Optimizasyon Teorisi ve Uygulamaları

04.03.2021
Perşembe

**Optimum:** nihai ideal

**Optimizasyon:** bir problemin en iyi çözümünü veya tasarımını bulma işlemi olarak tanımlanır.

Hedeflenen amacı maksimum veya minimum yapacak şartları bulma işlemi olarak tanımlanır.

Klasik Tasarım Yaklaşımı

Belirle;
(1) tasarım değişkenleri
(2) minimize edilecek hedef fonk.
(3) sağlanması gereken kısıtlayıcılar

⇓

Problemi tanımlayan verilerin toplanması

⇓

Başlangıç tasarımının tahmini

⇓

Problemin Analizi

⇓

Kısıtlayıcıların kontrol edilmesi

⇓

Tasarım yakınsama kriterlerini sağlıyor mu? — E → DUR

⇓ H

Optimizyon metoduna bağlı olarak tasarımın değiştirilmesi

Genel Optimizasyon problemlerinin matematiksel tanımı;

minimize $f(x)$ — amaç fonks. — $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — tasarım değişk.

subject to;

eşitlik kısıtlayıcılar
$$\begin{cases} g_j(x) \le 0 & j = 1, \ldots, m \\ h_k(x) = 0 & k = 1, \ldots, l \end{cases}$$

Tasarım değişkenleri

+ birbirinden bağımsızdır.
+ herhangi bir değer atanabilmeli
+ probleme ait uygun ve gerekli değişkenlerin seçimi..

Hedef (amaç) fonksiyonu

(minimize ve maximize etmek)

Kısıtlayıcı fonksiyonlar

* Tasarım değişkenlerinin alacağı değerlere limit koyan fonksiyonlardır.

## OPTİMİZASYON TÜRLERİ

| KARAKTERİSTİĞİ | ÖZELLİĞİ | SINIFLANDIRMA |
|---|---|---|
| *Tasarım değişkenlerin sayısı* | Bir | *Tek değişkenli* |
| | Birden fazla | *Çok değişkenli* |
| *Tasarım değişkenlerinin türü* | Sürekli | *Sürekli* |
| | Tamsayı | *Tamsayı veya kesikli* |
| | Hem sürekli hem de tamsayı | *Karışık tamsayı* |
| *Hedef ve kısıtlayıcı fonksiyonlar* | Doğrusal fonksiyon | *Doğrusal* |
| | Kuadratik fonksiyon | *Kuadratik* |
| | Doğrusal olmayan fonksiyon | *Doğrusal olmayan* |
| *Problem formülasyonu* | Kısıtlama var | *Kısıtlamalı* |
| | Herhangi bir kısıtlama yok | *Kısıtlamasız* |

# Optimizasyon Problem Türleri

$\min f(x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 8x_2$ } Kısıtlamasız - çok değişkenli

$\min f(x) = 2x_1 + 6x_2$

st. $-x_1 + x_2 \leq 2$

$2x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

} Doğrusal programlama

$\min f(x) = x_1^2 + 320x_1x_2$

st. $\frac{1}{60x_2} x_1 - 1 \leq 0$

$1 - \frac{1}{3600} x_1(x_1 - x_2) \leq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$

} Doğrusal Olmayan Çok değişkenli Kısıtlamalı

## Optimizasyon Problem Çözüm Adımları

1) Temel konfigürasyonun Oluşturulması
2) Tasarım değişkenlerinin Tanımlanması
3) Hedef fonksiyonunun Kurulması
4) Kısıtlayıcı fonksiyonun tanımlanması
5) Uygun optimizasyon metodunun seçilmesi ve uygulanması

ÖRNEKLER
→ Kutu kola tasarımı
→ Kargo yükünün belirlenmesi

Kargo şirketleri için

## Standart Optimizasyon Modelinin Özellikleri

1) Hedef fonksiyonu, kısıtlayıcı fonksiyonlar veya kimi tasarım değişkenlerine bağlı olarak tanımlanır.

2) Tasarım değişkenlerinin sayısı (n), eşitlik kısıtlayıcıların sayısı (l)

a) $l \leq n$ } eşitlik kısıtlayıcı içeren

b) $l > n$ } aşırı tanımlanmış } lineer bağımlı yada probl. tanımlanması hatalıdır

c) $l = n$ } basit denklem çözümü yapılır.

3) $\leq 0$ } eşitlik kısıtlayıcılar birçok opt. metodunda böyle tanımlanır.

$\geq 0$ } şekl. kısıtlayıcılar $-1$ ile çarpılır ve $\leq 0$'a dönüştürülür.

4) Eşitlik kısıtlayıcı ✓ Tasarım değişk. sayısı ✗ Eşitsizlik kısıtlayıcıda → optimum çözümde aktif ✓

Aktif eşitlik kısıtlayıcıların sayısı genelde tasarım değişkenleri sayısından az veya maz eşit olab.

5) Kısıtlayıcı olmayan ) Kısıtlamasız opt. problemleri

6) Opt. formülasyonundaki fonk. tümü tasarım değişk. doğrusal olar. bağımlı iseler } doğrusal opt. problemi

Çözümü daha basittir.

CamScanner ile tarandı

11.03.2021
Perşembe

# KLASIK OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ

## Optimizasyonda Gerek ve Yeter Şart Konsepti

**Gerek Şart:** Herhangi bir noktada gerek şartları sağlanmıyorsa optimum nokta olamaz. Bununla birlikte gerek şartları sağlayan nokta optimum olmayabilir veya tek bir nokta olmayabilir. Gerek şartları sağlayan noktalar aday nokta olarak adlandırılır.

**Yeter Şart:** Eğer aday optimum noktalar yeter şartları sağlıyorsa bu nokta optimum noktadır ve başka keste gerek yoktur.

06:45 'de kaldın.

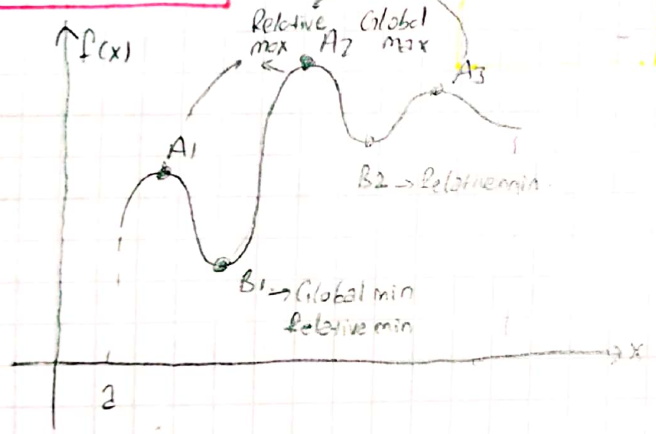
# TEK DEĞİŞKENLİ OPTİMİZASYON

## Lokal Minimum

Bir değişkenli $f(x)$ fonksiyonunun $x$'in küçük poz. ve neg. değerinde aşağıdaki ifadeyi veriyorsa bu fonksiyonun $x = x^*$ da relatif veya lokal minimumdur. $\boxed{f(x^*) \leq f(x^*+h)}$

Benzer olarak $x^*$ noktasında eğer aşağıdaki ifade sağlanıyorsa bu değerde $f(x)$ fonk. maximumdur.

$\boxed{f(x) \geq f(x^*+h)}$




## Tek değişkenli fonksiyonun optimumluk şartları

⇒ $f(x)$'in aday noktalarını belirleme.

