Лекция № 9 (24 марта 2022)

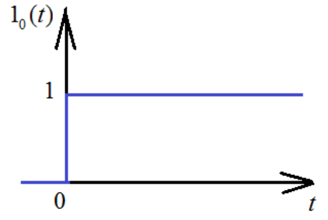
Продолжение п. 3.2. Характеристики динамических звеньев (систем).

4) Переходная характеристика (переходная функция) звена (системы)

Опр. Переходной функцией звена (системы) $h(t)$ называется реакция звена (системы) на скачкообразное входное воздействие:

$$\boxed{h(t) = y(t)\Big|_{x(t)=a\cdot 1_0(t)}},$$

где $1_0(t) = \begin{cases} 1, & при\ t \geq 0 \\ 0, & при\ t < 0 \end{cases}$ – функция единичного скачка (функция Хевисайда)



Способы нахождения переходной функции:

I способ: по передаточной функции (либо, если дано дифференциальное уравнение, сначала переходим от него к $W(p)$):

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}\Bigg|_{ПНУ=0} \quad \Rightarrow \quad Y(p) = W(p)\,X(p)$$

Отсюда $H(p) = W(p)\cdot \dfrac{a}{p}$. изображение сигнала $x(t) = a\cdot 1_0(t)$

Переходя от изображения к оригиналу, получаем:

$$\boxed{h(t) = L^{-1}\left[W(p)\cdot \frac{a}{p}\right]\cdot 1_0(t)}$$

Пример. Для инерционного звена

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{K}{1+pT}\cdot\frac{a}{p}\right]\cdot 1_0(t) = \left\{\begin{array}{c} \text{по теореме разложения для } 2-\text{го случая}: \\ F(p) = \dfrac{B(p)}{pA_1(p)} \div f(t) = \dfrac{B(0)}{A_1(0)} + \sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{B(p_i)}{p_i A_1'(p_i)}e^{p_i t} \\ A_1(p) = 1 + pT \quad \rightarrow \quad A_1(p) = 0 \rightarrow p = -\dfrac{1}{T} \\ A_1' = T, \qquad B(p) = 1 \end{array}\right\} = Ka\left(1 + \frac{1}{-\frac{1}{T}\cdot T}e^{-\frac{t}{T}}\right)\cdot 1_0(t) =$$

$$= Ka\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\cdot 1_0(t)$$

II способ: решить дифференциальное уравнение рассматриваемого звена при нулевых начальных условиях и скачкообразном входном воздействии.

Так, для инерционного звена: $Ty' + y = Kx$

нужно решить уравнение $Ty' + y = Ka$ (т.к. $x(t) = a\cdot 1_0(t)$)

при нулевом начальном условии: $y(+0) = 0$.*

* решение задачи Коши ищется справа от нуля

Известно, что решение линейного дифференциального уравнения можно представить в виде:

$$y(t) = y^{общ.одн.}(t) + y^{част.неодн.}(t) = y^{своб.}(t) + y^{вынужд.}(t)$$

где $y^{общ.одн.}(t)$ – общее решение однородного уравнения (данная составляющая описывает свободное движение системы (звена), т.е. движение, определяемое начальными условиями, и называется <u>свободной</u> (или переходной) <u>составляющей</u> – $\underline{y^{своб.}(t)}$),

$y^{част.неодн.}(t)$ – частное решение неоднородного уравнения (данная составляющая описывает вынужденное движение, определяемое внешним воздействием, и характеризует установившийся процесс в системе; носит название <u>вынужденной составляющей</u> решения – $\underline{y^{вынужд.}(t)}$).

