Лекция № 12 (7 апреля 2022)

3.5. Характеристики звеньев с произвольной передаточной функцией.

Для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ звена (системы) с произвольной передаточной функцией W(p) можно использовать два способа:

Первый способ:

W(p) разбивается на простейшие сомножители

$$W(p) = \prod_i W_i(p)$$

Здесь $W_i(p)$ имеют вид

$$k;\ p;\ \frac{1}{p};\ (Tp \pm 1);\ \frac{1}{(Tp \pm 1)};\ T^2p^2 + 2\xi \mathrm{Tp} + 1;\ \frac{1}{(T^2p^2 + 2\xi \mathrm{Tp} + 1)}$$

Отсюда следует:

ККУ звена

$$W(j\omega) = \prod_i W_i(j\omega) = \prod_i A_i(\omega) \cdot e^{j\varphi_i(\omega)} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$\mathrm{A}(\omega) = \prod_{\mathrm{i}} \mathrm{A_i}(\omega) \Rightarrow \underline{L(\omega)} = 20lgA(\omega) = 20lg\prod_i A_i(\omega) = \sum_i 20lgA_i(\omega) = \underline{\sum_i L_i(\omega)} \quad (1)$$

$$\varphi(\omega) = argW(j\omega) = \sum_i argW_i(j\omega) = \underline{\sum_i \varphi(\omega)} \quad (2)$$

Суть **первого способа**: для построения ЛАЧХ (или ЛФЧХ) произвольного звена (системы) его W(p) представляется в виде произведения передаточной функции типовых динамических звеньев, затем строятся ЛАЧХ (или ЛФЧХ) этих звеньев и геометрически складываются в соответствии с формулой (1) (или (2)).

Например, пусть имеется звено с передаточной функцией $W(p) = \frac{K}{P(1+pT)}$ (инерционно-интегрирующее звено; последовательное соединение интегрирующего и инерционного звеньев).

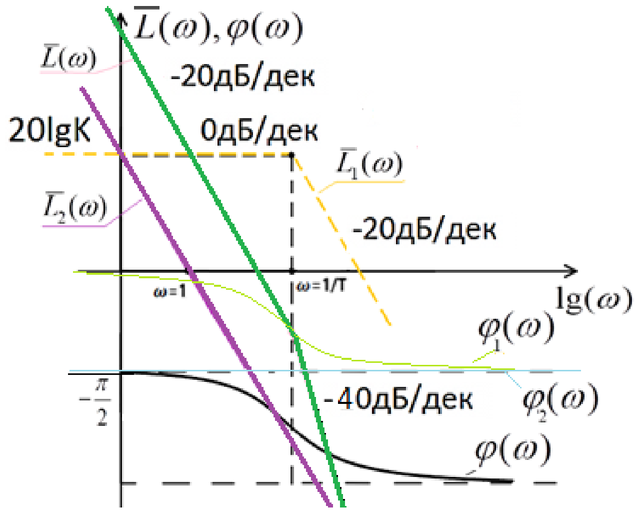
1) $W(p)$ представляется в виде произведения $W_1(p) = \frac{K}{1+pT}$ и $W_2(p) = \frac{1}{P}$.

Строятся ЛАЧХ каждого звена (в данном случае – интегрирующего и инерционного).

2) Для получения ЛАЧХ исходного звена эти ЛАЧХ складываются.