⇒ $x^*$ minimum noktadır. } → fonk değeri ve türevi

⇒ $x^*$ nokt. $f(x)$ fonk. lokal minimum noktası, $x$ ise $x^*$ nokt. yakın bir nokta

artım miktarı; $d = x - x^*$

$\Delta f(x) = f(x) - f(x^*)$

⇒ $x^*$ nokt. $f(x)$ fonk. lokal min. nokta old. küçük bir ilerlemede $f(x)$'in değeri değişmez veya artar.

$\Delta f(x)$ neg olmayan bir değer olur; $\boxed{\Delta f(x) = f(x) - f(x^*) \geq 0}$

$x^*$'in küçük bir artımına karşılık $f(x)$ fonk değerini içerdiğinden bu işlem $f(x)$ için

Taylor serisine açarsak; $\boxed{f(x) = f(x^*) + f'(x^*)d + \frac{1}{2} f''(x^*)d^2 + R}$

$f(x)$ fonksiyonun değişimi; $f(x) - f(x^*) = f'(x^*)d + \frac{1}{2} f''(x^*)d^2 + R = \Delta f(x)$

$x^*$ lokal min; $\boxed{\Delta f(x) = f'(x^*)d + \frac{1}{2} f''(x^*)d^2 + R \geq 0}$

$f'(x^*)d$ old. $\Delta f(x) \geq 0$ şartı; $\Delta f(x) = f'(x^*)d \geq 0$

d nin her değerinde şartı sağl. değeri; $\boxed{f'(x^*) = 0}$

**Bu şarta;** 1. der. optimumluk şartı veya **1. der. gerek şart** denir. Sadece 1. derece türev şartları sağl. noktalar lokal min, max veya hiçbiri olmayabilir. Bu noktalar **stationary noktaları** olarak adlandırılır.

Yeter şart ve gerek şart için $f'(x^*) = 0$ old.; $f(x) - f(x^*) = \frac{1}{2} f''(x^*)d^2 + R = \Delta f(x)$

R ihmal edilirse; $\boxed{\Delta f(x) = \frac{1}{2} f''(x^*)d^2 \geq 0}$

$d \neq 0$ değeri dışındaki bütün değerler için; $\boxed{f''(x^*) \geq 0}$ } Yeter şart

Gerek ve yeter şartlarını sağl. $x^*$ noktası varsa, bu nokt. küçük bir değer artımında veya azaltılmasında fonk değeri artacak veya sbt kalacaktır. $f(x^*)$'in, $x^*$'in küçük bir çevresinde en küçük değeri olduğunu belirtir.

$f''(x^*) = 0$ old. durumda, $x^*$ opt. nokt old söylenemez. $f(x^*)$ aşağıdaki şartı sağlamadığı sürece $x^*$ opt. nokta olamaz:

$f''(x^*) \geq 0$ } 2. dereceden gerek şart

$f'(x^*) = f''(x^*) = \ldots = f^{(n-1)}(x^*) = 0$, $f^{(n)}(x^*) \neq 0$

1) $f(x^*)$'da $f(x)$ fonksiyonu minimumdur $\Rightarrow$ $\boxed{f^{(n)}(x^*) > 0}$ ise ve n çift sayı

2) $f(x^*)$'da $f(x)$ fonksiyonu maksimum $\Rightarrow$ $\boxed{f^{(n)}(x^*) < 0}$ ise ve n çift sayı

3) Eğer n tek ise ne max ne de min.

**Örnek 3.1:** lokal min? $f(x)=x^2-4x+4$ ; $x=2$ aday noktası

$f'(x)=2x-4$ , $f''(x)=2$ $x=2$ lokal min

18 Mart'22 tekrar edildi, anlaşıldı

**Örnek 3.2:** lokal min? $f(x)=x^3-x^2-4x+4$ ; $(x^2-4)(x-1)$ } çarpanları

$x=2$ ve $x=1$ aday noktalar $f'(x)=3x^2-2x-4$ $f''(x)=6x-2$

$f''(2)=6.2-2=10$ $x=2$ lokal min $f''(1)=-4$ $x=1$ lokal max

**Örnek 3.3:** lokal min? $f(x)=x^4$ , $f'(x)=4x^3$ , $f''(x)=12x^2$ , $f'''(x)=24x$

$f^{IV}(x)=24>0$ $f^{IV}(x)>0$ old $x=0$ da minimumdur.

## ÇOK DEĞİŞKENLİ BİR FONKSİYON

Çok değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonunun $x=x^*$'da bir extreme değere sahip olabilmesi için gerek şart aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)=\dots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*)=0}$$

Aday nokta $x=x^*$ $f(x)$'nun bir extreme değere sahip olabilmesi için yeter şart $f(x)$ fonk. 2. der. kısmi türevinden oluşan matrisin **(Hessian matris)** tanımlanmasına bağlıdır.

### Hessian Matrisi

$$H=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

$f(x)$ fonk. 2. derece kısmi türevi içeren matris Hessian matrisi olarak adlandırılır. Matristeki kısmi türevler verilen bir $x^*$ nokt. hesaplanır ve $H$ veya $\nabla^2 f$ olarak göst. Simetrik bir matristir.

## Hessian Matrisinin Pozitif veya Negatif Tanımlılığı

Eğer bir A matrisinin bütün eş değerleri pozitif ise bu matris pozitif tanımlı olarak adl.

$Ax=\lambda x$ } Bütün değerler poz.

Bu matrisin formu $|A-\lambda I|=0$

$\lambda$ değerlerinin hepsi negatifse negatif tanımlıdır.

18.03.2021 Perşembe

## Hessian Matrisinin Tanımlılığı

1) H matrisi pozitif tanımlıdır. ($\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$)

2) H matris pozitif yarı tanımlıdır. ($\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$), En azından bir eşdeğerin değeri sıfıra eşit olmalıdır.

3) H matrisi negatif tanımlıdır. ($\lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$)

4) H matrisi negatif yarı tanımlıdır. ($\lambda \leq 0$, $i = 1, \dots, n$)

5) H matrisi tanımsızdır.

"ÖNEMLİ" Hessian matrisi $x^*$ aday noktada pozitif tanımlı ise bu aday noktalar lokal minimum değerini verir. Neg. ise lokal maximum.

**Örnek:** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$ ekstremum noktalarını bulunuz.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,5275$

$x_2 = -0,5275$

$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow x_1 = 2,5275$ $f''(x) = 6 \cdot 2,5275 - 6 = 9.165 > 0$ old.

$x_1$ minimum nokta

$x_2 = -0,5275$ $f''(x) = 6 \cdot (-0,5275) - 6 = -9.165 < 0$ old.

$x_2$ maksimum nokta

**Örnek:** $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ fonksiyonunun ekstremum noktaları

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1/3 \quad x_2 = 1$

$f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow x_1 = 1/3$ için $f''(x_1) = -2 < 0$ (yerel maksimum)

$x_2 = 1$ için $f''(x_2) = 2 > 0$ (yerel minimum

**Örnek:** $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + x_2 + 8$ ekstremum nokt. bulunuz.

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2x_2 - 2 = 0 \Rightarrow 6x_1 + 2 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1 + 4x_2 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1 - 2x_1}{4}}$

$\Downarrow$

$2 + 4 = 0$

Hessian'a yazalım

$$3x_1^2+2x_2-2=0 \Rightarrow 3x_1^2+2\frac{(1-2x_1)}{4}-2=0 \Rightarrow 6x_1^2-2x_1-3=0$$

$$\boxed{x_{1,2}=0,8931 \quad x_{1,2}=-0,5598}$$

$$x_{1,2}=0,8931 \rightarrow x_{2,1}=\frac{(1-2.(0,8931))}{4}=\boxed{-0,1966}$$

$$x_{1,2}=-0,5598 \rightarrow x_{2,2}=\frac{(1-2.(-0,5598))}{4}=\boxed{0,5299}$$

Aday noktalar; $\left.\begin{aligned}(x_1,x_2)&=(0,8931,\ -0,1966)\\(x_1,x_2)&=(-0,5598,\ 0,5299)\end{aligned}\right\}$

$$H=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6x_1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

2. dereceden türevlerinin değerlerini yazdık.

