МЭИ	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 9 Кафедра ВМСС	Утверждаю: Зав.кафедрой
	Дисциплина МСПИ II часть	09.01.22 г.
	Институт ИВТ	

1. Описание длинной линии в частотной области в терминах симметричного четырехполюсника.

2. Волновые уравнения и их решения. Запаздывающие потенциалы.

1. Описание длинной линии в частотной области в терминах симметричного четырехполюсника.

Представим систему (1) в виде системы уравнений четырехполюсника (ЧП)

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_2 ch\,\underline{\gamma} x + \underline{Z}_B \underline{I}_2 sh\,\underline{\gamma} x \\ \underline{I}(x) = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} sh\,\underline{\gamma} x + \underline{I}_2 ch\,\underline{\gamma} x \end{cases} \rightarrow \#(1)$$

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_2 \underline{A}_{11} + \underline{I}_2 \underline{A}_{12} \\ \underline{I}(x) = \underline{U}_2 \underline{A}_{21} + \underline{I}_2 \underline{A}_{22} \end{cases} \#(2)$$

Где $\underline{A}_{11} = ch\underline{\gamma}x = \underline{A}_{22}$; $\underline{A}_{12} = \underline{Z}_B sh\underline{\gamma}x$; $\underline{A}_{21} = \dfrac{sh\underline{\gamma}x}{\underline{Z}_B}$.

Выполняется условие симметрии. Также выполняется условие взаимности

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1$$

Так как $ch^2\underline{\gamma}x - sh^2\underline{\gamma}x = 1$ $(по\ определению)$

Тогда отрезок длинной линии можно представить как симметричный ЧП, например Т-образной или П-образной схемой замещения.

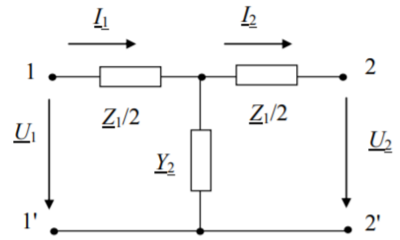

Рисунок 4.5 – Симметричная Т-образная эквивалентная схема замещения отрезка длинной линии

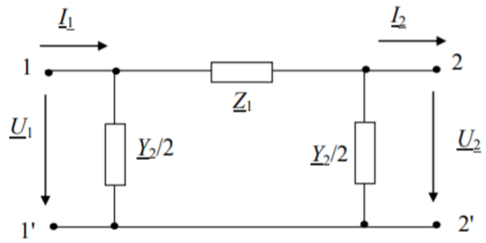

Рисунок 4.6 – Симметричная П-образная эквивалентная схема замещения отрезка длинной линии

$\underline{A}_{11} = \dfrac{\underline{U}_{1x}}{\underline{U}_2} = ch\underline{\gamma}x = \underline{A}_{22};$ $\underline{A}_{21} = \dfrac{\underline{I}_{1x}}{\underline{U}_2} = \dfrac{sh\underline{\gamma}x}{\underline{Z}_B}$ (следует из (1) при $I_2 = 0$)

Т-схема:

$I_2 = 0 - холостой\, ход:$

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{U}_2} = \frac{\left(\underline{U}_2\underline{Y}_2\right)\left(\frac{\underline{Z}_1}{2} + \frac{1}{\underline{Y}_2}\right)}{\underline{U}_2} = 1 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Y}_2}{2}$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_{1x}}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{U}_2\underline{Y}_2}{\underline{U}_2} = \underline{Y}_2$$

Приравнивая полученные выражения для коэффициентов ЧП:

$\underline{Y}_2 = \dfrac{sh\underline{\gamma}x}{\underline{Z}_B};$ $1 + \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Y}_2}{2} = ch\underline{\gamma}x$

Откуда

$$\underline{Z}_1 = \frac{2(ch\underline{\gamma}x - 1)}{sh\underline{\gamma}x}\underline{Z}_B$$

Учитывая соотношение $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0\underline{Y}_0}$ и $\underline{Z}_B = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}$

То $\underline{Z}_1 = \dfrac{\underline{\gamma}x}{\underline{\gamma}x}\dfrac{2(ch\underline{\gamma}x - 1)}{sh\underline{\gamma}x}\underline{Z}_B = \underline{Z}_0 x\underline{K}_1$, где $\underline{K}_1 = \dfrac{2(ch\underline{\gamma}x - 1)}{\underline{\gamma}x * sh\underline{\gamma}x}$

$\underline{Y}_2 = \dfrac{\underline{\gamma}x}{\underline{\gamma}x}\dfrac{sh\underline{\gamma}x}{\underline{Z}_B} = \underline{Y}_0 x\underline{K}_2$, где $\underline{K}_2 = \dfrac{sh\underline{\gamma}x}{\underline{\gamma}x}$

П-схема:

$I_2 = 0 - холостой\, ход:$

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\left[\frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{Z}_1 + \frac{1}{\frac{\underline{Y}_2}{2}}}\right]} = 1 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Y}_2}{2}$$

$U_2 = 0$ – короткое замыкание:

$$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_{2x}} = \frac{\underline{U}_1}{\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}} = \underline{Z}_1$$

