强化学习中值迭代算法的实现

重点

算法实现的重点是理解：值迭代算法和策略迭代算法都是交替进行value update和policy update，来求解最优策略。两个策略的原理具体可以参考文章 什么是值迭代和策略迭代算法?

一、算法实现

这次我们来实现Value迭代算法
迭代链路：$V_0 \rightarrow \pi_0 \rightarrow V_1 \rightarrow \pi_1 \dots$
已知条件：

- p(r|s,a) agent在状态s采取动作a的奖励r的概率，也就是及时奖励分布函数
- P(s'|s,a) agent在状态s采取动作a之后转移到状态s'的概率，也就是状态转移分布函数
- 初始化的V

值迭代算法伪代码

While $\|V_{k+1} - V_k\| < \theta$:

For s in S:

#遍历每一个状态

For a in Action(s):

#利用 state value 求 action value

$$q(s,a) = \sum_r p(r \mid s,a) r + \gamma \sum_{s'} p(s' \mid s,a) V_k(s')$$

#对于状态 s，求解 action value 中的最大值

$$a^* = \arg\max q(s,a)$$

#策略更新 policy update，将策略指向刚才求出的最大值

π(a|s) = 1 if a=a* else 0

#值更新 value update，利用刚才的策略，重新计算新的 state value

V= max q(s,a)

里面的变量V代表state value，在每轮迭代中的值都不一样，实际编程需要加上迭代轮次k。

停止迭代的条件，是评估两轮之间的V的差值是否足够小，θ 是一个很小的数，实际计算是通过求差值的最大值小于θ来实现控制条件$\|V_{k+1} - V_k\| \leq \theta$求的是。

二、python实现

```
def value_iteration(grid, theta=1e-4, max_iter = 1000):
    #值迭代算法
    #初始化state 函数
    V = np.zeros((grid.rows, grid.cols))

    for Iter in range(max_iter):
        delta = 0
        new_V = np.copy(V)
        print("---------Iter------------", Iter)
        for i in range(grid.rows):
            for j in range(grid.cols):
                state = (i,j)
                if state in grid.terminal_states:
                    #终止状态不更新
                    #动作为原地不动
                    new_V[i,j] = 1.0 + grid.gamma*V[i,j]
                    continue
                #计算所有可能动作的值函数
                max_value = -np.inf
                for action in grid.actions:
                    next_state = grid.get_next_state(state, action)
                    reward = grid.get_reward(state, next_state, action)
                    #贝尔曼最优方程更新 求解statue value
                    value = reward + grid.gamma * V[next_state]
                    if value > max_value:
                        max_value = value
```

```
                new_V[i,j] = max_value
                delta = max(delta, abs(new_V[i,j]-V[i,j]))

        #打印当前state value和策略
        V = np.copy(new_V)
        print("当前的state value: \n",V)
        iter_policy = extract_policy(grid, V)
        print("当前策略: \n", iter_policy)
        print("debug delta", delta)
        if delta < theta:
            break
    return V
```