$(x,y)=(0,8931,\ -0,1966)$

$$H=\begin{bmatrix}5,3586 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

Eşdeğerleri bulunursa

$$\left|\begin{bmatrix}5,3568 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}5,3586-\lambda & 2\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(5,3586-\lambda)(4-\lambda)-4=0$$

$$(21,4344-9,3586\lambda+\lambda^2-4)=0$$

$$(\lambda^2-9,3586\lambda+17,4344)=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_1&=2,5682\\ \lambda_2&=6,7886\end{aligned}}$$

$\lambda_1>0,\ \lambda_2>0$ olduğundan;

$(x,y)=(0,8931,\ -0,1966)$ noktası yerel minimumdur.

$(x,y)=(-0,5598,\ 0,5299)$ için; Eşdeğerleri bulunursa

$$H=\begin{bmatrix}-3,3588 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{bmatrix}-3,3588 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix} -3,3588-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (-3,3588-\lambda)(4-\lambda)-4=0$$

$$(\lambda^2 - 0,6412\lambda - 17,4352) = 0$$

$$\boxed{(\lambda_1 = -3,8669 \ , \ \lambda_2 = 4,5081)}$$

$\lambda_1 < 0$ ve $\lambda_2 > 0$ old. ne max ne de min noktadır.

**Örnek:** $f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 12x_1 - 8x_2 - 12x_3 + 100$ ekstremum nok. bulunuz

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{x_{1,1} = 2 \quad x_{1,2} = -2}$ ($6x_1$)

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 4}$ (2)

$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = 6}$ (2)

Aday noktalar;

$(x_1, x_2, x_3) = (2, 4, 6)$

$(x_1, x_2, x_3) = (-2, 4, 6)$

Hessianda deneyelim

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial f}{\partial x_2 x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (2, 4, 6)$ için

$6x_1 = 6.2 = 12$

$$H = \begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ eşdeğerleri } \begin{vmatrix} 12-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 12 \ , \ \lambda_2 = 2 \ , \ \lambda_3 = 2}$$

$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ olduğundan $(x_1, x_2, x_3) = (2, 4, 6)$ noktası yerel minimumdur.

$(x_1, x_2, x_3) = (-2, 4, 6)$

$$H = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ eşdeğerleri } \begin{vmatrix} -12-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = -12$ , $\lambda_2 = 2$ , $\lambda_3 = 2$

$\lambda_1 < 0$ , $\lambda_2 > 0$ , $\lambda_3 > 0$ olduğundan (-2,4,6) noktası ne max ne de min.

## KISITLI OPTİMİZASYON

Optimizasyon problemlerinin çoğu kısıtlayıcı fonksiyonlar içermektedir. Kısıtlamasız optimizasyon problemlerinde optimum değer hedef fonksiyonun yapısı belirlenmektedir. Kısıtlamalı optimizasyon problemlerinde kısıtlayıcı fonksiyonlar optimum çözümün bulunmasında önemli rol oynarlar. Kısıtlamalı optimizasyon problemleri kısıtlayıcının tipine bağlı olarak eşitlik kısıtlayıcı ve eşitsizlik kısıtlayıcı olmak üzere iki sınıfa ayrılırlar

### Düzenli Nokta

Kısıtlayıcı optimizasyon problemlerinin çözümleri için geliştirilen **Lagrange Yaklaşımı** içeren metotlar optimum $x^*$ noktasının düzenli bir nokta olması gerekliliği üzerine dururlar. $x^*$ noktası öyle bir noktadır ki bu noktada eşitlik kısıtlayıcıları **0'a eşit** ve bu kısıtlayıcıların **gradyantları** (1. türevleri) birbirlerinden **lineer** olarak **bağımsız**dırlar.

Lineer olarak bağımsızlık aşağıdaki özellikler ile verilir. 2 vektörün gradyantı birbirine paralel olmamalıdır. Herhangi bir vektörün gradyantı diğer vektörlerin gradyantlarının bir lineer fonksiyonu olmamalıdır. Herhangi iki ya da daha fazla vektörün lineer olarak bağımsız veya bağımlı olduğunu belirlemek için bu vektörler lineer formda aşağıdaki gibi yazılır.

$$\boxed{x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots + x_n a^{(n)} = 0 \quad \text{veya} \quad Ax = 0}$$

Burada $a^{(i)}$ vektörleri temsil etmektedir. Eğer bu denklem tek çözümü **$x=0$ ise** bu vektörler lineer olarak bağımsızdırlar. Aksi durumda vektörler lineer olarak bağımlıdırlar. Burada tanımlanan vektörler, kısıtlayıcıların tasarım değişkenlerine göre oluşturulmuş gradyantlardır.

**Örnek:** Aşağıdaki vektörlerin lineer bağımsız olup olmadığını bulunuz.

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad a^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

25.03.2021

$c_1 a^{(1)} + c_2 a^{(2)} = 0$ denklemi çözümlenirse;

$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 - 3c_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{array}$ bulunur.

$c_1$ ve $c_2$ değerlerinin 0 olduğu durum için denklem sistemi sağlandığından $a^{(1)}$ ve $a^{(2)}$ vektörleri lineer bağımsızdır.

**Örnek:** lineer bağımsız?

$a^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad a^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

$c_1 a^{(1)} + c_2 a^{(2)} = 0$

$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c_1 + 2c_2 = 0 \\ 3c_1 + 6c_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$a^{(1)}$ ve $a^{(2)}$ vektörleri lineer bağımlıdır,

## EŞİTLİK KISITLAYICILAR

Eşitlik kısıtlayıcıları aşağıdaki forma sahip optimizasyon problemlerini içerirler.

$\min f(x)$;

$s.t. \quad h_j(x) = 0 \quad , j = 1, 2, \ldots, m$ → kısıtlayıcı fonk sayısı

$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ → tasarım değişkenleri

Optimum çözümü elde etmek için $m \leq n$ olmak zorundadır. Eğer $m > n$ ise problem aşırı tanımlanmış olur. Bu durumda çözüm yoktur.

## Direkt Yerleştirme Metodu

Lihafıdıya başlan

Kısıtlayıcı fonksiyonlardan tasarım değişkenleri çekilerek hedef fonk. yerine yazılır ve dolayısıyla problem kısıtlamasız optimizasyon problemine dönüşür. Yani tasarım değişkeni m kısıtlayıcı fonksiyona sahip bir optimizasyon problemi, teorik olarak m eşitlik kısıtlayıcı çözülür ve m değişken geri kalan n-m değişkeni cinsinden ifade edilir. Hedef fonksiyonuna yazılır ve kısıtlamasız opt. problemi elde edilir.

(Teorik olarak basit ama uygulamada zor.)

Pek çok pratik problemde kısıtlayıcı fonk. nonlineer yapıda olduğu için bunları m değişkenini n-m cinsinden ifade etmek zordur.

**Örnek:** $\min f(x) = (x_1-1{,}5)^2 + (x_2-1{,}5)^2$

St.

$g(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0$ ekstremum noktalarını bulunuz.

