Лекция № 21 (19 мая 2022)

Глава VI. Анализ качества линейных непрерывных САУ.

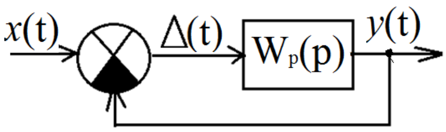
6.1. Общие положения.

Кроме устойчивости, к САУ предъявляют и другие требования.

Опр. Показателями качества [работы] системы автоматического управления называется комплекс требований, определяющих ее поведение в установившемся и переходном режимах отработки заданного [управляющего] воздействия.

Они характеризуют точность работы системы (точность воспроизведения заданного воздействия), ее быстродействие, плавность протекания переходного процесса.

Рассматриваемая САУ имеет вид:



($x(t)$ - задающие воздействие – внешнее воздействие, которое определяет требуемый закон изменения выходной переменной.)

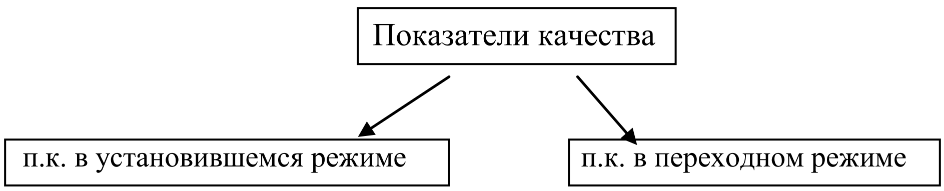
(К такому виду с помощью структурных преобразований можно привести большинство замкнутых САУ.)

Наиболее полной характеристикой качества САУ является ошибка

$$\Delta(t) = x(t) - y(t)$$

(равна отклонению действительного значения регулируемой величины от заданного).

Но эта характеристика не очень удобна, т.к. является функцией времени. Поэтому на практике используют числовые показатели качества.



(характер-т вынужденную составляющую ошибки с-мы) (хар-т свободную составляющую)

! Вопрос качества системы решается только для устойчивых систем (иначе – бессмысленно).

6.2. Показатели качества в установившемся режиме.

Установившаяся ошибка системы [по задающему/возмущающему воздействию] -

$$\boxed{\Delta = \lim_{t\to\infty} \Delta(t)}$$

– характеризует точность системы

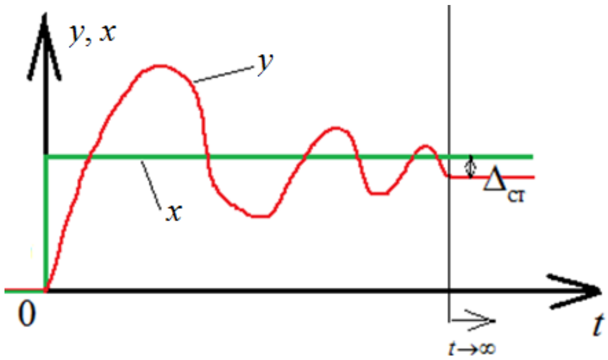
$(\Delta = \Delta^{вынужд} = x(t) - y^{вынужд}(t))$.

Δ зависит от структуры системы (наличия интеграторов, места приложения возмущения) и от внешнего воздействия (единичный скачок, гармонический сигнал, ...).

6.2.1. Статическая ошибка.

Опр. Статическая ошибка – ошибка системы в установившемся режиме при постоянном (или скачкообразном) входном воздействии:

$$\boxed{\Delta_{ст} = \Delta(t)\Big|_{\substack{t\to\infty \\ x=a\cdot 1_0(t)}}}$$



Рассмотрим отдельно 2 случая:

а) Разомкнутая система не содержит интегрирующих звеньев.

б) Разомкнутая система содержит интегрирующие звенья.