value_iteration函数是我们的值迭代算法的核心代码。现在我们以网格世界为例子，了解这个算法是怎么找到最优策略的。

三、一个简单的网格世界例子

网格世界中，agent需要找到到达终点的最优策略。
首先我们有第一种最简单的网格，就是只有一个终点，并且奖励函数也比较简单，到达终点奖励1，其他状态奖励0。

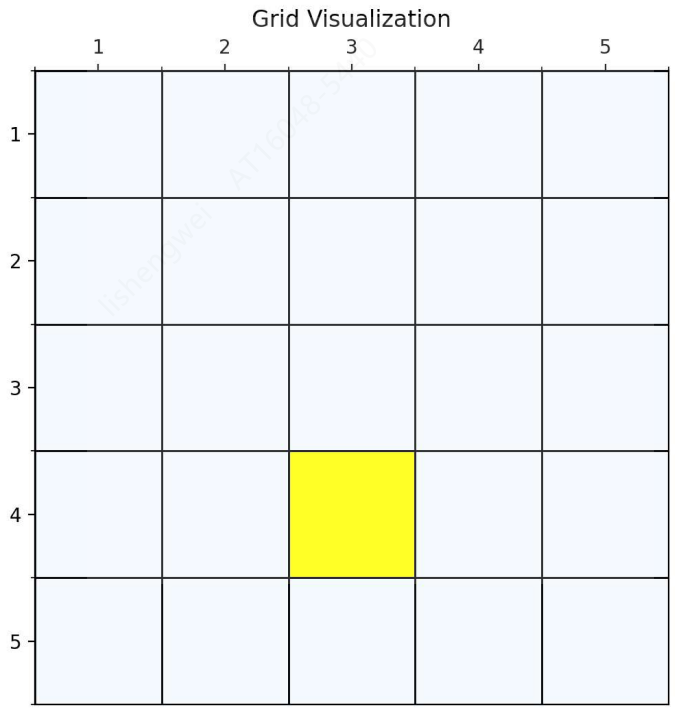


图1：最简单的网格

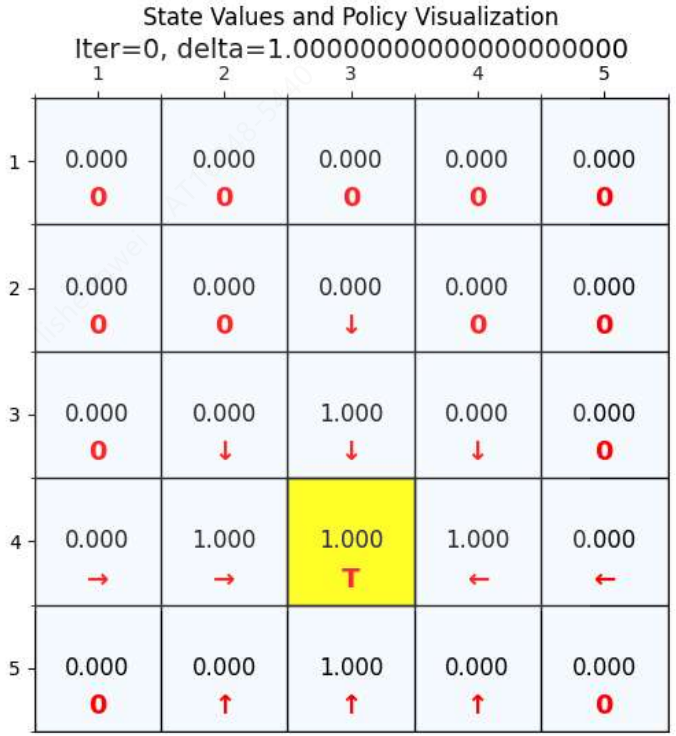


图2：1轮迭代后的state value分布和策略

那么我们现在开始在这个网格上运行这个算法，看一下state value和policy的变化。

从图2中可以看到，经过一次迭代之后，部分网格中的state value已经从初始值0改变为1.0。

网格中的箭头，代表agent在这个state找到的最优方向，没有箭头的代表算法现在还没有计算到。

我们可以看到刚开始的时候，大部分state value都是0。state value=1.0的网格有五个，坐标分别是(3,3),(4,2),(4,4),(5,3)和终点(4,3)。

那么为什么1轮迭代之后，**这些网格的state value是1.0呢?**

下面我们通过代码和贝尔曼方程计算一下。 首先从上节课回顾**state value**的定义：

> 状态价值函数：state value function也叫做**state value 对应标识V ，这个V和状态函数s和策略π有关，代表在给定策略π的情况下，状态s的期望价值（从当前状态开始到最终状态时走完一条trace，agent所获得的累加回报的期望。）
> return的定义：return是从某个时刻开始，agent未来获得的所有奖励的累计值。在数学上用Gt表示。
> 公式如下：
>
> $$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \dots$$