$L_1(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$ – ЛАЧХ инерционного звена

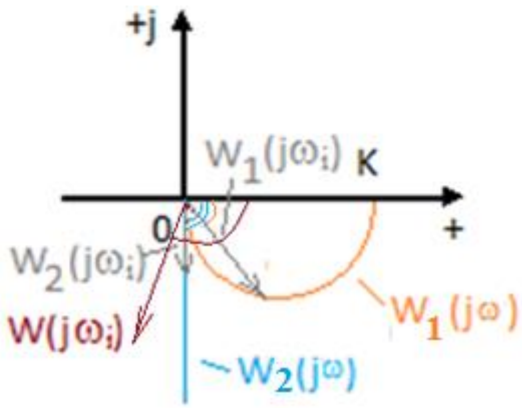
$L_2(\omega) = -20\lg\omega$ – ЛАЧХ интегрирующего звена $(= 20\lg 1 - 20\lg\omega)$



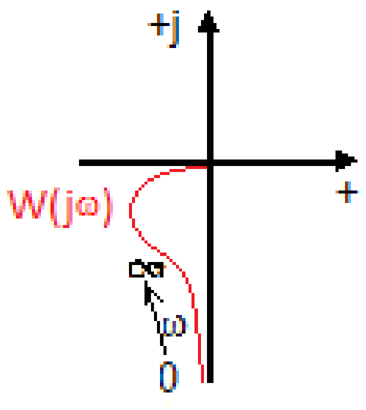
На рисунке желтым и фиолетовым показаны асимптотические ЛАЧХ инерционного и интегрирующего звеньев (соответственно).

Результирующая асимптотическая ЛАЧХ инерционно-интегрирующего звена $\overline{L}(\omega)$ показана зеленым – построена путем сложения ординат ас. ЛАЧХ обоих звеньев. Результирующая ЛФЧХ (черный график) построена также путем суммирования ординат ЛФЧХ обоих звеньев.

Аналогично для АФХ: каждой частоты ω_i амплитуды (т.е. длины векторов) комплексных коэффициентов усиления интегрирующего и инерционного звеньев перемножаются, а аргументы (углы) ККУ складываются.



В результате получаем АФХ инерционно-интегрирующего звена, представляющую собой, по определению, геометрическое место точек конца вектора комплексного коэффициента усиления при изменении частоты он нуля до бесконечности (при $0 \xrightarrow{\omega} \infty$):



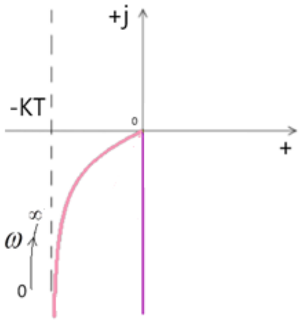
– АФХ инерционно-интегрирующего звена **(условное изображение)**

Можно показать, что при $\omega \to 0$ АФХ данного звена будет стремиться к некоторой асимптоте, параллельной мнимой оси. Для этого представим ККУ инерционно-интегрирующего звена в следующем виде:

$$W(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1+j\omega T)}=-j\frac{K}{\omega(1+j\omega T)} \overset{\text{домножим на комплексно-сопряженное число}}{=} -j\frac{K(1-j\omega T)}{\omega(1+\omega^2T^2)}=$$

$$=-\frac{KT}{1+\omega^2T^2}-j\frac{K}{\omega(1+\omega^2T^2)}=P(\omega)+jQ(\omega)$$

Как видно из данного выражения, $P(0)=-KT$, т.е. *реально* АФХ инерционно-интегрирующего звена будет выглядеть следующим образом:



Второй способ: однако для построения асимптотических ЛАЧХ можно воспользоваться **более простым правилом** (а ЛФЧХ построить затем по ЛАЧХ). Проиллюстрируем его на примере.

Пример 1: построить асимптотическую ЛАЧХ, ЛФЧХ и АФХ.

Пусть:

$$W(p)=\frac{\overset{\mathrm{I}}{100}\,\overset{\mathrm{III}}{(p+1)^2}}{p^{\nu}\,\underset{\mathrm{II}}{(10p+1)}\,\underset{\mathrm{IV}}{(0{,}1p+1)^2}}$$

(где ν – *порядок астатизма* (количество интегрирующих звеньев). Если $\nu=0$, то система статическая, если $\nu>0$, то система астатическая).

$$W(j\omega)=\frac{100(j\omega+1)^2}{(j\omega)^{\nu}(10j\omega+1)(0{,}1j\omega+1)^2}$$

$$A(\omega)=\frac{100(\sqrt{1+\omega^2})^2}{\omega^{\nu}\sqrt{1+(10\omega)^2}(\sqrt{1+(0{,}1\omega)^2})^2}$$

Пусть ν= 2. Коэффициент усиления обозначим через К (в данном примере равен 100).