Случай а). Будем считать, что $W_p(p)$ приведена к виду

$$W_p(p) = \frac{KB(p)}{A(p)} = \frac{K(b_0p^m + b_1p^{m-1} + ... + 1)}{(a_0p^n + ... + 1)}$$

(свободные члены полиномов $B(p)$ и $A(p)$ равны 1)

$$\boxed{\Delta_{ст}} = \lim_{\substack{t\to\infty \\ x=a\cdot 1_0(t)}} \Delta(t) \overset{по\_теореме\_о}{\underset{конечном\_значении\_функции}{=}} \lim_{\substack{p\to 0 \\ X(p)=a/p}} p\cdot\Delta(p) = \lim_{\substack{p\to 0 \\ X(p)=a/p}} p\cdot W_\Delta(p)\cdot X(p) =$$

$$= \lim_{p\to 0} p\cdot\frac{1}{1+W_p(p)}\cdot\frac{a}{p} = \lim_{p\to 0}\frac{a}{1+\dfrac{KB(p)}{A(p)}} = \boxed{\frac{a}{1+K}}, \qquad (*)$$

где $W_\Delta(p)$ – передаточная функция ошибки по задающему воздействию (относительно входа $x(t)$ и выхода $\Delta(t)$).

! Как видно из выражения (*), статическую ошибку можно уменьшить, увеличивая коэффициент усиления разомкнутой системы.

Случай б). Пусть <u>система содержит интегрирующие звенья</u>

$$W_p(p)=\frac{DB(p)}{pA_1(p)}=\frac{D(b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+1)}{p(a_0p^n+\ldots+1)}$$

(D - добротность – коэффициент усиления разомкнутой астатической системы)

$$\boxed{\Delta_{\text{ст}}}=\lim_{\substack{t\to\infty\\ x=a\cdot 1_0(t)}}\Delta(t)\underset{\text{конечном\_значении\_функции}}{\overset{\text{по\_теореме\_о}}{=}}\lim_{\substack{p\to 0\\ X(p)=a/p}} p\cdot\Delta(p)=\lim_{\substack{p\to 0\\ X(p)=a/p}} p\cdot W_\Delta(p)\cdot X(p)=$$

$$=\lim_{p\to 0} p\cdot\frac{1}{1+W_p(p)}\cdot\frac{a}{p}=\lim_{p\to 0}\frac{a}{1+\dfrac{DB(p)}{pA_1(p)}}=\lim_{p\to 0}\frac{pA_1(p)}{pA_1(p)+DB(p)}=\boxed{0}$$

Классификация системы как статической или астатической производится по отношению к конкретному воздействию на систему.

Опр. <u>Система</u>, в которой **статическая ошибка** от какого-либо воздействия (задающего или возмущающего) **отличного от нуля**, называется <u>статической</u> по отношению к данному воздействию.

Опр. <u>Система</u>, в которой **статическая ошибка** от какого-либо воздействия **равна нулю**, называется <u>астатической</u> по отношению к данному воздействию.

Система с передаточной функцией раз. с-мы вида $W_p(p)=\dfrac{KB(p)}{A(p)}$ – статическая, а с $W_p(p)=\dfrac{DB(p)}{pA_1(p)}$ – <u>астатическая по отношению к **задающему** воздействию</u>.

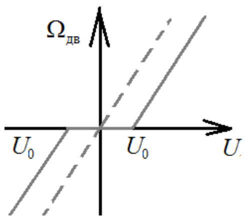
В общем случае статическая ошибка имеет вид:

$$\Delta_{\text{ст}}=\underbrace{\Delta_{\text{ст}\atop\text{структурная}}}_{=0\ \text{для астатич. системы}}+\underbrace{\Delta_{\text{ст}\atop\text{реальной системы}}}_{\text{не равна нулю в реальной системе}},$$

где $\Delta_{\text{ст}\atop\text{структурная}}$ – ошибка, определяемая структурой (принципом работы) системы;

$\Delta_{\text{ст}\atop\text{реальной системы}}$ – эта составляющая определяется нелинейностями типа зоны нечувствительности статических характеристик реальных физических элементов системы (т.е. нелинейностями в области малых сигналов):