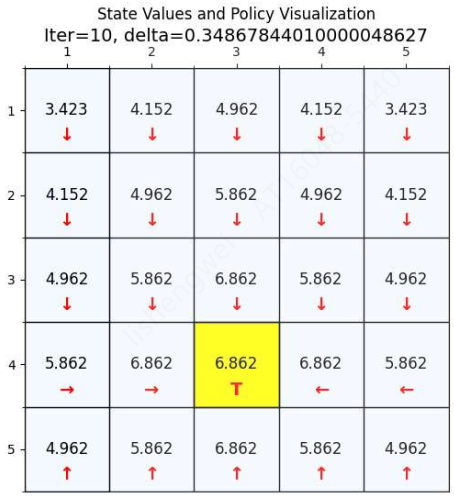
先看下终点网格(4,3)，由于是终点，所以及时奖励$R_{t+1} = 1$，当agent到达终点时，我们肯定是期望agent保持在这个位置，所以R_{t+2}, R_{t+3}都是对应状态(4,3)的value，由于初始化V=0，第一轮迭代时，$V_0[4,3] = 0$ 所以

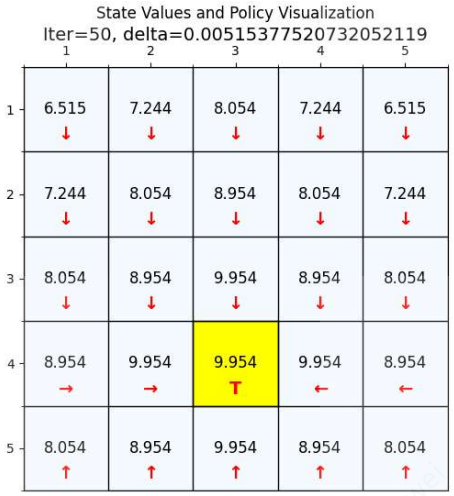
$$\begin{aligned} V_1[4,3] &= 1 + \gamma V_0[4,3] + \gamma^2 V_0[4,3] + \dots \\ &= 1 + 0 + 0 + \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

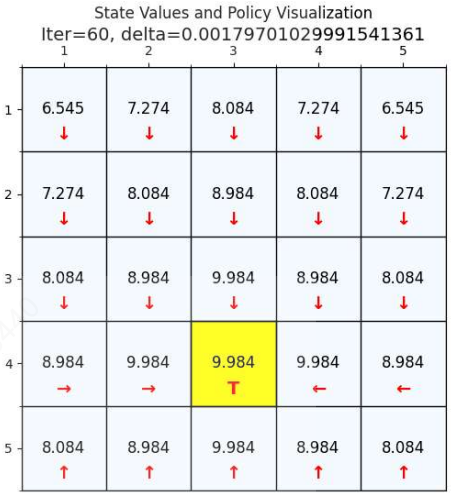
在看下网格(3,3),由于策略是向下，所以及时奖励$R_{t+1} = 1$，由于初始化V=0，第一轮迭代时，$V_0 = 0$ 所以R_{t+2}, R_{t+3}无论是哪个状态s的value 值都是0。

$$\begin{aligned} V_1[3,3] &= 1 + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \dots \\ &= 1 + 0 + 0 + \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

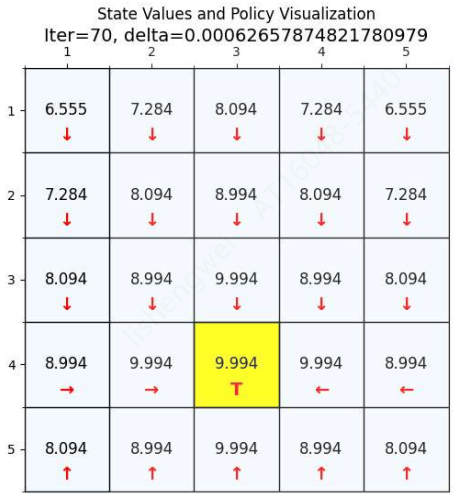
对应网格(3,3)我们可以看到如果agent选择其他动作（'0','↑', '←', '→'）对应的及时奖励都是0，所以按照value 迭代的算法，策略会被更新为奖励最大的动作，即'↓'，也是图2中展示的策略。
同样对应其他网格(4,2),(4,4),(5,3)可以同样计算。