В общем случае для стационарного линейного дифференциального уравнения

$$a_0 y^{(n)} + \ldots + a_n y = f(t)$$

$y^{общ.одн.}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}$, где λ_i – корни характеристического уравнения $a_0\lambda^n + \ldots + a_n = 0$,

$C_i = C_i(t)^*$,

$$y^{част.неодн.}(t) \overset{м.быть}{=} y_{\substack{в\ установившемся\\ режиме}}$$

Для инерционного звена: , $y^{общ.одн.}(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{T}}$ (т.к. ХУ: $T\lambda + 1 = 0 \quad \to \quad \lambda = -\frac{1}{T}$),

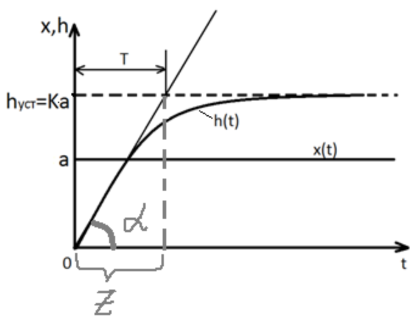
$$y^{част.неодн.}(t) = Ka$$

Отсюда $y(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{T}} + Ka$

Из $y(+0) = 0 \;\to\; C = -Ka$

Т.о., $\underline{h(t) = Ka\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot 1_0(t)}$ (*)

Переходная характеристика инерционного звена представляет собой экспоненциальную кривую:



Доказательство того, что T определяется по подкасательной:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=0} \overset{из(*)}{=} \left.\frac{Ka}{T} e^{-\frac{t}{T}}\right|_{t=0} = \frac{Ka}{T} \\ &с\ другой\ стороны: tg\alpha \overset{из\ рис.}{=} \frac{Ka}{z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T = z$$

---

* $C_i(t)$ – либо константы (если все корни p_i ХУ $A(p) = 0$ различны), либо многочлены от t: $C_i(t) = C_1^{(i)} + C_2^{(i)} t + \cdots + C_{k_i}^{(i)} t^{k-1}$, k_i – кратность корня p_i, $C_j^{(i)}$ – константы интегрирования.

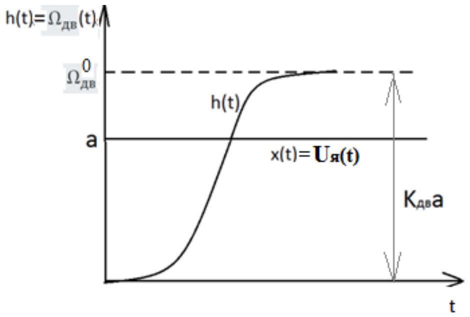
По ней можно определить **параметры инерционного звена**:

– коэффициент усиления K – равен установившемуся значению $h(t)$, деленному на a,
– постоянная времени T – равна значению t, соответствующему точке пересечения касательной к характеристике в начале координат с линией установившегося значения (т.е. равна подкасательной).

Кроме того, постоянная времени T может быть определена из условия, что $h(t)$ выходит на установившееся значение (с ошибкой $\leq 5\%$) примерно за время $t = 3T$.

Пример.

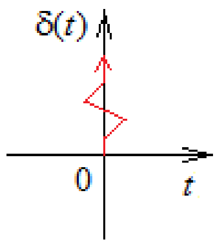
Переходная характеристика двигателя постоянного тока – $h(t) = \Omega_{дв}(t)\Big|_{\substack{U_я = a\cdot 1_0(t) \\ M_н = 0}}$:



5) Импульсная переходная характеристика (весовая функция) звена (системы)

Опр. Весовой функцией $w(t)$ ($h_и(t)$) называется реакция звена (системы) на единичное импульсное воздействие:

$$\boxed{w(t) = y(t)\big|_{x(t)=\delta(t)}},$$



где $\delta(t) = \begin{cases} 0, \; при \; t \neq 0 \\ \infty, \; при \; t = 0 \end{cases}, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$ – дельта-функция (δ-функция; функция Дирака; единичный импульс)

Физически единичный импульс можно представить как очень узкий импульс, ограничивающий единичную площадь. Математически он описывается δ-функцией.