(из-за трения двигатель вращается не при очень малом U)



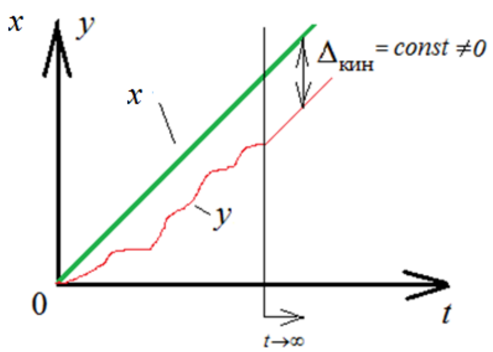
Статистическая ошибка определяет точность работы системы автоматического управления (~ точность воспроизведения задающего воздействия) в установившемся режиме при постоянном входном воздействии. При других типовых входных воздействиях точность САУ определяется кинетической и динамической ошибками.

6.2.2. Кинетическая ошибка.

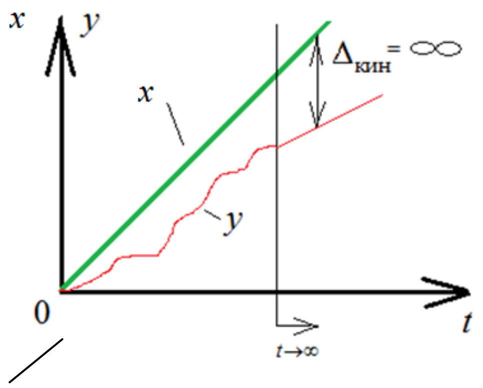
Опр. Кинетическая ошибка – это ошибка системы в установившемся режиме при линейно изменяющемся входном воздействии (т.е. при отработке сигнала постоянной скорости):

$$\boxed{\Delta_{\text{кин}} = \Delta(t)\Big|_{\substack{t\to\infty \\ x=b\cdot t\cdot 1_0(t)}}}$$

Например,



Другой пример:



ошибка неограниченно возрастает (говорят: « $\Delta_{\text{кин}} = \infty$ »)

Случай а). Статическая система:

$$\boxed{\Delta_{\text{кин}}} = \lim_{\substack{t\to\infty \\ x=b\cdot t\cdot 1_0(t)}} \Delta(t) \overset{\text{по\_теореме\_о}}{\underset{\text{конечном\_значении\_функции}}{=}} \lim_{\substack{p\to 0 \\ X(p)=b/p^2}} p\cdot\Delta(p) = \lim_{\substack{p\to 0 \\ X(p)=b/p^2}} p\cdot W_\Delta(p)\cdot X(p) =$$

$$= \lim_{p\to 0} p\cdot\frac{1}{1+W_p(p)}\cdot\frac{b}{p^2} = \lim_{p\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{KB(p)}{A(p)}}\cdot\frac{b}{p} = \boxed{\infty}$$

! Кинетическая ошибка статической системы неограниченно возрастает.

б). Астатическая система:

$$\boxed{\Delta_{\text{кин}}} = \lim_{\substack{t\to\infty \\ x=b\cdot t\cdot 1_0(t)}} \Delta(t) \overset{\text{по\_теореме\_о}}{\underset{\text{конечном\_значении\_функции}}{=}} \lim_{\substack{p\to 0 \\ X(p)=b/p^2}} p\cdot\Delta(p) = \lim_{\substack{p\to 0 \\ X(p)=b/p^2}} p\cdot W_\Delta(p)\cdot X(p) =$$

$$= \lim_{p\to 0} p\cdot\frac{1}{1+W_p(p)}\cdot\frac{b}{p^2} = \lim_{p\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{DB(p)}{pA(p)}}\cdot\frac{b}{p} = \lim_{p\to 0}\frac{pA(p)}{pA(p)+DB(p)}\cdot\frac{b}{p} = \boxed{\frac{b}{D}}$$

! Кинетическая ошибка астатической системы прямо пропорциональна скорости и обратно пропорциональна добротности.