Приравнивая полученные выражения для коэфф. ЧП:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_B sh\underline{\gamma}x; \qquad 1 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Y}_2}{2} = ch\underline{\gamma}x; \ \underline{Y}_2 = \frac{2(ch\underline{\gamma}x - 1)}{\underline{Z}_B sh\underline{\gamma}x}$$

И выразим через $\underline{K}_1$, $\underline{K}_2$:

$$\underline{Z}_1 = \underline{\gamma}x\underline{Z}_B * \frac{sh\underline{\gamma}x}{\underline{\gamma}x} = \underline{Z}_0 x \underline{K}_2; \qquad \underline{Y}_2 = \frac{\underline{\gamma}x}{\underline{Z}_B} \frac{2\left(ch\underline{\gamma}x - 1\right)}{\underline{\gamma}x * sh\underline{\gamma}x} = \underline{Y}_0 x \underline{K}_1$$

Для избавления от гиперболических функций в формулах $\underline{K}_1$ и $\underline{K}_2$, разложим их в ряды.

$$\underline{K}_1 = \frac{2\left(ch\underline{\gamma}x - 1\right)}{\underline{\gamma}x * sh\underline{\gamma}x} \approx 1 - \frac{\left(\underline{\gamma}x\right)^2}{12} + \frac{\left(\underline{\gamma}x\right)^4}{120} - \ldots;$$

$$\underline{K}_2 = \frac{sh\underline{\gamma}x}{\underline{\gamma}x} \approx 1 + \frac{\left(\underline{\gamma}x\right)^2}{6} + \frac{\left(\underline{\gamma}x\right)^4}{120} + \ldots;$$

Ясно, что приближенной заменой $\underline{K}_1$ и $\underline{K}_2$ является единица. Для такой замены обычно требуется, чтобы второе слагаемое ряда не превышало 0.01.

2. Волновые уравнения и их решения. Запаздывающие потенциалы.

При расчётах излучателей рассматривается излучатель как совокупность элементарных излучателей, таких как электрический (Герца) и магнитный (Фитцжеральда) диполи (размеры много меньше длины волны).

Для решения задачи возбуждения необходимо применить уравнения Максвелла и удовлетворить всем граничным условиям на поверхности излучателя и на бесконечности. Если на пути волны наблюдаются объекты, которые излучатель видит, то необходимо добавить к граничным условиям их.

$$\begin{cases} rotH = j + \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial E}{\partial t} \\ rotE = -\mu_0\mu_r\frac{\partial H}{\partial t} \\ divE = \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \\ div\mu_0\mu_r H = 0 \end{cases}$$

Далее применим замену магнитной и электрической индукций, а также оператор Набла:

$$D = \varepsilon_0\varepsilon_r E \ ; \ B = \mu_0\mu_r H \, ; \varepsilon_0\varepsilon_r = \varepsilon \ ; \ \mu_0\mu_r = \mu; \quad \nabla = x^o\frac{\partial}{\partial x} + y^o\frac{\partial}{\partial y} + z^o\frac{\partial}{\partial z}$$

Заметим, что оператор Набла векторно умноженный на H это ротор, а скалярно – дивергенция. Также введём векторный потенциал магнитного поля A и скалярный потенциал электрического поля φ. Применим калибровку Лоренса, которая позволяет связать наши вектора A и φ:

$$divA = -\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Получим уравнения следующего вида:

$$\begin{cases} \nabla^2 A - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu j \\ \nabla^2\varphi - \varepsilon\mu\frac{\left(\partial^2\varphi\right)}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что если взять проекцию векторного уравнения A на координатные оси, то оно вместе с скалярным удовлетворяют уравнению Даламбера: $\nabla^2\boldsymbol{\Phi} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}}{\partial t^2} = -\eta$

Решение уравнения этого– функции бегущей волны, решение которого имеет вид $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + \boldsymbol{\Phi}_2\left(t + \frac{z}{v}\right)$ где Φ1 и Φ2 − функции бегущих плоских (т. е., с плоским фронтом) волн, Причем волна Φ1 распространяется с фазовой скоростью v вдоль оси z, а Φ2 − в обратном направлении, а для точечного источника бегущие волны представляют собой сферические волны, характеризуемые понятием «запаздывающх потенциалов». Теперь перейдём в сферическую систему координат и получим следующие решения:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\tau(t - \frac{r}{v})}{r}dl \quad ; \quad A = \frac{\mu}{4\pi}\int_l \frac{i(t - \frac{r}{v})}{r}dl \,;$$

Запаздывания проявляются в компоненте аргумента $t - r/v$. Разложение в ряд Фурье даёт следующие решения:

$$\underline{\varphi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\underline{\tau}e^{-ikr}}{r}dl \quad ; \quad \underline{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_l \frac{\underline{I}e^{-ikr}}{r}dl$$

Важно отметить, что в точке наблюдения M в момент времени t суммируются парциальные потенциалы ϕ k от значений ρk(t,r), взятых в разные моменты времени t'= t – r'/v. Это характеризует понятие «запаздывающие потенциалы».

Таким образом, – связь потенциалов Аи ϕ позволяет решать уравнение Даламбера только для A, а ϕ находить по уравнению калибровки $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = -\varepsilon\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}$.

– можно вообще не искать скалярный потенциал ϕ , а по потенциалу A определять H и уже по H находить E, интегрируя вторую формулу в системе