Способы нахождения весовой функции:

I способ: по передаточной функции:

Из выражения $Y(p) = W(p)\,X(p)$ и определения весовой функции следует:

$$L\left[w(t)\right] = W(p)\cdot \underbrace{L\left[\delta(t)\right]}_{=1} = W(p)$$

Переходя от изображения к оригиналу, получаем:

$$\boxed{w(t) = L^{-1}\left[W(p)\right]\cdot 1_0(t)}$$

В обратную сторону: $\boxed{W(p) = \int\limits_0^{\infty} w(t)e^{-pt}dt}$ – связь между $w(t)$ и $W(p)$

II способ:

$$\boxed{w(t)=\frac{dh(t)}{dt}} \quad \text{(или обратно: } \boxed{h(t)=\int_0^t w(\tau)d\tau}\text{)}$$

Доказательство:

$$H(p)=W(p)\cdot\frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad W(p)=pH(p) \quad \Rightarrow \quad L^{-1}\left[W(p)\right]=L^{-1}\left[pH(p)\right]$$

показано выше

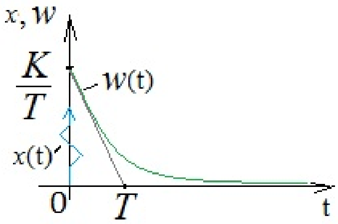
$\Downarrow$ *(по теореме о дифференцировании оригинала)*

$$w(t)=\frac{dh(t)}{dt}$$

ч.т.д.

Пример. Найдем весовую функцию инерционного звена первым способом:

$$\underline{w(t)}=L^{-1}\left[\frac{K}{1+pT}\right]\cdot 1_0(t)= \begin{array}{c}\textit{по таблице:}\\ F(p)=\frac{1}{p+\alpha} \div f(t)=e^{-\alpha t}\cdot 1_0(t)\end{array} \underline{=\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}\cdot 1_0(t)}$$



Характеристики 4) и 5) являются временными. Помимо этих характеристик, $W(p)$ и уравнений статики и динамики при исследовании и описании ЛНСАУ используют еще частотные характеристики. Они получаются при рассмотрении вынужденных движений звена (системы) при подаче на его вход гармонического сигнала. Частотные характеристики определяют взаимосвязь между параметрами входного и выходного гармонических сигналов.

6) Комплексный коэффициент усиления звена (системы).

Опр. 1. ККУ ($W(j\omega)$) – это записанное в комплексной форме отношение вынужденной составляющей реакции звена ко входному воздействию, являющемуся гармоническим, при нулевых предначальных условиях:

$$\boxed{W(j\omega)=\frac{\dot{y}^{\textit{вын}}(t)}{\dot{x}(t)=Ce^{j\omega t}}}$$

Для устойчивых звеньев можно дать другое определение:

Опр. 2. ККУ – это записанное в комплексной форме отношение установившейся функции на выходе звена ко входному гармоническому воздействию:

$$\boxed{W(j\omega)=\frac{\dot{y}(t)\big|_{t\to\infty}}{\dot{x}(t)=Ce^{j\omega t}}}$$

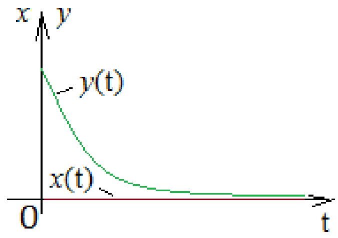
– для устойчивых (асимптотически) звеньев.

Опр. 1. Систему называют устойчивой по входному воздействию (устойчивой по входу), если при любом ограниченном входном воздействии $x(t)$ и нулевых предначальных условиях реакция системы $y(t)$ также ограничена, и называют неустойчивой по входу в противном случае.

Опр. 2. Система называется устойчивой по начальным условиям, если при отсутствии внешнего воздействия и ненулевых начальных условиях реакция системы с течением времени стремится к нулю.
Замечание. В определении 2 имеется в виду асимптотическая устойчивость.

иллюстрация к определению 2:

(при $x(t) = 0$ в устойчивой системе процесс $y(t)$ с течением времени будет стремиться к нулю)



Определим **связь между** $W(p)$ **и** $W(j\omega)$**.**

I путь:

$$Y(p)=W(p)\,X(p)=W(p)\cdot L\left[Ce^{j\omega t}\right]=W(p)\cdot C\frac{1}{p-j\omega}$$

Пусть $W(p)=\dfrac{B(p)}{A(p)}$ – дробно-рациональная и $A(p)$ не имеет кратных корней и нулевого корня. Тогда

$$Y(p)=\frac{B(p)}{A(p)}\cdot\frac{C}{p-j\omega}=\frac{B(p)C}{\tilde{A}(p)}$$

Полином $\tilde{A}(p)=A(p)\cdot(p-j\omega)$ имеет $(n+1)$ корень: $p_1=j\omega$, p_k, $k=\overline{2,n+1}$, – корни $A(p)=0$.