Статическая и кинетическая ошибки относительно *задающего* воздействия воздействия:

$$\boxed{\Delta_{\text{ст}} = \begin{cases} 0 & - \textit{для астатических САУ} \\ \dfrac{a}{1+K} & - \textit{для статических САУ} \end{cases}}$$

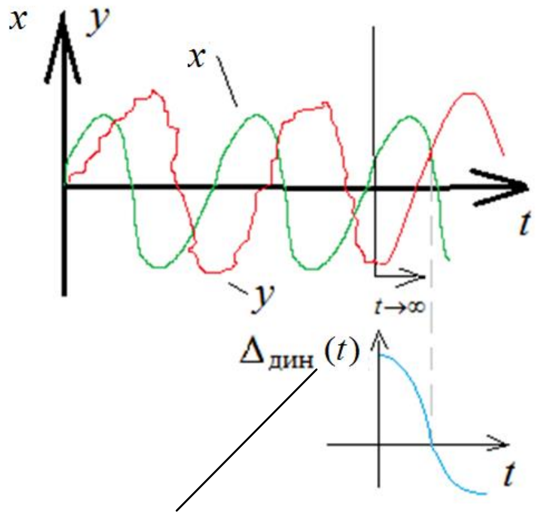
$$\boxed{\Delta_{\text{кин}} = \begin{cases} \dfrac{b}{D} & - \textit{для астатических САУ} \\ \infty & - \textit{для статических САУ} \end{cases}}$$

6.2.3. Динамическая ошибка.

Опр. Динамическая ошибка – это ошибка системы в установившемся режиме при гармоническом входном воздействии ($g(t) = C\sin\omega t$):

$$\boxed{\Delta_{\text{дин}} = \Delta(t)\Big|_{\substack{t\to\infty \\ x=(C\sin\omega t)\cdot 1_0(t)}}}$$

$$\boxed{\dot{\Delta}_{\text{дин}} = \dot{\Delta}(t)\Big|_{\substack{t\to\infty \\ \dot{x}=Ce^{j\omega t}}}}$$

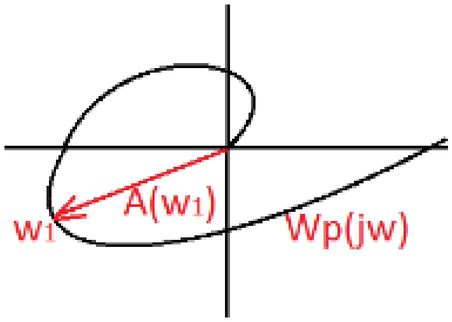


зависит от времени

Т.к. $\dfrac{\dot{\Delta}(t)\big|_{t\to\infty}}{\dot{x}(t)=Ce^{j\omega t}} \underset{ККУ}{\overset{по\_определению}{=}} W_\Delta(j\omega) = W_\Delta(p)\big|_{p=j\omega} = \dfrac{1}{1+W_p(j\omega)}$, то

$$\boxed{\dot{\Delta}_{\text{дин}}(t)} = \frac{1}{1+W_p(j\omega)}\cdot Ce^{j\omega t} \approx \boxed{\frac{1}{W_p(j\omega)}\cdot Ce^{j\omega t}} \quad \left(= \left|\dot{\Delta}_{\text{дин}}\right| \mathrm{e}^{j\cdot arg\,\dot{\Delta}_{\text{дин}}}\right)$$

→ динамическая ошибка всегда определяется только для какой-то частоты.



