная система (звено) имеет несколько входов, то при определении передаточной функции относительно какой-либо одной входной переменной остальные входные переменные полагают равными нулю (это следует из принципа суперпозиции для линейных систем).

Связь между передаточной функцией $W(p)$ и дифференциальным уравнением

Применим к обеим частям уравнения (1) преобразование Лапласа:

$$a_0 L\left[y^{(n)}(t)\right]+a_1 L\left[y^{(n-1)}\right]+\ldots+a_{n-1}L\left[y'\right]+a_n L\left[y(t)\right]=b_0 L\left[x^{(m)}\right]+b_1 L\left[x^{(m-1)}\right]+\ldots+b_m L\left[x\right]^1$$

По теореме о дифференцировании оригинала будем иметь:

$$a_0\left(p^n Y(p)-p^{n-1}y(+0)-p^{n-2}y'(+0)-\ldots-y^{(n-1)}(+0)\right)+\ldots+a_{n-1}\left(pY(p)-y(+0)\right)+a_n Y(p)=$$
$$=b_0\left(p^m X(p)-p^{m-1}x(+0)-\ldots-x^{(m-1)}(+0)\right)+\ldots+b_{m-1}\left(pX(p)-x(+0)\right)+b_m X(p)$$

$$\to\quad Y(p)\left(a_0 p^n+a_1 p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n\right)-N_Y(p)=X(p)\left(b_0 p^m+b_1 p^{m-1}+\ldots+b_{m-1}p+b_m\right)-N_X(p)$$

$$\sim\quad Y(p)\,A(p)-N_Y(p)=X(p)\,B(p)-N_X(p)$$

$N_Y(p)$ – полином порядка $(n-1)$ с коэффициентами, зависящими от начальных условий (т.е. от $y(+0)$, $y'(+0)$, ...) и коэффициентов a_i;

$N_X(p)$ – полином порядка $(m-1)$ с коэффициентами, зависящими от начальных значений x и его производных (т.е. от $x(+0)$, $x'(+0)$, ...) и коэффициентов b_i.

Если предначальные условия: $y(-0)=y'(-0)=...=y^{(n-1)}(-0)=0$, $x(-0)=x'(-0)=...=$ $=x^{(m-1)}(-0)=0$, то можно показать**, что $N_Y(p)=N_X(p)$. И тогда

$$Y(p)\,A(p)=X(p)\,B(p)$$

Отсюда находим передаточную функцию:

$$\boxed{W(p)\;=}\;\left.\frac{Y(p)}{X(p)}\right|_{ПНУ=0}=\boxed{\frac{B(p)}{A(p)}}$$

– связь между дифференциальным уравнением и передаточной функцией.

Обратно: если дана передаточная функция $W(p)=\dfrac{B(p)}{A(p)}$, приходим к уравнению $Y(p)\,A(p)=X(p)\,B(p)$,

$\to\quad a_0 p^n Y(p)+a_1 p^{n-1}Y(p)+\ldots+a_n Y(p)=b_0 p^m X(p)+b_1 p^{m-1}X(p)+\ldots+b_m X(p)$, а затем (при ПНУ=0) – к уравнению (1).

Знаменатель $A(p)=a_0 p^n+a_1 p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n$ передаточной функции называют <u>характеристическим полиномом</u>.

Степень n характеристического полинома называют <u>порядком передаточной функции</u> <u>и</u> соответствующей <u>системы</u>.

Уравнение $\underline{A(p)=0}$ называется <u>характеристическим уравнением</u>.

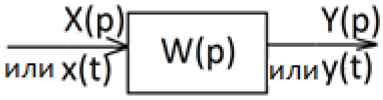
---

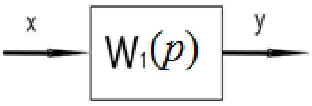
[1] зависимость x и y от времени опускается

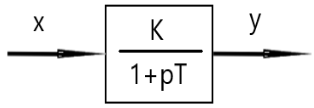
** из теории диф. уравнений

Корни характеристического уравнения (p_i, $i = \overline{1,n}$) называются <u>полюсами передаточной функции</u>, а корни уравнения $B(p) = 0$ – <u>нулями передаточной функции</u>.

На структурной схеме динамическое звено обозначается в виде прямоугольника с указанием входных и выходных переменных, а также <u>передаточной функции</u> внутри него:



Например, 

или с использованием вместо ее аналитического выражения: 

Опр. <u>Структурной схемой</u> называется графическое изображение математической модели системы автоматического управления, которое устанавливает связь между входной и выходной величинами.

При известной передаточной функции $W(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)}$ выходной сигнал $Y(p)$ звена находится как $\boxed{Y(p) = W(p)\,X(p)}$

Примеры определения $W(p)$ ***по дифференциальному уравнению:***

Пример 1.

Дано: $Ty' + y = Kx$ – инерционное звено

Решение: Применим к обеим частям данного уравнения преобразование Лапласа при ПНУ=0: $TpY(p) + Y(p) = KX(p)$ ~ $Y(p)\,A(p) = X(p)\,B(p)$,

где $A(p) = pT + 1$, $B(p) = K$

Находим передаточную функцию как $\boxed{W(p)} = \dfrac{B(p)}{A(p)} = \boxed{\dfrac{K}{1+pT}}$ – передаточная функция инерционного звена.