Лекции № 19 – 20 (18 мая 2022)

Продолжение п. 5.4.2. Критерий Михайлова.

Годограф Михайлова строится, например, <u>методом контрольных точек</u>: $A(j\omega)$ представляется в виде:

$$A(j\omega) = ReA(j\omega) + jImA(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

Изменяя ω, находят $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ и строят кривую (которая при $\omega \to \infty$ уходит в бесконечность, как было показано выше, для устойчивой системы – в n-ном квадранте). При этом обязательно находят точки пересечения годографа с осями координат.

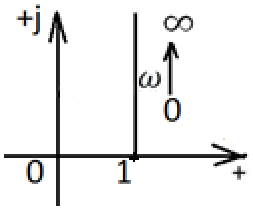
Пример 3. Доказать, что инерционное звено устойчиво.

$$W(p) = \frac{K}{1 + pT}$$

$A(p) = 1 + pT.$

$A(j\omega) = 1 + j\omega T.$

Годограф Михайлова имеет вид:



$\Rightarrow$ Инерционное звено устойчиво, т.к. выполняется критерий Михайлова.

Задача 1. Определить $K_{пред}$, используя критерий Михайлова

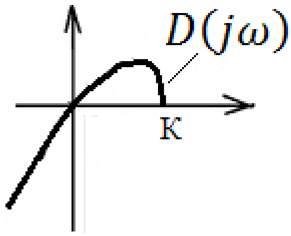
$$W_{\text{р}}(p) = \frac{\text{К}}{p(1 + pT1)(1 + pT2)} = \frac{B(p)}{A(p)}$$

Решение:

Ищется характеристический вектор замкнутой системы

$D(j\omega) = (j\omega)^3 T_1 T_2 + (j\omega)^2 (T_1 + T_2) + \ j\omega + \text{К} = X(\omega) + jY(\omega)$,

где $X(\omega) = \text{К} - (T_1 {+} T_2)\omega^2;\ Y(\omega) = \omega - T_1 T_2 \omega^3$.



т.к. замкнутая САУ должна быть на границе устойчивости, годограф $D(j\omega)$ проходит через начало координат при $\omega \neq 0$

Далее $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ приравниваются к нулю:

$$\left.\begin{aligned} X(\omega) &= 0 \\ Y(\omega) &= 0 \end{aligned}\right\}$$ из второго уравнения находим $\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2} \ \to \ \text{К}_{\text{пред}} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$

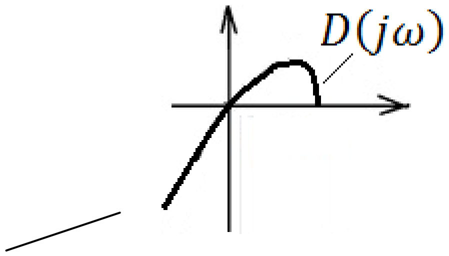
Задача 2. Определить $K_{пред}$, используя критерий Михайлова

$$W_р(p) = \frac{К}{(1+2p)(1+0{,}5p)(1+0{,}1p)} = \frac{B(p)}{A(p)}$$

Решение: Ищется характеристический вектор замкнутой системы $D(j\omega) = K + A(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$.

Далее $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ приравниваются к нулю:

$$\left.\begin{aligned} X(\omega) &= 0 \\ Y(\omega) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{находим } \omega = \sqrt{26} \;\rightarrow\; K_{пред} \approx 31$$



годограф $D(j\omega)$ проходит через начало координат при $\omega \neq 0$

5.4.3. Критерий Найквиста.

Этот частотный критерий позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы. Критерий предложен в 1932 году американским ученым Гарри Найквистом. В 1938 году критерий Найквиста был по-новому обоснован и применен к системам с дробно-рациональной передаточной функцией А.В. Михайловым.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_p(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 p^m + \cdots + b_m}{a_0 p^n + \cdots + a_n} \qquad \begin{matrix}(m)\\(n)\end{matrix}$$

где m – степень числителя, n – степень знаменателя, $m \leq n$

Образуем функцию

$$F(p) = 1 + W_p(p) = \frac{B(p)+A(p)}{A(p)} = \frac{D(p)}{A(p)} \qquad \begin{matrix}(n)\\(n)\end{matrix}$$

Числитель этой функции ($D(p)$) представляет собой характеристический полином замкнутой системы (с отрицательной ОС), знаменатель ($A(p)$) – характеристический полином разомкнутой системы. Очевидно, что степень полинома $D(p)$ равна n.