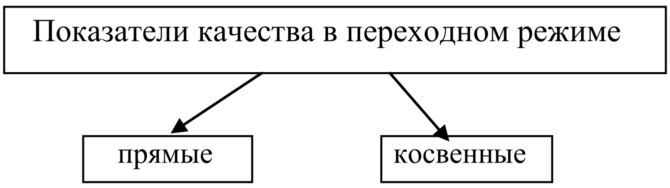
$$\left|\dot{\Delta}_{\text{дин}}(t)\right|\Big|_{\omega=\omega_1} \approx \frac{C}{\left|W_p(j\omega_1)\right|} = \frac{C}{A(\omega_1)}$$

<u>Относительная динамическая ошибка:</u>

$$\left|\dot{\Delta}_{\substack{\text{дин}\\ \text{отн}}}\right| = \frac{\left|\dot{\Delta}_{\text{дин}}(t)\right|}{C} \approx \frac{1}{\left|W_p(j\omega)\right|}$$

! Для статических и астатических систем динамическая ошибка $\exists$ и $\neq 0$.

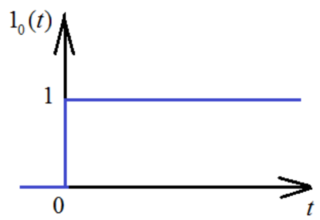
6.3. Показатели качества в переходном режиме.

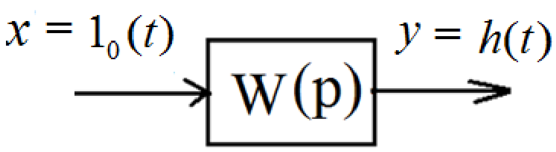


Прямые показатели качества системы определяются непосредственно по переходной характеристике, т.е. по графику переходной функции (реакции системы на единичное ступенчатое воздействие)

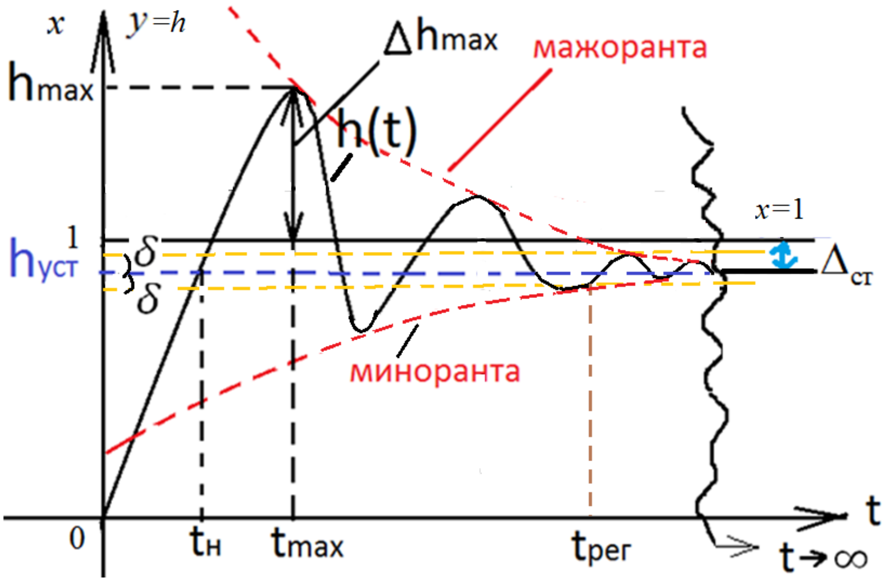
$$h(t) = y(t)\big|_{x(t)=a\cdot 1_0(t)},$$

где $1_0(t) = \begin{cases} 1, \ при\ t \geq 0 \\ 0, \ при\ t < 0 \end{cases}$ – функция единичного скачка (функция Хевисайда)





Переходная характеристика строится теоретически или экспериментально.



Прямые показатели качества:

1) Установившаяся ошибка (статическая ошибка) системы–

$$\Delta_{\text{ст}} = 1 - h_{уст}$$

(равна отклонению действительного значения переменной на выходе системы от заданного после окончания переходного процесса)

– характеризует точность системы (т.е. точность воспроизведения заданного движения).

