

Universidad de Santiago de Chile  
Facultad de Ciencia  
Departamento de Matemática y Ciencia de la  
Computación



ESTUDIO DE MÉTODO ADAPTATIVO BASADO EN  
ALGORITMOS GENÉTICOS PARA LA  
RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DE LA LUZ  
ARTURO BENSON RADRIGÁN

Profesor guía: Oscar Rojas Díaz

Propósito: Optar al título profesional  
de Analista en Computación Científica

Santiago-Chile

2015

**©Arturo Adrián Benson Radrigán**

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento. Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra en cualquier forma, medio o procedimiento sin permiso por escrito del autor.

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE**  
**FACULTAD DE CIENCIA**

**Departamento de Matemática y Ciencia de la  
Computación**



**ESTUDIO DE MÉTODO ADAPTATIVO BASADO EN  
ALGORITMOS GENÉTICOS PARA LA  
RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DE LA LUZ**

**ARTURO ADRIÀN BENSON RADRIGÀN**

El siguiente trabajo de titulación fue preparado bajo la supervisión del profesor Oscar Rojas Díaz, del departamento de matemática y ciencia de la computación, y ha sido aprobado por los miembros de la comisión calificadora, Sr. Rodrigo Abarzúa Ortiz y Sra. Lorna Figueroa Morales.

Oscar Rojas D

Profesor Guía

Rodrigo Abarzúa O

Profesor Informante

Lorna Figueroa M

Profesora Informante

Sr. Pedro Marín Álvarez

Director

## Informe de Tesis

Título: Estudio de Método Adaptativo Basado en Algoritmos Genéticos para la Resolución de la Ecuación de Difusión de la Luz.

Alumno: Arturo Benson Radrigan

En este trabajo desarrollado por el alumno Arturo Benson Radrigan, parte de los requisitos para obtener el título de Analista en Computación Científica, se presenta un estudio de solución de sistemas de ecuaciones altamente disperso utilizando Algoritmos Genéticos, donde específicamente el sistema de ecuaciones utilizado, caracteriza la difusión de fotones de luz en un medio turbio, la cual es utilizada por técnicas de imagen óptica para la detección de tumores y seguimiento de tratamientos oncológicos.

El tema se inserta en el área de inteligencia artificial y métodos numéricos, donde el trabajo presenta un análisis de cómo resolver sistemas de ecuaciones con algoritmos genéticos, donde la incorporación de heurísticas propias del problema físico, demuestran que es posible obtener soluciones similares a lo obtenido con métodos numéricos analizadas de un punto de vista analítico, lo cual es requerido para la interpretación médica de imágenes. La relevancia de dicho estudio, no solo abarca el punto de vista clínico, sino que deja una base teórica y experimental útil para el desarrollo de investigación de pregrado en el área de inteligencia artificial de la Licenciatura en Ciencia de la Computación.

Es importante destacar, que este trabajo ha sido presentado y aceptado en el WorkShop Intelligent Systems and Applications del congreso nacional Infonor-Chile 2015, lo cual le da solidez al trabajo al ser evaluado por pares externos al Departamento de Matemáticas y Ciencia de la Computación de la Universidad de Santiago.

El trabajo se evaluó sujeto a los parámetros siguientes:

- Aspecto formal 20%
- Contenido teórico 10%
- Aportes al contenido 30%
- Conocimiento del tema 10%
- Metodología de trabajo 30%

En base al desarrollo y formalidad del trabajo califico este trabajo con nota 7,0 (siete coma cero)

Oscar Rojas Díaz

Profesor guía.



Universidad de Santiago de Chile  
Facultad de Ciencia  
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

## INFORME DE TESIS

En relación al trabajo de titulación del Sr. **Arturo Benson Radrigán** de la Carrera Licenciatura en Ciencia de la Computación, titulado: “**Estudio de Método Adaptativo Basado en Algoritmos Genéticos para la Resolución de la Ecuación de Difusión de la Luz**”, respecto a este trabajo de Tesis, puedo indicar que éste ha sido realizado con rigurosidad científica, lo que permitirá a las personas interesadas obtener información valiosa, así mismo, para aquellos que estén en esta línea de trabajo, les permitirá consultar confiadamente los tópicos involucrados en él.

En términos específicos, informo respecto a:

1. Relevancia del tema.....	7
2. Fundamento Teórico.....	7
3. Relación entre Objetivos y Logros.....	7
4. Estructura del Trabajo.....	7
5. Relación con los Objetivos de la Carrera.....	7
6. Resultados e Implementación.....	7
7. Conclusiones.....	7

Por lo anteriormente expuesto, califico el trabajo con nota 7,0 (siete coma cero).

**Dra. Lorna Figueroa Morales**  
Profesora Informante



Universidad de Santiago de Chile

Facultad de Ciencia

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

## INFORME DE TESIS

El trabajo de titulación “**Estudio de Método Adaptativo Basado en Algoritmos Genéticos para la Resolución de la Ecuación de Difusión de la Luz**” realizado por el egresado Arturo Benson Radrigán de la carrera de Licenciatura en Ciencia de la Computación fue revisado teniendo en consideración los siguientes aspectos:

Motivación	7.0
Fundamentos Teóricos	7.0
Relación Objetivos - Logros	7.0
Estructura	6.9
Relación Objetivos del Programa	7.0
Resultados e Implementación	6.5
Conclusiones	7.0
Bibliografía	7.0

Por lo cual califico este trabajo con nota seis coma nueve (6.9).

**Dr. Rodrigo Abarzúa Ortiz**  
**Profesor Informante**

Santiago de Chile, Septiembre 2015.

# Resumen

En esta memoria se realiza un estudio de como se usan los algoritmos genéticos (técnica de inteligencia artificial) para resolver la ecuación de difusión de la luz (ecuación diferencial) en un medio turbio. Se utilizó el método de los elementos finitos para obtener un sistema de ecuaciones lineales de la ecuación de difusión, y en este sistema aplicar algoritmos genéticos.

La solución obtenida mediante algoritmos genéticos, se compara con una solución numérica, además se explica como se determina la solución con algoritmos genéticos en ciertos casos. Se implementa una aplicación computacional que resuelve la ecuación de difusión de la luz mediante algoritmos genéticos, la aplicación está implementada en un software matemático llamado Matlab, utilizando una metodología de desarrollo estructurada.

# Abstract

In this memory it does a study of how genetic algorithms (artificial intelligence's technique) are used to solve the diffusion's equation of light (differential equation) in a turbid medium. It used the method of finite elements to obtain a system of linear equations from the diffusion's equation, and in this system apply genetic algorithms.

The solution obtained by genetic algorithms is compared with a numeric solution, in addition it explains how to determinate the solution with genetic algorithms in certain cases. It implements a computing application that solves the diffusion's equation of light using genetic algorithms, the application is implemented in a mathematical software called Matlab, using a structured development methodology.



# Agradecimientos

Se quiere agradecer a todas las personas que apoyaron tanto espiritualmente como anímicamente, se incluyen familiares y amigos que sin conocimientos de ciencia de la computacional o de los contenidos a tratar en la memoria, siempre estuvieron presentes apoyando en la elaboración de la memoria, creyendo en que todo va a salir bien, dando buenos consejos para evitar caer en situaciones de desesperación o angustia.

También se agradece a amistades que apoyaron con fe, de que si se trabaja con buena organización de tiempo, cualquier objetivo puede ser cumplido.

# Tabla de Contenidos

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Problemática . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.2.1. Objetivo general . . . . .	2
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	2
<b>2. Ecuaciones diferenciales</b>	<b>3</b>
2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias . . . . .	3
2.2. Ecuaciones diferenciales parciales . . . . .	4
2.3. Método de los elementos finitos . . . . .	6
2.4. Ecuación de aproximación de la difusión . . . . .	8
<b>3. Algoritmos genéticos en ecuaciones diferenciales</b>	<b>11</b>
3.1. Algoritmos genéticos . . . . .	11
3.1.1. Resolución de sistema de ecuaciones . . . . .	11
3.2. Solución de ecuaciones diferenciales mediante algoritmos genéticos . . . . .	12
3.2.1. Ecuación del calor . . . . .	13
3.2.2. Ecuación de sequedad de arroz . . . . .	14
3.2.3. EDP general . . . . .	14
3.3. Procedimiento genérico de solución . . . . .	15
<b>4. Modelamiento de solución del algoritmo genético</b>	<b>17</b>
<b>5. Metodología de desarrollo</b>	<b>21</b>
5.1. Requerimientos . . . . .	21
5.2. Modelamiento funcional . . . . .	21
5.2.1. Diagramas de Flujos de Datos . . . . .	22
5.2.2. Descripción de los Diagramas de Flujos de Datos . . . . .	23
5.3. Diseño Arquitectónico . . . . .	25
5.3.1. Diagrama de Estructura del Sistema . . . . .	26
5.3.2. Especificación de módulos . . . . .	27
5.4. Implementación . . . . .	28
<b>6. Análisis de resultados</b>	<b>31</b>
6.1. Análisis de espectro . . . . .	32
6.1.1. Análisis analítico . . . . .	32
6.1.2. Análisis de difusión de fotones . . . . .	38
6.2. Análisis de aproximación de densidades . . . . .	44
<b>7. Conclusiones</b>	<b>48</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>50</b>
<b>Anexos</b>	<b>53</b>
<b>A. Teoría ecuaciones diferenciales ordinarias</b>	<b>54</b>
A.1. Ecuaciones diferenciales de orden 1 . . . . .	54
A.2. Ecuaciones diferenciales de orden 2 . . . . .	56
A.3. Ecuaciones diferenciales de orden $n$ . . . . .	57
<b>B. Algoritmos genéticos</b>	<b>58</b>

C. Resolución de la ecuación del calor y ecuación de sequedad de arroz mediante algoritmos genéticos	61
D. Resolución de MEF en la EAD	65
E. Tablas del modelamiento funcional	67
F. Tablas del diseño arquitectónico	73
G. Gráficas de espectro de las soluciones	75
H. Gráficas de aproximación de las soluciones	90
I. Manual de uso del toolbox AG	94
J. Factorización LU	95

# Índice de figuras

2.1. Descomposición del dominio. . . . .	7
4.1. Sistema de ecuaciones obtenido de la EAD. . . . .	19
5.1. Nivel 0: Diagrama de contexto. . . . .	22
5.2. Nivel 1: Descomposición en procesos. . . . .	22
5.3. Nivel 2: Cálculo de soluciones. . . . .	23
5.4. Diagrama de Estructura de Sistema - parte 1. . . . .	26
5.5. Diagrama de Estructura de Sistema - parte 2. . . . .	26
5.6. Implementación secuencial del AG. . . . .	29
5.7. MEF en EAD. . . . .	29
6.1. Solución normalizada con método LU de 289 nodos y 5 fuentes. . . . .	33
6.2. Solución normalizada con algoritmo genético de 289 nodos y 5 fuentes. . . . .	33
6.3. Solución normalizada con método LU de 289 nodos y 4 fuentes. . . . .	34
6.4. Solución normalizada con algoritmo genético de 289 nodos y 4 fuentes. . . . .	34
6.5. Solución normalizada con método LU de 289 nodos y 3 fuentes. . . . .	35
6.6. Solución normalizada con algoritmo genético de 289 nodos y 3 fuentes. . . . .	35
6.7. Solución normalizada con método LU de 1089 nodos y 3 fuentes. . . . .	36
6.8. Solución normalizada con algoritmo genético de 1089 nodos y 3 fuentes. . . . .	37
6.9. Solución normalizada con método LU de 4225 nodos y 3 fuentes. . . . .	37
6.10. Solución normalizada con algoritmo genético de 4225 nodos y 3 fuentes. . . . .	38
6.11. Difusión de fotones con algoritmo genético de 289 nodos y 3 fuentes. . . . .	39
6.12. Difusión de fotones con método LU de 289 nodos y 3 fuentes. . . . .	39
6.13. Difusión de fotones con algoritmo genético de 289 nodos y 4 fuentes. . . . .	40
6.14. Difusión de fotones con método LU de 289 nodos y 4 fuentes. . . . .	40
6.15. Difusión de fotones con algoritmo genético de 289 nodos y 5 fuentes. . . . .	41
6.16. Difusión de fotones con método LU de 289 nodos y 5 fuentes. . . . .	41
6.17. Difusión de fotones con algoritmo genético de 1089 nodos y 3 fuentes. . . . .	42
6.18. Difusión de fotones con método LU de 1089 nodos y 3 fuentes. . . . .	42
6.19. Difusión de fotones con algoritmo genético de 4225 nodos y 3 fuentes. . . . .	43
6.20. Difusión de fotones con método LU de 4225 nodos y 3 fuentes. . . . .	43
6.21. Solución AG y numérica de 289 nodos y 3 fuentes. . . . .	44
6.22. Solución AG y numérica de 289 nodos y 4 fuentes. . . . .	45
6.23. Solución AG y numérica de 289 nodos y 5 fuentes. . . . .	45
6.24. Solución AG y numérica de 1089 nodos y 3 fuentes. . . . .	46
6.25. Solución AG y numérica de 4225 nodos y 3 fuentes. . . . .	46
B.1. Funcionalidad del algoritmo genético. . . . .	60
C.1. Figura de la estructura del arroz. . . . .	63
G.1. Solución normalizada con algoritmos genéticos de 289 nodos y 1 fuentes. . . . .	75
G.2. Solución normalizada con método LU de 289 nodos y 1 fuentes. . . . .	76
G.3. Solución normalizada con algoritmos genéticos de 289 nodos y 2 fuentes. . . . .	76
G.4. Solución normalizada con método LU de 289 nodos y 2 fuentes. . . . .	77
G.5. Solución normalizada con algoritmos genéticos de 289 nodos y 6 fuentes. . . . .	77
G.6. Solución normalizada con método LU de 289 nodos y 6 fuentes. . . . .	78
G.7. Solución normalizada con algoritmos genéticos de 1089 nodos y 4 fuentes. . . . .	78
G.8. Solución normalizada con método LU de 1089 nodos y 4 fuentes. . . . .	79
G.9. Solución normalizada con algoritmos genéticos de 1089 nodos y 5 fuentes. . . . .	79

