(っ•◡•)っ ♥ Поступашки - ШАД, Стажировки и Магистратура ♥

t.me/postypashki-old

Введение-содержание

Помимо благотворительной деятельности, Поступашки также проводят курсы и индивидуальные занятия по подготовке к ШАД, к олимпиадам, к собеседованиям, подготовке абитуриентов к ВУЗовской программе, подготовке к экзаменам, контрольным и прочим студентческим работам по основным математическим диссциалинам: анализ, линейная алгебра, теория вероятностей, теория групп и тд. А также по алгоритмам и структурам данных, ML&DL.

Подробнее об индивидуальных занятиях

Подробнее о курсах

Оглавление

Вариант 1

1. Сколько способов пройти из $(0, 0, 0)$ в $(n, 2n, 3n)$, если можно делать шаги на $+1$ по любой из осей.

2. Найти $f^{(319)}(0)$, если $f(x) = \frac{x^2+17}{x^4-5x^2+4}$.

3. Сколько перестановок коммутируют с $(123)(456)$?

4. В равностороннем треугольнике ABC единичной площади выбираем точку M. Найти математическое ожидание площади треугольника ABM.

5. Вычислите интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$.

6. Показать, что у целочисленной матрицы не бывает рациональных нецелых собственных чисел.

7. Есть круговая трасса, на которой в некоторых местах стоят бензоколонки. Расстояние между ними и количество бензина на каждой бензоколонке известны. Имеется также машина с постоянным и известным расходом топлива. Предложите алгоритм, работающий за $O(n)$ по времени, который позволяет найти ту бензоколонку, начиная с которой можно проехать всю трассу, или сказать, что такой нет.

Вариант 2

1. Определим последовательность $\{x_n\}$ начальными условиями $x_1 = a,\ x_2 = b$ и рекуррентной формулой $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$. Найдите $\lim_{n\to\infty} x_n$.

2. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{2[\log_2 k]}} x^k$, где квадратные скобки означают целую часть числа. Найдите $\int\limits_0^1 \varphi(x)\varphi'(x)dx$.

3. Рассмотрим всевозможные непустые подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$. В каждом подмножестве перемножим числа, обратные его элементам. Потом сложим полученные $2^n - 1$ чисел. Найти полученную сумму.

4. Улоф Пальме и Рави Шанкар подбрасывают правильную монетку (вероятность выпадения орла 0.5). Улоф подбрасывает её n раз, а Рави — $n+1$. Найдите вероятность того, что у Рави будет больше орлов, чем у Улофа.

5. Дано некоторое множество положительных чисел мощности континуум. Докажите, что из него можно выбрать счётное подмножество с бесконечной суммой.

6. Дан массив из n чисел. Предложите алгоритм, позволяющий за $O(n)$ операций определить, является ли этот массив перестановкой чисел от 1 до n. Дополнительной памяти не более $O(1)$.

7. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — конечные множества и $a_{ij} = |A_i \bigcap A_j|$. Докажите, что матрица $(a_{ij})_{i=1,2,\ldots,n}^{j=1,2,\ldots,n}$ неотрицательно определена.

Вариант 3

1. Даны 2012 гирек разной массы. Они разбиты на две группы (по 1006 в каждой), внутри которых упорядочены по массе. Предложите способ за 11 взвешиваний найти 1006-ю гирьку по массе среди всех.

2. Вычислите $\int\limits_0^{2\pi} (\sin x)^8 dx$.

3. Докажите, что многочлен с действительными коэффициентами, принимающий на действительной оси только положительные значения, может быть представлен в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами.

4. Какую наибольшую дисперсию может иметь случайная величина, принимающая значения на отрезке $[0, 1]$?

5. В множестве из n человек каждый может знать или не знать другого (если A знает B, отсюда не следует, что B знает A). Все знакомства заданы булевой матрицей $n \times n$. В этом множестве может найтись или не найтись знаменитость — человек, который никого не знает, но которого знают все. Предложите алгоритм, который бы находил в множестве знаменитость или говорил, что ее в этом множестве нет. Сложность по времени — $O(n)$, сложность по памяти — $O(1)$.

6. Рассмотрим случайную перестановку на n элементах. Докажите, что данные k элементов окажутся в одном цикле с вероятностью $\frac{1}{k}$.

7. Есть неизвестная нам квадратичная форма Q в n-мерном пространстве. Разрешается задавать вопрос вида "Чему равно $Q(v)$?". Какое минимальное число вопросов надо задать, чтобы определить, является ли форма Q положительно определенной?

Вариант 1

1. Найдите $\prod_{k=1}^{\infty} \cos(x2^{-k})$.

2. Дана матрица A размера $n \times n$, где $a_{ij} = (i-j)^2$, $i, j = 1, \ldots, n$.
Найдите ранг матрицы A.

3. Имеется множество $A = \{1, 2, 3, \ldots, 256\}$. Найдите размер максимального по мощности подмножества $A' \in A$, такого, что A' не содержит элементов x, y, таких, что $x = 2y$.

4. На окружности случайно выбирается n точек. Найдите вероятность того, что все они принадлежат некоторой полуокружности.

5. Назовем двумерный массив действительных чисел $A[1 \ldots n][1 \ldots n]$ возрастающим, если для любых k, l $A[k][l] \geq A[i][j]$, $i \leq k, j \leq l$. Задача поиска в квадратном возрастающем массиве формулируется так: для заданного возрастающего массива $A[1 \ldots n][1 \ldots n]$ и некоторого числа X определить, встречается ли число X в массиве A. Покажите, что не существует алгоритма, решающего эту задачу менее, чем за n сравнений.

6. У линейного преобразования n-мерного пространства существуют $n+1$ собственных векторов, таких, что любые n из них линейно независимы. Найдите всевозможные матрицы, которые могли бы задавать такое преобразование.

7. Найдите сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)}$, где $f(n)$ — количество единиц в двоичном представлении числа n.

Вариант 2

1. Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ определена рекурсивно: $a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n}$. Найдите формулу общего члена последовательности.

2. Дано множество $A = \{1, \ldots, n\}$. Среди всех его подмножеств равновероятно выбираются k его подмножеств. Найдите вероятность того, что $A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_k = \emptyset$.

3. Дан массив длины n из нулей и единиц. Найдите в нем подмассив максимальной длины, в котором количество единиц равно количеству нулей. Ограничения: $O(n)$ по времени, $O(n)$ по дополнительной памяти.

4. Пусть $I_m = \int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\ldots\cos(mx)dx$. Для каких $m \in [1, 10]$ $I_m \neq 0$?

5. Дан неориентированный непустой граф G без петель. Пронумеруем все его вершины. Матрица смежности графа G с конечным числом вершин n (пронумерованных числами от 1 до n) — это квадратная матрица A размера n, в которой значение элемента a_{ij} равно числу ребер из i-й вершины графа в j-ю вершину. Докажите, что матрица A имеет отрицательное собственное значение.

6. Рассмотрим бесконечный двумерный массив $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$, состоящий из натуральных чисел, причем каждое число встречается в массиве ровно 8 раз. Докажите, что

$$\exists (m, n)\colon a_{mn} > mn.$$

7. Дана матрица из нулей и единиц, причем для каждой строки матрицы верно следующее: если в строке есть единицы, то они все идут подряд (неразрывной группой из единиц). Докажите, что определитель такой матрицы может быть равен только ± 1 или 0.

Новосибирск

1. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2[\log_2 k]}} x^k$, где квадратные скобки означают целую часть числа. Найдите $\int\limits_0^1 \varphi(x)\varphi'(x)dx$.

2. Улоф Пальме и Рави Шанкар подбрасывают правильную монетку (вероятность выпадения орла 0.5). Улоф подбрасывает её n раз, а Рави — $n+1$. Найдите вероятность того, что у Рави будет больше орлов, чем у Улофа.

3. Найти математическое ожидание числа неподвижных точек для случайной перестановки на n элементах.

4. Верно ли, что $rankAB = rankBA$ для любых квадратных матриц A и B?