$x_1 + x_2 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -x_2 + 2}$

$f(x)$ fonk. $x_1$ yerine $x_2$ cinsinden değişimi yazılırsa problem

$\min f(x) = (-x_2+2-1{,}5)^2 + (x_2-1{,}5)^2$ problemine dönüşür.

$\min f(x) = (-x_2+0{,}5)^2 + (x_2-1{,}5)^2$ tek değişkenli kısıtsız bir opt. problemi elde edilir.

Gerek şartlardan;

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{df(x)}{dx_2} = 0 \Rightarrow -2.(-x_2+0{,}5) + 2.(x_2-1{,}5) = 0$

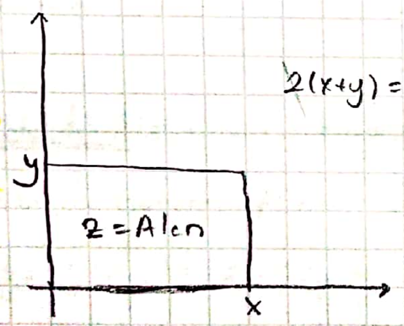
$2x_2 - 1 + 2x_2 - 3 = 0 \qquad 4x_2 = 4 \qquad \boxed{x_2 = 1}$

Yeter Şartlardan;

$f''(x) = 4 > 0$ old. $x_2 = 1$ noktası yerel minimum

$x_1 = -x_2 + 2 = 1 \qquad \boxed{(x_1, x_2) = (1,1) \text{ yerel minimum}}$

**Örnek:** Çevresi aynı olan dikdörtgenler arasında en geniş alanın boyutunu bulunuz




$x.y \quad (-y+p)\,y \quad -2y+p \quad py-y^2$

$2(x+y) = 2P$

$g(x) = x+y-p=0 \qquad x=-y+p$

$z = f(x,y) = x.y$

St.

$g(x) = x+y-p = 0$

$x+y-p=0 \Rightarrow \boxed{x = -y+p}$ maliyet fonksiyonu yerine yazılırsa;

$z = f(y) = (-y+p)\,y$ ekstremum noktaları bulunursa;

$\dfrac{dz}{dy} = -2y+p = 0 \Rightarrow y = \dfrac{p}{2} \qquad \dfrac{d^2z}{dy^2} = -2$

$f''(y) = -2 < 0$ old. $y = \dfrac{p}{2}$ noktasında max.

$x = -y+p = -\dfrac{p}{2}+p = \dfrac{p}{2}$

$z = f(x,y) = xy \qquad (x,y) = \left(\dfrac{p}{2}, \dfrac{p}{2}\right)$ nokt. max

Alan $\boxed{z_{max} = \dfrac{p^2}{4}}$ olur.

İki değişkenli zincirleme türev kuralı

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

**Örnek:** Toplamları 1 ve karelerin toplamı en küçük olan iki sayıyı bulunuz.

Sayılar x ve y olsun

Maliyet fonksiyonu $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

Kısıt fonksiyonu $g(x,y) = x + y - 1 = 0$

Problem;

$\min z = f(x,y) = x^2 + y^2$

st. $g(x,y) = x + y - 1 = 0$

f(x,y) fonk. ekstremum noktaları bulunursa g(x,y) kısıt fonksiyonu kullanılarak $x = -y + 1$ maliyet fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$z = f(y) = (-y+1)^2 + y^2$

Gerek şart;

$\frac{df}{dy} = 0 \Rightarrow -2(-y+1) + 2y = 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$\frac{df}{dy^2} = 4$

$f''(y) = 4 > 0$ olduğundan $y = \frac{1}{2}$ de f(y) minimumdur.

$x = -y + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ noktasında f(x,y) fonksiyonu verilen kısıt altında minimumdur.

**Örnek:** $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

st. $\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ y - z = 1 \end{array}\right\}$ ekstremum noktalarını bulunuz.

Kısıt fonksiyonlarından $\left.\begin{array}{l} x = 1 - y \\ z = -1 + y \end{array}\right\}$ $f(y) = (1-y)^2 + y^2 + (-1+y)^2$

$\frac{df}{dy} = -2(1-y) + 2y + 2(-1+y) = 6y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow y$

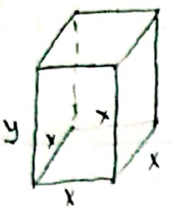
$f''(y) = 6 > 0$ yerel minimumdur.

CamScanner ile tarandı

$x = 1-y = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \to \underline{\underline{x}}$ $\qquad$ $z = -1+y = -1+\frac{2}{3} = \frac{-1}{3} \to \underline{\underline{z}}$

$(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ noktası yerel minimumdur ✓

**Örnek:** Alanı $A = 6\,br^2$ olan bir levhadan, tabanı kare olan en büyük hacimli dik prizma biçimindeki kapalı kutuyu yapmak istiyoruz. Bu kutunun boyutlarını nasıl seçmeliyiz.




$Alan = 4xy + 2x^2 = 6$

$Hacim = x^2 y$

$z = f(x,y) = x^2 y$

$st.\ g(x) = 4xy + 2x^2 - 6 = 0$

$\to 4xy + 2x^2 = 6$

$4xy = 6 - 2x^2$

$y = \dfrac{6-2x^2}{4x}$

Kısıtlayıcı fonksiyondan $y = \dfrac{6-2x^2}{4x}$ // şeklinde elde edilir. Maliyet fonksiyonunda y değişkeni yerine yazılırsa

$$z = f(x) = x^2 \cdot \overbrace{\frac{6-2x^2}{4x}}^{y} = \frac{-2x^3+6x}{4} \ //$$ } Hacim //

uzunluk br. neg. olam

Gerek şart; $f'(x) = \dfrac{-6x^2+6}{4} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x=1}$, $x=-1$ (olamaz)

$\dfrac{-12x}{4}$

Yeter şart; $f''(x) = -3x$, $x=1$ için $f''(x) = -3 < 0$ old. max. noktasıdır.

$x=1$ için $y = \dfrac{6-2x^2}{4x} = \dfrac{6-2}{4} = 1$ $\boxed{y=1}$

$(x,y) = (1,1)$ noktası yerel maksimumdur //

En büyük hacimli prizma küptür.

**Örnek:** $g(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 - 27 = 0$ eğrisinden koordinat denkleminin başlangıç noktasına olan en yakın noktayı ve bu noktanın başlangıca olan uzaklığını belirleyiniz.

Eğri üzerindeki herhangi bir $(x,y)$ noktasının başlangıç nok. $(0,0)$ uzaklığı

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Kısıt fonksiyonu; $g(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 - 27 = 0$

Kısıt fonk. bir değişken değerine bağlı olarak yazmak kolay değil.

1 Nisan. 2021

# LAGRANGE ÇARPANLARI METODU

Optimizasyon teorisinde ve optimizasyonda kull. sey. yöntl. oldukça önemlidir.

**Örnek:** Aşağıdaki optimizasyon probleminde hedef fonksiyonu minimum yapan $x_1$ ve $x_2$ değerlerini bulunuz.

$$3x_1^2 - 6x_1 + 1 = 0$$

$$\min f(x) = -x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 \qquad -x_1^2 - 2x_1 + (1-2x_1)^2$$

$$\text{st. } g(x) = 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 - 2x_1$$

Optimum nokta $(x_1^*, x_2^*)$ olarak gösterilsin. Lagrange çarpanlarını belirlemek ve ve tanımlamak için eşitlik kısıtlayıcısını bir değişkene göre çözecek;

$$x_2 = \phi(x_1)$$

Burada $\phi$ $x_1$'e bağlı bir fonk. olsun. Örnek için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\phi(x_1) = -2x_1 + 1$ olur.