G.10.Solución normalizada con método LU de 1089 nodos y 5 fuentes. . . . .	80
G.11.Solución normalizada con algoritmos genéticos de 4225 nodos y 4 fuentes. . . . .	80
G.12.Solución normalizada con método LU de 4225 nodos y 4 fuentes. . . . .	81
G.13.Solución normalizada con algoritmos genéticos de 4225 nodos y 5 fuentes. . . . .	81
G.14.Solución normalizada con método LU de 4225 nodos y 5 fuentes. . . . .	82
G.15.Difusión de fotones con algoritmo genético de 289 nodos y 1 fuentes. . . . .	82
G.16.Difusión de fotones con método LU de 289 nodos y 1 fuentes. . . . .	83
G.17.Difusión de fotones con algoritmo genético de 289 nodos y 2 fuentes. . . . .	83
G.18.Difusión de fotones con método LU de 289 nodos y 2 fuentes. . . . .	84
G.19.Difusión de fotones con algoritmo genético de 289 nodos y 6 fuentes. . . . .	84
G.20.Difusión de fotones con método LU de 289 nodos y 6 fuentes. . . . .	85
G.21.Difusión de fotones con algoritmo genético de 1089 nodos y 4 fuentes. . . . .	85
G.22.Difusión de fotones con método LU de 1089 nodos y 4 fuentes. . . . .	86
G.23.Difusión de fotones con algoritmo genético de 1089 nodos y 5 fuentes. . . . .	86
G.24.Difusión de fotones con método LU de 1089 nodos y 5 fuentes. . . . .	87
G.25.Difusión de fotones con algoritmo genético de 4225 nodos y 4 fuentes. . . . .	87
G.26.Difusión de fotones con método LU de 4225 nodos y 4 fuentes. . . . .	88
G.27.Difusión de fotones con algoritmo genético de 4225 nodos y 5 fuentes. . . . .	88
G.28.Difusión de fotones con método LU de 4225 nodos y 5 fuentes. . . . .	89
H.1. Solución AG y numérica de 289 nodos y 1 fuentes. . . . .	90
H.2. Solución AG y numérica de 289 nodos y 2 fuentes. . . . .	91
H.3. Solución AG y numérica de 289 nodos y 6 fuentes. . . . .	91
H.4. Solución AG y numérica de 1089 nodos y 4 fuentes. . . . .	92
H.5. Solución AG y numérica de 1089 nodos y 5 fuentes. . . . .	92
H.6. Solución AG y numérica de 4225 nodos y 4 fuentes. . . . .	93
H.7. Solución AG y numérica de 4225 nodos y 5 fuentes. . . . .	93

# Índice de tablas

2.1. Condiciones de frontera. . . . .	5
5.1. Descripción de dim_sel. . . . .	23
5.2. Descripción de num_fuente. . . . .	23
5.3. Descripción de tam_población. . . . .	23
5.4. Descripción de generaciones. . . . .	24
5.5. Descripción de espectro_sol_ag. . . . .	24
5.6. Descripción de espectro_sol_numérica. . . . .	24
5.7. Descripción de medidas. . . . .	24
5.8. Descripción de archivos. . . . .	24
5.9. Descripción del proceso Control de datos de entrada. . . . .	25
5.10. Descripción del proceso Cálculo de soluciones. . . . .	25
5.11. Descripción del proceso Cómputo de medidas. . . . .	25
5.12. Descripción del proceso Gráficas de espectro. . . . .	25
5.13. Especificación de Controlar datos de entrada. . . . .	27
5.14. Especificación de Calcular soluciones. . . . .	27
5.15. Especificación de Calcular medidas. . . . .	27
5.16. Especificación de Graficar espectros. . . . .	27
5.17. Herramientas de software. . . . .	28
5.18. Herramientas de hardware. . . . .	28
6.1. Propiedades ópticas de tejidos. . . . .	31
6.2. Parámetros de entrada AG. . . . .	31
6.3. Medidas de error entre la solución numérica (LU) y AG. . . . .	32
A.1. Raíces de la ecuación característica. . . . .	56
A.2. Tipo de función de la solución particular. . . . .	56
E.1. Descripción de tam_población_válida. . . . .	67
E.2. Descripción de generaciones_válida. . . . .	67
E.3. Descripción de matriz. . . . .	67
E.4. Descripción de vector. . . . .	68
E.5. Descripción de geometría. . . . .	68
E.6. Descripción de sol_obtenidas. . . . .	68
E.7. Descripción de sol_numérica. . . . .	68
E.8. Descripción de sol_ag. . . . .	68
E.9. Descripción de X0. . . . .	69
E.10. Descripción de F. . . . .	69
E.11. Descripción de R. . . . .	69
E.12. Descripción de valores_sol_ag. . . . .	69
E.13. Descripción de valores_sol_numérica. . . . .	69
E.14. Descripción del proceso Aplicación. . . . .	70
E.15. Descripción del proceso Generación población inicial. . . . .	70
E.16. Descripción del proceso Determinación de función de Fitness. . . . .	70
E.17. Descripción del proceso Determinación de restricción. . . . .	71
E.18. Descripción del proceso Aplicación de AG. . . . .	71
E.19. Descripción del proceso Cálculo de solución numérica. . . . .	71
E.20. Descripción del proceso Filtrado de soluciones. . . . .	72
F.1. Especificación de Identificar datos. . . . .	73
F.2. Especificación de Verificar datos. . . . .	73

F.3. Especificación de Calcular solución AG. . . . .	73
F.4. Especificación de Calcular solución numérica. . . . .	74
F.5. Especificación de Mostrar medidas. . . . .	74
F.6. Especificación de Graficar espectro solución AG. . . . .	74
F.7. Especificación de Graficar espectro solución numérica. . . . .	74

# Índice de algoritmos

1.	Condición suma de $\phi_i$ . . . . .	19
2.	Condición nodos fronteras. . . . .	19
3.	Restricción para 4225 nodos. . . . .	20
4.	Funcionalidad del algoritmo genético. . . . .	60



# Capítulo 1

## Introducción

La *Imagen Molecular* es una disciplina de diagnóstico *in vivo* que tiene sus raíces en la Medicina Nuclear, la Imagen molecular se define como toda aquella modalidad de imagen biomédica capaz de proporcionar información que permita detectar procesos celulares a nivel molecular en vivo, y que permite el estudio de dichos procesos de forma remota y no invasiva (Massoud & Gambhir, 2003).

Un considerable esfuerzo se ha dirigido hacia el desarrollo de distintas técnicas de imagen no invasiva y de alta resolución las cuales permitan obtener información necesaria para la generación de imágenes moleculares. Además la imagen óptica también presenta la ventaja de ofrecer una alta resolución temporal y una extraordinaria sensibilidad, por esto los sistemas de formación de imágenes podrían ser utilizados para diagnósticos ambulatorios y seguimiento continuo de pacientes. Además, las modalidades funcionales de imagen proporcionan información fisiológica y efectos de fármacos con imágenes temporales (Tavainen, 2006).

Una de las técnicas utilizadas se basa en el uso de fuentes de radiación luminosa, en que se modifican genéticamente las células tumorales y se produce luz con técnicas de bioluminiscencia (Rojas, 2009).

### 1.1. Problemática

La bioluminiscencia es la generación de luz generada en animales que contienen el gen de la luciferasa. Estos genes se encuentran espontáneamente en animales como la luciérnaga o medusa, las imágenes de bioluminiscencia pueden ser obtenidas con cámaras digitales de alta resolución. La ventaja más importante de las técnicas de bioluminiscencia es que no presentan actividad de fondo y por lo tanto permiten detectar señales de muy pequeña intensidad.

Las problemáticas principales para el desarrollo de este tipo de sistemas de detección son la determinación exacta de la profundidad desde donde se emitió la señal, ya que en bioluminiscencia los fotones de luz chocan elásticamente miles de veces antes de escapar del animal. Una primera etapa para la creación tomográfica en bioluminiscencia es entender y modelar cómo los fotones de luz recorren los tejidos antes de escapar del animal y ser detectados por detectores especializados. Es decir a partir de la información captada por los detectores, poder estimar lo que los detectores captarían dado una distribución conocida de fuentes de luz.

La física es donde directamente se induce a la emisión de fotones en componentes inorgánicos que tienen propiedades similares a las orgánicas. A estos componentes se les conoce como Phantom. La obtención de información es a través de máquinas compuestas por sensores ópticos que captan las emisiones de luz. Una técnica simulada para el problema planteado consiste que a través de una aplicación computacional obtener la solución a la ecuación diferencial del transporte de la luz (Arridge, 1999).

Respecto a resolver una ecuación diferencial mediante algoritmos genéticos, existen varios trabajos que han usado algoritmos genéticos en la resolución de ecuaciones diferenciales, algunos trabajan directamente sobre la ecuación diferencial, otros llevan la ecuación diferencial a un problema más sencillo para después aplicar algoritmos genéticos. En particular este trabajo, se

aplica primero el método de elementos finitos a la ecuación de difusión de la luz, con el cual se obtiene un sistema de ecuaciones, el cual es resuelto mediante algoritmos genéticos.

La contribución principal del trabajo es que la investigación realizada demuestra que la inclusión de condiciones físicas del problema en la función de Fitness del algoritmo genético, en la solución de ecuaciones de gran complejidad, como lo es la ecuación de difusión de la luz, es determinante en la calidad de la solución y no así solo el uso del error cuadrático medio como función a minimizar para una solución del tipo  $Ax - b = 0$ . Como contribuciones secundarias, está la formulación detallada de como implementar el algoritmo genético donde sea requerido la solución de ecuaciones de equilibrio, como lo son los sistemas de ecuaciones en general y que desde el punto de vista clínico, una aproximación de la solución de ecuación de difusión de la luz con algoritmos genéticos tiene resultados similares a los obtenidos con métodos tradicionales de solución de sistemas de ecuaciones.

## 1.2. Objetivos

Se describe el objetivo general y objetivos específicos.

### 1.2.1. Objetivo general

Realizar un estudio acerca de la resolución de la ecuación de difusión de la luz utilizando algoritmos genéticos.

### 1.2.2. Objetivos específicos

1. Investigar sobre las ecuaciones diferenciales (ED).
2. Describir los algoritmos genéticos (AG) para la solución de ED.
3. Realizar un modelamiento de solución del algoritmo genético en la ecuación de difusión de la luz.
4. Implementar una aplicación que genera resultados de la ecuación de difusión de la luz.
5. Realizar un análisis de resultados.
6. Concluir sobre la investigación.

En el capítulo 2 se explica teoría de ecuaciones diferenciales, como conceptos generales de acuerdo al trabajo de la memoria. En el capítulo 3 se explica como se utilizan los AG para resolver ecuaciones diferenciales. En el capítulo 4 se realiza un modelamiento de solución del AG en la ecuación de difusión de la luz. En el capítulo 5 se explica la metodología de desarrollo a utilizar la cual indica de forma global como va a funcionar la aplicación que obtendrá soluciones de la ecuación de difusión de la luz. En el capítulo 6 se realiza un análisis de los resultados del AG. En el capítulo 7 se concluye sobre la investigación.

# Capítulo 2

## Ecuaciones diferenciales

En este capítulo se explica generalidades de ecuaciones diferenciales, a la vez se explica la ecuación que es resuelta mediante la aplicación adaptativa. En la sección 1.1 se comenta sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, en la sección 1.2 se comenta sobre ecuaciones diferenciales parciales, en la sección 1.3 se comenta sobre el metodo de elementos finitos y en la sección 1.4 se explica la ecuación de aproximación de la difusión.

### 2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) corresponden a problemas donde está presente la derivada de una función que depende de una variable (Bargueño & Durán, 2013), además las EDOs se clasifican de acuerdo al orden, el orden de una EDO corresponde al mayor orden de la derivada (Sánchez & Legua, 2006).

La formulación de una EDO de orden 1 se muestra en (2.1).

$$f(x, y, y') = 0 \quad (2.1)$$

La formulación de una EDO de orden 2 se muestra en (2.2).

$$f(x, y, y', y'') = 0 \quad (2.2)$$

La formulación de una EDO de orden  $n$  se muestra en (2.3).

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0 \quad (2.3)$$

Existen varios métodos determinísticos (solución exacta) para resolver EDOs, el método determinístico básico es el método de separación de variables para EDO de orden 1 (Jimenes, 2000), que consiste en los siguientes pasos:

- Dada una EDO como 2.1, separar las variables  $x$  e  $y$  en la ecuación, por lo general las  $y$  quedan en el lado izquierdo y las  $x$  quedan en el lado derecho.
- Integrar en ambos lados de la ecuación.
- Despejar  $y$  si se puede.

La formulación en detalle está disponible en el anexo A. Existen otros métodos para resolver EDOs como el método de la ecuación lineal, ecuación exacta, método de los coeficientes indeterminados, método de variación de parámetros y entre otros que se explican en el anexo A. Además no existe una formula general para resolver EDOs, en cada EDO, se determina que métodos se pueden aplicar y se recomienda aplicar el que resulte más sencillo en la resolución

de la EDO.

En general se encuentran problemas que están modelados por una ED junto a condiciones iniciales, estos problemas se llaman “Problemas de valor inicial (PVI)” (Fernández, Vázquez, & Vegas, 2003). La cantidad de condiciones iniciales corresponde al orden de la EDO, es decir: Si se tiene un PVI con una EDO de orden  $n$ , entonces se tiene  $n$  condiciones iniciales (kent, Saff, & Snider, 2005).

PVI de una EDO de orden 1

$$f(x, y, y') = 0, y(x_0) = y_0 \quad (2.4)$$

PVI de una EDO de orden 2

$$f(x, y, y', y'') = 0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \quad (2.5)$$

PVI de una EDO de orden 3

$$f(x, y, y', y'', y''') = 0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2 \quad (2.6)$$

En las formulaciones (2.4), (2.5) y (2.6) se muestran ejemplos de problemas de valor inicial de EDOs, donde (2.4) es una EDO de orden 1 sujeta a una condición inicial, (2.5) es una EDO de orden 2 sujeta a 2 condiciones iniciales y (2.6) es una EDO de orden 3 sujeta a 3 condiciones iniciales.

## 2.2. Ecuaciones diferenciales parciales

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) corresponden a problemas donde está presente la derivada de una función que depende de 2 o más variables (Romero, Moreno, & Rodríguez, 2001), en esta sección se describe la solución determinística a ciertas EDP.

La formulación de las EDP está dada por (2.7).

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_n^n}) = 0 \quad (2.7)$$

Donde  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es la solución de la ecuación (2.7) (García & De La Lanza, 1983). En esta sección se trata con ecuaciones diferenciales parciales de orden 2 y en dos dimensiones, como se muestra en la ecuación (2.8).

$$F(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}) = 0 \quad (2.8)$$

Las EDP se clasifican de acuerdo a las constantes que estén presentes en las segundas derivadas (Peral, 2007), es decir si se tiene una EDP de segundo orden como se muestra en (2.9).