5. Есть круговая трасса, на которой в некоторых местах стоят бензоколонки. расстояние между ними и количество бензина на каждой бензоколонке известны. Имеется также машина с постоянным и известным расходом топлива. Предложите алгоритм, работающий за $O(n)$ по времени, который позволяет найти ту бензоколонку, начиная с которой можно проехать всю трассу, или сказать, что такой нет.

Вариант 1

1. Пусть A — квадратная матрица, у которой сумма матричных элементов в каждом столбце равна λ. Докажите, что λ является собственным значением матрицы A.

2. На плоскости зафиксированы две точки A и B на расстоянии 2. Пусть C — случайно выбранная точка круга радиуса R с центром в середине отрезка AB. С какой вероятностью треугольник ABC будет тупоугольным?

3. Требуется отгадать число от 1 до n ($n > 10$), задавая лишь вопросы, на которые можно отвечать "да" или "нет", при этом отвечающий может один раз солгать. Придумайте алгоритм, гарантированно позволяющий сделать это быстрее, чем за $2\lceil \log_2 n \rceil + 1$ шагов.

4. Найдите интеграл: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2014} x}{\sin^{2014} x + \cos^{2014} x} dx.$

8. Зададим числовую последовательность a_n следующим образом. Пусть a_1 и a_2 — произвольные натуральные числа. Число a_n получается приписыванием к a_{n-1} числа a_{n-2} справа. Предложите алгоритм, вычисляющий по данным a_1 и a_2 i-ю цифру числа a_n и оцените его временную сложность. Ограничение по памяти: $O(1)$.

5. Пусть функция f непрерывна и ограничена на промежутке $(0, +\infty)$. Докажите, что для любого числа T существует последовательность $\{x_n\}$, стремящаяся к $+\infty$ и такая, что $f(x_n + T) - f(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

6. Найдите максимальное значение определителя матрицы (а) второго (б) третьего порядка, если сумма квадратов всех ее элементов не превосходит 1.

7. В компании из 51 человека каждый на дух не переносит ровно троих (при этом они не обязательно отвечают ему взаимностью). Требуется разделить компанию на n групп так, чтобы каждый человек входил только в одну группу, и между членами каждой из групп царило взаимопонимание. При каком наименьшем n это возможно?

Вариант 2

1. Пусть $M \subset \mathbb{R}$ — множество из n элементов. Пусть, далее, $S_M = \left\{ \frac{x+y}{2} | x, y \in M, \ x \neq y \right\}$. Найдите наименьшую возможную мощность множества S_M (одинаковые элементы множества считаются одним элементов).

2. На окружности выбираются 3 случайных точки. С какой вероятностью центр окружности лежит внутри треугольника с вершинами в этих точках?

3. Квадратная матрица A размера 9×9 над полем характеристики, отличной от 2, такова, что $A^2 = E$. Найдите ранг матрицы $E - A$, если известно, что ранг матрицы $E + A$ равен 7.

4. В полукруге есть n неизвестных нам точек. Разрешается задавать вопросы вида "каково расстояние от точки X до ближайшей из этих точек?" Если расстояние оказывается нулевым, точка считается угаданной. Докажите, что хотя бы одну из этих точек можно угадать не более чем за $2n + 1$ вопрос.

5. Найдите предел $\lim_{\lambda \to 0+} \frac{1}{\ln \lambda} \int\limits_{\lambda}^{a} \frac{\cos x}{x} dx$.

6. Пусть A и B — квадратичные матрицы размера 2×2. Рассмотрим линейный оператор F на пространстве матриц 2×2, действующий по правилу $F(M) = AMB$. Матрица A имеет 2 различных собственных значения λ_1 и λ_2, а B — 2 различных собственных значения μ_1 и μ_2. Найдите собственные значения оператора F, если
(а) матрицы A и B — диагональные;
(б) матрицы A и B — произвольные.

7. Квадратная матрица $n \times n$ заполнена различными натуральными числами. Предложите алгоритм, находящий два элемента этой матрицы, не лежащих ни в одной строке, ни в одном столбце, с максимально возможным произведением. Ограничение по времени — $O(n^2)$, по памяти — $O(n)$.

8. Игральную кость с n гранями (и числами от 1 до n на этих гранях) подбрасывают до тех пор, пока сумма выпавших очков не станет больше либо равна n. Все грани кости выпадают с одинаковой вероятностью. Найдите математическое ожидание числа бросков.

Вариант 3

1. Пусть A — невырожденная вещественная матрица $n \times n$, все элементы которой положительны. Докажите, что число нулей среди элементов матрицы A^{-1} не превосходит $n^2 - 2n$.

2. Трое игроков по очереди вынимают от 1 до m ($m > 1$) камней из кучи (количество камней в куче им изначально известно). Игрок, вынувший последний камень, проигрывает. Докажите, что если изначально куча была достаточно велика, то любые два игрока, договорившись, сумеют привести третьего к проигрышу.

3. Найдите предел последовательности (c_n), определяемой рекуррентным соотношением $c_{n+1} = (1 - \frac{1}{n})c_n + \beta_n$, где (β_n) — любая последовательность со свойством $n^2\beta_n \to 0$ при $n \to 0$.

4. Отрезок $[0, 1]$ разбит двумя случайными точками на три части. Найдите математическое ожидание длины меньшей из частей.

5. Предложите алгоритм, находящий значения $P(n+1), P(n+2), \ldots, P(2n)$ неизвестного многочлена n-й степени $P(x)$, если даны его значения $P(0), P(1), \ldots, P(n)$. Ограничение по времени — $O(n^2)$.

6. Вычислите интеграл $\int e^{e^x + 2014x} dx$.

7. Когда студент пришёл в аудиторию, на доске было написано число 0. В ожидании лекции студент подкидывает монетку и, если выпадает орёл, он прибавляет 1, а если решка — то вычитает. Орёл и решка выпадают с одинаковой вероятностью. Найдите вероятность того, что на момент после $(2n+1)$-го подбрасывания число на доске сменило знак (с положительного на отрицательный или наоборот) а) ровно n раз; б) ни разу.

8. При каких натуральных N существует квадратная матрица порядка N с элементами $0, 1$ такая, что ее квадрат — это матрица из одних единиц?

Минск

1. Стержень длины L произвольным образом разламывают на две части и выбрасывают меньшую часть. Затем оставшуюся часть ломают и снова выбрасывают меньшую часть. Найдите вероятность того, что длина оставшейся части не меньше $L/2$.

2. Найдите максимум и минимум функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$$

на круге $x^2 + y^2 \leq 5^2$

3. Сколько 2014-значных чисел, составленных из цифр 1, 3, 4, 6, 7, 9 делятся на 7?

4. В социальной сети зарегистрировано n человек. Каждый участник может подписываться на сообщения других участников, причем если человек A подписан на B, то из этого не следует, что B подписан на A. Известно, что среди зарегистрированных пользователей есть знаменитость- человек, на которого подписаны все $n-1$ других пользователей, но сам он ни на кого не подписан. Предложите алгоритм, позволяющий найти знаменитость за не более, чем n запросов к серверу.

5. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

6. Квадратная матрица A размера $n \times n$ строится следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если i делит j,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вычислите определитель A.

7. В коридоре длины L находятся n роботов, i-й из которых изначально расположен в позиции x_i(все позиции различны $0 \leq x_i \leq L$). Все роботы движутся с единичной скоростью вдоль коридора. **i**-й робот движется со скоростью $v_i(\pm 1)$. При столкновении робота с границей коридора или с другим роботом направление вектора скорости робота меняется на противоположное.

Прошло t единиц времени ...

(a)Требуется найти множество точек, в которых находятся роботы(без учётка порядка: неважно, какой робот находится в какой точке; точки в множестве не должны повторяться)

(b)Для каждого робота i необходимо указать его финальное положение y_i в коридоре. Предложите эффективный алгоритм решения этих задач.

Харьков

1. Среди участников похода из любых четерёх как минимум один знаком с тремя другими. Докажите, что каждый участник похода, кроме максимум трех, знаком со всеми остальными.

2. Опишите все невырожденные вещественные матрицы A, для которых все элементы матриц A и A^{-1} неотрицательны.

3. Дан числовой массив длины n. Предложите алгоритм, находящий максимальное значение сумм отрезков этого массива. Ограничение по времени – $O(n)$, по дополнительной памяти $O(1)$.