$\phi(x_1)$ fonk. hedef fonk'a yerine yazılırsa, $x_2$ değişkeni yok edilmiş olur ve sadece $x_1$'e ait optimizasyon problemine çevrilmiş olur.

$\min f(x_1, \phi(x_1))$ } Bu örnek için hedef fonksiyonu aşağıdaki gibi belirlenir.

$$f(x_1) = -x_1^2 - 2x_1 + (-2x_1+1)^2$$

Bu fonksiyonun gerek şartı;

$$\frac{df}{dx_1} = -2x_1 - 2 + 2.(-2x_1+1)(-2) = 6x_1 - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1^* = 1} \text{ elde edilir.}$$

Bu aday noktada hedef fonksiyonunun değeri $-2$ olarak hesaplanır. Bu aday noktanın gerçekten lokal minimum noktayı verip vermediği ise yeter şart $\frac{d^2f}{dx_1^2}$ şartına bakılır ve bu örnek için $\frac{d^2f}{dx_1^2} = 6 > 0$ olduğundan bu nokta gerçekten lokal minimum noktayı verir.

$x_2$ değişkeninin değeri de bulunursa; $x_2 = -2x_1 + 1 = -2.1 + 1 = -1$ olur.

$f(x)$ fonksiyonunun $(x_1, x_2) = (1, -1)$ noktası verilen kısıt altında yerel minimum noktasıdır.

Yukarıdaki çözümde tasarım değişkenleri açık bir şekilde bu fonksiyonda ifade edilebilmektedir. Ancak çoğu pratik problem için böyle bir fonksiyonu tanımlamanın imkanı yoktur. Böyle bir durumda;

$f(x_1, x_2) = f(x_1, \phi(x_1))$ fonk için gerek şart yazıldığında yani $\frac{df}{dx_1}$ hesaplandığında

$$\frac{df(x_1,x_2)}{dx_1} = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

$x_2$ değişkenini $x_1$'e bağlı olarak yazamıyoruz. (Kompleks)

elde edilir. $x_2$ yerine $\boxed{x_2 = \phi(x_1)}$ yazılırsa yukarıdaki denklem optimum noktada $(x_1^*, x_2^*)$ aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \cdot \frac{d\phi}{dx_1} = 0$$

$\phi$ fonksiyonu bilinmediğinden elde edilen denklemden $\frac{d\phi}{dx_1}$ ifadesinin yok edilmesi gerekir. Bunun için eşitlik kısıtlayıcı $g(x_1, x_2)$ dikkate alınarak optimum noktada $(x_1^*, x_2^*)$ türevi alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{dg(x_1^*, x_2^*)}{dx_1} = \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \cdot \overbrace{\frac{dx_2}{dx_1}}^{d\phi} = 0$$

Bu ifadeden $d\phi/dx_1$ terimi,

$$\boxed{\frac{d\phi}{dx_1} = -\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1}{\partial g(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2}}$$

elde edilir.

Bu ifade yukarıda hedef fonksiyonu için yazılan denkleme yazılırsa,

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \left( \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1}{\partial g(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2} \right) = 0$$

elde edilir. Eğer,

$$\boxed{\lambda = \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2}{\partial g(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2}}$$

olarak tanımlanırsa

$$\boxed{\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0}$$

olur.

Benzer durum $x_2$ için yazılırsa aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\boxed{\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0}$$

$g(x_1, x_2) \rightarrow$ aday nokt. gerek şartı.

$\lambda \rightarrow$ skaler bir büyüklüktür.

lagrange çarpanı

# LAGRANGE ÇARPANININ GEOMETRİK ANLAMI

Gerek şartları yazmak için Lagrange fonksiyonu olarak tanımlanan hedef ve kısıtlayıcı fonksiyonları içerecek şekilde aşağıdaki gibi yazılır.

$$\boxed{L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)}$$

Yukarıda elde edilen optimum nokta için gerek şart Lagrange fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi verilir.

$$\boxed{\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0}, \quad \boxed{\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0}$$

Vektör formunda yazılırsa;

$$\nabla L(x_1^*, x_2^*) = 0$$

Burada $\nabla$ gradyantı gösterir ve aşağıdaki gibi açık formda belirtilir.

$$\boxed{\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T} \longrightarrow \text{Transpoze}$$

Gerek şart için elde edilen eşitlikler

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0$$

vektör formunda düzenlenirse;

$\nabla f(x^*) + \lambda \nabla g(x^*)$ elde edilir. Yani

$$\boxed{\nabla f(x^*) = -\lambda \nabla g(x^*)}$$

Bu denklem geometrik şartın anlamını gösterir. Yani aday noktada hedef fonksiyonun gradyantı ve kısıtlayıcı fonksiyonun gradyantı paraleldir ve lagrange çarpanı ikisi arasındaki oranı belirtir.

Mevcut örnek dikkate alındığında aday optimum $(x_1, x_2) = (1, -1)$ noktasında hedef ve kısıtlayıcı fonksiyonun gradyanları;

$$-2x_1 - 2 = 2$$
$$-2x_1 = 4$$
$$-2$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -2x_1 - 2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \qquad \nabla g = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f\,(1,-1) = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \nabla g = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f\,(1,-1) = -\nabla g\,(1,-1) \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 2}}$$

Optimum noktada hedef fonksiyonun ve kısıt fonksiyonunun gradyantının <u>paralel</u> olduğu görülmektedir.

İki tasarım değişkenine sahip bir kısıtlı optimizasyon problemi için Lagrange fonksiyonu

$$\boxed{L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda\, g(x_1, x_2)}$$ şeklinde ifade edilir.

Burada $\lambda$ lagrange çarpanı olup değeri diğer tasarım değişkenleri gibi bulunacaktır. Bu fonksiyona bağlı olarak gerek şartlar aşağıdaki gibi verilir.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = g(x_1, x_2) = 0$$

Verilen bu gerek şartlar yardımıyla elde edilen aday noktalar arasından optimum hedefi veren değerleri bulabilmek için yeter şartlar uygulanır.

Birden fazla eşitlik kısıtlayıcının olduğu optimizasyon problemlerinde Lagrange fonksiyonu

$$L(x_1, x_2, \lambda_i) = f(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i g_i(x_1, x_2)$$ şeklinde;

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda_i) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \frac{\partial g_i(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda_i) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \frac{\partial g_i(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x_1, x_2, \lambda_i) = g_i(x_1, x_2) = 0$$

**Örnek:** $f(x,y) = x^2+2xy$ fonksiyonunun $x-3y=10$ kısıt fonksiyonu altında aday noktalarını bulunuz.

$f(x,y) = x^2+2xy$

St. $x-3y=10$

$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2+2xy + \lambda(x-3y-10)$

Gerek şartlar için;

$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \lambda \frac{g(x,y)}{\partial x} = 2x+2y+\lambda(1) = 0$

$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \lambda \frac{g(x,y)}{\partial y} = 2x+\lambda(-3) = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = g(x,y) = x-3y-10 = 0$

$2x+2y+\lambda = 0 \Rightarrow 2y = -\lambda - 2\left(\frac{3\lambda}{2}\right) = -4\lambda \Rightarrow y = -2\lambda$

$2x-3\lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{3\lambda}{2}$

$x-3y-10=0$

$x-3y-10 \Rightarrow \frac{3\lambda}{2} - 3(-2\lambda) - 10 = \frac{15\lambda}{2} = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}$

$x = \frac{3\lambda}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 2$

$y = -2\lambda = -2\cdot\frac{4}{3} = -8/3$

$(x,y) = \left(2, -\frac{8}{3}\right)$

**Örnek:** $f(x,y) = x\cdot y$

St. $g(x,y) = 3x^2+y^2 = 6$ aday noktalarını bulunuz.