Рассматривается 3 случая:

а) разомкнутая система устойчива;

б) ——|| —— ||—— неустойчива;

в) ——|| —— ||—— находится на границе устойчивости (нейтрально-устойчива).

а) Система в разомкнутом состоянии устойчива.

~ Все n корней характеристического уравнения $A(p) = 0$ разомкнутой системы явл-ся левыми.

Будем рассматривать $F(p)$ как функцию комплексного переменного $p = j\omega$:

характеристический вектор замкнутой системы

$$F(j\omega) = F(p)|_{p=j\omega} = 1 + W_p(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{A(j\omega)}$$

характеристический вектор разомкнутой системы

<u>Определим, чему должно равняться $\Delta \arg F(j\omega)$ при $0 \overset{\omega}{\rightarrow} \infty$, чтобы гарантировать устойчивость замкнутой системы</u> (в смысле необходимого и достаточного условия)

Из принципа аргумента следует, что приращение аргумента характеристического вектора разомкнутой системы при изменении частоты ω от 0 до ∞ равно:

$$\underset{0 \overset{\omega}{\rightarrow} +\infty}{\Delta arg A(j\omega)} = (n - \underset{0}{\cancel{2k}})\frac{\pi}{2} = n\frac{\pi}{2}$$

Если потребовать, чтобы замкнутая система была устойчива, то должно выполняться

$\underset{0 \overset{\omega}{\rightarrow} +\infty}{\Delta arg D(j\omega)} = n \cdot \frac{\pi}{2}$ (необх.и дост. усл-е уст-ти замкн. с-мы – корни ХУ $D(p) = 0$ – левые)

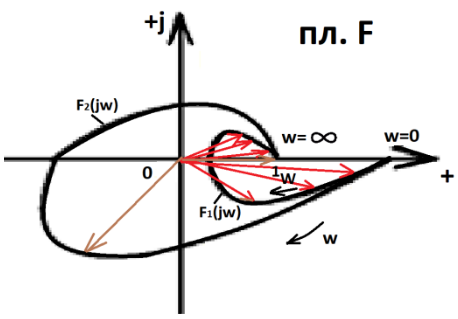
Тогда приращение аргумента функции $F(j\omega)$ при $0 \overset{\omega}{\rightarrow} \infty$ равняется:

$$\underset{0 \overset{\omega}{\rightarrow} +\infty}{\Delta arg F(j\omega)} = \underset{0 \overset{\omega}{\rightarrow} +\infty}{\Delta arg D(j\omega)} - \underset{0 \overset{\omega}{\rightarrow} +\infty}{\Delta arg A(j\omega)} = n \cdot \frac{\pi}{2} - n \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

Отсюда следует, <u>что для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы приращение аргумента вектора $F(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ равнялось нулю.</u>

Геометрическая интерпретация полученного условия:

Рассмотрим плоскость F



Пусть есть 2 годографа $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$, один из которых охватывает начало координат, а другой – нет.

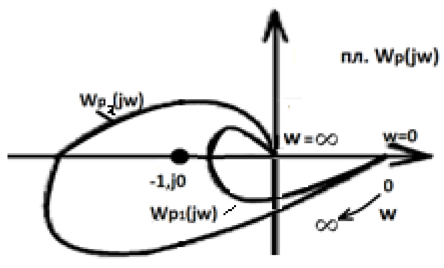
$\underset{0 \overset{\omega}{\rightarrow} +\infty}{\Delta arg F_1(j\omega)} = 0$ (суммарный поворот конца вектора $F_1(j\omega)$ при $0 \overset{\omega}{\rightarrow} \infty$ вокруг начала координат = 0)

$\underset{0 \overset{\omega}{\rightarrow} +\infty}{\Delta arg F_2(j\omega)} = -2\pi$ (конец вектора $F_2(j\omega)$ поворачивает на угол -2π)

Годограф $F_i(j\omega)$ – кривая, описываемая концом вектора $F_i(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞.