Построение асимптотической ЛАЧХ (**второй способ**):

1) Записывают общее выражение для ЛАЧХ:

$$L(\omega)=20lgK+40lg\sqrt{1+\omega^2}-\nu\cdot 20lg\omega-20lg\sqrt{1+(10\omega)^2}-40lg\sqrt{1+(0{,}1\omega)^2} \quad (*)$$

2) Находят сопрягающие частоты (частоты, где асимптотическая ЛАЧХ меняет наклон) $\omega_i=\frac{1}{T_i}$, **которые нумеруют в порядке возрастания**: $\omega_1<\omega_2<\ldots$ (т.к. при малых значениях частот наибольшее влияние оказывают звенья с наибольшей постоянной времени (T_1 – наибольшая постоянная времени, далее в порядке убывания идут T_2 и т.д. – просто так их обозначим).

$$\omega_1=\frac{1}{T_1}=\frac{1}{10}=0{,}1\ (\text{сек}^{-1});\ \omega_2=\frac{1}{T_2}=\frac{1}{1}=1\ (\text{сек}^{-1});\ \omega_3=\frac{1}{T_3}=\frac{1}{0{,}1}=10(\text{сек}^{-1})$$

3) Записывают выражения для отрезков асимптотической ЛАЧХ между сопрягающими частотами и определяют их наклон. При частотах, меньших сопрягающей частоты, под корнем оставляем только 1, а при больших – член с наивысшей степенью ω (обоснование: при $\omega < \omega_i = \frac{1}{T_i}$ произведение $T_i\omega < 1$, а значит, $(T_i\omega)^2 \ll 1$ и слагаемым $(T_i\omega)^2$ под корнем $\sqrt{1+(T_i\omega)^2}$ можно пренебречь).

Число участков асимптотической ЛАЧХ равно количеству сомножителей в *W(p)* (при этом произведения вида $k \cdot p^{\nu}$ или $K \cdot \frac{1}{p^{\nu}}$ рассматривают как один сомножитель, т.к. *K* не добавляет наклона асимптотической ЛАЧХ).

Асимптоты строят до сопрягающей частоты, каждая последующая асимптота начинается с конца предыдущей.

Этап 3) для данного примера:

Как видно из выражения для передаточной функции (сомножители в *W(p)* обведены красным цветом и их номера подписаны римскими цифрами), у ас. ЛАЧХ будет 4 участка:

1. Рассматриваем диапазон частот $\omega \le \omega_1$:

$\overline{L}_1(\omega) = 20lgK - \nu \cdot 20lg\omega = 20lg100 - \nu \cdot 20lg\omega = 40 - 40lg\omega$ (пренебрегли во всех корнях выражения (*) членами, содержащими ω, оставили только единицы)

– первая асимптота, которая представляет собой прямую. Эта прямая проходит через точку $\omega = 1$ и $\overline{L}_1(\omega) = \underline{20lgK}$ (в примере = **40**) с наклоном $-\nu \cdot 20$ дБ/дек (в примере = **-40 дБ/дек**).

[Если бы множитель p^{ν} был не в знаменателе, а в числителе передаточной функции, то наклон первой асимптоты был бы $+\nu \cdot 20$ дБ/дек]

{Прямую, как известно, можно построить по двум точкам, либо, что здесь и делается, зная точку, через которую она проходит, и ее наклон. Точка $\omega = 1$ берется для простоты, т.к. при $\omega = 1$ $lg\omega = 0$. *В контрольной работе* для простоты можно брать и другие точки: $\omega = 0{,}01$, $0{,}1$, 10, 100, … – любую, кратную 10^N (где N – целое число), но строится первая асимптота только до первой сопрягающей частоты включительно}.