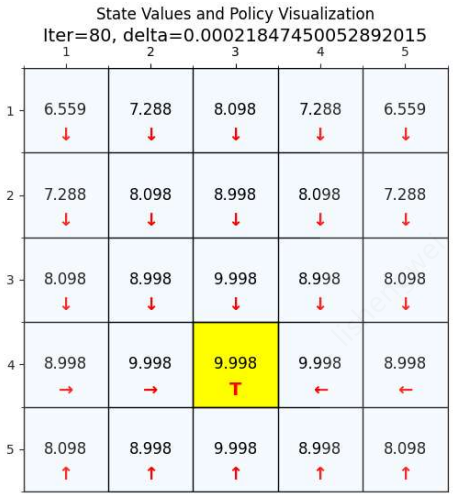






在iter=40的时候，delta已经是0.0147，代表两轮算法之间state value变化已经很小了。





最终经过88次迭代之后，delta已经到了我们规定的最小值，state value也基本上没有变化了，说明我们已经找到了最优值。下面看一下最优策略和对应的state value。

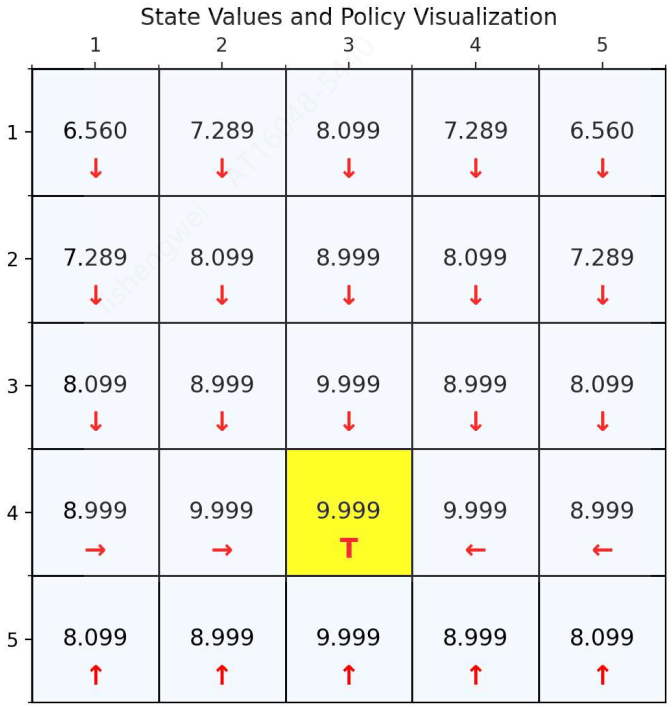


图3：最优策略和state value