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0 \quad (2.9)$$

Donde  $A, B, C, D, E$  y  $F$  son constantes reales, se dice que 2.9 es :

**hiperbólica** si  $B^2 - 4AC > 0$

**parabólica** si  $B^2 - 4AC = 0$

**elíptica** si  $B^2 - 4AC < 0$

En ciertas EDPs, se da a conocer el dominio de la función solución, el cual tiene relación en cuantas dimensiones sea la EDP. Es decir, si se tiene una EDP en  $n$  dimensiones, el dominio es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Se muestran ejemplos a continuación:

- Si la EDP es de 2 dimensiones, el dominio es una región en el plano ( $\mathbb{R}^2$ ).

- Si la EDP es de 3 dimensiones, el dominio es un sólido en el espacio ( $\mathbb{R}^3$ ).
- Si la EDP es de  $n$  dimensiones, el dominio es un conjunto de  $\mathbb{R}^n$ .

En la sección anterior, se comentó cuando una EDO esta sujeta a condiciones iniciales, en las EDP ocurre una situación similar, se puede tener una EDP sujeta a condiciones iniciales, a estos problemas se les llama “Problema de valores en la frontera”, se llaman así por que en el borde del dominio de la función solución, la función ya tiene un valor. Existen 3 tipos de condiciones de frontera (Arendt & Warma, 2003) que se muestran en la tabla 2.1.

Condición de frontera	Notación
Dirichlet	$u(x_0, y_0) = u_0$
Neumann	$\frac{\partial u}{\partial x} _{x=L} = 0$
Robin	$\frac{\partial u}{\partial x} _{x=L} = h(u(L, y) - u_m)$

Tabla 2.1: Condiciones de frontera.

Entonces los problemas de valores en la frontera, están conformados por la EDP en sí, el dominio de la función solución y las condiciones de frontera. A modo de ejemplo en la ecuación (2.10) se muestra la “Ecuación de calor”.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) está sujeta a las condiciones de frontera que se muestran en las formulaciones (2.11), (2.12) y (2.13).

$$u(0, t) = 0 \quad (2.11)$$

$$u(\pi, t) = 0 \quad (2.12)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2.13)$$

A continuación se exponen métodos determinísticos para la solución de EDP.

#### a) Método de separación de variables

Dada una ecuación como en (2.8), si al hacer  $u(x_1, x_2) = X_1(x_1) \cdot X_2(x_2)$  y mediante operaciones algebraicas se obtiene una ecuación como (2.14) (Arias & Rúa, 2005).

$$G(x_1, X_1, X_1', X_1'') = H(x_2, X_2, X_2', X_2'') \quad (2.14)$$

Lo que implica (Weinberger, 1965):

$$G(x_1, X_1, X_1', X_1'') = -\lambda \quad (2.15)$$

$$H(x_2, X_2, X_2', X_2'') = -\lambda \quad (2.16)$$

Donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , así se obtiene 2 ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden ser de orden 1 o 2. Para la resolución de estas, se aplican los métodos descritos en el anexo A. Se debe considerar que para la solución de las ecuaciones de orden 2, existen 3 casos que dependen del valor de  $\lambda$  (si  $\lambda$  es positivo, negativo o cero) (Kent, Saff, & Snider, 2005).

En ciertas EDP, al aplicar este método, se puede deducir una formula para la solución de la EDP. En esta formula, la solución está dada por una serie en forma senoidal, esta serie se llama “serie de Fourier”. cuya teoría se explica a continuación:

b) Serie de Fourier

Dada una función  $f(x)$ , donde  $x \in (-\pi, \pi)$ , el desarrollo en Serie de Fourier de  $f(x)$  está dada por la fórmula (2.17) (Rodríguez & Zuazua, 2013).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad (2.17)$$

Donde  $a_n$  y  $b_n$  se denominan coeficientes de Fourier (Acero & López, 2007) y su formulación está dada por las fórmulas (2.18) y (2.19).

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \quad (2.18)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \quad (2.19)$$

A la ecuación del calor (2.10) se le puede aplicar el método de separación de variables y al final del método, se puede expresar la solución como en una serie de Fourier. Por lo que al momento de resolver un problema que está dado por la ecuación de calor, se puede aplicar el método de separación de variables o aplicar la formula en serie de Fourier.

## 2.3. Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos (MEF) es un método numérico que obtiene soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales parciales, este método se usa bastante debido a la facilidad de incluir conjuntos de problemas complejos (en dos o tres dimensiones) (Reddy, 1993).

El MEF consiste en dividir un dominio en una serie de subdominios disjuntos entre sí denominados elementos finitos, es decir:

Sea el dominio  $\Omega$ , que se divide en subdominios  $\Omega_{e1}, \Omega_{e2}, \dots, \Omega_{eM}$ , entonces:

$$\Omega_{e1} \cap \Omega_{e2} \cap \dots \cap \Omega_{eM} = \phi \quad (2.20)$$

En cada elemento finito está definida una ecuación que caracteriza el comportamiento físico del problema, dentro de cada elemento se distingue una serie de puntos llamados nodos, estos nodos se encuentran unidos mediante unas líneas que se llaman aristas, el conjunto de nodos y aristas se llama malla. Además los elementos adyacentes se conectan por los nodos situados en la arista común (Carrillo, Herrera, & Yates, 2008).

El procedimiento general del MEF consiste en descomponer el dominio  $\Omega$  en  $M$  subdominios (elementos)  $\Omega_e$  que por lo general tienen forma geométrica de triángulos, y la unión de los elementos se aproxima al dominio original o coincide con él, es decir:

$$\Omega_{e1} \cup \Omega_{e2} \cup \dots \cup \Omega_{eM} \approx \Omega \quad (2.21)$$

En la figura 2.1 se muestra el dominio  $\Omega$  (que tiene forma de elipse) descompuesto en subdominios (que tienen forma de triángulos).

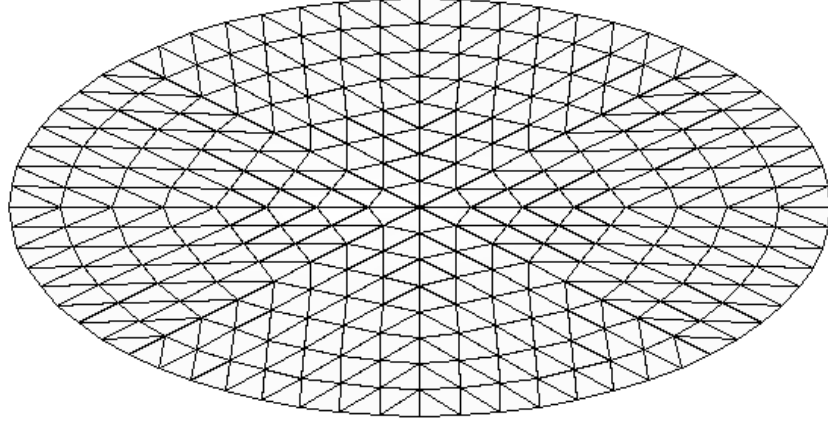


Figura 2.1: Descomposición del dominio.

Se relaciona el valor de un conjunto de variables definidas en cada nodo, el conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de un sistema de ecuaciones lineales (Calderón & Gallo, 2011), además los nodos de cada elemento tienen una numeración local (es decir en cada elemento los vértices se enumeran a partir de 1).

En cada elemento puede establecerse una relación entre los desplazamientos en los nodos y las acciones aplicadas en ellos. Dicha relación se denomina ecuación de equilibrio del elemento que corresponde a un sistema de ecuaciones lineales, que se muestra en (2.22).

$$K^e \cdot u^e = f^e \quad (2.22)$$

Donde:

- $K^e$  = Matriz de rigidez del elemento  $e$
- $f^e$  = Vector de cargas nodales del elemento  $e$
- $u^e$  = Vector de desplazamientos nodales del elemento  $e$

Se explicará una “formulación variacional del MEF”, la cual explica la base matemática en que está sustentada la aproximación que se realiza con el MEF (Galeano, 2013), donde se aplica el método de residuos ponderados, este método permite obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales que no tienen un funcional asociado. Sea la ecuación diferencial definida sobre un dominio como en la ecuación (2.23) sujeta a condiciones naturales de contorno que se muestran en (2.24), donde  $A(u)$  y  $M(u)$  son operadores diferenciales (Gómez, 2004).

$$A(u) - f = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.23)$$

$$M(u) - g = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.24)$$

Si se reemplaza una solución aproximada  $u_{aprox}$  en la ecuación (2.23) y en sus condiciones de contorno (2.24), puede que no se cumplan exactamente, generando un residuo  $R_\Omega$  en el dominio y un residuo  $R_{\partial\Omega}$  en el contorno, como se muestran en las ecuaciones (2.25) y (2.26).

$$R_\Omega = A(u) - f \neq 0 \quad (2.25)$$

$$R_{\partial\Omega} = M(u) - g \neq 0 \quad (2.26)$$

El método de residuos ponderados impone la condición que se muestra en la ecuación (2.27) (Navarrina, Colominas, Casteleiro, Gomez, & París, 2005), de modo que  $u_{aprox}$  cumpla lo más exactamente posible en la ecuación (2.23).

$$\int_{\Omega} W \cdot R_{\Omega} + \int_{\partial\Omega} \bar{W} \cdot R_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.27)$$

Donde  $W$  y  $\bar{W}$  son funciones arbitrarias y no nulas, la solución  $u_{aprox}$  se puede definir como una combinación lineal de funciones de prueba. Es decir:

$$u_{aprox} = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \phi_i(x, y) \quad (2.28)$$

Donde las funciones de prueba  $\phi_i(x, y)$  satisfacen las condiciones de contorno y las constantes  $c_i$  se determinan con las condiciones (2.29).

$$\int_{\Omega} W_i \cdot R_{\Omega} + \int_{\partial\Omega} \bar{W}_i \cdot R_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.29)$$

## 2.4. Ecuación de aproximación de la difusión

La ecuación de aproximación de la difusión (EAD) se obtiene de la ecuación de transferencia de radiación (ETR). Se explicará primero teoría de la ETR, para así poder comprender la teoría de la EAD.

La ETR modela el comportamiento de cómo se propaga la energía en forma de partículas subatómicas en un dominio en el cual existen condiciones impuestas por el medio, específicamente la materia (Rojas, 2009). En la formulación (2.30) se describe esta ecuación.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi(r, \hat{s}, t) + \hat{s} \cdot \nabla \phi(r, \hat{s}, t) + (u_s(r) + u_a(r)) \phi(r, \hat{s}, t) = u_s(r) \int \Theta(\hat{s} \cdot \hat{s}') \cdot \phi(r, \hat{s}', t) d\hat{s}' + q(r, \hat{s}, t) \quad (2.30)$$

La ecuación (2.30) está sujeta a la condición (2.31).

$$\phi(r, \hat{s}, t) = 0, \quad r \in \partial\Omega, \quad \hat{s} \cdot \hat{n} < 0 \quad (2.31)$$

La cual establece que una vez que un fotón escapa del dominio  $\Omega$  no vuelve a entrar. Además la ETR es una aproximación de la ecuación de transporte y se asume que la energía de las partículas no cambia en la colisión y que el índice de refracción es constante en el medio (Firbank, 1996). Los términos de la ecuación (2.30) son:

- $c$  = Velocidad de luz en el medio.
- $u_s(r)$  = Coeficientes de dispersión monocromáticos del medio.
- $u_a(r)$  = Coeficientes de absorción monocromáticos del medio.
- $\phi(r, \hat{s}, t)$  = Tasa de partículas que se propagan dentro de un ángulo sólido en dirección  $\hat{s}$  en un instante  $t$ .
- $\Theta(\hat{s} \cdot \hat{s}') =$  Función de fase de la dispersión.
- $q(r, \hat{s}, t) =$  Fuente de fotones.
- $r =$  Cierta lugar en el dominio.
- $\hat{n} =$  Unidad normal hacia el exterior.



En la ETR mediante técnicas de álgebra de la proyección, se puede derivar la ecuación de aproximación de la difusión (EAD), la cual modela la propagación de luz en tejidos (Alexandrakakis, Farrel, & Patterson, 1998), esta ecuación se muestra en (2.32).

$$-\nabla k(r) \nabla \phi(r, t) + u_a(r) \phi(r, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} = q_0(r) \quad (2.32)$$

Donde:

- $k(r)$  = Coeficiente de difusión.
- $r$  = Posición en el dominio.
- $u_a(r)$  = Coeficiente de absorción en la posición.
- $c$  = Velocidad de la luz del medio.
- $t$  = Tiempo.
- $q_0(r)$  = Densidad de fotones de luz en la fuente ubicada en  $r$ .
- $\phi(r, t)$  = Densidad de fotones de luz en  $r$ .

La EAD no puede cumplir la condición de frontera (2.31). Sin embargo tiene la condición de que la densidad de fotones es cero en la frontera del dominio, es decir  $\phi(r, t) = 0$ , donde  $r \in \partial\Omega$ . Para el trabajo presente solo se utilizará la EAD, que como se mencionó, se deriva de la ETR.

Al aplicar MEF en la ecuación (2.32), esta se multiplica por una función de prueba  $\Psi(r)$ , se integra sobre el dominio  $\Omega$  y se utiliza la fórmula de Green que permite integrar por partes el primer miembro de la ecuación (2.32) la cual queda como la formulación (2.33).

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} k(r) \nabla \Phi(r) \nabla \Psi(r) d\Omega + \\ & \int_{\partial\Omega} -k(r) (n(r) \nabla \Phi(r)) \Psi(r) d(\partial\Omega) + \\ & \int_{\Omega} u_a(r) \Phi(r) \Psi(r) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(r)}{\partial t} \Psi(r) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} q_0(r) \Psi(r) d\Omega \end{aligned} \quad (2.33)$$

La solución  $\Phi(r)$  se puede aproximar a una base lineal como se muestra en la fórmula (2.34).

$$\Phi(r) = \sum_{j=1}^N \phi_j \psi_j(r) \quad (2.34)$$

Donde:

- $\psi_j(r)$  es la función de base nodal.
- $\phi_j$  es la densidad de fotones en el punto nodal  $j$ .
- $N$  es el número de puntos nodales.

Entonces al remplazar la fórmula (2.34) en la ecuación (2.33), se obtiene la formulación (2.35).

$$\sum_{j=1}^N (k_{ij} + b_{ij} + c_{ij}) \phi_j + \sum_{j=1}^N (m_{ij}) \frac{\partial \phi_j}{\partial t} = q_i \quad (2.35)$$

Los coeficientes  $k_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $m_{ij}$  y  $q_i$  corresponden a integrales sobre el dominio  $\Omega$  y  $b_{ij}$  es una integral sobre la frontera  $\partial\Omega$ , el detalle de estas integrales está disponible en el anexo D. En notación matricial la expresión (2.35) queda como la ecuación (2.36), donde  $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]^t$ .

$$(K + B + C)\phi + M \frac{\partial \phi}{\partial t} = Q \quad (2.36)$$

Al simplificar de forma algebraica la ecuación (2.36) se procede a resolver el sistema de ecuaciones. Si se quiere resolver la ecuación (2.36) en estado estable, se tiene que  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$  y luego el sistema es  $F \cdot \phi = Q$ , donde  $F = K + B + C$  es simétrica, definida positiva y dispersa (Rojas & Rannou, 2009). La resolución completa del MEF en la EAD se encuentra en el anexo D.