По теореме разложения (для 1-го случая):

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{B(p_i)\cdot C}{\tilde{A}'(p_i)}e^{p_i t}$$

А т.к. $\tilde{A}'(p)=A'(p)\cdot(p-j\omega)+A(p)$, то

$$y(t)=\underbrace{\frac{B(j\omega)\cdot C}{A(j\omega)}e^{j\omega t}}_{y^{вын.}(t)=y^{ч.неодн.}(t)}+\underbrace{\sum_{i=2}^{n+1}\frac{B(p_i)\cdot C}{A'(p_i)(p_i-j\omega)}e^{p_i t}}_{y^{своб.}(t)=y^{общ.одн.}(t)} \qquad (*)$$

$y^{вын.}(t)$ описывает вынужденное (установившееся) движение звена (системы), определяемое внешним воздействием;

$y^{своб.}(t)$ описывает свободное движение звена, определяемое начальными условиями.

$$\boxed{W(j\omega)\overset{\text{по опр 1}}{=}}\ \frac{\dot{y}^{вын}(t)}{\dot{x}(t)=Ce^{j\omega t}}=\frac{\frac{B(j\omega)\cdot C}{A(j\omega)}e^{j\omega t}}{Ce^{j\omega t}}=\boxed{\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}}$$

! Т.о., ККУ получается из $W(p)$ формальной заменой p на $j\omega$.

II путь:

В устойчивых* системах составляющая $y^{своб.}(t)$ с течением времени стремится к нулю (см. опр. 2 устойчивости по начальным условиям).

Как видно из (*), обязательным требованием для устойчивости звена (системы) является условие

$$e^{p_i t}\to 0 \qquad \forall\ i=\overline{2,n+1}$$

А поскольку корень p_i представляет собой $p_i=\operatorname{Re}p_i+j\operatorname{Im}p_i=\alpha_i+j\omega_i$, то для устойчивости звена (системы) должно выполняться

$$\underline{\operatorname{Re}p_i=\alpha_i<0}\ \text{для всех } i$$

(тогда при $t\to\infty$ $e^{p_i t}=e^{\alpha_i t}e^{j\omega_i t}\to 0$ и $y^{своб.}(t)\to 0$).

В этом случае $\dot{y}(t)\big|_{t\to\infty}=\dot{y}^{вын.}(t)$ и аналогично доказывается, что $\boxed{W(j\omega)=W(p)\big|_{p=j\omega}}$.

Пример. ККУ инерционного звена: $W(j\omega)=\dfrac{K}{1+j\omega T}$

Комплексный коэффициент усиления можно представить в виде:

$$\boxed{W(j\omega)=\operatorname{mod}W(j\omega)\cdot e^{j\arg W(j\omega)}=A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}=P(\omega)+jQ(\omega)}$$

где $\boxed{A(\omega)=\operatorname{mod}W(j\omega)}$ – модуль ККУ – называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ),

$\boxed{\varphi(\omega)=\arg W(j\omega)}$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ),

$\boxed{P(\omega)=\operatorname{Re}W(j\omega)}$ – вещественная частотная характеристика (ВЧХ),

$\boxed{Q(\omega)=\operatorname{Im}W(j\omega)}$ – мнимая частотная характеристика (МЧХ).