4. Есть 10 монет разного веса и некоторые весы. Припомощи одного взвешивания на весах можно узнать для выбранных двух монет, какая тяжелее. Можно ли за 20 взвешиваний узнать, в каком порядке монеты идут по весу?

5. Вычислите сумму интегралов:

$$\int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} sin(x^2)dx + \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{arcsin(x)}dx?$$

6. Игра состоит из одинаковых и независимых конов, в каждом из которых выигрыш происходит с вероятностью p. Когда игрок выигрывает, он получает 1 доллар, а когда проигрывает – платит 1 доллар. Как только его капитал достигает величины N долларов, он объявляется победителем и удаляется из казино. Найдите вероятность того, что игрок рано или поздно проиграет все деньги, в зависимости от его стратового капитала K.

7. Пусть a – действительное число. Для каждого целого $n \geq 0$ обозначим через a_n расстояние от a до ближайшего рационального числа вида $\frac{m}{2^n}$, где m – целое. Найдите наибольшую возможную сумму ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n$.

Вариант 1

1. Найдите предел последовательности (a_n), для которой $a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2(a_n-3)}{4}$.

2. На плоскости, однородно покрытой прямоугольниками со сторонами 10 и 20, рисуют случайную окружность радиуса 4. Найдите вероятность того, что окружность имеет общие точки ровно с тремя прямоугольниками.

3. Дима и Ваня по очереди вписывают элементы в квадратную матрицу порядка $2n$. Цель Вани — сделать так, чтобы получившаяся в итоге матрица имела собственное значение 1, а цель Димы — помешать ему. Дима ходит первым. Есть ли у кого-нибудь из них выигрышная стратегия?

4. Найдите определитель матрицы $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = C_{i+j-2}^{i-1}$.

5. Даны два массива целых чисел $a[1..n]$ и $b[1..k]$, причем все элементы b различны. Предложите алгоритм, находящий набор индексов $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ с минимальной разностью $i_k - i_1$, для которого набор $a[i_1], \ldots, a[i_k]$ является перестановкой элементов массива b. Ограничение по времени — $O(nk)$ (более быстрые алгоритмы приветствуются), по дополнительной памяти — $O(n)$.

6. В 2222 году волейбольные турниры проводят по новой системе. Говорят, что команда A *превосходит* команду B, если A выиграла у B или у какой-либо команды, выигравшей у B (правило не транзитивно!). Каждая пара команд играет по одному разу. Ничья исключается волейбольными правилами. Чемпионом объявляют команду, превзошедшую все другие команды. Докажите, что (а) чемпион обязательно найдется, и (б) не может быть ровно двух чемпионов.

7. Вычислите интеграл $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2-x+1} dx$.

8. На плоскости нарисована ломаная с n звеньями. Длина каждого звена равна 1, ориентированный угол между соседними звеньями с равной вероятностью равен α и $-\alpha$. Найдите математическое ожидание квадрата расстояния от её начальной точки до конечной.

Вариант 2

1. Квадратная матрица A такова, что $tr(AX) = 0$ для любой матрицы X, имеющей нулевой след. Докажите, что матрица A является скалярной (то есть имеет вид λE для некоторого скаляра λ).

2. Придя на письменный экзамен в ШАД, студенты поняли, что среди любых четырех человек хотя бы один уже знаком с тремя оставшимися. Докажите, что в этом случае среди любых четверых человек хотя бы один уже знаком со всеми остальными студентами.

3. На окружности выбираются две случайные точки A и B. Найдите математическое ожидание площади меньшего из сегментов, на которые хорда AB разбивает круг.

4. Дан массив из n целых чисел. Предложите алгоритм, сортирующий их по остатку при делении на 5 за время $O(n)$ (в каком порядке будут расположены числа, имеющие один и тот же остаток, неважно). Ограничение по дополнительной памяти — $O(1)$.

5. Исследуйте на сходимость и абсолютную сходимость ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{k^2+1}\right)$.

6. У вас имеется неограниченное число костей в форме всех возможных правильных многогранников. Можно ли, однократно бросив некоторый набор таких костей, симулировать бросок а) правильной семигранной кости б) правильной 15-гранной кости.

7. Пусть A и B — квадратные вещественные матрицы одного и того же размера.
Докажите, что $det(E - AB) = det(E - BA)$.

8. За столом сидят n старателей, перед каждым из которых находится кучка золотого песка. Каждую минуту происходит следующее: по общей команде каждый из них перекладывает в свою кучку половину песка из кучки левого соседа и половину — из кучки правого соседа. Опишите асимптотическое поведение кучек (а) при $n = 3$; (б) при произвольном n.

Вариант 3

1. Постройте график функции $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n},\ x \geq 0.$

2. Найдите собственные значения матрицы vv^T, где v — некоторый вектор-столбец.

3. Найдите математическое ожидание числа неподвижных точек подстановки на n элементах.

4. Пусть X и Y — квадратные матрицы одинакового размера, причем $XY = \lambda X + \mu Y$ для некоторых $\lambda, \mu \neq 0$. Докажите, что матрицы X и Y коммутируют.

5. Электрическая цепь представляет собой связный неориентированный граф без кратных ребер, в котором ребра (числом N) — это провода, а вершины — либо лампочки, либо единственный источник тока. На каждом ребре размещено реле. Лампочка горит, если существует путь, соединяющий ее с источником тока, вдоль которого все реле находятся в положении "включено". Известно, что ровно одно из реле бракованное и никогда не пропускает ток. Вы можете включать и отключать реле (и видите, горят ли лампочки). Изначально все выключатели находятся в положении "включено". Опишите способ нахождения неисправного реле за $O(N)$ операций включения-выключения.

6. Пусть f — дифференцируемая функция, причём $f(0) = 0$ и $0 < f'(x) \leq 1$. Докажите, что для всех $x \geq 0$ имеет место неравенство $\int\limits_0^x f^3(t)dt \leq \left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)^2$.

7. Для произвольных n, m вычислите сумму: $\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^{m+i+1}} C_{m+i}^i + \sum_{i=0}^m \frac{1}{2^{n+i+1}} C_{n+i}^i$.

8. На сфере случайным образом выбираются четыре точки A, B, C, D. С какой вероятностью кратчайшие дуги AB и CD пересекаются?

Минск

1. Докажите, что для любого натурального n больше пяти лист бумаги квадратной формы можно разрезать на n квадратных кусков.

2. Рассмотрим случайную перестановку $P = (p_1, p_2, ...p_n)$ натуральных чисел от 1 до n. Пару чисел (i, j) назовём "обменом", если выполняются соотношения $p_i = j$, $p_j = i$. Вычислите математическое ожидание количества обменов в перестановке P(перестановка выбирается случайно равновероятно из множества всех перестановок от 1 до n).

3. Докажите, что для любого неотрицательного целого n существуют целые числа x, y и z $(0 \le x < y < z)$ такие, что выполняется соотношение:

$$n = C_x^1 + C_y^2 + C_z^3.$$

4. Трудоёмкость алгоритма A описывается следующим соотношением ($T(n)-$ время решения задачи размерности n):

$$T(n) \le T([\sqrt{n}]) + 1, \quad T(1) = C_1(const)$$

Найдите асимптотически как можно бо́льшую функцию, удовлетворяющую этому соотношению. Ответ представьте в O-нотации, докажите, что функция удовлетворяет данному соотношению.

5. Рассмотрим клетчатую доску размера $N \times M$. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке в белый и черный цвета, причём левую верхнюю клетку покрасим в белый цвет. Найдите количество способов вырезать из этой доски содержащий не более 4 черных клеток участок. Резать разрешается только по границам клеток.

(a)$N = 8$ и $M = 8$.

(b)$N = 99$ и $M = 101$.

(c)Найдите ответ для произвольных натуральных N и M.

6. Палиндромом называется строка, которая одинаково читатется слева направо и справо налево. Рассмотрим некоторую строку S, состоящую из маленьких латинских букв. Какое минимальное количество букв(возможно, нуль) нужно в ней удалить, чтобы она не являлась палиндромом? Предложите алгоритм решения задачи, докажите его корректность, оцените трудоёмкость.