En este capítulo se explicó una teoría general de ED y de la ecuación de difusión de la luz, ya que el cálculo de una solución de esta ecuación será tratada en la memoria. Al aplicar el método de los elementos finitos en la ecuación de difusión de la luz, se obtiene un sistema de ecuaciones, donde la solución de este sistema va a ser estudiado en la memoria.

## Capítulo 3

# Algoritmos genéticos en ecuaciones diferenciales

En este capítulo se expone como se obtiene la solución de ecuaciones diferenciales (ED) mediante una técnica de inteligencia artificial la cual es el algoritmo genético (AG), además se describe como se utiliza el AG para la solución de ciertas ecuaciones diferenciales. En la sección 3.1 se describe de forma general teoría de los algoritmos genéticos, en la sección 3.2 se describe como se obtiene la solución a ciertas EDs mediante algoritmos genéticos y en la sección 3.3 se expone el procedimiento genérico de solución de algoritmos genéticos en ED.

### 3.1. Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos son métodos adaptativos que se usan en problemas de búsqueda y optimización. A estos problemas se le establece un conjunto de soluciones iniciales denominada cromosoma, las soluciones se codifican en bits.

Se plantea una función de evaluación denominada Función de Fitness, que evalúa las soluciones, y se conservan las mejores para la próxima iteración (generación). El AG realiza 4 operaciones para encontrar la solución más óptima, que son:

- a) Cruce
- b) Mutación
- c) Evaluación
- d) Selección

Una vez que se hayan realizado las iteraciones correspondientes, la mejor solución obtenida se designa como solución final. En el anexo B se explica de forma detallada la teoría de los algoritmos genéticos.

#### 3.1.1. Resolución de sistema de ecuaciones

Dado un sistema de ecuaciones de  $n \times n$ , cada individuo ha de proporcionar una solución válida al problema, como el sistema tiene  $n$  incógnitas, cada individuo debe codificar cada una de esas incógnitas (Mastorakis, 2005). Cada gen representa los valores asignados a las incógnitas como se muestra en la formulación (3.1).

$$C = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (3.1)$$

Antes de que funcione el AG se puede establecer un límite máximo y mínimo para el valor de los genes (Rudolph, 1994). Se debe determinar una función de evaluación que se denomina función de Fitness que evalúa que tan buena es la solución proporcionada por cada uno de los individuos y el proceso de evaluación consiste en (Nayak & Dash, 2012):

1. Reemplazar los valores proporcionados por cada uno de los genes en las incógnitas del sistema de ecuaciones que se muestra en (3.2).
2. Realizar los cálculos especificados en la parte izquierda del sistema (3.2) para obtener un valor numérico.
3. Dicho valor numérico puede compararse con los términos independientes del sistema de ecuaciones (los  $b_i$ ). Cuanto más cercano esté el valor obtenido al valor del término independiente, mejor solución representa el individuo genético.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Para obtener la función de Fitness se puede realizar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_2 &= 0 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n - b_n &= 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Cada  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i$  debe tender a 0  $\forall i \in [1, n]$ , por lo que:

$$|a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i| \sim 0 \tag{3.4}$$

Así el conjunto de genes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que mejor cumpla en la formulación (3.4), se seleccionan para la siguiente generación y también cuando el  $1 \leq i \leq n$ . Entonces la función de Fitness se puede definir como la suma del valor absoluto de las diferencias entre los términos independientes obtenidos al sustituir los valores de los genotipos y los términos independientes del sistema (Kuri-Morales, 2003), la función de Fitness se muestra en la formulación (3.5).

$$F = \min \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i| \right\} = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j - b_i| \right\} \tag{3.5}$$

Entonces los mejores individuos serán aquellos que mejor cumplan en  $F \sim 0$  y por tanto es un problema de minimización de  $F$ .

## 3.2. Solución de ecuaciones diferenciales mediante algoritmos genéticos

En esta sección se explica cómo se utilizan los algoritmos genéticos para la solución de ecuaciones diferenciales, se comienza con el caso más simple que corresponde a una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$ , homogénea y con coeficientes constantes, luego se analiza cómo se obtiene la solución mediante AG a 2 EDs de ejemplo, que son la ecuación del calor y la ecuación del proceso de sequedad de arroz, además se analiza la solución mediante AG a una EDP general.

Sea la ecuación definida en (3.6)

$$a_n y^n + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{3.6}$$

Donde  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}/a_n \neq 0$ , la ecuación (3.6) está sujeta a la condición (3.7).

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} \quad (3.7)$$

Se desea hallar  $y(x_1)$ . Si sucede que  $y(x_1)$  se encuentra entre los valores  $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ , entonces estos valores se pueden codificar al cromosoma (Liu, 2010) y mediante las operaciones del AG, obtener los valores más óptimos es decir los que están más cerca del valor de  $y(x_1)$ . El cromosoma se muestra en la formulación (3.8).

$$C = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \quad (3.8)$$

Se debe minimizar el error entre las soluciones obtenidas, ósea la diferencia entre  $y_i$  y  $y_{i-1}$  debe ser la más mínima posible, la función de Fitness que representa la solución al problema se muestra en la formulación (3.9).

$$F = \max \left\{ \frac{1}{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1})^2} \right\} \quad (3.9)$$

A continuación se explica como se obtiene de forma general la solución a 2 EDs especiales (nombradas en la introducción de la sección), que sucede en el caso de que la ED, tenga un fenómeno físico variado (que en ciertos casos, una magnitud física está presente). Así el lector tiene una idea de como se usan los AG para resolver EDs. El detalle de la solución a estas dos EDs mediante AG se encuentra en el anexo C.

### 3.2.1. Ecuación del calor

En la ecuación del calor, se da una situación física en que se tiene una varilla delgada de longitud  $\pi$ , cuyos extremos se mantienen a  $0^\circ$  Celsius y su superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura está dada por una función  $f(x)$ , entonces existe una función  $u(x, t)$  que representa la temperatura de la varilla en la sección transversal de abscisa  $x$  y en el tiempo  $t$  (Cañada, 2006). La ecuación en derivadas parciales que representa este problema está dada por la ecuación (3.10).

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.10)$$

Donde  $k \in \mathbb{R}$ ,  $0 < x < \pi$  y  $t > 0$ . Las condiciones de fronteras para la ecuación (3.10) son las mismas de la ecuación de calor en la sección 2.2 (pag 5).

En la ecuación (3.10), si se da una situación en que un material se compone de  $M$  secciones, en las cuales existen distintas conducciones de calor, la ecuación a este problema estaría dada por la ecuación (3.11).

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k_p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.11)$$

Donde  $k_p$  es diferente en las  $M$  secciones del material, si se desea encontrar la máxima temperatura en las  $M$  secciones en cada iteración y después de ciertas iteraciones, obtener la mínima de las máximas temperaturas halladas. El AG codifica los  $k_p$  al cromosoma, como se muestra en la formulación (3.12).

$$C = \{k_{p1}, k_{p2}, \dots, k_{pM}\} \quad (3.12)$$

Como se quiere obtener la mínima de las máximas temperaturas halladas, la función de Fitness se define en la formulación (3.13).

$$F = \min(\max(u_{i-1}, u_i)), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

### 3.2.2. Ecuación de sequedad de arroz

En una estructura de arroz en que la transferencia de masa ocurre por difusión y vaporización, y el calor se transfiere en la superficie del grano (Wongrat, Younes, Elkamel, Douglas, & Lohi, 2009). El modelo de esta situación se describe mediante las ecuaciones (3.14) y (3.15).

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\beta_1}{\rho_g \cdot \tau_1} (x_2 - x_1) \quad (3.14)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-\beta_2}{\rho_g \cdot \tau_2} (x_2 - x_1) \quad (3.15)$$

Donde:

- $x_1$  = Humedad del grano interior.
- $x_2$  = Humedad del grano exterior.
- $t$  = Tiempo.

En la ecuación del proceso de sequedad de arroz, la sequedad debe disminuir por lo que las humedades  $x_1$  y  $x_2$  deben aumentar. Para  $n$  arroz, se tiene:

$$x_{1i} \geq x_{1(i-1)} \Rightarrow x_{1i} - x_{1(i-1)} \geq 0 \quad (3.16)$$

$$x_{2i} \geq x_{2(i-1)} \Rightarrow x_{2i} - x_{2(i-1)} \geq 0 \quad (3.17)$$

Donde  $i = 1, 2, \dots, n$ , el cromosoma se muestra en la formulación (3.18).

$$C = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}\} \quad (3.18)$$

Como las humedades aumentan, la función de Fitness minimiza el error entre las soluciones, esta función se muestra en la formulación (3.19).

$$\begin{aligned} F &= \min \left\{ \sum_{i=1}^n (x_{1i} - x_{1(i-1)})^2 + \sum_{i=1}^n (x_{2i} - x_{2(i-1)})^2 \right\} \\ &= \min \left\{ \sum_{i=1}^n [(x_{1i} - x_{1(i-1)})^2 + (x_{2i} - x_{2(i-1)})^2] \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.2.3. EDP general

Sea la EDP definida de forma general en la formulación (3.20), sujeta a la condición de frontera que se muestra en la formulación (3.21).

$$L(y(x)) = f(x), \quad \Omega \in \mathbb{R}^d \text{ tal que } d \in \mathbb{Z} \wedge d > 1 \quad (3.20)$$

$$B(y(x)) = g(x) \text{ en } \partial\Omega \quad (3.21)$$

Donde:

- $L$  y  $B$  son operadores diferenciales (Yao, Sun, & Zettl, 2014) en espacio  $x \in \mathbb{R}^d$ .
- $y(x)$  es la solución desconocida.
- $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones que van de  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ .
- $\Omega$  es el dominio.

- $\partial\Omega$  es el dominio con condiciones de frontera.
- $x$  es vector en  $\mathbb{R}^d$ .

La solución determinística de (3.20) está dada por la fórmula (3.22) (Chaquet & Carmona, 2012).

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{(n_1, n_2, n_3, \dots, n_d)=1}^N a_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_d} \prod_{k=1}^d \cos\left(\frac{\pi \cdot n_k}{L_k} \cdot x_k\right) \quad (3.22)$$

Donde  $a_0$  y  $a_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_d}$  son coeficientes de Fourier. En la resolución de  $y(x)$ , se debe resolver el problema de optimización:

Minimizar la ecuación (3.23) sujeta a la condición (3.24).

$$\int_{\Omega} \|L(y(x)) - f(x)\|^2 dx \quad (3.23)$$

$$\int_{\partial\Omega} \|B(y(x)) - g(x)\|^2 dx = 0 \quad (3.24)$$

Donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclidiana (Emre, Celike, & Kingravi, 2011), este problema utiliza puntos de  $A = \{x_i \in \Omega, i = 1, \dots, n\}$  y de  $B = \{x_j \in \partial\Omega, j = 1, \dots, m\}$ . Si los coeficientes  $a_0$  y  $a_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_d}$  se desconocen, el algoritmo genético los codifica al cromosoma, el cual se presenta en la formulación (3.25).

$$C = \{a_0, a_{111\dots,1}, a_{222\dots,2}, \dots, a_{NNN\dots N}\} \quad (3.25)$$

El error entre  $L(y(x))$  y  $f(x)$  debe ser mínimo y el error entre  $B(y(x))$  y  $g(x)$  debe ser máximo, así que la función de Fitness se define en la formulación (3.26).

$$F = \max \left\{ \frac{1}{\sum_{i=1}^n \|L(y(x_i)) - f(x_i)\|^2} + \sum_{j=1}^m \|B(y(x_j)) - g(x_j)\|^2 \right\} \quad (3.26)$$

### 3.3. Procedimiento genérico de solución

En esta sección se expone el procedimiento general para resolver ecuaciones diferenciales mediante algoritmos genéticos, como se dice, el procedimiento es general, es decir pueden haber casos específicos donde el procedimiento sea diferente en algunos pasos.

Dada una ED, da igual si es EDO o EDP, si existe un parámetro  $\lambda_i$  que se desconoce y ayuda en la solución de la ED (ejemplo: en una EDP, hallar  $u(x_i, y_i)$ ), entonces ese parámetro se utiliza para obtener una solución heurística.

El cromosoma codifica los  $\lambda_i$  a un conjunto de soluciones iniciales como se muestra en la formulación (3.27), esta codificación se realiza en bits.

$$C = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (3.27)$$

A los  $\lambda_i$ , se les puede determinar la cantidad de bits, si de la ED se sabe en que rango están los  $\lambda_i$  exactos, se puede determinar la cantidad de bits de cada  $\lambda_i$ . Suponer que los  $\lambda_i$  exactos se encuentran en un intervalo  $(a, b)$ , se puede calcular el menor  $x$ , tal que:

$$2^{x+1} \geq b + 1 \quad (3.28)$$

Entonces este  $x$  corresponde a la cantidad de bits de cada  $\lambda_i$ , la asignación de bits se realiza al azar, es decir al momento de asignar valores de 0 o 1, esto se hace al azar.

Existe una función  $f$  que se puede optimizar, si se quiere maximizar  $f$ , la función de Fitness se define como una suma en términos de  $f$ , pero si se quiere minimizar  $f$ , la función de Fitness se define como el inverso de una suma en términos de  $f$ . Mediante las fórmulas (3.29) y (3.30) se comprende mejor como se define la función de Fitness.

$$F = \max \left\{ \sum f \right\} \quad (3.29)$$

$$F = \min \left\{ \frac{1}{\sum f} \right\} \quad (3.30)$$

Determinar esta función es uno de los pasos más importantes del AG ya que al evaluar los cromosomas, se seleccionan los mejores, pero si la función de Fitness está mal planteada, el AG dará una solución que no se ajusta al problema de la ED a tratar. Cuando se determine el cromosoma y función de Fitness del problema de la ED a tratar, se procede a aplicar el algoritmo genético (cuya explicación teórica está en el anexo B).

En este capítulo se explicó como se usan los algoritmos genéticos para resolver sistemas de ecuaciones y ecuaciones diferenciales, lo más importante de esta técnica es determinar la función de Fitness ya que esta función es la que hace que se seleccionen las mejores soluciones del problema. Los algoritmos genéticos serán utilizados en esta memoria.