$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = xy + \lambda(3x^2+y^2-6)$

Gerek şart;

$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = y + \lambda 6x = 0 \Rightarrow y = -6\lambda x \Rightarrow x = \frac{-y}{6\lambda}$ $\left(\frac{\sqrt{12}\,y}{6.1}\right)^2$

$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = x + \lambda . 2y = 0$

$\frac{12y^2}{36}$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 3x^2+y^2-6=0$$

$$x+\lambda 2y=0 \Rightarrow x+\lambda 2(-6\lambda x)=0 \Rightarrow x=12\lambda^2 x$$

$$x\neq 0 \text{ için } 12\lambda^2=1 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{12}} \text{ için } \Rightarrow x=-2\lambda y=-2\frac{1}{\sqrt{12}}y \qquad \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}}y \qquad \frac{-1}{\sqrt{3}}y \qquad \frac{1}{3}y^2$$

$$3x^2+y^2-6=0 \Rightarrow 3\cdot\frac{4}{12}y^2+y^2=6 \Rightarrow y^2=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$$

$$x=\frac{-y}{6\lambda},\quad y=\sqrt{3} \text{ için } x=\frac{-\sqrt{3}}{6\cdot 1/\sqrt{12}}=-1 \quad (-1,\sqrt{3})$$

$$y=-\sqrt{3} \text{ için } x=\frac{\sqrt{3}}{6\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}}=1 \quad (1,-\sqrt{3})$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$\lambda=-\frac{1}{\sqrt{12}} \text{ için } x=-2\lambda y=-2\frac{-1}{\sqrt{12}}y=\frac{2}{\sqrt{12}}y$$

$$3x^2+y^2-6=0 \Rightarrow 3\frac{4}{12}y^2+y^2=6 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$$

$$y=\sqrt{3} \text{ için } x=\frac{-y}{6\lambda}=\frac{-\sqrt{3}}{6\left(\frac{-1}{\sqrt{12}}\right)}=1 \quad (1,\sqrt{3})$$

$$y=-\sqrt{3} \text{ için } x=\frac{-y}{6\lambda}=-\left(\frac{-\sqrt{3}}{6(-1/\sqrt{12})}\right)=-1 \quad (-1,-\sqrt{3})$$

$$\lambda=\frac{-1}{\sqrt{12}}$$

Aday noktalar;

- $(1,\sqrt{3})$ • $(-1,\sqrt{3})$ • $(1,-\sqrt{3})$ • $(-1,-\sqrt{3})$

**Örnek:** $f(x,y,z)=x+y+2z$ fonksiyonunun $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=3$ kısıt olanır aday noktaları bulunuz.

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

$$=\overbrace{x+y+2z}+\lambda(x^2+y^2+z^2-3)$$

Gerek şart;

$$\frac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}=1+\lambda(2x)$$

$$\frac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} = \overset{y \downarrow}{1} + \lambda(\overset{y^2 \downarrow}{2y})$$

$$\frac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial z} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} + \lambda\frac{\partial z(x,y,z)}{\partial z} = \overset{2z \downarrow}{2} + \lambda(\overset{z^2 \downarrow}{2z})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3 \checkmark$$

$1+2\lambda x = 0 \Rightarrow x = -1/2\lambda$

$1+2\lambda y = 0 \Rightarrow y = -1/2\lambda$

$2+2\lambda z = 0 \Rightarrow z = -1/2\lambda$

$x^2+y^2+z^2 = 3$

$$\left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{-1}{\lambda}\right)^2 = 3 \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}+\underset{(4)}{\frac{1}{\lambda^2}} = 3 \qquad \frac{6}{4\lambda^2} = 3$$

$$\frac{6}{4\lambda^2} = 3 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad 2 = 4\lambda^2$$

$1 = 2\lambda^2$

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ için $x = \frac{-1}{2\lambda} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \lambda \qquad \frac{1}{2} = \lambda^2$

$y = \frac{-1}{2\lambda} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \qquad (x,y,z) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

$z = -\frac{1}{\lambda} = -\sqrt{2}$

$\lambda = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ için $x = \frac{-1}{2\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = \frac{-1}{2\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

$z = \frac{-1}{\lambda} = \sqrt{2}$

Aday noktalar;

$(x,y,z) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

$(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

**Örnek:** $f(x,y) = xyz$ fonksiyonunun $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 9$ kısıtı altında aday noktalarını bulunuz.

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = yz + \lambda(2x) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = xz + \lambda(2y) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = xy + \lambda(2z) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2-9 = 0$$

$yz + 2\lambda x = 0$ $\quad x \neq 0$ olmak üzere $x/\ xyz + 2\lambda x^2 = 0$

$xz + 2\lambda y = 0$ $\quad y \neq 0$ olmak üzere $y/\ xyz + 2\lambda y^2 = 0$

$xy + 2\lambda z = 0$ $\quad z \neq 0$ olmak üzere $z/\ xyz + 2\lambda z^2 = 0$

$x^2+y^2+z^2 = 9$

$2\lambda x^2 = 2\lambda y^2 = 2\lambda z^2$ $\quad \lambda \neq 0$ olmak üzere $\quad x^2 = y^2 = z^2$

$x^2+y^2+z^2 = 9 \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$ $\quad y = \pm\sqrt{3}$ $\quad z = \pm\sqrt{3}$

Aday noktalar;

$(x,y,z) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ $\quad (x,y,z) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$

$(x,y,z) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ $\quad (x,y,z) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

$(x,y,z) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ $\quad (x,y,z) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$

$(x,y,z) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ $\quad (x,y,z) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

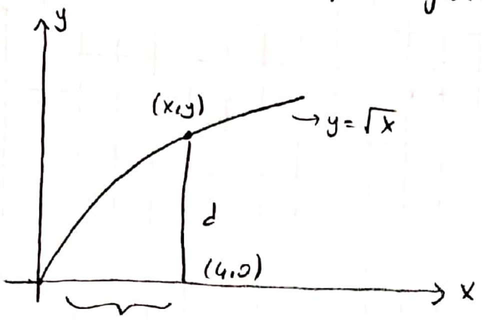
$$\lambda = \frac{-yz}{x} = \frac{-xz}{y} = \frac{-xy}{z}$$

$\lambda = -\sqrt{3}$ $\quad (x,y,z) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$\lambda = \sqrt{3}$ $\quad (x,y,z) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}), (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

8. ders vize öncesi

Örnek: $y=\sqrt{x}$ eğrisi üzerinde $(4,0)$ noktasına en yakın $(x,y)$ noktasını bulunuz. Kısıtlı optimizasyon problemi olarak formülasyonunu yazınız.