7. Рассмотрим четыре реализации одной и той же функции на языке программирования *python*. Определите, что должна вычислять функция. Какие из реализаций работают корректно?

(a)
```
def solve(n, k):
    if n < 0 or k < 0 or k > n: return 0
    if n == 0 or k == 0 or n == k: return 1
    s = 0
    step = k
    if n >47 : step = 10
    for i in range(n + 1):
        s+= solve(n - step, i * solve(step, k-i)
    return s
```
(b)
```
def solve(n, k):
    A = [0 for i in range (n+1)]
    for s in range(16**n)
        tmp = s
        odd = 0
        for t in range(n):
            if tmp % 2: odd += 1
            tmp = tmp // 16
        A[odd] += 1
    return A[k] // 2**(3*n)
```
(c)
```
def solve(n, k):
    if k == 0 or n == k: return 1
    return solve(n + 1, k) - solve(n, k - 1)
```
(d)
```
def solve(n, k):
    if k == 0 or n == k: return 1
    return solve(n, k + 1) * (k + 1) // (n - k)
```

*Замечание.*Некоторые разъяснения к синтаксису *python*.

-**range(x)** возвращает массив $[0, 1, \ldots, x-1]$

-** возведение в степень, например, $2**5 == 32$

-% взятие остатка от деления, например, $7\%3 == 1$

- // целочисленное деление, например, $7//3 == 2$

Вариант 1

1. Решите уравнение $\lim_{n\to\infty} \cos nx = 1$.

2. Докажите, что целочисленная матрица не может иметь собственного значения, равного $\frac{1}{4}(-3 + i\sqrt{5})$.

3. В мишень, которая представляет собой прямоугольник размера 3×2, стреляют из пистолета. Известно, что отклонение пули от точки, на которую нацелен пистолет, произвольно, но не превышает 0.1 по любому направлению, параллельному сторонам прямоугольника. Стрелок целится в произвольную точку мишени. С какой вероятностью он попадет в мишень?

4. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — ограниченная гладкая функция, причём её среднее значение на любой окружности радиуса 1 равно значению в центре этой окружности. Докажите, что f постоянна.

5. Дана матрица $n \times n$, каждая строка и каждый столбец которой упорядочены по возрастанию (то есть $a_{ki} < a_{kj}$ и $a_{it} < a_{jt}$ при $i < j$). Предложите алгоритм, находящий два элемента этой матрицы, сумма которых наиболее близка к заданному числу q. Ограничение по дополнительной памяти — $O(n)$. Изменять исходную матрицу нельзя. Внимание: оценка будет зависеть от эффективности вашего алгоритма.

6. Робот движется по клеткам бесконечной шахматной доски. Один его шаг — это перемещение на случайную из восьми соседних клеток. Найдите математическое ожидание модуля разности между количеством черных и количеством белых клеток, на которых робот побывал за n шагов (каждая клетка считается столько раз, сколько на ней побывал робот). Ответ представьте в виде компактного выражения.

7. Пусть $J \in Mat_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ — кососимметрическая матрица, β — положительное число, а $u \in \mathbb{R}^{2n}$ — ненулевой вектор. Найдите $det(E + \beta uu^T J)$.

8. Докажите, что из последовательности из $mn+1$ различных действительных чисел всегда можно выделить возрастающую подпоследовательность из $n+1$ числа или убывающую подпоследовательность из $m+1$ числа.

Вариант 2

1. Пусть A и B — квадратные матрицы одинакового размера. Верно ли, что если $ABA = A$, то $BAB = B$?

2. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=3}^{\infty}(\ln\ln n)^{-\ln n}$.

3. Случайные величины X и Y независимы. Плотность случайной величины X равна $p_X(t) = \frac{t}{2}I_{[0,2]}(t)$ (где $I_{[0,2]}(t)$ — индикаторная функция отрезка $[0,2]$), а Y имеет равномерное распределение на отрезке $[0,3]$. Найдите вероятность того, что из отрезков с длинами X, Y и 1 можно составить треугольник.

4. Даны n отрезков $[a_i, b_i]$. Назовем индексом вложенности отрезка $[a_i, b_i]$ количество отрезков, которые его содержат. Предложите алгоритм, определяющий, есть ли в наборе отрезок с индексом вложенности, превышающим 1000. Ограничение по времени — $O(n \log n)$, по дополнительной памяти — $O(n)$.

5. Существует ли непрерывная функция $f(x)$, для которой $f(f(x)) = 1 - x^3$?

6. В ряд расположены m предметов. Случайно выбираются k предметов, $k < m$. Случайная величина X равна количеству таких предметов i, что i выбран, а все его соседи не выбраны. Найдите математическое ожидание.

7. В графстве Орэ имеется несколько городов, соединенных дорогами, причем из каждого города выходит ровно три таких дороги. Инквизитор брат Франсуа странствует по графству, искореняя ересь. Выехав из города Э, он едет по дорогам, причем после каждого посещенного им города он поворачивает либо направо, либо налево по отношению к дороге, по которой приехал, и никогда не сворачивает в ту сторону, в которую он свернул перед этим. Докажите, что рано или поздно брат Франсуа вернется в город Э.

8. Пусть A и B — симметричные билинейные функции на двумерном вещественном пространстве, причем A положительно определена, а B отрицательно определена. Докажите, что любая непрерывная кривая в пространстве симметричных билинейных функций, соединяющая A и B, содержит функцию с вырожденной матрицей.

Вариант 3

1. Докажите, что любая квадратная вещественная матрица является суммой двух обратимых.

2. Может ли непрерывная на всей числовой прямой функция принимать каждое значение (а) дважды? (б) трижды?

3. Каждая из случайных величин X и Y принимает два значения, причём $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. Докажите, что X и Y независимы.

4. Все ребра неориентированного ациклического графа покрашены в два цвета: красный и синий. Предложите алгоритм, находящий длину максимального пути, в котором любые два соседних ребра разного цвета. Ограничение по времени — $O(V + E)$, где V — число вершин графа, E — число его ребер. Сколько дополнительной памяти требуется вашему алгоритму?

5. Пусть ξ, η и λ — независимые случайные величины равномерно распределённые на отрезке $[0, 1]$, а t — фиксированное число. Найдите $P(\xi + \eta < t\lambda)$.

6. В пространстве многочленов с действительными коэффициентами степени не выше n задана квадратичная форма $Q(f) = f(1)f(2)$. Найдите ее сигнатуру (число единиц и минус единиц в нормальном виде).

7. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 e^{\{nx\}} x^{2016} dx$, где $\{t\}$ означает дробную часть числа t.

8. а) Докажите, что во множестве отрезков $\Lambda = \{[i, j] | i, j = 1, \ldots, n, i < j\}$ можно выбрать подмножество Σ, содержащее $O(n \log n)$ отрезков так, чтобы любой отрезок из Λ представлялся в виде объединения не более двух отрезков из Σ.

б) Докажите, что эта оценка точна, то есть подмножество $\Sigma \subseteq \Lambda$, удовлетворяющее условиям, должно содержать $\Omega(n \log n)$ отрезков.

Вариант 1

1. Верно ли, что если матрица $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ симметрична и положительно определена, то квадратичная форма $q(X) = tr(X^T AX)$ на пространстве $Mat_n(\mathbb{R})$ будет положительно определенной?

2. Известно, что $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$. Докажите, что многочлен

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

имеет хотя бы один действительный корень.

3. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2, принимающие положительные значения. Пусть также $m < n$. Найдите математическое ожидание отношения: $\frac{X_1+\ldots+X_m}{X_1+\ldots+X_n}$.

4. Чёрный куб покрасили снаружи белой краской, затем разрезали на 27 одинаковых маленьких кубиков и как попало сложили из них большой куб. С какой вероятностью все грани этого куба будут белыми?

5. Придумайте структуру для хранения действительных чисел, которая могла бы выполнять запросы "добавить элемент", "удалить элемент", "удалить максимальный элемент" и "удалить минимальный элемент причем последние два выполняла бы за $O(1)$. Постарайтесь также минимизировать время выполнения первых двух запросов. Можно ли сделать так, чтобы и они тоже выполнялись за $O(1)$?

6. Последовательность a_n задана условием $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sin a_n$. Сходится ли ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$?