## Capítulo 4

# Modelamiento de solución del algoritmo genético

En este capítulo se realiza un modelamiento de solución del algoritmo genético en la ecuación de difusión de la luz, se explica como se usa el AG para resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene de la EAD, como se determina el cromosoma, la función de Fitness y otros parámetros del AG para ciertas dimensiones del sistema de ecuaciones.

En la ecuación de aproximación de la difusión (EAD), al aplicar el método de los elementos finitos (MEF), se genera un sistema de ecuaciones que se muestra en la ecuación (4.1).

$$A \cdot \phi = b \quad (4.1)$$

Donde:

- $A$  = Matriz de rigidez.
- $\phi$  = Vector de densidad de fotones.
- $b$  = Vector de cargas.

Al utilizar la técnica descrita en la subsección 3.1.1 (pag 11), el sistema se puede reescribir como  $A\phi - b = 0$ , se obtienen las  $N$  ecuaciones que se muestran en (4.2), donde  $f_i(\phi)$  es el producto de la  $i$ -ésima fila de la matriz  $A$  con el vector  $\phi$ .

$$f_1(\phi) - b_1 = 0, f_2(\phi) - b_2 = 0, \dots, f_n(\phi) - b_n = 0 \quad (4.2)$$

Encontrar el  $\phi$  determinístico puede ser costoso a nivel computacional pero se puede encontrar un  $\phi$  heurístico, de modo que cada  $(f_i(\phi) - b_i)$  tienda a 0, donde  $i \in [1, \dots, n]$ . El  $\phi$  se desconoce y este se compone de  $n$  incógnitas  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ , entonces se define el cromosoma en la formulación (4.3).

$$C = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\} \quad (4.3)$$

Los fenotipos  $\phi_i$  tienen una cierta cantidad de bits que se podría calcular (correspondiente a los genotipos), en los cálculos numéricos se puede calcular el mayor valor de  $\phi_i$  en  $A \cdot \phi = b$ .

Sea  $m$  el mayor valor de  $\phi_i$  en el sistema de ecuaciones, donde  $1 \leq i \leq n$ , se puede determinar la longitud de los genotipos, es decir la cantidad de bits de cada genotipo.

Sea  $x$  la cantidad de bits, para determinar  $x$ , se debe hallar el menor  $x \in \mathbb{N}$  tal que:

$$2^{x+1} \geq m + 1 \quad (4.4)$$

Resolviendo la desigualdad (4.4) se tiene:

$$(2^{x+1} \geq m + 1) / \log_2()$$

$$\log_2(2^{x+1}) \geq \log_2(m+1)$$

$$(x+1) \cdot \log_2(2) \geq \log_2(m+1)$$

$$(x+1) \geq \log_2(m+1)$$

$$x \geq \log_2(m+1) - 1 \quad (4.5)$$

En los cálculos numéricos, se utilizó  $m = 12,000,000$ , entonces al remplazar este valor en (4.5), se tiene:

$$x \geq \log_2(12,000,000 + 1) - 1$$

$$x \geq 22,63 \approx 23$$

Por lo tanto los genotipos del cromosoma (4.3) deben tener una longitud de 23 bits.

La expresión  $(f_i(\phi) - b_i)$  debe tender a 0, entonces se minimiza  $|f_i(\phi) - b_i|$  de modo que al efectuar una suma de estos valores, la suma sea lo más mínimo posible. Una heurística a analizar es el RMSE que corresponde a la raíz del error cuadrático medio que se muestra en la ecuación (4.6).

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (f_i(\phi) - b_i)^2}{n}} \quad (4.6)$$

Además en el sistema de ecuaciones obtenido de la EAD se tienen las siguientes consideraciones físicas del problema:

1.  $A \cdot \phi \leq b$ .
2.  $\forall i \in [1, \dots, N]$ , donde  $N$  es la cantidad de nodos, se tiene:  $\phi_i \geq 0$ .
3.  $\phi_i = 0$  en nodos fronteras.
4. Se distribuye la masa de fotones de forma aleatoria en los nodos que no son frontera.
5.  $\sum_{i=1}^N \phi_i \leq \sum_{i=1}^N b_i$ , es decir la suma de los  $\phi_i$  en los nodos va ser menor o igual que la suma de la fuente.
6. En nodos donde se encuentra la fuente, sucede que:  $\phi_i \sim b_i$ .

Los parámetros del AG a estudiar son la población inicial, restricciones y función de Fitness. Si en la EAD mediante MEF se generan  $N$  nodos, entonces se genera un sistema de ecuaciones de  $N \times N$ , este sistema se resuelve mediante algoritmos genéticos y un método numérico (solución numérica), esto se representa en la figura 4.1. Para el trabajo presente se utilizaron geometrías de elementos finitos de 289, 1089 y 4225 nodos.

En el mundo real existen varios sistemas de ecuaciones a resolver de dimensiones menor a 1000, por eso se usa una geometría que sea de aproximadamente 1000 nodos (en este trabajo se usa 1089 nodos). Además se estudia que sucede con geometrías de mayores y menores números de nodos, ósea una geometría que sea aproximadamente 4 veces mayor y 4 veces menor, es decir una geometría de aproximadamente 4000 nodos y 250 nodos (en este trabajo se usa 4225 y 289 nodos).

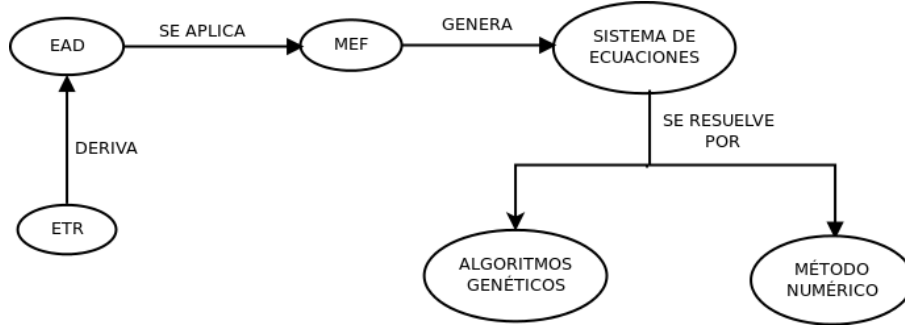


Figura 4.1: Sistema de ecuaciones obtenido de la EAD.

Para 289 y 1089 nodos, la solución AG consiste en lo siguiente: la función de Fitness corresponde al RMSE y puntajes que se asignan de acuerdo a 2 condiciones a usar. Una heurística es  $F0 = RMSE$ , las otras 2 corresponden a las condiciones de que en los nodos frontera el  $\phi_i = 0$  y que la suma de los  $\phi_i$  en los nodos sea menor o igual que la suma de la fuente. Como se quiere minimizar, entonces los  $\phi$  que mejor cumplan la condición se le asigna el puntaje 0 (que es el mínimo puntaje y en este caso el mejor), los que no cumplan se le asigna un puntaje de castigo. En los algoritmos 1 y 2 se muestra como se asignan los puntajes.

---

**Algoritmo 1** Condición suma de  $\phi_i$ .

---

**Entrada:** Cantidad de nodos  $n$ , vector  $\phi$ , vector  $b$ .

**Salida:** Puntaje  $F1$ .

```

si  $\sum_{i=1}^n (\phi_i) \leq \sum_{i=1}^n (b_i)$  entonces
     $F1 = 0$ 
si no
     $F1 = 30$ 
fin si
  
```

---



---

**Algoritmo 2** Condición nodos fronteras.

---

**Entrada:** Cantidad de nodos “nodos”, arreglo de nodos fronteras “nodo frontera”, vector  $\phi$ .

**Salida:** Puntaje  $F2$ .

```

para  $i = 1:nodos$  hacer
    si  $i \in \text{nodo frontera}$  entonces
        si  $\phi_i \sim 0$  entonces
             $f2_i < 5$ 
        si no
             $f2_i > 20$ 
        fin si
    fin si
fin para
 $F2 = \sum(f2)$ 
  
```

---

La función de Fitness se define en la formulación (4.7).

$$F = F0 + F1 + F2 \quad (4.7)$$

Entonces los individuos de la población se evalúan en la función de Fitness, y como se quiere minimizar aquellos individuos que tengan menor puntaje ( $F$ ) se seleccionan para la siguiente generación. De ahí en la población actual se realiza cruce y mutación, y los descendientes se agregan a la siguiente generación. En la siguiente generación se vuelve a evaluar con la función de Fitness, y así continua el proceso hasta que se cumpla la condición de término.

Se establece la restricción de  $A \cdot \phi \leq b$ , que significa que el vector de cargas es mayor que la combinación lineal de las densidades de fotones. No se le asignan condiciones a la población inicial para estas cantidades de nodos porque con la función de Fitness determinada en (4.7) y la restricción descrita, es suficiente para encontrar las soluciones que mejor se adapten al problema. La población inicial se genera por defecto.

Para 4225 nodos, se construye una población inicial válida con las condiciones: en los nodos frontera  $\phi_i = 0$ , se distribuye la densidad de fotones de forma aleatoria en los nodos que no son fronteras y en los nodos donde se encuentra la fuente, se asigna a  $\phi_i$  un porcentaje de  $b_i$ , suponer un 80 %, es decir:  $\phi_i = 0,8 \cdot b_i$ .

Se establece una restricción en el algoritmo 3.

---

**Algoritmo 3** Restricción para 4225 nodos.

---

**Entrada:** Cantidad de nodos “nodos”, matriz  $A$ , vector  $b$ , vector  $\phi$ .

**Salida:** Vector  $\phi$  con la restricción cumplida.

```

para i = 1:nodos hacer
  si  $b_i > 0$  entonces
     $A \cdot \phi \leq b$ 
  si no
     $\phi_i \geq 0$ 
  fin si
fin para

```

---

Para 4225 nodos se le da prioridad a los nodos donde  $b_i > 0$ , ya que si la restricción  $A \cdot \phi \leq b$  se establece para todos los  $\phi_i$ , el AG comienza a funcionar de forma inestable, es decir no converge a la solución esperada. Para este caso la función de Fitness corresponde solo a  $F = RMSE$ .

En este capítulo se explicó como se utiliza el algoritmo genético para resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene de la EAD (sistema que se obtiene mediante el MEF), donde los parámetros del AG que se estudian son la población inicial, la función de Fitness y restricciones. En base a las condiciones físicas del problema se empieza a reafinar los parámetros nombrados. El modelamiento de la solución se realiza para sistemas de ecuaciones de 289, 1089 y 4225 nodos.

# Capítulo 5

## Metodología de desarrollo

En este capítulo se expone la metodología de trabajo para la implementación de la aplicación que generará resultados de la EAD, donde estos resultados se usarán para el análisis respecto al caso médico y precisión. Se usa la metodología de desarrollo estructurada, en la cual se formulan modelos que representan el flujo de datos para proceder al diseño de la aplicación. En la sección 5.1 se identifican los requerimientos de la aplicación, en la sección 5.2 se expone el modelamiento funcional de la aplicación, especificando los flujos de datos y procesos asociados, en la sección 5.3 se expone el diseño arquitectónico de la aplicación, especificando los módulos asociados y en la sección 5.4 se explica la implementación de la aplicación.

### 5.1. Requerimientos

A continuación se nombran y se describen los requerimientos de la aplicación.

- Interfaz de datos: Flujo de datos entre los procesos de la aplicación.
- Pre-Procesamiento del sistema de ecuaciones: Se procesa el sistema de ecuaciones de acuerdo a la dimensión del sistema y número de fuentes.
- Solución del sistema de ecuaciones: Solución numérica y solución con algoritmos genéticos.
- Gráficos de solución: Gráficas de espectro de las soluciones.
- Análisis de error: Comparación de las soluciones mediante medidas de error.

En un archivo de entrada se puede elegir la dimensión del sistema de ecuaciones y el número de fuentes, de acuerdo a la dimensión del sistema se carga la geometría asociada (nodos, elementos y fronteras), ejemplo: si la dimensión es de 289, entonces se carga la geometría de 289 nodos, con los elementos y fronteras correspondientes. Con la dimensión junto al número de fuentes, se carga el sistema de ecuaciones, al tener cargado el sistema de ecuaciones, se calcula una solución con AG y una solución numérica.

### 5.2. Modelamiento funcional

En esta sección se exponen diagramas de flujos de datos (DFD) que indican como es el funcionamiento de la aplicación, además se especifican los flujos de datos y los procesos.

### 5.2.1. Diagramas de Flujos de Datos

En la figura 5.1 se presenta el diagrama de contexto de la aplicación que corresponde al nivel 0 del DFD, que representa a la aplicación completa con datos de entrada y salida (Araya, 2009).

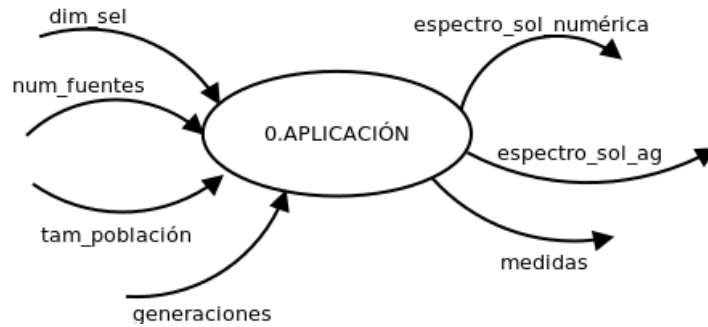


Figura 5.1: Nivel 0: Diagrama de contexto.

En la figura 5.2 se presenta la descomposición funcional de la aplicación que corresponde al nivel 1 del DFD, se indica como la aplicación se descompone en procesos y como estos procesos se comunican.

