Лекция № 18 (5 мая 2022*)

5.4. Частотные критерии устойчивости.

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости систем по виду их *частотных характеристик*. Эти критерии являются графоаналитическими и имеют простую геометрическую интерпретацию, поэтому широко используются на практике. Причем на порядок системы не накладывается ограничений, если исследование проводится с помощью программных средств. Например, таких как MATLAB или Mathcad.

Частотные критерии *получаются из* известного в теории функций комплексного переменного *принципа аргумента*. Рассмотрим этот принцип.

5.4.1. Принцип аргумента.

Пусть имеется полином n-ой степени (функция комплексного переменного $p = j\omega$)

$$A(p) = a_0 p^n + \cdots + a_n$$

<u>Вопрос:</u> чему равно приращение аргумента данного полинома $\Delta arg A(p)|_{p=j\omega}$ при $0 \xrightarrow{\omega} +\infty$?

По следствию из теоремы Безу $A(p)$ можно представить в виде:

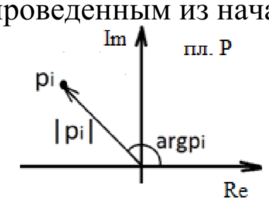
$$A(p) = a_0(p - p_1)(p - p_2) \cdot \cdots \cdot (p - p_n),$$

где $p_i = \alpha_i + j\beta_i$, $i = \overline{1,n}$, – корни уравнения $A(p) = 0$.

Положим $p = j\omega$, тогда

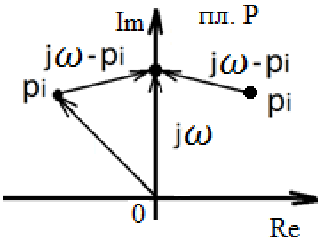
$A(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdot \cdots \cdot (j\omega - p_n)$ – комплексное число (вектор)

На комплексной плоскости P каждый корень p_i может быть представлен вектором, проведенным из начала координат к точке p_i:



длина вектора равна $|p_i|$, а угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси, – аргументу (или фазе) p_i.

Величина $(j\omega - p_i)$ геометрически изображается вектором, проведенным из точки p_i в точку $p = j\omega$ на мнимой оси:



Найдем аргумент комплексного числа (вектора) $A(j\omega)$:

---

* На второй половине лекции – контрольная работа № 2.

$$argA(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} arg(j\omega - p_i)$$

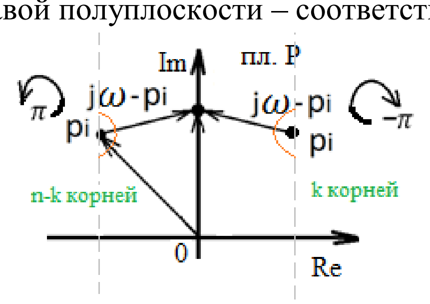
При изменении частоты от 0 до $+\infty$ изменение (приращение) аргумента $A(j\omega)$ равно:

$$\underset{0\overset{\omega}{\to}+\infty}{\Delta arg} A(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} \underset{0\overset{\omega}{\to}+\infty}{\Delta arg}\,(j\omega - p_i)$$

(= сумме приращений аргументов векторов $(j\omega - p_i)$)

$\underset{0\overset{\omega}{\to}+\infty}{\Delta arg}(j\omega - p_i)$ зависит от того, в какой полуплоскости лежит корень p_i (справа или слева от мнимой оси):

- если корень лежит в левой полуплоскости, то при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ конец вектора $(j\omega - p_i)$ повернется на угол π против часовой стрелки (положительное направление вращения);
- если корень p_i лежит в правой полуплоскости – соответственно на угол $-\pi$:



То есть

$$\underset{-\infty\overset{\omega}{\to}+\infty}{\Delta arg}\,(j\omega - p_i) = \begin{cases} \pi, & если\ Re\ p_i < 0 \\ -\pi, & если\ Re\ p_i > 0 \end{cases}$$

Очевидно, что при изменении частоты от 0 до $+\infty$ изменение аргумента вектора $(j\omega - p_i)$ будет вдвое меньше:

$\underset{0\overset{\omega}{\to}+\infty}{\Delta arg}(j\omega - p_i) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & если\ Re\ p_i < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & если\ Re\ p_i > 0 \end{cases}$ (по рисунку для корня в левой полуплоскости угол $> \frac{\pi}{2}$, но т.к. у корня p_i есть комплексно-сопряженный корень, то в сумме их $\underset{0\overset{\omega}{\to}+\infty}{\Delta arg}$ равно π, т.е. «в среднем» у каждого корня $\underset{0\overset{\omega}{\to}+\infty}{\Delta arg} = \frac{\pi}{2}$)

Предположим, что полином $A(p)$ имеет k правых корней p_i и $(n-k)$ левых корней. Тогда приращение аргумента:

$$\underset{0\overset{\omega}{\to}+\infty}{\Delta arg} A(j\omega) = k \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + (n-k) \cdot \frac{\pi}{2} = (n-2k)\frac{\pi}{2} \qquad (*)$$

Выражение (*) и представляет собой математическую формулировку принципа аргумента (– чему равно приращение аргумента полинома $A(p)|_{p=j\omega}$ при изменении ω от 0 до $+\infty$).

5.4.2. Критерий Михайлова.