Строим $\overline{L}_1(\omega)$ до первой сопрягающей частоты $\omega_1 = 0{,}1$ – см. рисунок ниже.

На рисунке голубыми пунктирными линиями показаны прямые с наклоном -20, -40 и -60 дБ/дек – асимптоты можно строить параллельным переносом этих прямых, но нужно знать хотя бы одну точку, через которую асимптота должна пройти. $\overline{L}_1(\omega = 1) = 20lgK$ - так будет всегда, но можно посчитать $\overline{L}_1$ от любой другой частоты (например, в данной задаче удобно посчитать $\overline{L}_1(\omega_1 = 0{,}1) = 80$ дБ) и построить данную асимптоту по ее наклону и известной точке.

Первая асимптота строится только до первой сопрягающей частоты!

2. $\omega_1 \le \omega \le \omega_2$ ($\omega_1 = \frac{1}{T_1}$, $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$):

В данном диапазоне частот под корнем $\sqrt{1+(T_1\omega)^2}$ уже пренебрегают слагаемым «1», поскольку $T_1\omega > 1$; квадрат и корень сокращаем, в итоге к выражению для первой асимптоты добавится слагаемое $-20lg10\omega$:

$\overline{L}_2(\omega) = 40 - 40lg\omega \underline{-\mathbf{20}lg10\omega} = 40 - 40lg\omega - 20 - 20lg\omega = 20 - 60lg\omega$

Эта асимптота при $\omega = \omega_2 = 1$ проходит через точку 20 ($\overline{\boldsymbol{L}}_2(\mathbf{1}) = \mathbf{20}$), ее наклон по отношению к первой асимптоте изменяется на **-20** дБ/дек и обуславливается множителем (10p+1) в знаменателе.

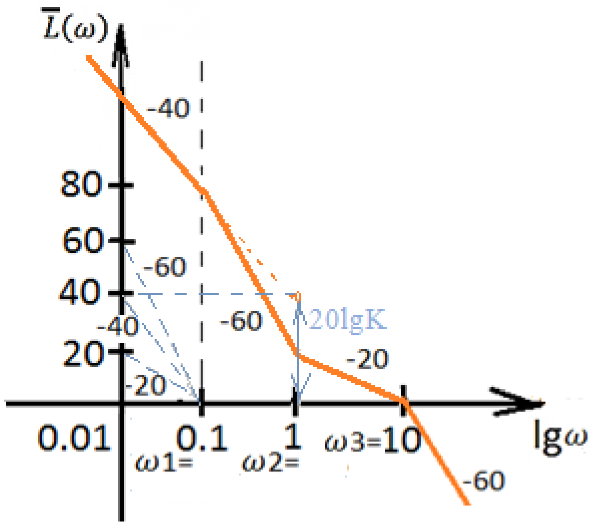
(В контрольной работе не надо так подробно расписывать, чему будет равна $\overline{L}_2(\omega_2)$) – надо только написать ее выражение, понять, что к наклону «-40» первой асимптоты добавился наклон «-20» и что результирующий наклон станет «-60».)

Строим вторую асимптоту, которая начинается с конца первой асимптоты и проводится до второй сопрягающей частоты ($\boldsymbol{\omega_2}$).

3. $\omega_2 \le \omega \le \omega_3$:

$\overline{L}_3(\omega) = \underbrace{20 - 60lg\omega}_{\overline{L}_2(\omega)} + \underbrace{40lg\omega}_{\text{за счет множителя } (p+1)^2 \text{ в числителе } W(p)} = 20 - 20lg\omega$

(был наклон «-60», увеличился на «+40», стал «-20»)



Строим третью асимптоту до частоты $\boldsymbol{\omega_3}$.