2) Время регулирования $t_{рег}$ – основная характеристика быстродействия системы – это время от начала переходного процесса до момента, когда отклонение функции $h(t)$ (от установившегося значения $h_{уст} = h(\infty)$ не выходит за пределы некоторой заданной зоны $\pm\delta$: $|h(t) - h_{уст}| \le \delta$, где δ обычно задается в пределах (5 - 10)% от $h_{уст}$.

(т.е. это время до момента, когда кривая $h(t)$ войдет в заданный коридор $\pm\delta$ от $h_{уст}$)

Для определения $t_{рег}$ (после него приближенно считают, что процесс установился) нужно провести две прямые на уровне $h_{уст} \pm \delta \overset{обычно}{=} h_{уст} \pm 0.05$. Время регулирования $t_{рег}$ определяется по точке последнего вхождения кривой $h(t)$ в зону 2δ.

Показатели качества, характеризующие плавность протекания переходного процесса:

3) Перерегулирование –

$$\sigma = \frac{h_{max} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100\% \quad \left(= \frac{\Delta h_{max}}{h_{уст}} \cdot 100\% \right)$$

– относительная величина максимального отклонения $h(t)$ от установившегося значения (в процентах). Обычно допустимое перерегулирование 10-30 %, иногда – недопустимо вовсе.

Основные показатели качества.

Неосновные:

4) Число колебаний N за время регулирования – число выбросов переходной характеристики $h(t)$ относительно $h_{уст}$ в интервале $0 < t \le t_{рег}$.

5) Частота свободных колебаний $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_{сред}}$,

где $T_{сред}$ – средний период колебаний переходной характеристики (для негармонической функции периоды не одинаковые → находят мгновенные периоды переходной характеристики, а потом берут среднее значение).

6) Время достижения первого максимума t_{max} (предполагается, что первый максимум кривой $h(t)$ является наибольшим из всех).

7) Время нарастания переходного процесса $t_н$ (это время до момента первого пересечения кривой переходной характеристики линии установившегося значения)

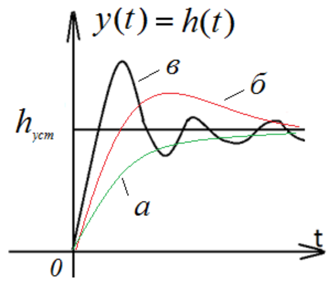
8) Скорость затухания переходного процесса λ (приближенно определяется как показатель экспоненты, мажорирующий кривую $h(t)$).

Существуют **3 вида переходных процессов**:

а) монотонные ($\frac{dh}{dt}$ не изменяет знак)

б) апериодические ($\frac{dh}{dt}$ меняет знак не более одного раза)

в) колебательные ($\frac{dh}{dt}$ меняет знак более одного раза)



Косвенные показатели качества:

позволяют судить о качестве замкнутой системы по некоторым параметрам других характеристик САУ, не прибегая к построению переходных характеристик. Косвенными показателями являются некоторые величины, характеризующие удаленность замкнутой системы от границы устойчивости. Поскольку такую границу можно указать для различных характеристик системы в частотной области и в области корней, то косвенные показатели качества можно разделить на частотные и корневые (плюс есть еще интегральные, но мы их рассматривать не будем).

косвенные показатели качества

частотные | корневые | интегральные

Частотные показатели качества

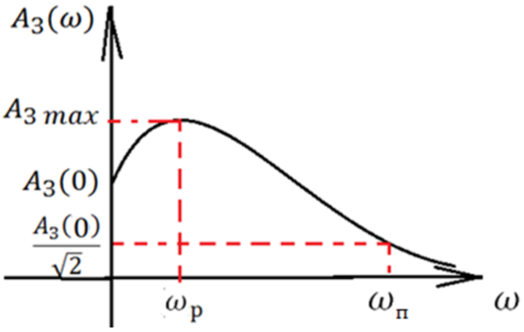
I. Рассмотрим оценку качества регулирования замкнутой САУ по АФХ разомкнутой САУ.

Запасы устойчивости по фазе и амплитуде. Характеризуют близость замкнутой системы к границе устойчивости. Вводятся с помощью критерия Найквиста.