$d=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}$ maliyet fonksiyonu

$z=f(x,y)=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$

s.t. $g(x,y)=y-\sqrt{x}=0$

$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

$=\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\lambda(y-\sqrt{x})$

Gerek şart:

$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=\frac{x-4}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}-\frac{\lambda}{2\sqrt{x}}=0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=y-\sqrt{x}=0$

$y=\sqrt{x}\Rightarrow y^2=x$

$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=\frac{y}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}+\lambda=0$

$\frac{x-4}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}-\frac{\lambda}{2\sqrt{x}}=0\Rightarrow\frac{(x-4)^2}{(x-4)^2+y^2}=\frac{\lambda^2}{4x}$

$\frac{y}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}+\lambda=0\Rightarrow\frac{y^2}{(x-4)^2+y^2}=\lambda^2$

$\frac{(x-4)^2\,4x}{(x-4)^2+y^2}=\frac{y^2}{(x-4)^2+y^2}\Rightarrow(x-4)^2.4x=y^2=x$

$x\neq 0$ için $(x-4)^2=\frac{1}{4}$ $\quad(x-4)=\frac{1}{2}$ $\quad(x-4)=-\frac{1}{2}$ $\quad x_1=\frac{9}{2}$, $x_2=\frac{7}{2}$

Aday noktalar

$(x,y)=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad(x,y)=\left(\frac{7}{2},\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

CamScanner ile tarandı

Örnek: $f(x,y,z)=x+y+z$ fonksiyonunun $g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=0$ ve $g_2(x,y,z)=x+z-1=0$ kısıtları altında aday noktalarını bulunuz.

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\sum_{l=1}^{2}\lambda_2\, g_1(x,y,z)$$

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x+y+z+\lambda_1(x^2+y^2-z)+\lambda_2(x+z-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=1+2\lambda_1 x+\lambda_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=1+2\lambda_1 y=0 \Rightarrow \lambda_1 y=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=1+\lambda_2=0 \Rightarrow \lambda_2=-1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2-z=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x+z-1=0$$

$\lambda_1 y=-\frac{1}{2}$ ise $\lambda_1\neq 0$ ve $y\neq 0$ olmalıdır.

$1+2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \Rightarrow 2\lambda_1 x=0$ $\lambda_1\neq 0$ ise $x=0$

$x^2+y^2-2=0 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$

$x+z-1=0 \Rightarrow z=1$

Aday noktalar

$(x,y,z)=(0,\sqrt{2},1)$

$(x,y,z)=(0,-\sqrt{2},1)$

Örnek: $f(x,y,z,w)=x^2+y^2+z^2+w^2$ fonksiyonunun $g_1(x,y,z,w)=x+y+z+w=10$ ve $g_2(x,y,z,w)=x-y+z+3w=6$ kısıtları altında aday noktaları bulunuz.

$f(x,y,z,w)=x^2+y^2+z^2+w^2$

st.

$g_1(x,y,z,w)=x+y+z+w=10$

$g_2(x,y,z,w)=x-y+z+3w=6$

CamScanner ile tarandı

$$L(x,y,z,w,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+y^2+z^2+w^2+\lambda_1(x+y+z+w-10)+\lambda_2(x-y+z+3w-6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z,w,\lambda_1,\lambda_2) = 2x+\lambda_1+\lambda_2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-\lambda_1-\lambda_2}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z,w,\lambda_1,\lambda_2) = 2y+\lambda_1-\lambda_2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-\lambda_1+\lambda_2}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z,w,\lambda_1,\lambda_2) = 2z+\lambda_1+\lambda_2 = 0 \Rightarrow z = \frac{-\lambda_1-\lambda_2}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w}(x,y,z,w,\lambda_1,\lambda_2) = 2w+\lambda_1+3\lambda_2 = 0 \Rightarrow w = \frac{-\lambda_1-3\lambda_2}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x,y,z,w,\lambda_1,\lambda_2) = \underline{x+y+z+w-10} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x,y,z,w,\lambda_1,\lambda_2) = \underline{x-y+z+3w-6} = 0$$

$$\frac{-\lambda_1+\lambda_2}{2} + \frac{-\lambda_1+\lambda_2}{2} + \frac{-\lambda_1-\lambda_2}{2} + \frac{-\lambda_1-3\lambda_2}{2} = 10 \Rightarrow \lambda_1+\lambda_2 = -5$$

$$\frac{-\lambda_1-\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} - \frac{-\lambda_1-\lambda_2}{2} + 3\left(\frac{-\lambda_1-3\lambda_2}{2}\right) = 6 \Rightarrow \lambda_1+3\lambda_2 = -3$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2 = -5 \\ \lambda_1+3\lambda_2 = -3\end{array}\right\} \begin{array}{l}\lambda_1 = -6 \\ \lambda_2 = 1\end{array}$$

$$x = \frac{-\lambda_1-\lambda_2}{2} = 5/2 \qquad z = \frac{-\lambda_1-\lambda_2}{2} = 5/2$$

$$y = \frac{-\lambda_1+\lambda_2}{2} = 7/2 \qquad w = \frac{-\lambda_1-3\lambda_2}{2} = 3/2$$

$$(x,y,z,w) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Yeter Şart

$f(x)$ fonksiyonunun $x^*$ noktasında minimum olması için aşağıda verilen P fonksiyonunun $x=x^*$ de bütün $dx$ değerleri için pozitif tanımlı olması gerekmektedir.

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(x^*, \lambda^*)\, dx_i\, dx_j$$

Yukarıda verilen fonksiyonun açılımı aşağıdaki determinant denklemi yardımıyla verilebilir. Bu polinomunun kökleri pozitif veya negatif tanımlı olmasına bağlı olarak $x = x^*$'da $f(x)$ fonksiyonu minimum veya maksimum olduğu belirlenir.

$$\begin{bmatrix} L_{11}-z & L_{12} & L_{13} & \cdots & L_{1n} & i_{11} & i_{21} & \cdots & i_{m1} \\ L_{21} & L_{22}-z & L_{23} & \cdots & L_{2n} & i_{11} & i_{22} & \cdots & i_{m2} \\ \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \cdots & L_{nn}-z & i_{1n} & i_{2n} & \cdots & i_{mn} \\ i_{11} & i_{12} & i_{13} & \cdots & i_{1n} & 0 & 0 & & 0 \\ i_{21} & i_{22} & i_{23} & \cdots & i_{2n} & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{m1} & i_{m2} & i_{m3} & \cdots & i_{mn} & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Burada $L_{ij} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(x^*, \lambda^*)$ $\quad i_{ij} = \dfrac{\partial g_i}{\partial z_j}(x^*)$

veya farklı bir şekilde yeter şartları

1. $\nabla x^2 L = H(x, \lambda)$ olmak üzere $H(x^*, \lambda^*)$ hesaplanır.
2. $z' \nabla g_i (x^*) = 0$, $n = 1, 2, \ldots, m$ olacak şekilde bir $z$ vektörü belirlenir.

$i_1$. $z' Hz > 0$ ise $X^*$ minimum noktadır.

$i_2$. $z' Hz < 0$ ise $X^*$ maksimum noktadır.