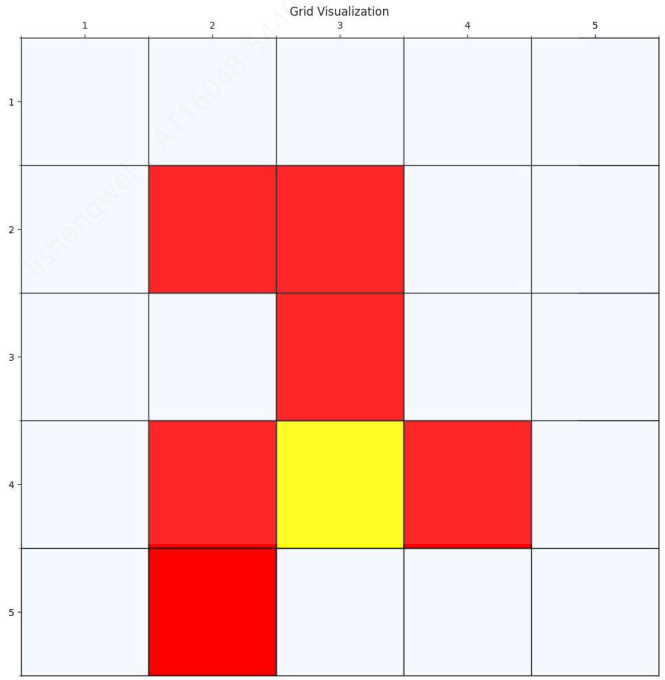


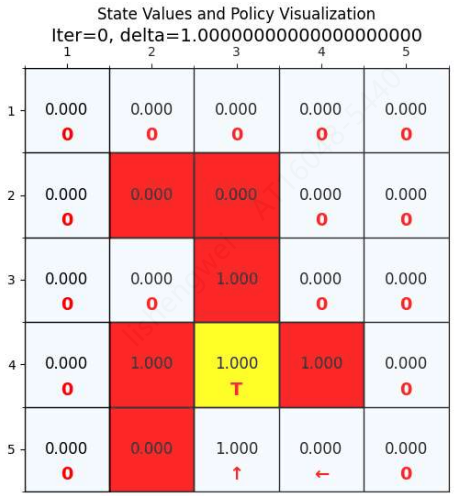
图4：网格世界升级版GridV3

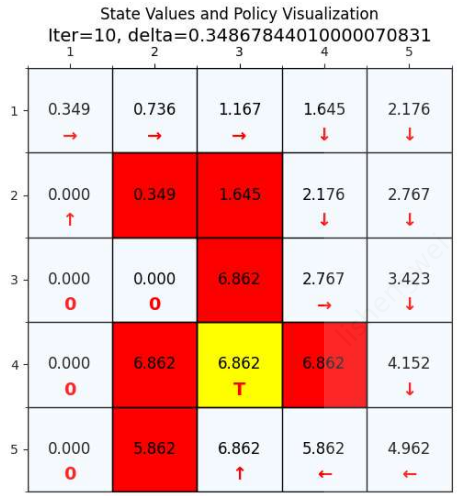
观察图3可以看出，无论是在哪个网格，算法所找出的最优策略都是指向终点的。这个也是value迭代算法的价值。 当然这个是最简单的网络，最优策略的训练也比较简单，但是可以很好的帮助我们理解value 迭代算法的过程。