7. Назовем матрицу вращательной, если при повороте на $90°$ вокруг центра она не меняется.

(а) Докажите, что для любого набора чисел $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$ найдется $n \in \mathbb{N}$ и вращательная матрица $n \times n$, для которой $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ являются собственными значениями.

(б) Докажите, что у вращательной матрицы с действительными коэффициентами все собственные векторы v с отличными от нуля действительными собственными значениями симметричны (то есть $v_i = v_{n-i+1}$).

8. В неориентированном графе без петель и кратных ребер $2n$ вершин и n^2+1 ребро. Треугольником в графе называется фигура, состоящая из трех вершин и трех соединяющих их ребер. Докажите, что в этом графе найдутся два треугольника с общим ребром.

Вариант 2

1. За время обучения в ШАД Михаил 20 раз решал задачи классификации. В каждой задаче он использовал ансамбль из пяти различных классификаторов, причем никакую пару классификаторов он не применял более одного раза. Каково минимально возможное число известных Михаилу классификаторов?

2. Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \times n$ $(n > 1)$, относительно которого матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице?

3. Найдите сумму $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(k+1)^2}{k!}$.

4. Вася поставил учиться две нейронные сети, каждую на своём GPU, и отправился спать. Времена обучения сетей независимы и равномерно распределены на отрезке $[1, 3]$. Через время t сервер упал и оказалось, что лишь одна сеть успела доучиться. С какой вероятностью $t \leq \dfrac{3}{2}$? Считайте, что время падения сервера тоже равномерно распределено на отрезке $[1, 3]$.

5. Докажите, что для произвольного $a_0 \in (0; 2\pi)$ последовательность, заданная условием $a_{n+1} = \int\limits_0^{a_n} \left(1 + \frac{1}{4}\cos^{2n+1} t\right) dt$, имеет предел и найдите его.

6. Пусть X — случайная величина, принимающая значения на отрезке $[0, 1]$. Пусть также m — медиана. Рассмотрим бинаризацию этой величины $\beta(X) = \begin{cases} 1, & X \geq m, \\ 0, & X < m \end{cases}$.

Верно ли , что дисперсия $\beta(X)$ не меньше дисперсии X? А если функция распределения X непрерывна? Под медианой здесь имеется ввиду число m, для которого

$$P(X \leq m) = P(X \geq m).$$

7. Все числа от 1 до $n = 2^k - 1$ записаны неизвестным нам образом в полном бинарном дереве высоты k. Будем говорить, что число t лежит между числами i и j в этом дереве, если при удалении t из дерева i и j оказываются в разных компонентах. Предложите алгоритм, определяющий, что за число находится в корне дерева за $O(n \log n)$ операций с помощью запросов вида "Лежит ли t между i и j?".

8. В пространстве $\mathbb{R}[x, y]$ многочленов с действительными коэффициентами от переменных x и y действует оператор $y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

(a) Докажите, что каждое целое число является его собственным значением.

(b) Найдите все его собственные значения. Является ли он диагонализуемым?

Вариант 3

1. Пусть x и y — два ненулевых вектора из $\mathbb{R}^n$. Верно ли, что найдется симметричная матрица A, для которой $y = Ax$?

2. Непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f(0) = f(2)$. Докажите, что для какого-то $x \in [0, 2]$ имеет место равенство $f(x) = f(x-1)$.

3. Из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$ независимо выбираются две точки x и y. При каких числах a события $\max(1-2x, y) < a$ и $\max(1-2y, x) < a$ независимы?

4. В компании "Тындекс" у каждого сотрудника не менее 50 знакомых. Оказалось, что есть два сотрудника, знакомые друг с другом лишь через 9 рукопожатий (то есть кратчайшая соединяющая их цепочка из попарно знакомых людей содержит 8 промежуточных людей). Докажите, что в этой компании хотя бы 200 сотрудников.

5. Квадратная матрица A размера $n \times n$ имеет различные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Найдите все собственные значения (в том числе комплексные) матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

6. Вы — воин Света, и сегодня вам нужно победить толпу из n гоблинов, каждый из которых изначально имеет h_i единиц жизни ($1 \le i \le n,\ h_i \in \mathbb{Z}_n,\ 0 < h_i < H$). Боретесь с гоблинами вы с помощью специального магического посоха. Если ударить таким посохом по гоблину, тот сразу же теряет p единиц жизни, а все остальные гоблины в толпе теряют q единиц жизни каждый (таковы магические свойства посоха). Гоблин считается побежденным, если после очередного удара его здоровье становится меньше или равно нулю. Обычная борьба с нечистью давно нам приелась, и чтобы внести разнообразие в сегодняшнюю битву, вы решили победить всех гоблинов, сделав минимально возможное число ударов посохом. Предложите алгоритм нахождения этого числа ударов. Ваш алгоритм должен иметь асимптотику по времени $O(n \log n)$, затраты по памяти — $O(n)$.

7. Пусть A и B — две случайных булевых матрицы $n \times n$, у которых каждый элемент равен 1 с вероятностью p (значения различных элементов не зависят друг от друга). Сколько в среднем единиц будет в их произведении , если сложение и умножение происходит по модулю 2.

8. Исследуйте на сходимость (абсолютную и условную) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, где $a_k = \int\limits_0^{\frac{\sin k}{k}} \frac{\sin t}{t} dt$.

Вариант 1

1. Существуют ли ортогональные кососимметричные матрицы 2019×2019? А 2018×2018?

2. На отрезке $[0, 1]$ в точках x, y, независимо выбранных из равномерного распределения, находится два детектора элементарных частиц. Детектор засекает частицу, если она пролетает на расстоянии не более $\frac{1}{3}$ от него. Известно, что поля восприятия детекторов покрывают весь отрезок. С какой вероятностью $y > \frac{5}{6}$?

3. Определите, сколько корней имеет уравнение $\int\limits_x^{x+\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{t^2}{3}\right) = 0$ на отрезке $[0, 3]$.

4. Дан массив A[1 . . n], состоящий из цифр от 0 до 9. Предложите алгоритм, находящий самое большое натуральное число, делящееся на 3, которое можно составить из элементов A. Ограничение по времени — $O(n)$, по дополнительной памяти — $O(1)$ (решения, использующие $O(n)$ дополнительной памяти, будут рассмотрены, но оценка будет ниже).

5. Случайная величина X равна длине цикла, содержащего одновременно элементы 1 и 2, при случайной перестановке множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Если такого цикла нет, то $X = 0$. Найдите распределение случайной величины X и ее математическое ожидание.

6. Последовательность (a_n) такова, что все $a_n \in (0, 1)$ и, кроме того, $a_{n+1} < \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$. Верно ли, что a_n сходится? Найдите множество всех возможных пределов таких последовательностей.

7. Для двух квадратных матриц A и B одного и того же размера n обозначим через AB матрицу, определяемую следующим образом: $(AB)_{ij} = \begin{cases} (AB)_{ij} & \text{если } i \text{ нечетно,} \\ b_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases}$

Для матрицы A определим оператор $\Phi_A : B \mapsto AB$ на пространстве матриц $n \times n$.
(a) Может ли этот оператор иметь собственное значение 2 для какой-либо матрицы A?
(b) Какое наибольшее число различных собственных значений может иметь такой оператор (при фиксированном n)?

8. В волшебной стране Ляляндии 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что из каждого города выходит более 90 авиалиний. Докажите, что найдется 11 городов, попарно соединенных авиалиниями друг с другом.

Вариант 2

1. В социальной сети "Улей"некоторые пары пользователей считаются друзьями, причем известно, что у любой пары друзей нет общих друзей, а у любой из пар не являющихся друзьями пользователей ровно два общих друга. Докажите, что у всех пользователей одинаковое число друзей.

2. (a) Докажите, что функции $det(X), det(X+E)$ и $det(X-E)$ на пространстве комплексных матриц 3×3 линейно независимы.

(b) Докажите, что найдется $m \in N$, для которого набор функций
$det(X-mE), det(X-(m-1)E), det(X-(m-2)E), \ldots, det(X+mE)$
линейно зависим.