7) АЧХ и ФЧХ

$A(\omega)=\operatorname{mod}W(j\omega)$, $\varphi(\omega)=\arg W(j\omega)$

АЧХ и ФЧХ также можно вычислить по формулам:

$$\boxed{A(\omega)=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}},\ \boxed{\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)}}$$

При вычислении АЧХ и ФЧХ используют следующие правилами:

* имеются в виду *асимптотически* устойчивые системы

1. Для комплексного числа $z = a + jb$

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\boxed{arg z = \begin{cases} arctg\frac{b}{a}, \text{при } a \geq 0, \\ arctg\frac{b}{a} + \pi, \text{при } a < 0, b \geq 0, \\ arctg\frac{b}{a} - \pi, \text{при } a < 0, b < 0. \end{cases}}$$

2. Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей:

$$\boxed{\left|\prod_i z_i\right| = \prod_i |z_i|}$$

а аргумент – сумме аргументов сомножителей:

$$\boxed{\arg \prod_i z_i = \sum_i \arg z_i}$$

3. Модуль дроби комплексных чисел $z = \frac{z_1}{z_2}$ равен дроби модулей:

$$\boxed{|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}$$

а аргумент – разности аргументов числителя и знаменателя:

$$\boxed{\arg z = \arg z_1 - \arg z_2}$$

Пример:

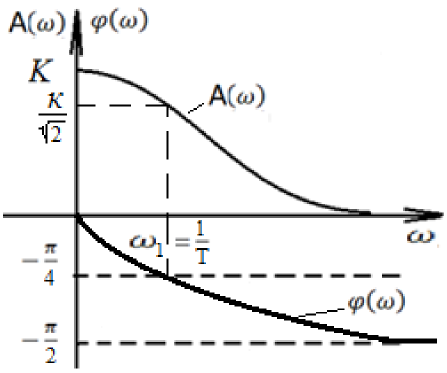
Если $z = \frac{(a+jb)^m}{(c+jd)^l (je)^k}$, $a, c > 0$, то $|z| = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)^m}}{\sqrt{(c^2+d^2)^l} e^k}$, $\arg z = m \cdot \mathrm{arctg}\frac{b}{a} - l \cdot \mathrm{arctg}\frac{d}{c} -$

$$-k \cdot \mathrm{arctg}\frac{e}{0} = m \cdot \mathrm{arctg}\frac{b}{a} - l \cdot \mathrm{arctg}\frac{d}{c} - k \cdot \frac{\pi}{2}$$

Пример. Найти и построить АЧХ и ФЧХ инерционного звена.

Решение:

$$\boxed{A(\omega) = |W(j\omega)| = \left|\frac{K}{1+j\omega T}\right| = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}}, \ \boxed{\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = 0 - \mathrm{arctg}\,\omega T = -\mathrm{arctg}\,\omega T}$$



– АЧХ и ФЧХ инерционного звена

<u>(АЧХ и ФЧХ строятся при изменении частоты от 0 до ∞)</u> !

$A(0) = K \qquad \varphi(0) = 0$

$A(\infty) = 0 \qquad \varphi(\infty) = -\frac{\pi}{2}$

По АЧХ и ФЧХ можно определить параметры звена.

Для данного примера (инерционное звено): $K = A(0)$ – коэффициент усиления инерционного звена,

$T = \dfrac{1}{\omega_1}$ – постоянная времени. Определяется по частоте, где $A(\omega) = \dfrac{K}{\sqrt{2}} \cong K \cdot 0,707$ (частота ω_1)

По $\varphi(\omega)$ можно определить только один параметр – $T = \dfrac{1}{\omega_1}$: $\varphi(\omega_1) = -\dfrac{\pi}{4}$

Физический смысл АЧХ и ФЧХ

При гармоническом входном воздействии $x(t) = X_m \sin \omega t$ в устойчивой линейной системе на выходе в установившемся режиме (при $t \to \infty$) будет гармонический сигнал той же частоты ω, но с другой амплитудой и сдвигом фазы:

$$y(t) = Y_m \sin\left(\omega_i t + \varphi(\omega_i)\right)$$

– для каждой частоты ω_i входного сигнала будет своя амплитуда и свой сдвиг фазы, причем амплитуда Y_m равна амплитуде входного сигнала, умноженной на $A(\omega_i) = \mathrm{mod}\, W(j\omega_i)$:

$$Y_m = X_m \cdot A(\omega_i),$$

а сдвиг фазы равен аргументу ККУ $\arg W(j\omega_i) = \varphi(\omega_i)$

Отсюда $\boxed{A(\omega_i) = Y_m / X_m}$ – АЧХ на частоте равна отношению амплитуд выходного и входного сигналов.