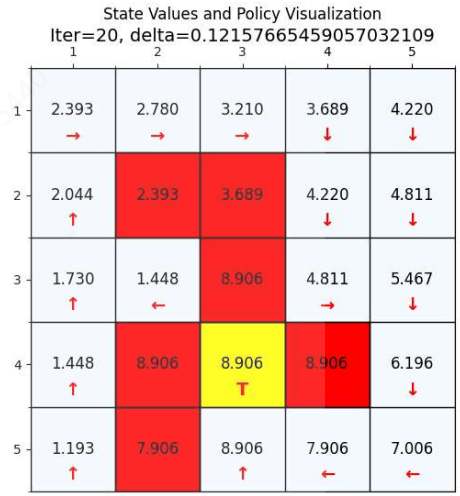
四、复杂的网格世界例子

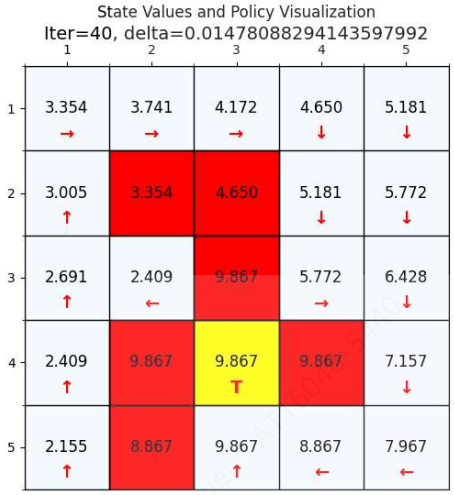
下面我们换一个复杂的网格世界，看下value 迭代算法怎么找到最优路径。

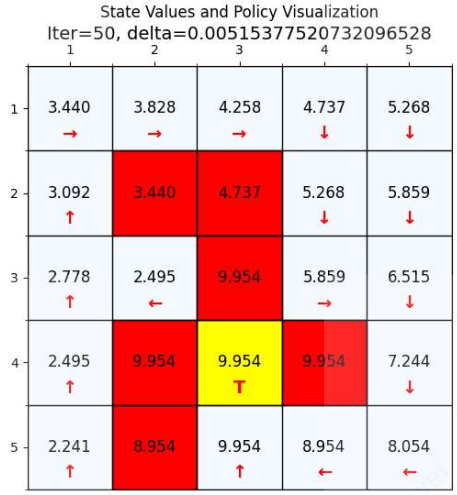
如图4所示，这个就是我们网格世界的升级版GridV3，这个和上个网格的区别是，增加了禁止区域(红色网格，agent进入之后会获得的奖励分数是负的)， 增加了边界检测（agent试图突破边界时，获得的奖励也是负的）。

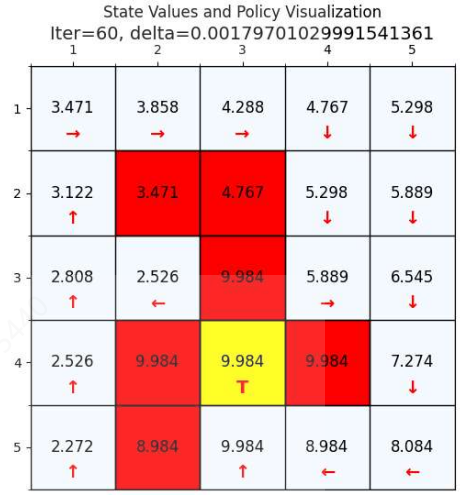

State Values and Policy Visualization
Iter=0, delta=1.0000000000000000000
1 2 3 4 5
1 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
0 0 0 0 0
2 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
0 0 0 0
3 0.000 0.000 1.000 0.000 0.000
0 0 0 0
4 0.000 1.000 1.000 1.000 0.000
0 T 0
5 0.000 0.000 1.000 0.000 0.000
0 ↑ ← 0

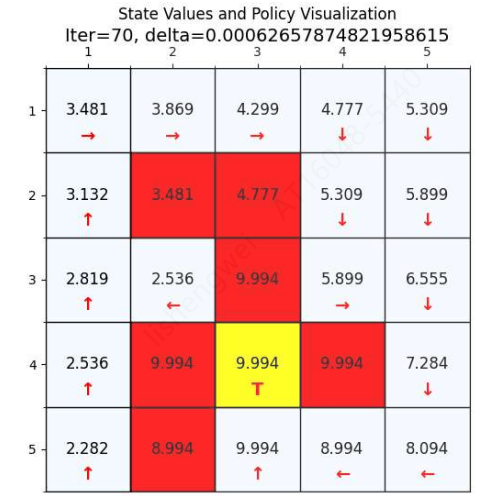

State Values and Policy Visualization
Iter=10, delta=0.34867844010000070831
1 2 3 4 5
1 0.349 0.736 1.167 1.645 2.176
→ → → ↓ ↓
2 0.000 0.349 1.645 2.176 2.767
↑ ↓ ↓
3 0.000 0.000 6.862 2.767 3.423
0 0 → ↓
4 0.000 6.862 6.862 6.862 4.152
0 T ↓
5 0.000 5.862 6.862 5.862 4.962
0 ↑ ← ←