3. Случайные величины X и Y независимы. X имеет распределение Лапласа с плотностью $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, а Y — равномерное на отрезке $[1,2]$. Найдите плотность распределения случайной величины $X-2Y$.

4. Подстановка σ задана двумя массивами a[1 . . n] и b[1 . . n] состоящими из всех различных чисел от 1 до n и такими, что b[i] $= \sigma($a[i]$)$ для каждого $i = 1, \ldots, n$ (например, a = [2, 3, 1], b = [1, 3, 2] кодирует транспозицию $(1,2)$). Придумайте алгоритм, определяющий, содержит ли σ цикл длины k. Ваш алгоритм может изменять исходные массивы, но должен справляться с задачей за $O(n^2)$ операций с использованием $O(1)$ дополнительной памяти (оценивая эти две асимптотики, можете считать k константой).

5. Пусть $f(x)$ — гладкая вещественная функция, причём $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Докажите, что найдутся различные $x_1, x_2 \in [0,1]$, для которых $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$.

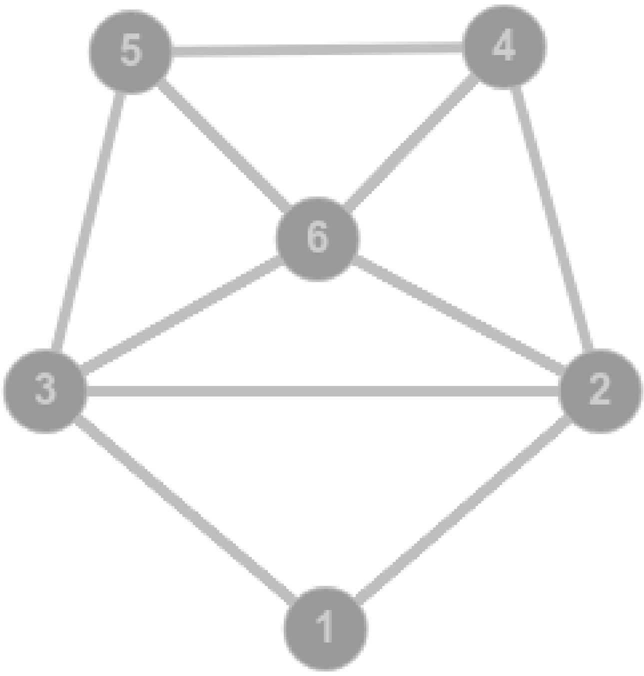
6. Линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таков, что A^3 — это оператор проекции. Какие собственные значения может иметь A? Верно ли, что A будет иметь диагональную матрицу в каком-либо базисе $\mathbb{R}^n$?

7. (a) Для непрерывной функции $f(x)$ найдите $\frac{d}{da} \iint\limits_{-ax,ya} f\left(\frac{x+y}{2}\right) dxdy$.

(b) Опишите все непрерывные функции $f(x)$, для которых при всех $a \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $\iint\limits_{-ax,ya} f\left(\frac{x+y}{2}\right) dxdy = \int\limits_{-a}^{a} f(x)\ dx$.

8. Вы попали в лабиринт, состоящий из нескольких комнат, соединенных системой двусторонних порталов. Каждый портал соединяет только одну пару комнат лабиринта. Порталом можно пользоваться неограниченное число раз. Вы появляетесь в комнате v_1 и прыжками перемещаетесь между комнатами. В комнате v_6 находится выход из лабиринта. Предположим, что каждый следующий портал для прыжка вы выбираете случайно и равновероятно среди всех порталов в этой комнате, включая портал до предыдущей комнаты. Найдите математическое ожидание количества прыжков до первого попадания в v_6.

Схема лабиринта:



Вариант 3

1. Пусть A — квадратная матрица $n \times n$. Докажите, что $n - \operatorname{rk} A \operatorname{rk} A - \operatorname{rk} A^2$.

2. Сколькими способами n различных четных чисел и n различных нечетных чисел можно записать в таблицу $2 \times n$ таким образом, чтобы нечетное число никогда не стояло под четным? Ответ должен содержать не более одной суммы.

3. На станцию приходят в случайное время две электрички. Времена их приходов независимы и имеют экспоненциальное распределение с плотностью e^{-x} при $x > 0$. Студент приходит на станцию в момент времени 2. Найдите:

а) вероятность того, что он сможет уехать хотя бы на одной электричке;

б) математическое ожидание времени ожидания студентом ближайшей электрички (считаем, что время ожидания равно нулю, если студент опоздал на обе электрички).

4. Верно ли, что всякая нечетная непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(2x) = 2f(x)$, линейна.

5. Пусть A и B — ортогональные матрицы (не ортогональные друг другу, а просто ортогональные!). Докажите, что $\det(A^T B - B^T A) = \det(A + B) \cdot \det(A - B)$.

6. Назовем элемент прямоугольной матрицы седлом, если он является наибольшим в своей строке и наименьшим в своем столбце или наоборот. Придумайте алгоритм, за $O(nm)$ операций находящий все седла в матрице $A[1..n][1..m]$, использующий не более $O(n + m)$ памяти и не более 1 раза обращающийся к каждому элементу A (можете считать, что элемент $A[i][j]$ превращается в NaN сразу после вызова $A[i][j]$). Считайте, что все элементы матрицы различны.

7. В компании "Тындекс" работает 100 сотрудников, некоторые из них знакомы друг с другом. Докажите, что найдется такая пара из них, для которой существует хотя бы 50 сотрудников, каждый из которых либо знаком с обоими людьми в этой паре, либо не знаком ни с одним из этой пары.

8. Пусть $\{\xi_n\}_{n1}$ — последовательность случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение. Сходится ли ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\xi_n > \sqrt{2\ln n + 2\ln\ln n}\right)$?

Вариант 1

1. Лёша и Марина договорились встретиться между 8:00 и 9:00 и вместе пойти на экзамен в ШАД. Каждый из них приходит на место встречи в случайный момент времени, ждёт 15 минут и уходит (никому не хочется опоздать на экзамен). Являются ли независимыми события "Лёша и Марина не встретились" и "хотя бы один из них пришел после 8:45"? Время считайте непрерывным.

2. Известно, что $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}=2$. Чему равен предел $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{f(x)}$?

3. Верно ли, что для любых линейно-независимых $v, w \in \mathbb{R}^n$ найдётся матрица A размера $n\times n$, для которой вектор v является собственным с собственным значением 5, а вектор w не лежит в образе? Если да, то найти хотя бы одну такую матрицу. Обязательно объясните ответ.

4. Дан массив вещественных чисел A[1:n]. Предложите алгоритм, находящий для каждого элемента A индекс ближайшего справа элемента, большего его хотя бы в два раза. Если такого элемента нет, то должно возвращаться значение None. Ограничение по времени $O(n\log n)$, по дополнительной памяти — $O(n)$.

5. В корзине лежит m чёрных шаров и n красных. Вася достаёт из корзины случайный шар и, если он чёрный, то заменяет его на красный, а если он красный, то кладёт его обратно. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа красных шаров в корзине после k итераций этой процедуры. Оба ответа должны быть компактными выражениями (то есть не содержать знаков суммирования, многоточий и пр.)

6. Матрицы A и B таковы, что $A^2=A$, $B^2=B$ и матрица $E-(A+B)$ обратима. Докажите, что $rkA = rkB$.

7. Пусть M — множество непрерывных убывающих функций на отрезке $[0,1]$, для которых $f(1)=0$. Найдите $\inf_{f\in M}\sup_{x\in[0,1]}\frac{xf(x)}{\int_0^1 f(t)dt}$.

8. Дан граф с 40 вершинами. Известно, что среди любых 5 вершин найдется одна, соединенная с четырьмя остальными. Каково минимально возможное число ребер в этом графе?

Вариант 2

1. На картинке ниже изображены градиенты бесконечно гладкой функции $f(x,y)$ в узлах решетки с шагом 0.5 (вектор исходит из той точки, в которой вычисляется градиент).

Утверждается, что существуют прямые (более одной), вдоль которых матрица вторых производных

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

вырождена.

(a) Найдите и укажите их количество и угловые коэффициенты (то есть коэффициенты a в уравнении $y = ax + b$).