Т.о. АЧХ показывает изменение отношения амплитуд выходного и входного сигналов при изменении ω от 0 до ∞,

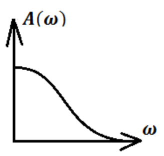
а ФЧХ – сдвиг фазы между ними в зависимости от частоты.

АЧХ показывает, как звено пропускает сигналы различной частоты. По форме АЧХ различают несколько *основных* типов звеньев:

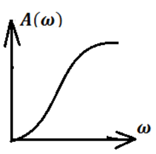
I. фильтр низких частот (ФНЧ) – пропускает низкочастотные сигналы, блокирует высокочастотные (шумы, помехи),

II. фильтр высоких частот (ФВЧ) – пропускает высокочастотные сигналы, блокирует низкочастотные,

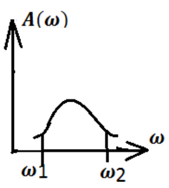
III. полосовой фильтр – звено, которое пропускает только сигналы в каком-то диапазоне частот: $\omega_1 \le \omega \le \omega_2$



ФНЧ (пример – инерционное звено)

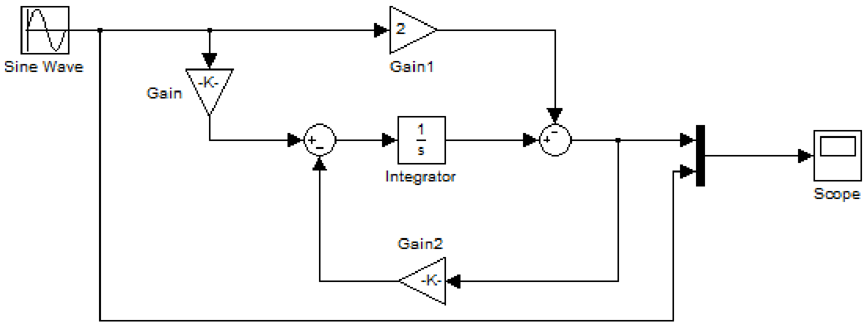


ФВЧ

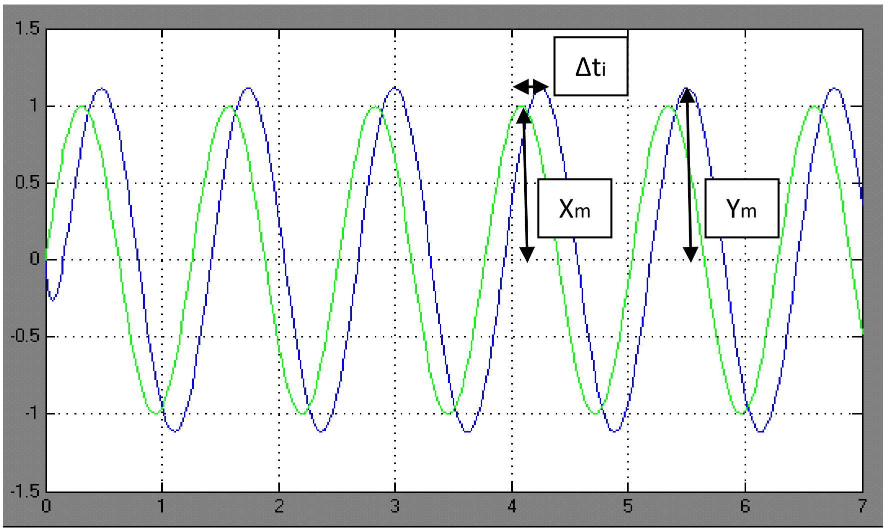


полосовой фильтр

Определение АЧХ и ФЧХ экспериментальным путем (по осциллограммам входа-выхода на частоте ω_i)



Модель системы в среде Matlab/Simulink.



Гармонические сигналы на входе (зеленый) и выходе (синий) системы при $\omega_i = 5\, рад/с$.

$$A(\omega_i) = Y_m / X_m$$

$$\varphi(\omega_i) = \pm\Delta t_i \cdot \omega_i \text{ (в радианах)}$$

Δt_i – временная задержка выходного сигнала относительно входного (расстояние по оси времени между соответствующими точками синусоид).