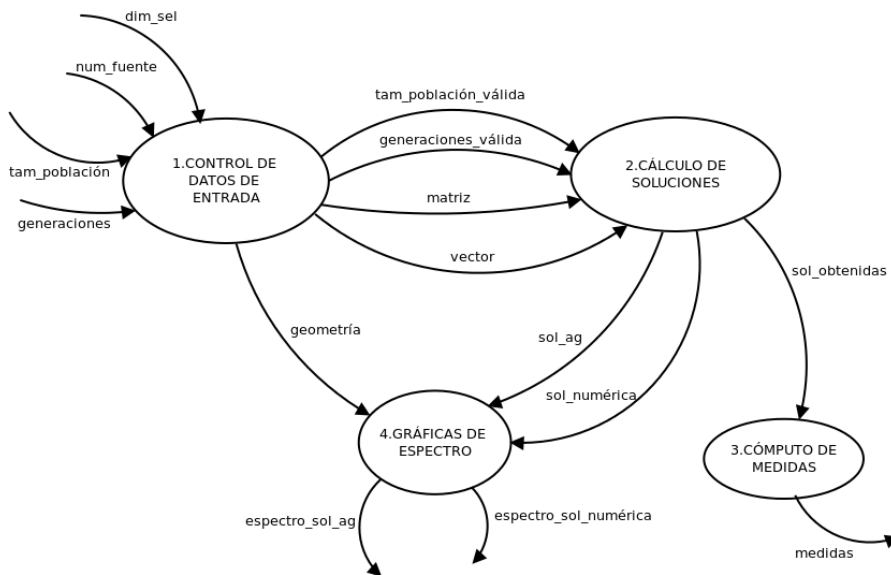


Figura 5.2: Nivel 1: Descomposición en procesos.

En la figura 5.3 se presenta la descomposición funcional del proceso “Cálculo de soluciones” que corresponde al nivel 2 del DFD, se muestra como este proceso se descompone en subprocesos y como estos subprocesos se comunican.

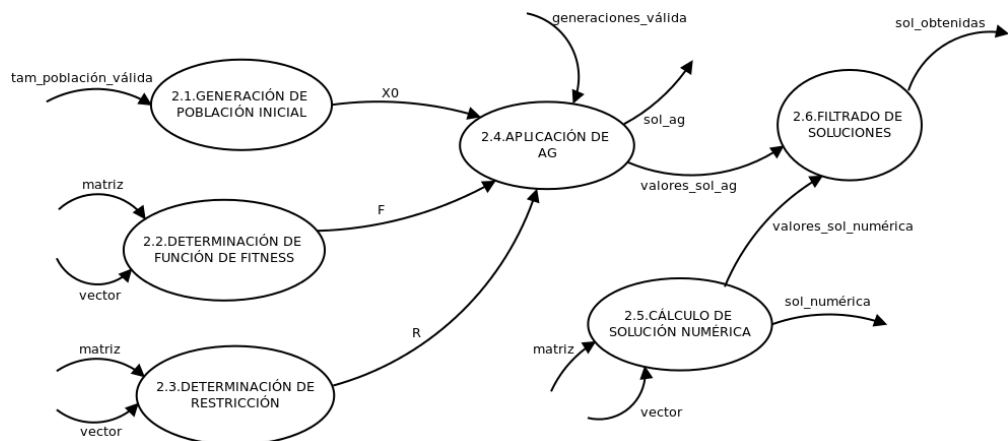


Figura 5.3: Nivel 2: Cálculo de soluciones.

### 5.2.2. Descripción de los Diagramas de Flujos de Datos

De la tabla 5.1 hasta la tabla 5.7 se describen los flujos de datos del nivel de contexto. La descripción de los flujos de datos que se comunican entre procesos (nivel 1) y subprocesos (nivel 2) se exponen en el anexo E, en la tabla 5.8 se describen los archivos que se utilizan en la aplicación.

Flujo de datos	dim_sel
Descripción	Dimensión del sistema de ecuaciones a trabajar
Origen	file_config
Destino	Aplicación

Tabla 5.1: Descripción de dim\_sel.

Flujo de datos	num_fuente
Descripción	Número de fuentes presentes en el dominio
Origen	file_config
Destino	Aplicación

Tabla 5.2: Descripción de num\_fuente.

Flujo de datos	tam_población
Descripción	Número de individuos de la población
Origen	file_config
Destino	Aplicación

Tabla 5.3: Descripción de tam\_población.

Flujo de datos	generaciones
Descripción	Cantidad de generaciones a obtener
Origen	file_config
Destino	Aplicación

Tabla 5.4: Descripción de generaciones.

Flujo de datos	espectro_sol_ag
Descripción	Gráfica de espectro de la solución AG con la geometría asociada
Origen	Aplicación
Destino	file_grafico

Tabla 5.5: Descripción de espectro\_sol\_ag.

Flujo de datos	espectro_sol_numérica
Descripción	Gráfica de espectro de la solución numérica con la geometría asociada
Origen	Aplicación
Destino	file_grafico

Tabla 5.6: Descripción de espectro\_sol\_numérica.

Flujo de datos	medidas
Descripción	Datos de comparación entre la solución numérica y AG
Origen	Aplicación
Destino	file_data

Tabla 5.7: Descripción de medidas.

Nombre de archivo	Descripción
file_config	Archivo con los parámetros de entrada
file_grafico	Archivo con las gráficas de espectro
file_data	Archivo con las medidas de error

Tabla 5.8: Descripción de archivos.

En las tablas 5.9, 5.10, 5.11 y 5.12 se describen los procesos que corresponden a la descomposición funcional de la aplicación (nivel 1), los cuales están presentes en la figura 5.2. La



descripción del proceso “aplicación”(nivel 0) y de los subprocessos (nivel 2) se exponen en el anexo E.

Proceso	Control de datos de entrada
Número	1
Descripción	Verifica que los datos de entrada sean válidos
Entrada	dim_sel , num_fuente , tam_población , generaciones
Salida	tam_población_válida , generaciones_válida ,matriz, vector, geometría

Tabla 5.9: Descripción del proceso Control de datos de entrada.

Proceso	Cálculo de soluciones
Número	2
Descripción	Calcula las soluciones AG y numérica
Entrada	tam_población_válida , generaciones_válida ,matriz, vector
Salida	sol_obtenidas , sol_numérica , sol_ag

Tabla 5.10: Descripción del proceso Cálculo de soluciones.

Proceso	Cómputo de medidas
Número	3
Descripción	Calcula las medidas de error
Entrada	sol_obtenidas
Salida	medidas

Tabla 5.11: Descripción del proceso Cómputo de medidas.

Proceso	Gráficas de espectro
Número	4
Descripción	Gráfica el espectro de cada solución
Entrada	sol_numérica , sol_ag
Salida	espectro_sol_ag , espectro_sol_numérica

Tabla 5.12: Descripción del proceso Gráficas de espectro.

### 5.3. Diseño Arquitectónico

En esta sección se define la relación entre los principales elementos estructurales de la aplicación, proporcionando una idea de lo que es la aplicación.

### 5.3.1. Diagrama de Estructura del Sistema

En la figura 5.4 y 5.5 se presenta el diagrama de estructura del sistema (DES), el cual muestra la descomposición de la aplicación en módulos (Araya, 2009). Los módulos poseen las siguientes características:

- Reciben entradas.
- Generan salidas.
- Realizan una función.

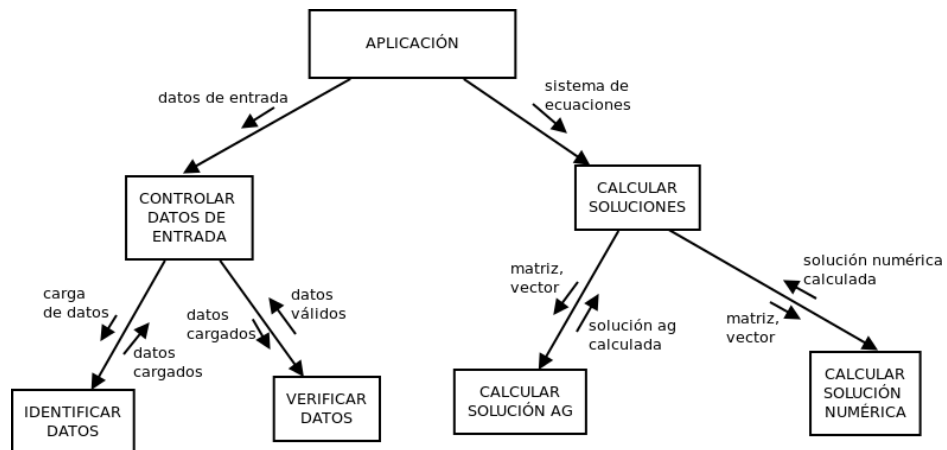


Figura 5.4: Diagrama de Estructura de Sistema - parte 1.

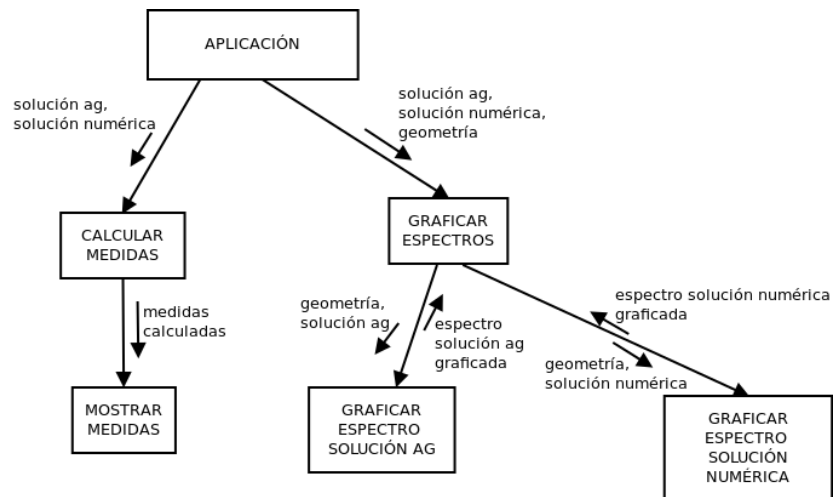


Figura 5.5: Diagrama de Estructura de Sistema - parte 2.

### 5.3.2. Especificación de módulos

En las tablas 5.13, 5.14, 5.15 y 5.16 se especifican los módulos que son inferiores del módulo “Aplicación”. La especificación de los módulos que son inferiores al módulo “Controlar datos de entrada”, “Calcular soluciones”, “Calcular medidas” y “Graficar espectros”, se describen en el anexo F.

Módulo	Controlar datos de entrada
Descripción	Valida los datos de entrada
Entradas	datos de entrada
Salidas	Nula
Módulos superiores	Aplicación

Tabla 5.13: Especificación de Controlar datos de entrada.

Módulo	Calcular soluciones
Descripción	Permite el cálculo de soluciones
Entradas	sistema de ecuaciones
Salidas	Nula
Módulos superiores	Aplicación

Tabla 5.14: Especificación de Calcular soluciones.

Módulo	Calcular medidas
Descripción	Permite el cálculo de medidas
Entradas	solución ag, solución numérica
Salidas	Nula
Módulos superiores	Aplicación

Tabla 5.15: Especificación de Calcular medidas.

Módulo	Graficar espectros
Descripción	Gráfica el espectro de cada solución
Entradas	solución ag, solución numérica, geometría
Salidas	Nula
Módulos superiores	Aplicación

Tabla 5.16: Especificación de Graficar espectros.

## 5.4. Implementación

En esta sección se identifican las herramientas para desarrollar la aplicación que obtiene resultados, como se implementará el AG y que medidas se usan para comparar las soluciones.

En las herramientas de desarrollo a utilizar en la implementación de la aplicación, se consideran los equipos de hardware y las herramientas de software, estas se especifican en las tablas 5.17 y 5.18.

Tipo de herramienta	Nombre de herramienta
Entorno de desarrollo	Matlab R2014a, g++ 4.6.3
Lenguajes de programación	m, c++

Tabla 5.17: Herramientas de software.

Item	Equipo portátil 1
Procesador	Pentium(R) DualCore CPU T4400 @2.20GHz
RAM	2 GB
Sistema Operativo	GNU/Linux, Ubuntu 10.04 LTS
Uso	Implementación, pruebas, documentación y respaldo

Tabla 5.18: Herramientas de hardware.

Además en Matlab se utiliza la función “toolbox AG” para facilitar la codificación ya que así, se trabaja sólo en los parámetros del AG a estudiar(que se indicaron en el capítulo 3, pag 18), en el anexo I se explica como funciona el “toolbox AG”. La codificación del AG se realiza de forma secuencial, es decir al momento de ejecutar el código del AG, las instrucciones se ejecutan una después de la otra. En la figura 5.6 se muestra la implementación secuencial del AG.



Figura 5.6: Implementación secuencial del AG.

En la implementación del AG se debe tener el sistema de ecuaciones originado de la EAD y este sistema se obtiene mediante el MEF que está programado en c++, el cual recibe como entrada la geometría, posiciones y densidades de fuentes, la salida del programa es el sistema de ecuaciones. Cuando se aplica MEF en la EAD se genera una malla geométrica (elementos finitos) que representa el dominio de la función que es solución de la EAD, en la figura 5.7 se muestra como se obtiene esta malla en Matlab.

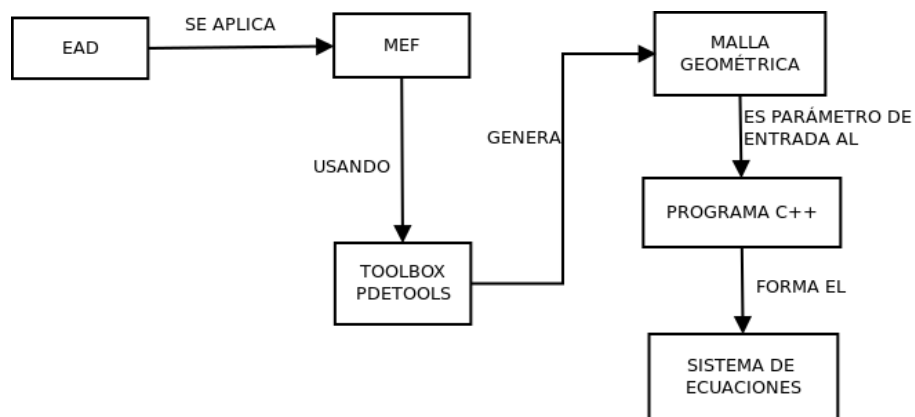


Figura 5.7: MEF en EAD.

Del sistema se calcula la solución con algoritmos genéticos y una solución numérica. Para comparar las soluciones se utilizan 3 medidas, que son el error absoluto, la raíz del error cuadrático medio (RMSE) y el coeficiente de correlación de Pearson.

El error absoluto se define en la fórmula (5.1) (Marrugat, Villa & Paversi, 1999).

$$Ea = || X - X^* || \quad (5.1)$$

Donde  $X$  es la solución exacta y  $X^*$  es la solución aproximada. En la aplicación se considera como  $X$  la solución numérica y  $X^*$  como la solución con AG. En la aplicación  $X$  y  $X^*$  son vectores de  $N \times 1$ , se utiliza el error absoluto medio ( $EM$ ) sobre las soluciones, como se muestra en la fórmula (5.2).

$$EM = \frac{\sum_{i=1}^N |X_i - X_i^*|}{N} \quad (5.2)$$

El RMSE se definió en el capítulo 3 (pag 18), en la aplicación se aplica sobre las soluciones  $X$  y  $X^*$ , como se muestra en la fórmula (5.3).