(b) Верно ли, что существуют точки, в которых градиент не равен нулю, но, стартовав из которых, нельзя с помощью градиентного спуска прийти в точку минимума?

2. Случайные величины X и Y независимы и экспоненциально распределены, X — с параметром $\lambda = 1$, а Y — с параметром $\lambda = 2$. Пусть $Z = \max(X, Y)$. Найти математическое ожидание случайной величины Z.

3. При каком значении параметра $a \in \mathbb{R}$ матрицы А$=\begin{pmatrix} 1 & 4-a-a^2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -a-1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

могут быть матрицами одной и той же билинейной формы $V \times V \to \mathbb{R}$ в различных базисах?

4. Найдите предел $\lim_{x\to 0} \int\limits_0^x \frac{\cos(t^3)}{t+x}\ dt$.

5. В обществе анонимных подарков состоят $3n$ человек. Они готовят подарки друг другу на Новый год. Известно, что ровно n человек хотели бы получить в подарок галстук, n человек — носки, а n человек — ручного динозавра. Каждый из членов общества случайно выбирает и покупает подарок среди тех двух, что он сам не хотел бы получить (например, если он хочет получить носки, то купит галстук или динозавра). Собравшись на новогоднюю вечеринку, члены общества сложили свои подарки в общую кучу, а в конце праздника разобрали их случайно. Алиса и Боб входят в общество анонимных подарков. Алиса хотела бы получить в подарок ручного динозавра, а Боб — носки. Найдите вероятность того, что ни Алиса, ни Боб не получат те подарки, которые хотели.

6. В королевстве Грок некоторые города соединены двусторонними магическими порталами, причем из каждого города можно попасть в каждый за несколько телепортаций. Когда из города A в город B отправляют груз, то по закону стоимость пересылки равна кратчайшему расстоянию между A и B: минимально возможному количеству ребер на пути между A и B. В архиве почтовой службы вы нашли упоминание о диаметре королевства — то есть о максимально возможном кратчайшем расстоянии между парой вершин, — а также следующий способ его вычисления. Занумеруем все города числами от 1 до n. Выберем в качестве A_0 город с номером 1 и найдем кратчайшее расстояние от него до всех остальных городов. Выберем в качестве города A_1 наиболее удаленный от A_0, среди всех таких выберем город с минимальным индексом. Теперь найдем кратчайшее расстояние от города A_1 до всех остальных городов, и в качестве A_2 выберем наиболее удаленный, а среди таковых город с минимальным номером (это может быть снова A_0). Далее аналогично построим A_3, A_4 и так далее до A_k для некоторого k. Теперь в качестве диаметра выберем максимальное расстояние между всеми парами (A_i, A_{i+1}) для i от 0 до $k-1$. Приведите пример, который покажет, что такое решение не сработает, как бы мы ни выбирали значение параметра k. В вашем королевстве должно быть не более 10 городов, соединенных не более чем 100 порталами.

7. Для квадратной вещественной матрицы A размера $n \times n$ и вектора $v \in \mathbb{R}^n$ положим:

$$U(A) = \{X \in Mat_n(\mathbb{R}) |\, AX = XA\}\,,\; W(A, v) = \big\langle v, Av, A^2v, A^3v... \big\rangle$$

(a) Пусть матрица A такова, что $dimW(A, v) = n$ для любого $v \neq 0$. Какова максимально возможная размерность $U(A)$?

(b) Пусть матрица A такова, что $dimW(A, v) < n$ для любого v. Какова минимально возможная размерность $U(A)$?

8. Верно ли, что почти все (все, кроме конечного числа) натуральные числа представимы в виде $n + \tau(n)$, где $\tau(n)$ — количество делителей числа n?

Вариант 3

1. Заполните третий столбец матрицы $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & ? \\ -2 & 2 & ? \\ -1 & -2 & ? \end{pmatrix}$.

2. Что вы можете сказать о сходимости (абсолютной или условной) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2019)a_n$, если известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-2019)a_n$ сходится (а) абсолютно, (б) условно?

3. Алёна очень любит алгебру. Каждый день, заходя на свой любимый алгебраический форум, она с вероятностью $\dfrac{1}{4}$ находит там новую интересную задачу про группы, а с вероятностью $\dfrac{1}{10}$ интересную задачку про кольца. С вероятностью $\dfrac{13}{20}$ новых задач на форуме не окажется. Пусть X — это минимальное число дней, за которые у Алёны появится хотя бы одна новая задача про группы и хотя бы одна про кольца. Найдите распределение случайной величины X. В ответе должны участвовать только компактные выражения (не содержащие знаков суммирования, многоточий и пр.).

4. Дан массив A[1:n] вещественных чисел, отсортированный по возрастанию, а также числа p, q, r. Предложите алгоритм, строящий массив B[1:n], состоящий из чисел px^2+qx+r, где $x \in$ A, также отсортированный по возрастанию. Ограничение по времени — $O(n)$, по дополнительной памяти — $O(n)$.

5. Вещественнозначная функция f определена на отрезке $[a;b]$ $(b-a \geq 4)$ и дифференцируема на нём. Докажите, что найдётся точка $x_0 \in (a,b)$, для которой
$f'(x_0) < 1 + f^2(x_0)$.

6. Квадратная вещественная матрица A такова, что $A^T = p(A)$, где $p(x)$ — многочлен с ненулевым свободным членом. Докажите, что A обратима. Верно ли, что для любого оператора $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ найдётся многочлен $p(x)$ и некоторый базис, в котором матрица φ удовлетворяет условию $A^T = p(A)$?

7. Дан граф с 30 вершинами. Известно, что для любых 5 вершин в графе есть цикл длины 5, содержащий эти вершины. Докажите, что найдётся 10 вершин, попарно соединённых рёбрами друг с другом.

8. Найти предел:

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{5n} C_{k-1}^{n-1} \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{k-n}$.

Вариант 1

1. Найти максимальное a, для которого существуют функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f(x)^2 + g(x)^2 \geq a$ и выполнены следующие условия:
(a) $f(x)$ и $g(x)$ - неубывающие дважды дифференцируемые функции,
(b) $f''(x) = g(x)$ и $g''(x) = f(x)$,
(c) функция $f(x)g(x)$ линейна.

2. Пусть A - вещественная $n \times n$ матрица такая, что $A^2 = -E$, где E- единичная $n \times n$ матрица и пусть $f(t)$- многочлен такой, что $f(A) \neq \lambda E$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Верно ли, что матрица A не имеет действительных собственных значений? Ответ обоснуйте.

3. В первой коробке лежат 4 черных и 3 белых шара, а во второй- 5 черных и 4 белых. Из первой коробки наугад вынимается один шар и перекладывается во вторую после чего из второй коробки наугад вынимается один шар, который оказывается черным. Чему равна вероятность того, что из первой коробки был вынут белый шар?

4. Футбольный мяч состоит из 96 лоскутов: красных шестиугольников и желтых пятиугольников, причем швы на стыке этих многоугольников не пересекаются в одной точке в количестве более трех штук, а если два многоугольника граничат, то граничат сразу по всей стороне от вершины до вершины. Каждый желтый многоугольник граничит только с красными, а каждый красный с тремя желтыми и тремя красными. Сколько лоскутов желтого цвета?

5. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 1$.Найдите матожидание $\mathbf{E}\left[\frac{1}{X}\right]$, если оно существует или докажите, что оно не существует.

6. Для натурального числа n и строки S из строчных латинских букв через $n[S]$ обозначим строку, являющуюся n кратным повторением строки S, например, $3[ab] = ababab$. Предложите алгоритм, вычисляющий длины строк сокращенно записанных в виде $n_1[S_1] \ldots n_k[S_k]$, где каждое n_i записано в десятичной записи. Ограничение на время работы алгоритма - $O(L)$, где L- длина сокращенной записи строки.Обоснуйте корректность алгоритма, приведите оценку числа операций и объёма дополнительной памяти. Описание алгоритма желательно дать текстом, возможно с привлечением псевдокода.