Örnek: $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$

st $\quad x+y-6 = 0$

$x+y=6$ optimizasyon problemini ekstremum noktalarını bulunuz.

$$L(x, y, \lambda) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x+y-6)$$

Gerekli şartlar

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-2) + \lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{-\lambda+4}{2} = 3$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-2) + \lambda = 0 \Rightarrow y = \frac{-\lambda+4}{2} = 3$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x+y-6 = 0 \Rightarrow \frac{-\lambda+4}{2} + \frac{-\lambda+4}{2} - 6 = 0 \qquad \frac{-2\lambda+8}{2} = 6 \Rightarrow \lambda = -2$$

Gerek şart

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 6\lambda x = 0 \Rightarrow y = -6\lambda x \Rightarrow x = \frac{-y}{6\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0$$

$$x + 2\lambda y = 0 \Rightarrow x + 2\lambda(-6\lambda x) = 0 \Rightarrow x = 12\lambda^2 x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x^2 + y^2 - 6 = 0$$

$x \neq 0$ için $12\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{12}}$

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{12}}$ için $x = -2\lambda y = -2 \frac{1}{\sqrt{12}} y$

$$3x^2 + y^2 - 6 = 0 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

$y = \sqrt{3}$ için $x = \frac{-y}{6\lambda} = 1$ $(1, \sqrt{3})$

$y = -\sqrt{3}$ için $x = \frac{-y}{6\lambda} = -1$ $(-1, \sqrt{3})$

Aday Noktalar

$$\underbrace{(-1,\sqrt{3})\ (1,-\sqrt{3})}_{\lambda = 1/\sqrt{12}} \quad \underbrace{(-1,-\sqrt{3})\ (1,\sqrt{3})}_{\lambda = -1/\sqrt{12}}$$

Yeter Şartlar

$$H(x,\lambda) = \begin{bmatrix} 6\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{bmatrix} \qquad \nabla g(x^*) = \begin{bmatrix} 6x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$z' = [z_1 \ z_2]$ ise $\lambda = 1/\sqrt{12}$ $(-1, \sqrt{3})$ için

$$z' \nabla g(x^*) = [z_1 \ z_2] \begin{bmatrix} -6 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 6z_1 = 2\sqrt{3} z_2$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_2$$

$$z' = [z_1 \ \sqrt{3} z_1]$$

$$z' H z = [z_1 \ \sqrt{3} z_1] \begin{bmatrix} 6/\sqrt{12} & 1 \\ 1 & 2/\sqrt{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \sqrt{3} z_1 \end{bmatrix} = 4\sqrt{3} z_1^2 > 0$$

olduğundan $(-1, \sqrt{3})$ noktası minimum noktadır.

$\lambda = 1/\sqrt{12}$ $(1,-\sqrt{3})$ için

$$z' \nabla q(x^*) = [z_1 \; z_2]\begin{bmatrix} 6 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 6z_1 - 2\sqrt{3} z_2 = 0$$

$$6z_1 = 2\sqrt{3} z_2$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_2$$

$$z' = [z_1 \; \sqrt{3} z_1]$$

$$z' H_2 = [z_1 \; \sqrt{3} z_1]\begin{bmatrix} 6/\sqrt{12} & 1 \\ 1 & 2/\sqrt{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ \sqrt{3} z_1 \end{bmatrix} = 4\sqrt{3} z_1^2 > 0$$ olduğundan $(1,-\sqrt{3})$ noktası minimumdur.

$\lambda = -1/\sqrt{12}$ $(1,\sqrt{3})$ için

$$z' \nabla q(x^*) = [z_1 \; z_2]\begin{bmatrix} 6 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 6z_1 + 2\sqrt{3} z_2 = 0$$

$$6z_1 = -2\sqrt{3} z_2$$

$$z_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} z_2$$

$$z' = [z_1 \; -\sqrt{3} z_1]$$

$$z' \nabla q(x^*) = [z_1 \; -\sqrt{3} z_1]\begin{bmatrix} -6/\sqrt{12} & 1 \\ 1 & -2/\sqrt{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ \sqrt{3} z_1 \end{bmatrix} = -4\sqrt{3} \cdot z_1^2 < 0$$ olduğundan $(1,\sqrt{3})$ noktası maksimum.

$\lambda = -1/\sqrt{12}$ $(-1,-\sqrt{3})$ noktası için

$$z' = \nabla q(x^*) = [z_1 \; z_2]\begin{bmatrix} -6 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -6z_1 - 2\sqrt{3} z_2 = 0$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} z_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} z_2$$

$$z' = [z_1 \; -\sqrt{3} z_1]$$

$$z' H_2 = [z_1 \; -\sqrt{3} z_1]\begin{bmatrix} -6/\sqrt{12} & 1 \\ 1 & -2/\sqrt{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ -\sqrt{3} z_1 \end{bmatrix} = -4\sqrt{3} z_1^2 < 0$$ olduğundan $(-1,-\sqrt{3})$ noktası maksimum.

$$\left.\begin{matrix} (-1,\sqrt{3}) \\ (1,-\sqrt{3}) \end{matrix}\right\} \text{minimum noktalar} \qquad \left.\begin{matrix} (1,\sqrt{3}) \\ (-1,-\sqrt{3}) \end{matrix}\right\} \text{maksimum noktalar.}$$

# Eşitsizlik Kısıtlayıcı Optimizasyon Problemleri

$\min f(x)$

st.

$g_j(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$

$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

## Eşitlik Kısıtlayıcılı Optimizasyon Problemlerine Çevirme

Slack (gevşek) değişken tanımlanır ve bu değişkenin

$$g_j(x) + \underbrace{y_j^2}_{\text{slack değişkeni}} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

$\min f(x)$

st.

$G(x, y) = g_j(x) + y_j^2 = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m$

Lagrange çarpanları metoduyla çözülebilir.

$$L(x, y, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j G_j(x, y)$$

Aday noktaların değerleri aşağıdaki denklemlerin çözümünden elde edilir.

Gerek Şartlar

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x_i} = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}, \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_j} = G(x, y) = g_j(x) + y_j^2 = 0 \Rightarrow j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y_j} = 2\lambda_j y_j = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

$\lambda_i > 0$ olmalıdır.

**Örnek:** Aşağıdaki optimizasyon problemini Lagrange çarpanları metodunu kullanarak çözünüz.

$$\min f(x) = (x_1 - 1,5)^2 + (x_2 - 1,5)^2$$

st.

$$h(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0$$

Eşitsizlik kısıtlayıcısı eşitlik kısıtlayıcısına çevrilir.

$$\min f(x) = (x_1 - 1,5)^2 + (x_2 - 1,5)^2$$

St.

$$h(x) = x_1 + x_2 - 2 + y^2 = 0$$

$$L(x, y, \lambda) = (x_1 - 1,5)^2 + (x_2 - 1,5)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2 + y^2)$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1,5) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 1,5) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 2 + y^2 = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 2y\lambda = 0$$

$\lambda = 0$ ise $\quad x_1 = 1,5 \quad x_2 = 1,5$

$x_1 + x_2 - 2 + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = -1$ (x)

$y = 0$ ise $\quad x_1 + x_2 = 2$

$$\left.\begin{array}{l} 2(x_1 - 1,5) + \lambda = 0 \\ 2(x_2 - 1,5) + \lambda = 0 \end{array}\right\rangle x_1 = x_2$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad \lambda = 1$

Aday nokta $(x_1^*, x_2^*) = (1,1)$

CamScanner ile tarandı

Yeter Şartlar

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix} \qquad \nabla h(x^*) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2y \end{bmatrix} \qquad z' = [z_1, z_2, z_3]$$

$$z' \nabla h(x^*) = (z_1 \quad z_2 \quad z_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow \underline{z_1 = -z_2}$$

$$z' H z = [z_1 \quad -z_1 \quad z_3] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ -z_1 \\ z_3 \end{bmatrix} = 4z_1^2 + 2z_3^2 > 0$$ olduğundan

$(x_1^*, x_2^*) = (1, 1)$ noktası minimumdur.

Örnek: min $f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1x_2 - 8x_1$

St.

$g(x) = x_1 + x_2 - 4 \leq 0$ problemini çözünüz.

Slack değişken $y$ kullanılarak eşitsizlik kısıtlayıcısı eşitlik kısıtlayıcıya dönüştürülürse;

$$L(x, y, \lambda) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1x_2 - 8x_1 + \lambda(x_1 + x_2 - 4 + y^2)$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x_1} = 8x_1 - 5x_2 - 8 + \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x_2}$$

CamScanner ile tarandı