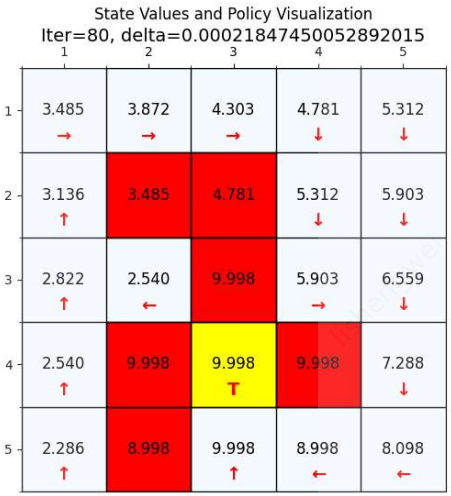

State Values and Policy Visualization
Iter=20, delta=0.12157665459057032109
1 2 3 4 5
1 2.393 2.780 3.210 3.689 4.220
→ → → ↓ ↓
2 2.044 2.393 3.689 4.220 4.811
↑ ↓ ↓
3 1.730 1.448 8.906 4.811 5.467
↑ ← → ↓
4 1.448 8.906 8.906 8.906 6.196
↑ T ↓
5 1.193 7.906 8.906 7.906 7.006
↑ ↑ ← ←

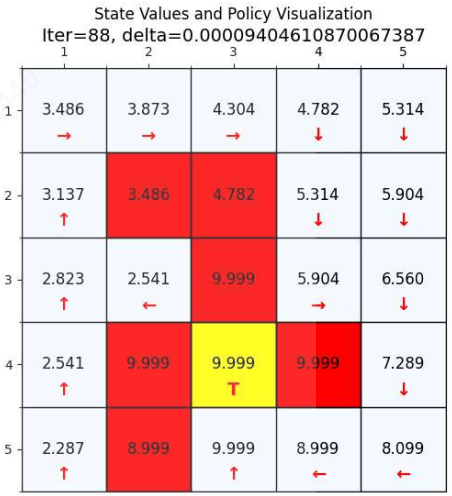

State Values and Policy Visualization
Iter=40, delta=0.01478088294143597992
1 2 3 4 5
1 3.354 3.741 4.172 4.650 5.181
→ → → ↓ ↓
2 3.005 3.354 4.650 5.181 5.772
↑ ↓ ↓
3 2.691 2.409 9.867 5.772 6.428
↑ ← → ↓
4 2.409 9.867 9.867 9.867 7.157
↑ T ↓
5 2.155 8.867 9.867 8.867 7.967
↑ ↑ ← ←


State Values and Policy Visualization
Iter=50, delta=0.00515377520732096528
1 2 3 4 5
1 3.440 3.828 4.258 4.737 5.268
→ → → ↓ ↓
2 3.092 3.440 4.737 5.268 5.859
↑ ↓ ↓
3 2.778 2.495 9.954 5.859 6.515
↑ ← → ↓
4 2.495 9.954 9.954 9.954 7.244
↑ T ↓
5 2.241 8.954 9.954 8.954 8.054
↑ ↑ ← ←


State Values and Policy Visualization
Iter=60, delta=0.00179701029991541361
1 2 3 4 5
1 3.471 3.858 4.288 4.767 5.298
→ → → ↓ ↓
2 3.122 3.471 4.767 5.298 5.889
↑ ↓ ↓
3 2.808 2.526 9.984 5.889 6.545
↑ ← → ↓
4 2.526 9.984 9.984 9.984 7.274
↑ T ↓
5 2.272 8.984 9.984 8.984 8.084
↑ ↑ ← ←