Т.о., <u>для того, чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы годограф вектора $F(j\omega)$ не охватывал начало координат (точку $(0, j0)$).</u>

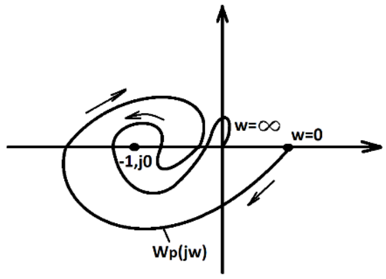
Поскольку $F(j\omega) = 1 + W_p(j\omega)$, то АФХ разомкнутой системы получается смещением годографа $F(j\omega)$ на единицу влево:



Критерий Найквиста для случая <u>устойчивой</u> разомкнутой системы:

> *Для того чтобы <u>замкнутая</u> система была устойчива, если она устойчива в разомкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы АФХ <u>разомкнутой</u> системы не охватывала точку* $(-1, j0)$.

<u>Примечание.</u>

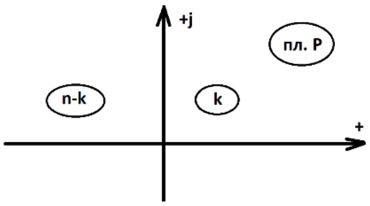


Охватывает ли АФХ разомкн. с-мы $W_p(j\omega)$ точку (-1, j0)?

В сомнительных случаях проверяют, равно или не равно приращение $\underset{0\to+\infty}{\overset{\omega}{\Delta arg F(j\omega)}}$ нулю.

<u>б) Система в разомкнутом состоянии неустойчива.</u>

Предположим, что ХУ разомкнутой системы $A(p) = 0$ имеет <u>k правых корней</u> и <u>не имеет корней на мнимой оси</u>:

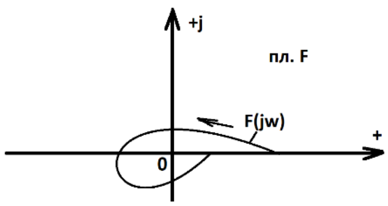


<u>Определим, чему должно равняться $\underset{0\to+\infty}{\overset{\omega}{\Delta arg F(j\omega)}}$, чтобы гарантировать устойчивость замкнутой системы (</u>в смысле необходимого и достаточного условия).

$$\underset{0\to+\infty}{\overset{\omega}{\Delta \arg F(j\omega)}} = \underset{0\to+\infty}{\overset{\omega}{\Delta \arg D(j\omega)}} - \underset{0\to+\infty}{\overset{\omega}{\Delta \arg A(j\omega)}} = \underbrace{n\frac{\pi}{2}}_{\textit{требуем}} - \underbrace{(n-2k)\frac{\pi}{2}}_{\textit{по принципу аргумента}} = 2k\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{k}{2}\cdot 2\pi$$

$(D(j\omega) -$ характеристический вектор замкнутой системы, $A(j\omega)$ – характеристический вектор разомкнутой системы)

Следовательно, <u>для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф $F(j\omega)$ охватывал начало координат $\frac{k}{2}$ раз в положительном направлении</u>:



<u>Положительное направление</u> – <u>против часовой стрелки</u>.

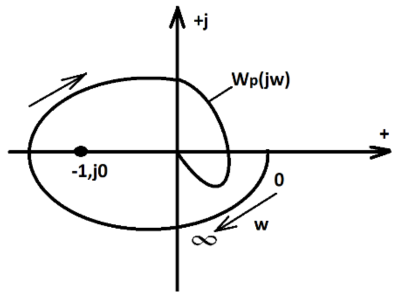
$\Rightarrow$ переходим к $W_p(j\omega)$ смещением годографа $F(j\omega)$ на единицу влево.