Знак «–» соответствует случаю запаздывания выходного сигнала относительно входного (выходной сигнал сдвинут вправо по оси времени относительно входного сигнала)) – как на рисунке выше. Знак «+» – наоборот. Т.е.

$\varphi < 0$ – отставание по фазе выходного сигнала от входного,

$\varphi > 0$ – опережение по фазе выходного сигнала от входного,

$$\varphi^{в\_град} = \frac{\varphi^{в\_рад} \cdot 180}{\pi}$$

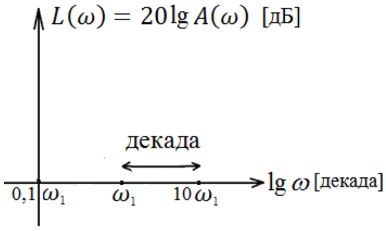
8) Логарифмические частотные характеристики

Вместо АЧХ и ФЧХ и для упрощения построений строят логарифмические частотные характеристики (при их построении операции умножения и деления заменяются операциями слоения и вычитания).

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ):

$$\boxed{L(\omega) = 20\lg A(\omega)}$$

При построении ЛАЧХ по оси абсцисс откладывают значение частоты в логарифмическом масштабе, при этом отметке, соответствующей значению $\lg\omega$, пишут само значение частоты, а не $\lg\omega$, а по оси ординат откладывают $L(\omega)$.



Единицей отсчета на логарифмической оси частот является декада – интервал, на котором частота изменяется в 10 раз (а значение ее логарифма – на единицу). При изменении частоты в 10 раз говорят, что она изменилась на одну декаду.

Частоте $\omega = 0$ соответствует бесконечно удаленная точка: $\lg\omega \to -\infty$ при $\omega \to 0$. **О**сь ординат проводят через точку с конечной частотой, не равной нулю.

[дБ - децибел]:

«бел» представляет собой логарифмическую единицу измерения, соответствующую десятикратному увеличению мощности. Один бел соответствует увеличению мощности в 10 раз, 2 бела – в 100 раз и т.д. Т.к. $A(\omega)$ представляет собой отношение амплитуд выходного и входного сигналов, а мощность гармонического сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды, то увеличение $A(\omega)$ в 10 раз будет соответствовать увеличению мощности в 100 раз, что будет равно двум белам или двадцати децибелам (т.е. $L(\omega)\uparrow$ на 2 бела $= 20$ дБ, поэтому в выражении для $L(\omega)$ стоит множитель «20»).

Т.о., величина $L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 10\lg A^2(\omega)$ характеризует изменение мощности сигнала при его прохождении через систему.

Логарифмическая фазочастотная характеристика (ЛФЧХ) – график зависимости функции φ от логарифма частоты ($\lg\omega$). При его построении, как и при построении ЛАЧХ, на отметке, соответствующей значению $\lg\omega$, записывается значение ω. По оси ординат – фаза в градусах (или радианах) в линейном масштабе.

Логарифмические амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики либо строят раздельно, либо в виде совмещенной диаграммы, носящей название «диаграммы Боде».

На практике обычно строят ***асимптотические*** ЛАЧХ ($\bar{L}(\omega)$) и ЛФЧХ ($\bar{\varphi}(\omega)$), которые представляют собой ломаные линии и легко строятся вручную.

Пример.

Построить асимптотические ЛАЧХ и ЛФЧХ инерционного звена.

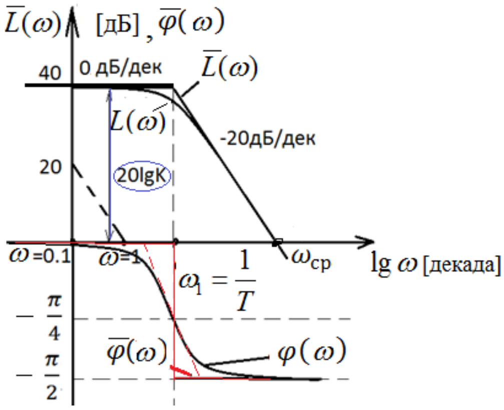
Решение:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} = 20\lg K - 20\lg\sqrt{1+(\omega T)^2}$$

1. Рассматривают диапазон частот $\omega < \omega_1 = 1/T$:

В выражении для $L(\omega)$ под корнем пренебрегаем слагаемым $(\omega T)^2$, меньшим 1 (т.к. $\omega T < 1 \quad \to \quad (\omega T)^2 \ll 1$):

$\bar{L}_1(\omega) = 20\lg K \quad \to$ до частоты $\omega_1 = \dfrac{1}{T}$ проводим прямую, параллельную оси абсцисс (т.е. с нулевым наклоном) на уровне $20\lg K$.