Критерий устойчивости Михайлова А.В. является геометрической интерпретацией принципа аргумента и позволяет судить об устойчивости системы по виду некоторой кривой называемой годографом Михайлова (кривой Михайлова).

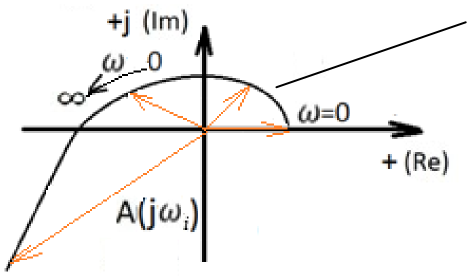
Пусть характеристическое уравнение рассматриваемой САУ имеет вид:

$A(p) = a_0 p^n + \dots + a_n = 0$ (и пусть ХУ приведено к виду с $a_0 > 0$)

$A(j\omega) = A(p)|_{p=j\omega}$ – характеристический вектор.

При изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ конец вектора $A(j\omega)$ описывает некоторую кривую на комплексной плоскости, называется годографом Михайлова.

Например:



Критерий Михайлова (1938):

Для того чтобы система с характеристическим уравнением $A(p) = 0$ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова, начинаясь при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси $(\to a_n > 0)$, с ростом ω от 0 до $+\infty$ последовательно прошел в положительном направлении (против часовой стрелки) n квадрантов, где n –порядок характеристического уравнения системы.

Док-во:

1) Годографы Михайлова устойчивых систем начинаются на вещественной положительной полуоси, т.к. при $a_0 > 0$ все коэффициенты характеристического уравнения положительны, $\to$ $A(j\omega)|_{\omega=0} = a_n > 0$.

2) Для устойчивости системы с характеристическим уравнением $A(p) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения были левыми, $\to$

   2а) $\Delta \underset{0 \xrightarrow{\omega} +\infty}{arg} A(j\omega) \overset{\text{должно}}{=} \left(n - \underbrace{2k}_{=0}\right)\frac{\pi}{2} = n \cdot \frac{\pi}{2}$ (прошел один квадрант $\sim arg A(j\omega)$ получил приращение $\frac{\pi}{2}$)

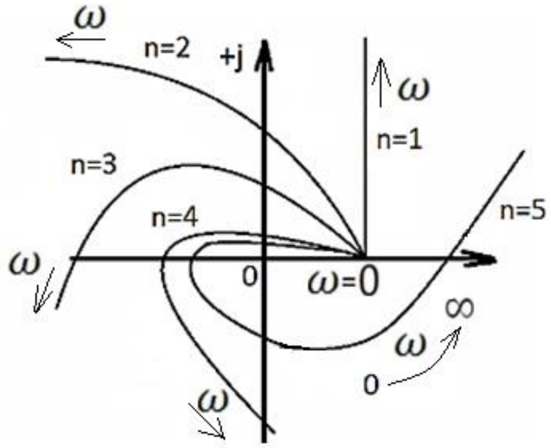
   2б) $A(j\omega) \neq 0$ ни при каких ω (так как для устойчивости линейной системы необх. и дост., чтобы корни ХУ были левыми, иначе говоря, среди них не должно быть корней на мнимой оси, обращающих $A(j\omega)$ в нуль,

   комплексный полином ($A(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1) \cdot \ldots \cdot (j\omega - p_n)$)

3) У устойчивых систем, описываемых ОДУ с постоянными коэффициентами, $\underline{argA(j\omega)}$ с ростом ω должен возрастать монотонно, → вектор $A(j\omega)$ поворачивается только в положительном направлении (и не меняет направления).

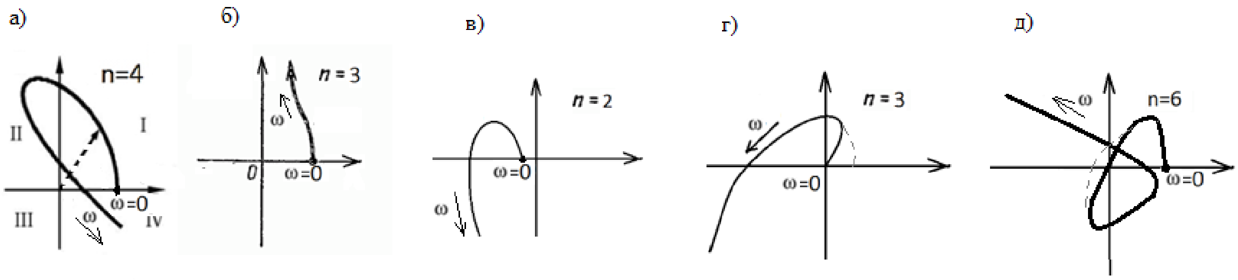
ч.т.д.

Пример 1. Годографы Михайлова устойчивых систем при различных значениях n (n – порядок системы):



– при ω → ∞ годограф Михайлова уходит в бесконечность (в n-м квадрате для устойчивых систем)

Пример 2. Устойчивы ли данные системы, если их годографы Михайлова имеют вид:



а) нарушена последовательность прохождения квадрантов → САУ неустойчива

б) n=3, а кривая Михайлова находится вся в одном квадранте → САУ неустойчива

в) годограф Михайлова начинаться на вещественной отрицательной полуоси

→ САУ неустойчива

г) система находится на границе апериодической устойчивости

(небольшая деформация годографа Михайлова делает систему устойчивой – пунктирная линия)

д) система находится на границе колебательной устойчивости