Формулировка критерия Найквиста для случая <u>неустойчивой</u> разомкнутой системы:

Для того чтобы замкнутая система была устойчива, если она <u>неустойчива</u> в разомкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы охватывала точку $(-1, j0)$ в положительном направлении $\frac{k}{2}$ раз, где k – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

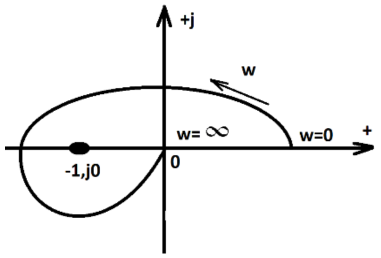
<u>Пример</u>: ХУ разомкнутой системы имеет 2 правых корня

1)



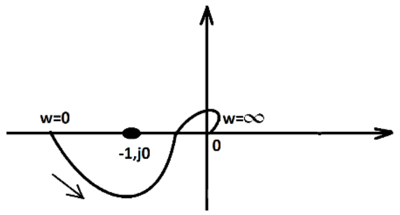
Годограф разомкнутой системы охватывает т. (-1,j0) <u>в отрицательном направлении</u> => <u>замкнутая система неустойчива</u>

2)



<u>Замкнутая система устойчива</u> (т.к. $W_p(j\omega)$ охватывает точку (-1,j0) 1 раз в положит. направлении)

3)



Годограф $W_p(j\omega)$ охватывает т. (-1, j0) $\frac{1}{2}$ раза (а надо 1 раз) в положит. направлении => <u>замкнутая система неустойчива</u>

<u>в) Разомкнутая система нейтрально-устойчива</u>

~ХУ разомкн. с-мы имеет нулевые корни.

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_p(p) = \frac{B(p)}{\underbrace{p^{\nu} A_1(p)}_{A(p)}}, \quad \begin{matrix}(m)\\(n)\end{matrix}$$

устойчивое звено, соединенное последовательно с ν интегрирующими звеньями

где <u>ν – число нулевых корней ХУ разомкнутой системы</u>: $A(p) = 0$ (порядок астатизма, = число интегрирующих звеньев)

Предполагается, что полином $A_1(p)$ не имеет корней на мнимой оси и в правой полуплоскости.

Воспользоваться приведенными выше формулировками критерия Найквиста нельзя, т.к. в принципе аргумента не рассматривается вариант наличия корней на мнимой оси. При $\omega = 0$ $W_{\text{р}}(j\omega) \to \infty$ (т.е. АФХ разомкнутой системы претерпевает разрыв), и поэтому неясно, охватывает ли $W_{\text{р}}(j\omega)$ точку $(-1, j0)$ или нет.

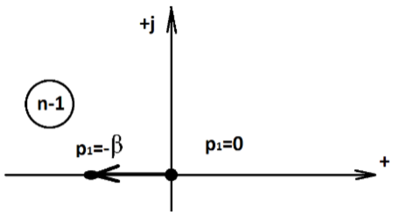
В рассматриваемом случае нулевые корни искусственно сдвигают на величину $\pm\beta,\ \beta \to 0$, что позволяет получить устойчивую/неустойчивую разомкнутую систему и применить критерий Найквиста для соответствующего случая.

Сведем рассматриваемую разомкнутую систему к устойчивой.

Пусть для простоты ν=1. Тогда

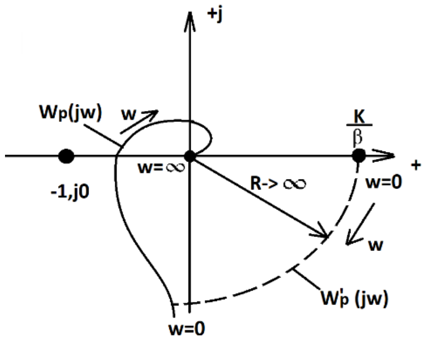
$$W_{\text{р}}{}'(p) = \frac{B(p)}{(p+\beta)\cdot A_1(p)} = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{B(p)}{\left(\frac{p}{\beta}+1\right)A_1(p)}, \qquad \beta > 0,\ \beta \to 0$$

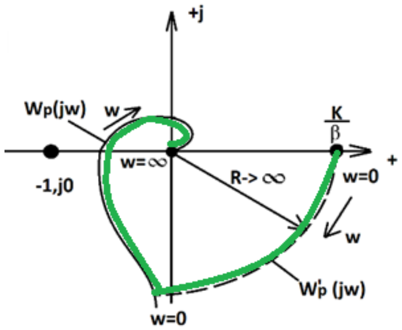
Интегрирующее звено стало инерционным



- Сместили корень ХУ разомкнутой системы (она стала устойчивой)