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - X_i^*)^2}{N}} \quad (5.3)$$

El coeficiente de correlación de Pearson mide el grado de correlación entre las dos soluciones (Restrepo & González, 2007) y su formulación en la aplicación se muestra en la fórmula (5.4).

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(X_i^* - \bar{X}^*)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \cdot \sum_{i=1}^N (X_i^* - \bar{X}^*)^2}} \quad (5.4)$$

En este capítulo se explicó la metodología de desarrollo de la aplicación a implementar, con diagramas de flujo que indican como va a funcionar la aplicación, está el nivel 0 que indica las entradas y salidas de la aplicación, el nivel 1 que muestra la descomposición de la aplicación en procesos y un nivel 2 que muestra la descomposición de un proceso (“Cálculo de soluciones”) en subprocesos. En el diseño arquitectónico se expuso como se descompone la aplicación en módulos. La implementación del AG va a ser de forma secuencial y al calcular la solución AG y numérica, a estas se le calculan 3 medidas que son el error absoluto medio, RMSE y coeficiente de correlación de Pearson.

# Capítulo 6

## Análisis de resultados

En este capítulo se exponen los resultados que se obtienen de la aplicación adaptativa, se realizan comparaciones y análisis de estos resultados respecto a precisión y en el caso médico. De la aplicación se obtiene la solución con algoritmos genéticos y una solución numérica mediante la factorización LU (la teoría de este método se explica en el anexo J) y como se mencionó en el capítulo 4, se trabaja con 289, 1089 y 4225 nodos. En la sección 6.1 se analizan gráficas de espectro en que se incluyen gráficas en 3D y en 2D, en la sección 6.2 se analizan gráficas de aproximación de los nodos en distintas fuentes.

La geometría de elementos finitos se construye con la API pdetools de matlab, donde se simuló una difusión de fotones en un corte transversal del cerebro humano adulto, el cual está compuesto por materia gris, materia blanca y rodeado por el cráneo. Para la validación se utilizaron valores de absorción y coeficiente de dispersión obtenido del trabajo (Bevilacqua, Piguet, & Marquet, 1999). Los dominios están definidos a escala real en centímetros. En la tabla 6.1 se muestran los valores utilizados. La construcción de los sistemas de ecuaciones se construyen de forma off-line con un programa en C++. La solución con algoritmos genéticos y método numérico se programa en Matlab. Para la solución numérica, se utiliza el método basado en factorización LU. Para todas las fuentes, se utiliza una densidad de  $10^6$  fotones. Los resultados y gráficas están representados en su forma normalizada, para favorecer el análisis.

Tipo de tejido	Tipo	$u_a cm^{-1}$	$u'_s cm^{-1}$
Materia gris adulto	In vivo	0.18	4.8
Materia blanca adulto	In vivo	0.13	9.8
Cráneo adulto	In vivo	0.22	9.1

Tabla 6.1: Propiedades ópticas de tejidos.

La tabla 6.2 muestra el tamaño de población y cantidad de generaciones utilizadas para la resolución del sistema de ecuaciones de acuerdo a la cantidad de nodos.

Nodos	Tamaño población	Generaciones
289	40	200
1089	20	35
4225	20	35

Tabla 6.2: Parámetros de entrada AG.

En la tabla 6.3 se muestra las medidas de comparación de errores entre las soluciones AG y la solución numérica para distinto número de nodos y fuentes, donde se experimenta con fuentes denotadas por  $q$  en el interior y borde del dominio.

Nodos	Fuentes	Ubicación $q$	$EM$	$RMSE$	$r$
289	3	interior	<b>0.018</b>	<b>0.067</b>	<b>0.865</b>
289	4	borde	0.028	0.118	0.381
289	5	borde/interior	0.040	0.123	0.316
1089	3	interior	<b>0.013</b>	<b>0.062</b>	<b>0.733</b>
4225	3	interior	0.026	0.075	0.379

Tabla 6.3: Medidas de error entre la solución numérica (LU) y AG.

De los resultados de la tabla 6.3 se observa que los mejores resultados se obtienen cuando las fuentes de fotones están al interior del dominio y la precisión disminuye al aumentar el número de nodos y por tanto las dimensiones de los sistemas de ecuaciones.

## 6.1. Análisis de espectro

En esta sección se analizan espectros cuyas gráficas se representan en 3D y 2D, donde:

- Gráficas en 3D: Corresponde a la interpretación analítica.
- Gráficas en 2D: Corresponde a la imagen médica.

Además en estas gráficas se representan las soluciones normalizadas con el método LU y AG, con distintos nodos y fuentes. El objetivo del análisis gráfico es determinar si el AG identifica las fuentes de fotones, es decir las zonas tumorales. En el análisis analítico se podrá observar si el AG puede identificar las fuentes a medida que aumenta la resolución de la geometría y en el análisis de difusión de fotones, se puede determinar si en las imágenes de difusión de fotones (imágenes médicas), se identifican las zonas tumorales.

### 6.1.1. Análisis analítico

En la figura 6.1 y 6.2 se muestra la solución normalizada con método LU y algoritmo genético de 289 nodos y 5 fuentes. La causa de la disminución de la precisión con fuentes en el borde, se debe a que la EAD no puede cumplir la condición de frontera (2.31) de la ETR, y la EAD usa la condición  $\phi(r) = 0$ , donde  $r \in \partial\Omega$  y la solución numérica no será precisa en esas zonas y por tanto se produce una divergencia hacia valores negativos en dicha zona. A pesar de lo anterior, para el caso del AG, este traslada hacia nodos internos contiguos al borde los fotones, lo cual resulta ser un fenómeno muy interesante del punto de vista analítico, ya que el AG al aplicar las condiciones físicas del problema, sobre un sistema de ecuaciones que puede quedar mal condicionado por las posiciones de fotones cercanas a las fuentes, el AG de igual forma aproxima los valores, pero con una **divergencia menor** que el método numérico, para este caso en específico. Este fenómeno se puede observar en las figuras 6.1 y 6.2.



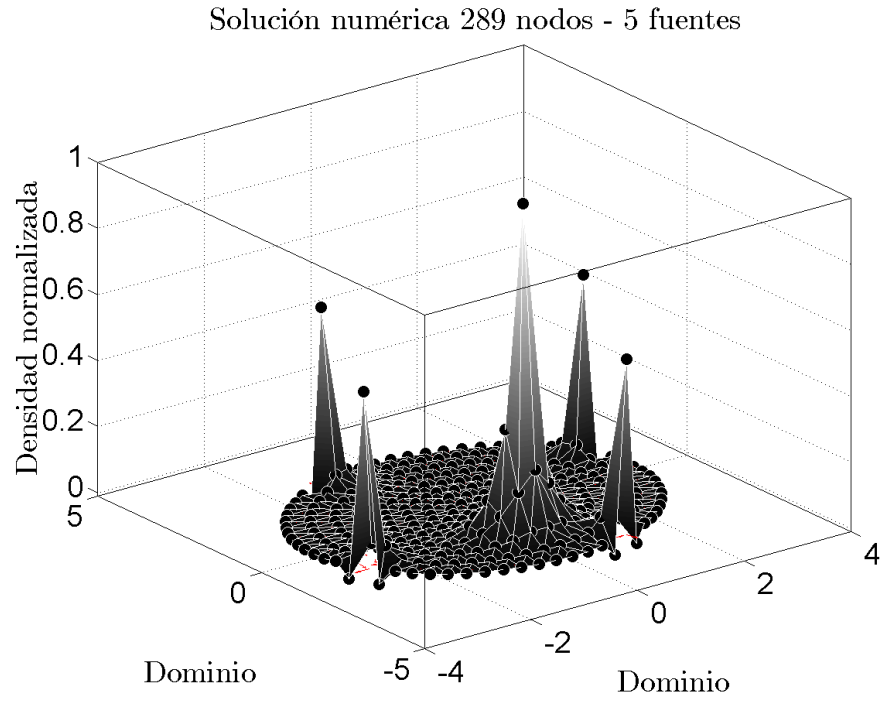


Figura 6.1: Solución normalizada con método LU de 289 nodos y 5 fuentes.

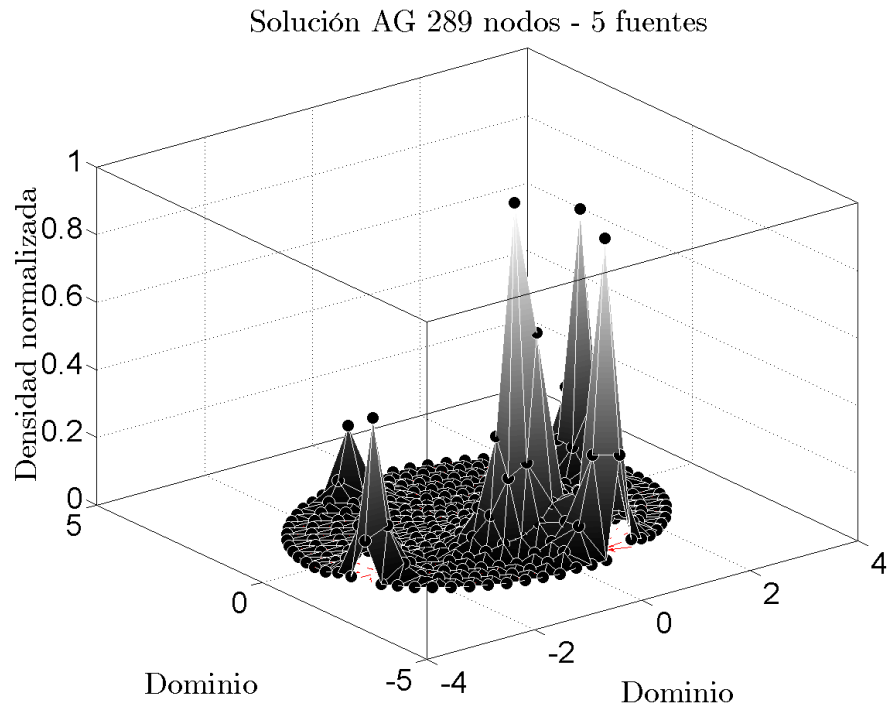


Figura 6.2: Solución normalizada con algoritmo genético de 289 nodos y 5 fuentes.

En las figuras 6.3, 6.4, 6.5 y 6.6 se muestra la solución normalizada con método LU y algoritmo genético de 289 nodos, con 4 y 3 fuentes.

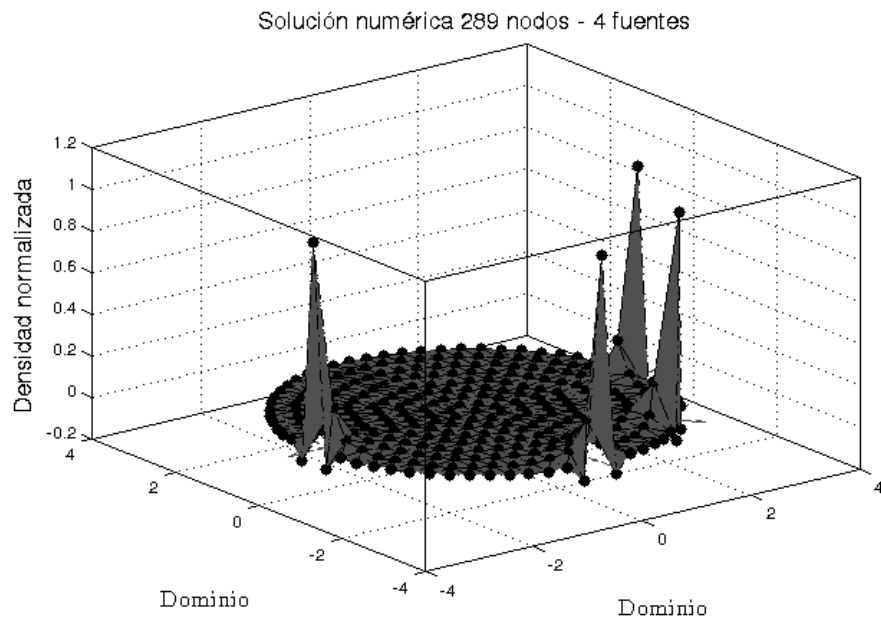


Figura 6.3: Solución normalizada con método LU de 289 nodos y 4 fuentes.

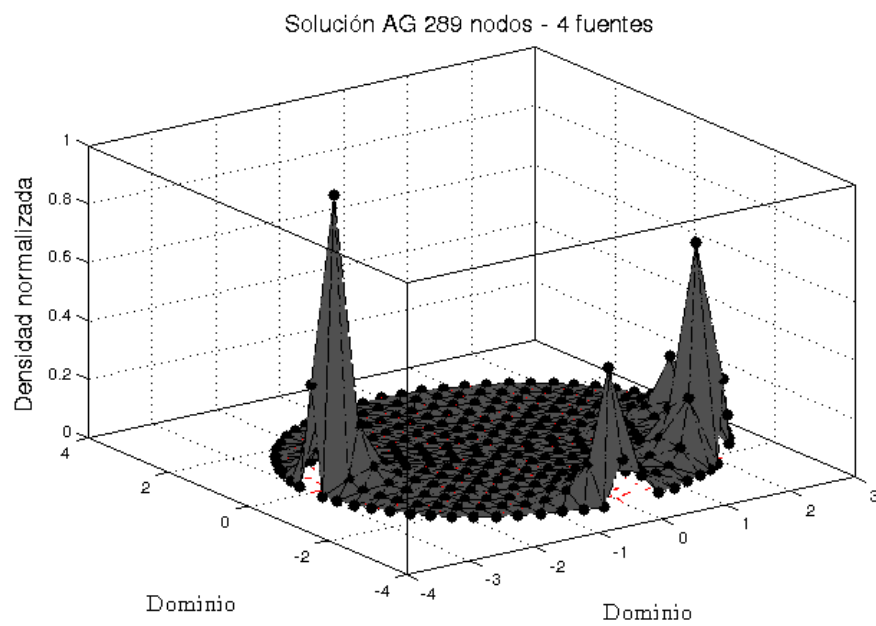


Figura 6.4: Solución normalizada con algoritmo genético de 289 nodos y 4 fuentes.