(Легко посчитать, что $\overline{L}_3(\omega_3 = 10) = 0$, но в контрольной работе достаточно просто провести с конца предыдущей асимптоты прямую с наклоном -20 дБ/дек).

4. $\omega \ge \omega_3$:

$\overline{L}_4(\omega) = \overline{L}_3(\omega) - 40lg0{,}1\omega$

(был наклон «-20», добавился «-40» - стал «-60»).

! Таким образом, при построении асимптотической ЛАЧХ при движении вправо на каждой сопрягающей частоте наклон асимптотической ЛАЧХ меняется на величину $\boldsymbol{\pm l \cdot 20}$ ***дБ/дек***, где ***l*** **– степень множителя** $(pT+1)^l$ в выражении для передаточной функции («+» – если множитель в числителе, «-» – если множитель в знаменателе).

Построим ЛФЧХ и АФХ:

$$W(j\omega) = \frac{100(j\omega + 1)^2}{(j\omega)^\nu (10j\omega + 1)(0{,}1j\omega + 1)^2}$$

ЛФЧХ:

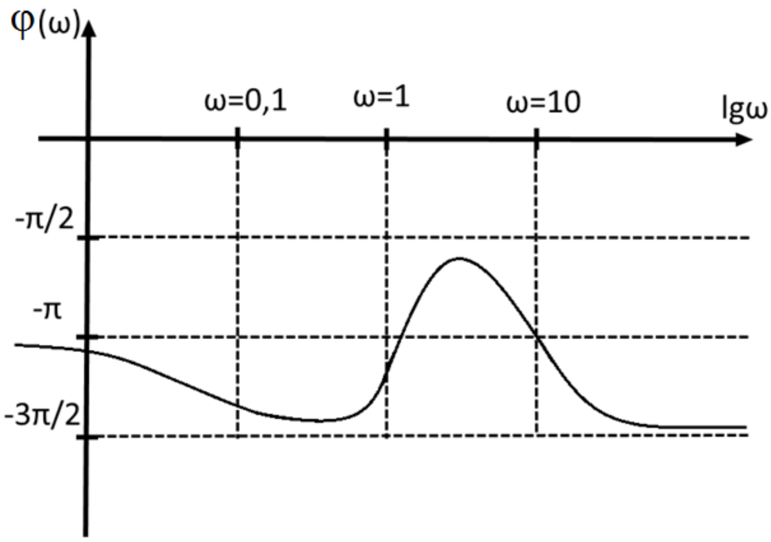
$$\varphi(\omega) = argW(j\omega) = 2arctg\omega - \nu \cdot \frac{\pi}{2} - arctg10\omega - 2arctg0{,}1\omega = 2arctg\omega - \pi$$
$$-arctg10\omega - 2arctg0{,}1\omega$$

Для минимально-фазовых звеньев приближенно считают, что участку асимптотической ЛАЧХ с наклоном $\pm k \cdot 20\frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$ (k – целое) соответствует фазовый сдвиг $\varphi(\omega) = \pm k \cdot \frac{\pi}{2}$(рад.). *(было на прошлой лекции)*

В соответствии с данным правилом и стоим ЛФЧХ:

Наклон $\overline{L}(\omega)$, *дБ/дек*	$\varphi(\omega)$, рад
-40	$-\pi$
-60	$-3\pi/2$
-20	$-\pi/2$
-60	$-3\pi/2$

(В контрольной работе так и делаем, но <u>общее выражение для $\varphi(\omega)$ должно быть</u>, иначе оценка снизится!)