$K = \frac{B(0)}{A_1(0)}$ – коэффициент усиления разомкнутой системы





Годографы $W_{\text{р}}(j\omega)$ и $W_{\text{р}}{}'(j\omega)$ близки на высоких частотах и отличаются на низких (при $\omega \to 0$): годограф $W_{\text{р}}{}'(j\omega)$ отличается от $W_{\text{р}}(j\omega)$ наличием дуги бесконечно большого радиуса, начинающейся при $\omega = 0$ на действительной положительной полуоси и с увеличением частоты описывающей угол $\nu\cdot\frac{\pi}{2}$ $(=\frac{\pi}{2}$ при $\nu = 1)$ в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

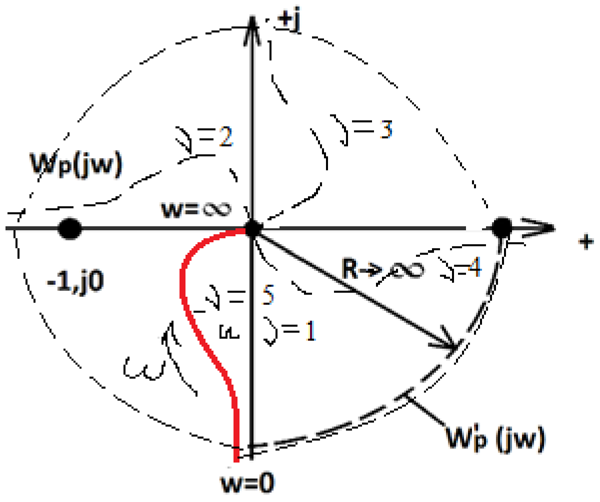
Данная дуга (часть годографа $W_{\text{р}}{}'(j\omega)$) называется «дополнением в бесконечности».

Для $W_{\text{р}}{}'(j\omega)$ (т.е. АФХ с дополнением в бесконечности) можно воспользоваться формулировкой критерия Найквиста для случая устойчивой разомкнутой системы.

Критерий Найквиста для случая нейтрально-устойчивой разомкнутой системы:

Если разомкнутая система нейтрально-устойчива, то для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы с её дополнением в бесконечности при изменении ω от 0 до ∞ не охватывала точку $(-1, j0)$.

Пример 1. Устойчива ли замкнутая система (с единичной ООС), если передаточная функция разомкнутой имеет вид: $W_p(p) = \dfrac{D}{p^5(1+pT)}$?



Ответ: при любых значениях параметров D (добротность) и T система неустойчива, т.к. АФХ разомкнутой системы с дополнением в бесконечности всегда охватывает точку $(-1, j0)$.

Следствие из критерия Найквиста

В сложных случаях, когда неясно, охватывает ли годограф $W_\text{p}(j\omega)$ точку $(-1, j0)$, удобно пользоваться еще одной формулировкой критерия Найквиста.

Если АФХ разомкнутой системы охватывает т. $(-1, j0)$, то она пересекает луч вещественной оси $(-\infty, -1)$. Будем считать такой <u>переход положительным</u>, если при возрастании частоты АФХ пересекает луч $(-\infty, -1)$ сверху вниз (т.е. в положительном направлении), и <u>отрицательным</u>**,** если пересечение происходит снизу вверх.

Если $W_\text{p}(j\omega)$ начинается или заканчивается на луче $(-\infty, -1)$, то говорят о <u>1/2- переходе</u>**.**

АФХ охватывает 1/2 раза точку (-1, j0)

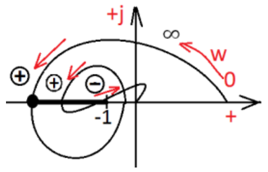
Общая формулировка критерия Найквиста

(охватывает все 3 случая, рассмотренные выше)

Для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и числом отрицательных переходов АФХ разомкнутой системы через луч $(-\infty, -1)$ была равны $\frac{k}{2}$, где k – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Замечание. Если разомкнутая система нейтрально-устойчива, то $k = 0$ и годограф $W_{\text{p}}(j\omega)$ берется с дополнением в ∞.