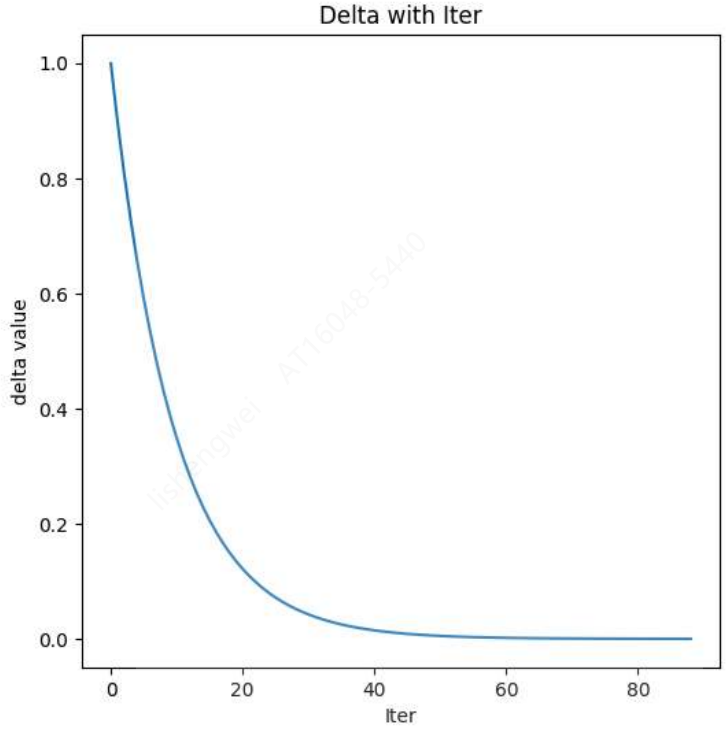


图5：系统误差和迭代次数

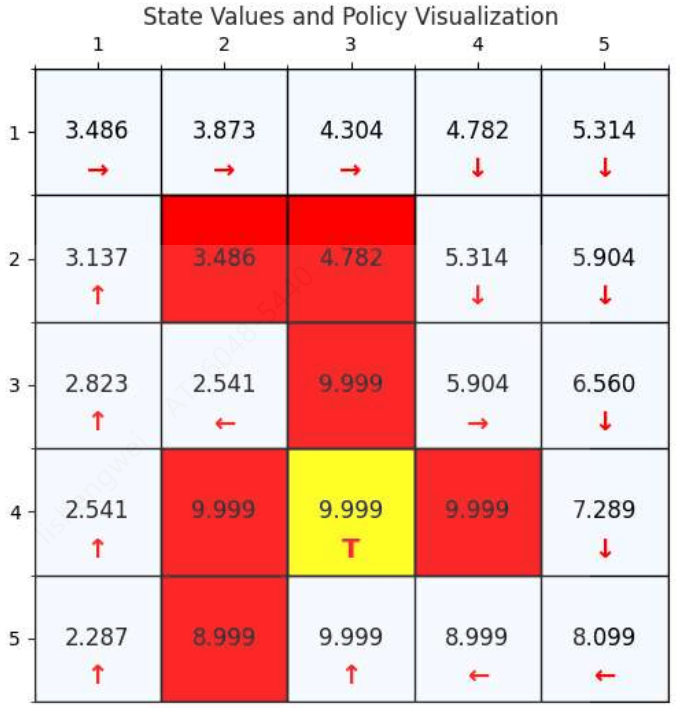


图6：网格世界升级版GridV3 最佳策略

我们从图5可以观察到，两轮迭代之间的差值delta 是越来越小的，最后接近为0，说明最终算法已经收敛。 在图6中，可以看到agent已经感知到禁止区域，并且能够绕过禁止区域，找到终点。

五、思考与总结

通过这两个例子和上节的算法讲解，我们可以完全理解算法的python实现了。 最重要的是通过value 迭代算法理解强化学习中的利用Bootstrap思想来优化策略，完全不需要外界的标注数据。 （这个思考点留给刚从深度学习转过来的同学，可以参考这篇文章 为什么强化学习不需要标注样本？） 另外就是熟悉强化学习中交替进行value update和policy update的套路，后面学习的算法形式上都是如此， 具体改变在于使用什么模型和方法进行update，但是形式并没有发生变化。

好了，下一篇是关于policy 迭代算法和实现！