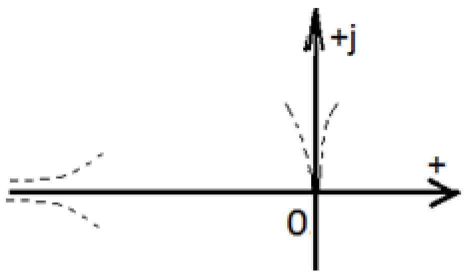


<u>Построим АФХ (годограф ККУ):</u> (по $A(\omega)$ и φ(ω))

$$A(\omega) = \frac{100(\sqrt{1+\omega^2})^2}{\omega^2\sqrt{1+(10\omega)^2}(\sqrt{1+(0{,}1\omega)^2})^2} \qquad \varphi(\omega) = 2arctg\omega - \pi - arctg10\omega - 2arctg0{,}1\omega$$

Сначала смотрим, откуда начнется АФХ и куда придет при изменении частоты от 0 до ∞.

$\omega = 0$:	$\omega = \infty$:
$A(0) = \infty$	$A(\infty) = 0$
$\varphi(0) = -\pi$	$\varphi(\infty) = -\frac{3\pi}{2}$



На плоскости $W(j\omega)$ отмечаем пунктиром возможные начало АФХ и куда она придет.

Далее **строим АФХ** уже согласно следующему **правилу**:

<u>начинаем со скобки</u> $(j\omega T+1)^l$ из выражения $W(j\omega)$ <u>с большей постоянной времени</u> (поскольку при малых частотах наибольшее значение оказывает звено с большей постоянной времени):
если скобка $(j\omega T+1)^l$ **входит в знаменатель** $W(j\omega)$, то **идем l квадрантов по часовой стрелке** (т.к. фаза убывает, если скобка в знаменателе), если **в числитель – l квадрантов против часовой стрелки** (фаза увеличивается). Т.е. <u>степень скобки определяет, сколько мы должны пройти квадрантов</u>.

<u>Далее</u> переходим к рассмотрению скобки <u>со следующей по величине постоянной времени</u> и т.д. В итоге должны прийти в намеченную точку на плоскости $W(j\omega)$.

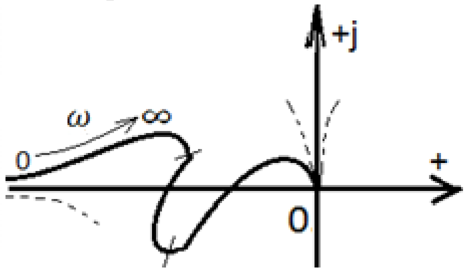
В данном примере

$$W(j\omega)=\frac{100(j\omega+1)^2}{(j\omega)^\nu(10j\omega+1)(0{,}1j\omega+1)^2}$$

ККУ содержит **три скобки вида $(\boldsymbol{j\omega T}+\mathbf{1})^{\boldsymbol{l}}$** (на множитель $(j\omega)^\nu$ внимания не обращаем – он уже внес свой вклад в построение АФХ тем, что она начнется из $-\nu\cdot\frac{\pi}{2}$ (будь он в числителе – началась бы из $+\nu\cdot\frac{\pi}{2}$)).

Поскольку скобка с большей постоянной времени ($T_1=10$) находится **в знаменателе**, то АФХ пойдет из начальной точки **по часовой стрелке**, но в следующий квадрант не перейдет, т.к. скобка $(10j\omega+1)$ стоит в первой степени (т.е. **идем 1 квадрант).**

(Можно рисовать не прямо до оси, а более схематично – «немного вверх», а если говорить строго, то насколько «вверх» зависит от соотношения постоянных времени T_1 и T_2)



Далее рассматривается скобка со следующей по величине постоянной времени –

$(j\omega+1)^2$. Т.к. она **в числителе** и **в квадрате**, то разворачиваемся и рисуем далее АФХ в направлении **против часовой стрелки два квадранта (поскольку скобка во 2-й степени)**.

И наконец, последняя скобка – $(0{,}1j\omega+1)^2$. Т.к. она **в знаменателе**, то снова разворачиваемся и рисуем АФХ в направлении **по часовой стрелке, тоже два квадранта**.

Конец примера 1.