Пример 2. Определить, устойчива ли замкнутая САУ, если у ХУ разомкнутой системы 2 правых корня ($k = 2$), а АФХ разомкнутой системы имеет вид:



Решение:

Имеем 2 положительных перехода

и 1 отрицательный переход.

Разность между числом положительных и числом отрицательных переходов равна 1. Т.к. это равняется $\frac{k}{2}$, то замкнутая система устойчива.

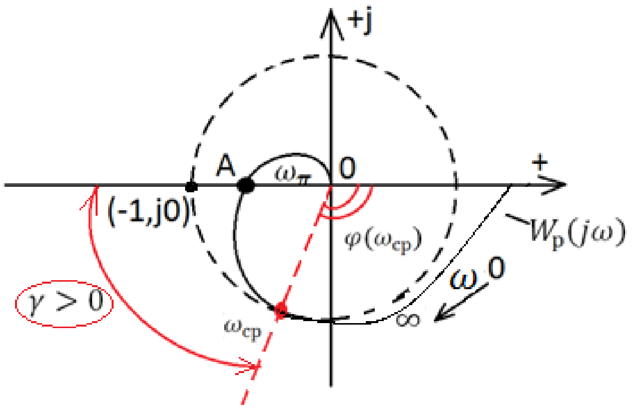
Ответ: замкнутая система устойчива.

5.5. Запасы устойчивости по амплитуде и по фазе.

При изменении параметров системы она может стать неустойчивой, поэтому при проектировании системы стремятся обеспечить ее устойчивость с некоторым запасом, чтобы в процессе эксплуатации (когда параметры могут изменяться в некоторых пределах) система сохранила устойчивость.

Запасы устойчивости по фазе и амплитуде являются количественной мерой близости системы к границе устойчивости.
Они вводятся с помощью критерия Найквиста и определяются по АФХ разомкнутой системы (характеризуют близость АФХ к т. $(-1, j0)$) или по ее логарифмическим частотным характеристикам.

Рассмотрим определение запасов устойчивости по АФХ разомкнутой системы.

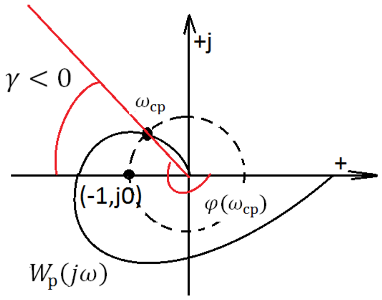


Пусть АФХ пересекает окружность единичного радиуса при частоте ω_{cp} (частота среза; на частоте среза $|W_p(j\omega_{cp})| = 1$)

Запас устойчивости по фазе («запас по фазе») – $\boxed{\gamma = \varphi(\omega_{cp}) + \pi}$, (это угол)

– обеспечивает сохранение устойчивости системы при увеличении запаздывания в системе.

Для устойчивых замкнутых систем $\gamma > 0$, для неустойчивых $\gamma < 0$.



- для неустойчивых систем (Ищется ближайшая к точке $(-1, j0)$ точка АФХ разомкнутой системы, где она пересекает окружность единичного радиуса)

Запас устойчивости по амплитуде (или «запас устойчивости по усилению», или «запас по модулю») равен отношению предельного коэффициента усиления системы к ее коэффициенту усиления в исследуемом случае:

$$\boxed{\beta = \frac{K_{пред}}{K}}$$

Пусть ω_π – частота, при которой АФХ разомкнутой САУ пересекает отрицательную действительную полуось (т.е. $\varphi_p(\omega_\pi) = -\pi$). Тогда согласно критерию Найквиста отношение $\frac{K_{пред}}{K} = \frac{1}{|W_p(j\omega_\pi)|}$, где $|W_p(j\omega_\pi)|$ – длина отрезка ОА. Т.е. запас по модулю β обратно пропорционален длине отрезка ОА:

$$\beta = \frac{1}{|W_p(j\omega_\pi)|} .$$

Запас по модулю обеспечивает сохранение устойчивости системы при увеличении коэффициента усиления системы.

Для устойчивой замкнутой системы $\underline{\beta > 1}$ $(K < K_{пред})$ (точка А находится справа от т. $(-1, j0)$),

для неустойчивой: $\underline{\beta < 1}$.