ProjetIntegrateurMPC

mathis.poteau28

December 2025

1 Introduction

2 Model

On considère un réseau orienté $G = (V, E)$ composé de deux types de sommets :

- $\mathcal{T}$: ensemble des **cuves** (réservoirs),
- $\mathcal{X}$: ensemble des **cellules de transport** (tunnel).

On a $V = \mathcal{T} \cup \mathcal{X}$ et $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \emptyset$.

Le temps est discrétisé avec un pas $h > 0$:

$$t_k = kh, \quad k = 0, 1, \ldots, K.$$

2.1 Variables d'état et de commande

Pour tout k :

- $x_T(k)$: volume d'eau dans la cuve $T \in \mathcal{T}$,
- $x_i(k)$: volume d'eau dans la cellule $i \in \mathcal{X}$,
- $u_T(k) \in [0, 1]$: commande d'ouverture de la vanne de la cuve T,
- $f_{ij}(k) \geq 0$: flux entre les sommets $i \to j$,
- $\mu_i(k)$: débit de sortie hors réseau pour les cellules terminales.

2.2 Fonctions de demande et d'offre

Pour chaque cellule $i \in \mathcal{X}$, on définit :

Fonction de demande (d'après le code Python)

$$d_i(x_i(k)) = \gamma_i \min\left(\frac{v_i}{l_i} x_i(k),\ C_i\right),$$

où v_i est la vitesse, l_i la longueur de la cellule, C_i la capacité maximale et $\gamma_i \in \big[0, 1\big]$ une commande permettant de contrôler la vitesse des véhicules.

Fonction d'offre (supply)

$$s_i(x_i(k)) = \max(c_i - w_i x_i(k),\ 0),$$

où c_i est une constante de capacité et w_i la pente de saturation.

2.3 Définition des flux

Flux cellule → cellule

$$f_{ij}(k) = \min\left(d_i(x_i(k)),\ s_j(x_j(k))\right), \quad i, j \in \mathcal{X}.$$

Flux cuve → cellule

$$f_{Tj}(k) = \min\left(u_T(k)\, x_T(k),\ s_j(x_j(k))\right), \quad T \in \mathcal{T},\ j \in \mathcal{X}.$$

Sortie hors réseau Si une cellule i n'a pas de successeur :

$$\mu_i(k) = d_i(x_i(k)).$$

Interdiction de retour vers les cuves

$$f_{jT}(k) = 0, \quad \forall j \in \mathcal{X},\ \forall T \in \mathcal{T}.$$

2.4 Dynamiques discrètes du système

Évolution des cuves

$$x_T^{k+1} = x_T^k - h \sum_{j\colon T \to j} f_{Tj}(k).$$

Évolution des cellules

$$x_i^{k+1} = x_i^k + h \left(\sum_{j\colon j \to i} f_{ji}(k) - \sum_{m\colon i \to m} f_{im}(k) - \mu_i(k) \right), \quad i \in \mathcal{X}.$$

2.5 Contraintes physiques

$$\begin{cases} x_i(k) \geq 0, \quad x_T(k) \geq 0, \\ f_{ij}(k) \geq 0, \\ 0 \leq u_T(k) \leq x_T(k). \end{cases}$$

2.6 Relaxation convexe

Afin de rendre le problème convexe, les flux $f_{ij}(k)$ sont considérés comme variables indépendantes et les fonctions $\min(\cdot)$ sont remplacées par des contraintes d'inégalité :

$$0 \leq \bar{f}_{ij}(k) \leq d_i(x_i(k)), \qquad \sum_{j\colon j \to i} \bar{f}_{ji}(k) \leq s_i(x_i(k)).$$

2.7 Problème de contrôle optimal sur horizon fini

On considère le critère quadratique :

$$J = \sum_{k=0}^{K} \left(\sum_{i \in \mathcal{X}} x_i(k) + \sum_{T \in \mathcal{T}} x_T(k) \right)$$

sous contraintes :

- contraintes physiques sur la commande : $\begin{cases} 0 \leq u_T(k) \leq x_T(k) \text{ for } T \in \mathcal{T}, k \in \left[0, K\right] \\ \gamma_i \in \left[0, 1\right] \end{cases}$

- contraintes de flux :

$$\sum_{m\colon i \to m} \bar{f}_{im}(k) \leq d_i(x_i(k)),$$

$$\sum_{j\colon j \to i} \bar{f}_{ji}(k) \leq s_i(x_i(k)),$$

$$\sum_{j\colon T \to j} f_{Tj}(k) \leq u_T(k) x_T(k)$$

- dynamiques du système :

$$x_i^{k+1} = x_i^k + h \left(\sum_{j\colon j \to i} \bar{f}_{ji}(k) - \sum_{m\colon i \to m} \bar{f}_{im}(k) - \mu_i(k) \right), \quad i \in \mathcal{X}.$$

- pas de retour vers les cuves :

$$f_{jT}(k) = 0,$$

- conditions initiales :

$$x^0 \text{ donné.}$$