7. Гермионе задали задачу: *Пусть* A *и* B*- матрицы* 3×2 *и* 2×3 *соответственно. Найдите определитель матрицы* BA*,если известно, что эта матрица невырождена и, кроме того,*

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Гермиона не смогла решить задачу и попросила помощи у Рона. Рон возвёл матрицу в квадрат после чего Гермиона быстро нашла определитель матрицы BA. А вы сможете это сделать? Объясните ваш ответ.

8. Пусть S- множество невозрастающих последовательностей (x_i) положительных чисел таких, что $x_1 = 1$ и $\lim_{i\to\infty} x_i = 0$. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{(x_i)\in S} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_{k+1}}$$

Вариант 1

1. Пусть

$$f(x) = \frac{cx^2(1-c)^2}{(x^2+c^3)(x^2+c)}$$

Найдите при каких параметрах c во всех точках, в которых $f(x)$ определена, выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq 1$.

2. В $\mathbb{R}^n$ дана система, состоящая из m векторов и имеющая ранг k. У векторов этой системы случайным образом изменили координаты с номерами $0 \leq a_1 < \ldots < a_d \leq n$. Какой ранг возможен у полученной системы?

3. Пусть X_1, X_2, Y_1, Y_2- независимые случайные величины, распределенные экспоненциально с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ соответственно. Найдите $E(max\{X_1+Y_1, X_2+Y_2\})$.

4. Прямоугольник размера $m \times n$ разбит на квадратики размеров 1×1, некоторые из которых покрашены в красный цвет. Предложите алгоритм для нахождения всех квадратиков, расположенных на максимальном манхэттоновском расстоянии от покрашенных клеток. Время работы алгоритма должно быть $O(mn)$. Оцените объём необходимой дополнительной памяти вашего алгоритма.

5. Вася бросает 20-гранную кость, на гранях которой написаны числа от 1 до 20, а вероятность выпадения граней одинакова. Он видит, что выпало, и при желании может бросить кость второй раз (в этом случае результат первого броска забывается и засчитывается результат второго броска). Петя бросает 10-гранную кость, на гранях которой написаны числа от 1 до 10, а вероятность выпадения каждой из граней одинакова. Петя выигрывает, если у него выпадает очков больше, чем у Васи, в противном случае выигрывает Вася. Проигравший платит выигграшему столько, сколько у выигравшего выпало очков. При каком максимальном результате первого броска Васе следует бросить кость второй раз, чтобы максимизировать матожидание своего выигрыша?

6. Пусть

$$M = \begin{pmatrix} E & A \\ A^T & E \end{pmatrix}$$

где E- $n \times n$ единичная матрица, $A = U\Lambda V^T$, где U, V - ортогональные $n \times n$ матрицы, Λ - диагональная матрица с числами $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ на диагонали. Найдите собственное значение матрицы M.

7. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0,1]$, причем $f(0) = f(1) = 0$. Известно, что $|f''(x)| \leq A$ для всех $x \in (0,1)$. Найдите максимально возможное значение $|f'(x)|$ при $x \in [0,1]$.

8. Какой минимальной длины существует цепочка из цифр, такая, что в ней в качестве фрагментов четырёх из подряд идущих цифр присутствует все не начинающиеся с нуля цепочки из 4 цифр.

Вариант 2

1. Вычислите при всех x предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sin(x+\frac{1}{n}) - sin(x)}{sin(x+\frac{1}{n})\cdot(\sqrt{x+n}-\sqrt{n})}$$

2. Известно, что

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

является матрицей некоторого ортонормированного оператора в некотором ортонормированном базисе. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

-матрица этого же оператора в некотором другом ортонормированном базисе. Найдите все варианты для значений элементов, помеченных звездочками.

3. (a)Игроки A,B и C сменяя друг друга, по очереди кидают две игральные кости до тех пор пока не получат сумму очков, равную 7. Найдите вероятность того, что сумму очков равную 7 получит B.

(b)В результате проведения эксперимента возможны два исхода: успех (с вероятностью p) и неуспех (с вероятностью $1-p$). Экспериментаторы A,B и C сменяя друг друга, по очереди проводят этот эксперимент до тех пор пока не получат успех. Найдите максимальное значение вероятности p, при котором вероятность того, что успех получит B больше либо равна $\frac{1}{3}$.

4. Даны массивы $A[1\dots n]$, $B[1\dots n]$. Предложите алгоритм, определяющий за $o(n^2)$ количество пар (i,j), где $i \le j$, таких, что сумма элементов массива$A[i\dots j]$ равна сумме элементов массива $B[i\dots j]$.

5. Верно ли, что для любых двух неколлинеарных векторов v, w в $\mathbb{R}^n$ найдётся скалярное произведение, относительно которого w является ортогональной проекцией вектора v на некоторое $(n-1)$-мерное подпространство?

6. Пусть ξ- строго положительная случайная величина, причем её дисперсия существует и не превосходит 2. Верно ли, что $\mathbf{P}(\mathbf{E}(\xi) - 2 \leq \xi \leq 2\mathbf{E}(\xi) + 1) \geq \frac{1}{2}$?

7. Дан граф без кратных ребер и петель с 40 вершинами. Известно, что у любого ребра хотя бы одним из концов является вершина, из которой выходит не более 4 других ребер. Какое наибольшее количество ребер может быть в этом графе?

8. Верно ли, что для любой непрерывной функции $g(x)$ существует единственная функция $h(x)$ такая, что

$$\int_0^{h(a)} (sin(a)cos(x) + 2)dx = g(a)?$$

Вариант 1

1. Известно, что $A^2 + A = 2I$, где A - квадратная матрица размера 5×5 над полем действительных чисел ($A \in Mat_{5\times5}(\mathbb{R})$), а I - единичная соответствующего порядка. Найдите максимально возможное значение следа матрицы .

2. Дана функция

$$g(x) = \int_{x-1}^{1-x} e^{t^2}(2022 + (1-t)(1+t))dt,$$

найдите ее экстремумы, если $x \in (-\infty; +\infty)$

3. Пусть задан случайный вектор $v = (X_1, X_2, X_3)$, компоненты которого независимы и распределены равномерно на отрезке $[1, 5]$. Найдите функцию плотности случайного вектора $w = (X_{(3)}, X_{(2)}, X_{(1)})$, состоящего из компонент вектора v, упорядоченных по невозрастанию.

4. У Карабаса-Барабаса на столе лежит N кучек монет, в i-й из которых $A[i]$ монет. Карабас любит единообразие, поэтому он добыл ещё k монет и хочет разложить их по уже имеющимся кучкам так, чтобы как можно больше кучек в итоге стали одного размера (он не обязан использовать все k монет). Помогите ему, сочинив алгоритм, принимающий на вход массив $A[1 : N]$ и число k и определяющий максимальное число m, для которого добавлением не более чем k монет можно добиться, чтобы т кучек стали одного размера. Ваш алгоритм должен работать за $O(NlogN)$ операций. Обязательно обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените его сложность и объём необходимой дополнительной памяти. Мы будем признательны, если описание алгоритма будет дано не листингом кода, а просто текстом, возможно, с привлечением псевдокода.

5. Пусть задано два аффинных подпространства V и W в евклидовом пространстве матриц $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $< A, B >= tr(A^T B)$:

$V = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + L$, где L - линейная оболочка матрицы, а W - аффинное подпространство, заданное матричным уравнением: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \mathrm{W} = \begin{pmatrix} -21 & 37 \\ 63 & -111 \end{pmatrix}$ Найдите общий перпендикуляр между этими подпространствами.

6. Пусть заданы две независимые случайные величины X и Y, имеющие экспоненциальные распределения с параметрами $\mu = 1$ и λ= 2 соответственно. Найдите дисперсию величины , где:

$$T = \begin{cases} 1, \mathrm{X} > \mathrm{Y} \\ 0, \mathrm{Y} \leq X \end{cases}$$

7. Дан граф со 120 вершинами (без петель и кратных рёбер). Известно, что самый короткий несамопересекающийся цикл в этом графе состоит из 12 вершин. Верно ли, что в графе найдётся вершина, из которой выходит менее 3 рёбер?

8. Пусть $g(x)$ - непрерывная функция, заданная на отрезке [0, 1]. Верно ли, что:
$\int_0^1 \int_0^1 |g(x) + g(y)| dxdy \geq \int_0^1 |g(x)| dx$?