2. Рассматривают диапазон частот $\omega > \omega_1 = \dfrac{1}{T}$:

В выражении для $L(\omega)$ под корнем пренебрегаем 1 (т.к. $(\omega T)^2 \gg 1$):

$\bar{L}_2(\omega) = 20\lg K - 20\lg \omega T$ $\to$через точку $(\omega_1; 20\lg K)$ проводим прямую с наклоном -20дБ/дек

$\sim y = a - bx$

Частоты, на которых асимптотическая ЛАЧХ претерпевает излом, называется сопрягающими частотами.

Для инерционного звена сопрягающая частота одна: $\omega_1 = \dfrac{1}{T}$.

Частота среза – это частота, на которой ЛАЧХ пересекает ось абсцисс, – соответствует значению $20\lg A(\omega) = 0$.

Для инерционного звена $\bar{L}(\omega) \approx 0$: $\quad K = \omega_{cp} T \quad \to \quad \omega_{cp} = K/T$

$\boxed{\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \omega T}$

ЛФЧХ (неасимптотическая) имеет центр симметрии при $\omega = \dfrac{1}{T}$, $\varphi(\omega) = -45^\circ$.

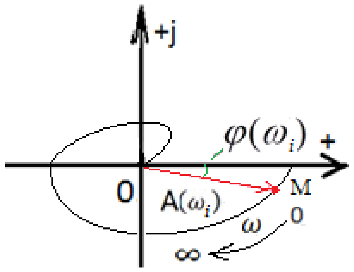
Асимптотическая ЛФЧХ состоит из отрезков $\varphi(\omega) = 0$ и $\varphi(\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$. Отрезки соединяются, можно плавно.

9) Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ, или АФЧХ, или годограф)

Представляет собой геометрическое место точек конца вектора комплексного коэффициента усиления $W(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞.

При изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ полученная кривая называется диаграммой Найквиста.

Например:



– на комплексной плоскости $W(j\omega_i)$ определяет вектор $\overrightarrow{OM}$, длина которого равна $A(\omega_i)$, а аргумент равен $\varphi(\omega_i)$.

АФХ – кривая, которую прочерчивает вектор $\overrightarrow{OM}$ при $\xrightarrow[0\ \ \ \ \infty]{\omega}$.

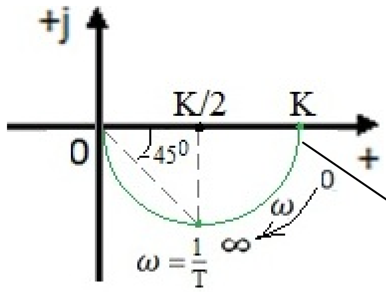
!

Пример. Построить АФХ инерционного звена.

Решение:

Комплексный коэффициент усиления: $W(j\omega) = \dfrac{K}{1 + j\omega T}$

АЧХ: $A(\omega) = |W(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$ ФЧХ: $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = -\operatorname{arctg}\omega T$



Строим АФХ по точкам:

$A(0) = K \qquad \varphi(0) = 0$

$A(\infty) = 0 \qquad \varphi(\infty) = -\dfrac{\pi}{2} \quad (\varphi(\dfrac{1}{T}) = -\dfrac{\pi}{4}$ (или, в градусах $: -45^\circ$))

АФХ представляет собой полуокружность, в чем легко убедиться, исключив из параметрических уравнений $P(\omega) = \dfrac{K}{1 + (\omega T)^2}$ и $Q(\omega) = -\dfrac{K\omega T}{1 + (\omega T)^2}$ частоту.