- см. лекцию № 20.

II. Оценка качества регулирования по АЧХ замкнутой САУ.

1) Показатель колебательности M – это отношение максимального значения АЧХ замкнутой САУ к начальному значению:



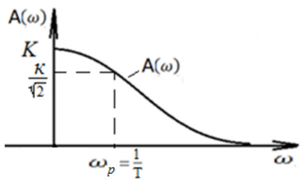
$$M = \frac{A_{з\ max}}{A_з(0)}$$

– характеризует склонность системы к колебаниям. Чем выше M, тем менее качественна система при прочих равных условиях. Желательно: $1{,}2 \le M \le 1{,}5$. Иногда требуется, чтобы $M = 1$.

Частота ω_p, при которой АЧХ замкнутой системы имеет максимум, называется **резонансной частотой** (на этой частоте входной гармонический сигнал проходит через систему с наибольшим усилением).

2) Полоса пропускания системы – это интервал частот от 0 до $\omega_п$, где $\omega_п$ – это частота, при которой $A_з(\omega_п) = \frac{A_з(0)}{\sqrt{2}}$

Пример, для инерционного звена: $\omega_п = 1/T$.



- АЧХ инерц. звена

(Не желательно, чтобы полоса пропускания была слишком большой, иначе система будет воспроизводить высокочастотные помехи.)

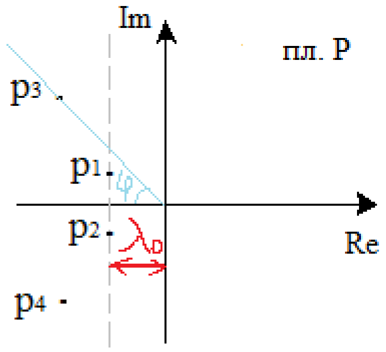
III. Еще качество регулирования можно оценить по ВЧХ.

Корневые показатели качества

– позволяют судить о качестве системы по расположению корней характеристического уравнения на комплексной плоскости.

В качестве корневых показателей качества используют:

1. Степень устойчивости λ_0 – это расстояние от мнимой оси до ближайшего корня (или пары комплексно-сопряженных корней) ее характеристического уравнения:



$$\boxed{\lambda_0 = \min_i |Re\, p_i|}$$

(все корни левые, т.к. показатели качества определяются только для устойчивых систем)

Левые полюса системы, ближайшие к мнимой оси, на. ***доминирующими***. Т.о. λ_0 = модулю действит. части доминирующих полюсов.

Степень устойчивости помимо близости к системы к границе устойчивости характеризует еще и быстродействие САУ. Это связано с тем, что быстрота затухания переходного процесса в линейной САУ в значительной мере определяется вещественной частью корня, наиболее близко расположенного к мнимой оси:

$$h^{перех}(t) = \sum_i C_i e^{p_i t} \approx C_j e^{-\lambda_0 t},$$

где j – индекс вещественного корня, наиболее близко расположенного к мнимой оси (для пары комплексно-сопряженных корней $h^{перех}(t) = C_j e^{-\lambda_0 t} \sin\beta t$).

2. Степень колебательности μ – это тангенс угла, образованного отрицательной вещественной полуосью и прямой, проведенной из начала координат к корню, у которого отношение мнимой части к действительно максимально:

$$\boxed{\mu = \mathrm{tg}\varphi_{max} = \max_i \left| \frac{Im\, p_i}{Re\, p_i} \right|}$$

– характеризует колебательность системы.

Если $\mu = 0$, то процесс апериодический.

По μ можно оценить перерегулирование: $\sigma \approx e^{-\frac{\pi}{\mu}}$

Интегральные показатели качества

являются функционалами интегрального типа от $h^{перех}(t)$:

$$J(h^{перех}(t)) = \int_0^\infty F(h^{перех}(t))dt$$

Предполагается, что переходный процесс тем лучше, чем меньше величина $J(h^{перех}(t))$.