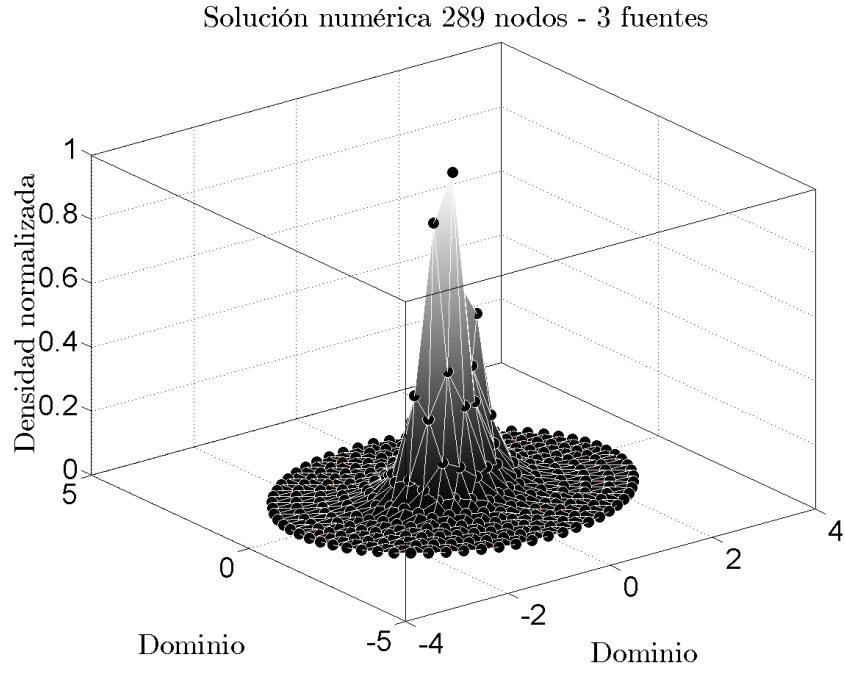


Figura 6.5: Solución normalizada con método LU de 289 nodos y 3 fuentes.

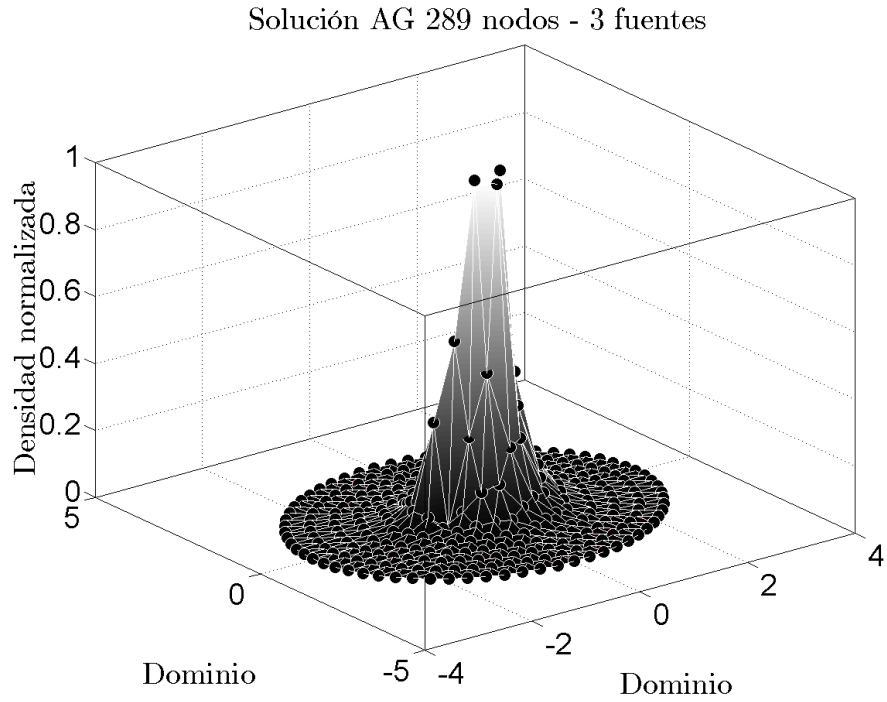


Figura 6.6: Solución normalizada con algoritmo genético de 289 nodos y 3 fuentes.

En las figuras 6.3 y 6.4 se muestran aproximaciones con 289 nodos y 4 fuentes de fotones, en que el AG localiza las fuentes de fotones que están en el borde del dominio. En las figuras

6.5 y 6.6 se visualiza la aproximación con 289 nodos y 3 fuentes, donde se observa que de forma analítica, las soluciones son muy similares. Pero a medida que aumenta la resolución de la geometría y por tanto la dimensión de los sistemas de ecuaciones, la aproximación con AG tiende a ser menos precisa, lo cual se puede observar en las figuras 6.7 y 6.8.

La precisión disminuye más aun para el caso de 4225 nodos al analizar las gráficas presentes en las figuras 6.9 y 6.10. A pesar de esta pérdida de precisión, el AG localiza las posiciones en que existen densidades de fotones altas que están cercanas a fuentes de emisión de fotones, por lo que este método puede ser aplicable en imagen óptica, donde el interés es obtener el origen de las fuentes de radiación luminica y como son las magnitudes de las densidades en distintas zonas del dominio.

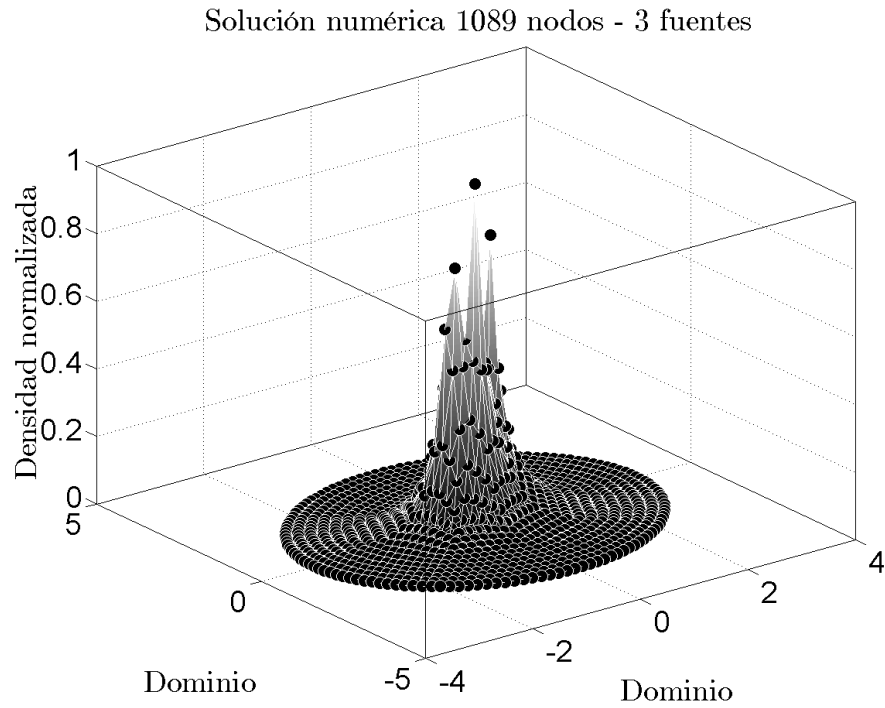


Figura 6.7: Solución normalizada con método LU de 1089 nodos y 3 fuentes.

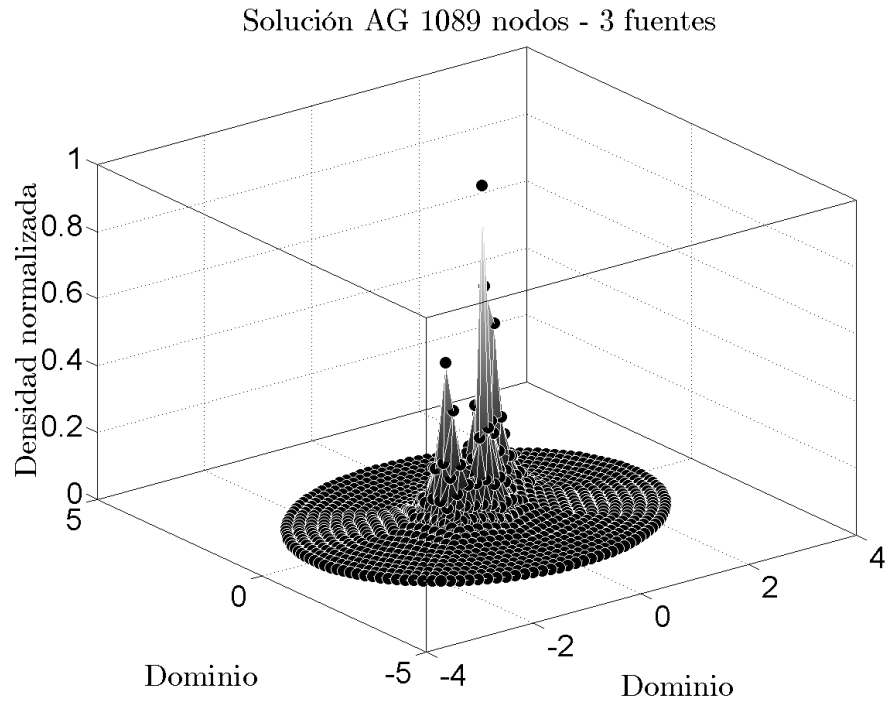


Figura 6.8: Solución normalizada con algoritmo genético de 1089 nodos y 3 fuentes.

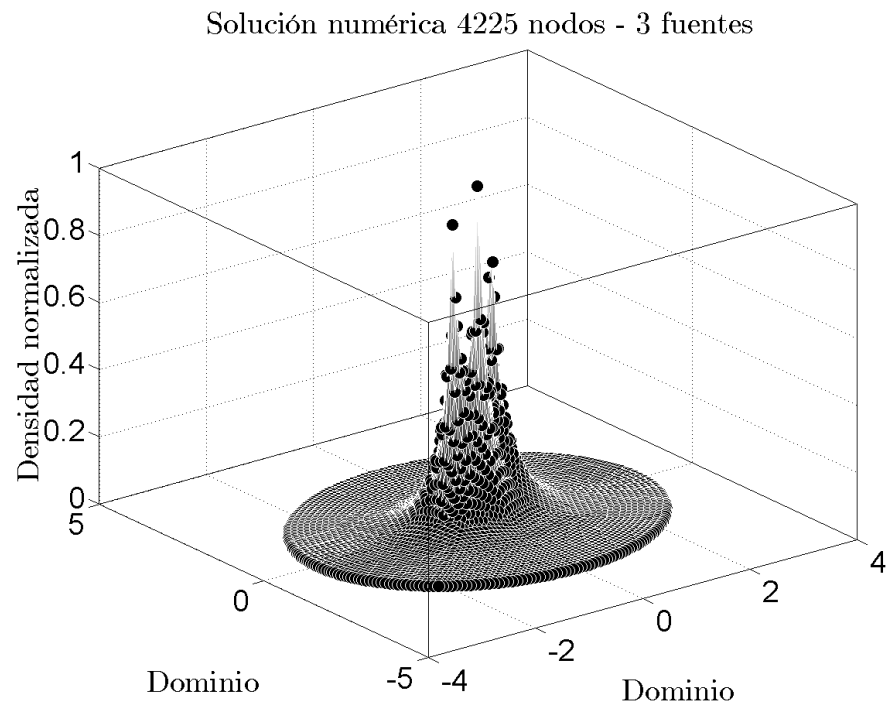


Figura 6.9: Solución normalizada con método LU de 4225 nodos y 3 fuentes.

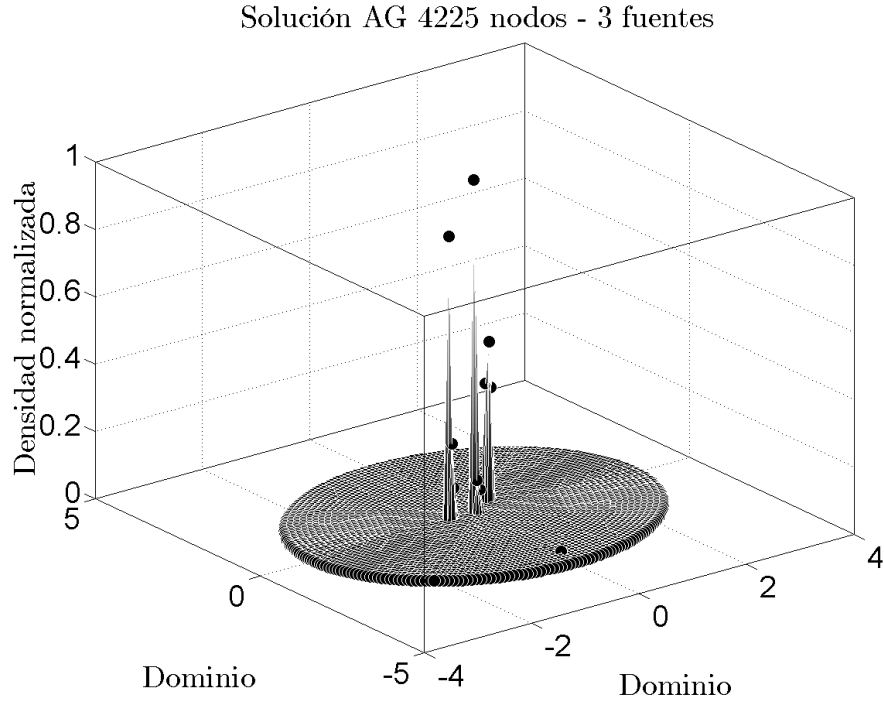


Figura 6.10: Solución normalizada con algoritmo genético de 4225 nodos y 3 fuentes.

Como se ha mencionado, lo más relevante es la detección de fuentes de fotones y su densidad, disminuyendo al máximo el ruido presente en las imágenes. Este ruido, para el caso de la EAD serían falsas estimaciones alejadas de las fuentes de fotones, lo cual no sucede en ninguno de los experimentos realizados. Esto es porque el AG tiende a minimizar las densidades alejadas de la fuente y converge a valores de alta densidad, lo cual se puede observar en la gráfica de la figura 6.10 que corresponde al peor caso considerando su estudio *analítico*, ya que si se observa la tabla 6.3, el de menor precisión *numéricamente* es para 289 nodos, con 5 fuentes debido al problema de fuentes de fotones cercanas al borde del dominio.

### 6.1.2. Análisis de difusión de fotones

Se analizan las gráficas de difusión de fotones con el método LU y AG, en que se podrá observar que el AG puede localizar fuentes de fotones (las cuales indican zonas tumorales), estas gráficas se utilizan en la parte clínica, en que las zonas más oscuras, es donde se encuentran las fuentes de fotones y a mayor tendencia al negro, mayor densidad, es decir donde está el tumor presente y como está distribuido.

De la figura 6.11 hasta 6.16 se muestran las difusiones de fotones con AG y LU con 289 nodos y en distintas fuentes.

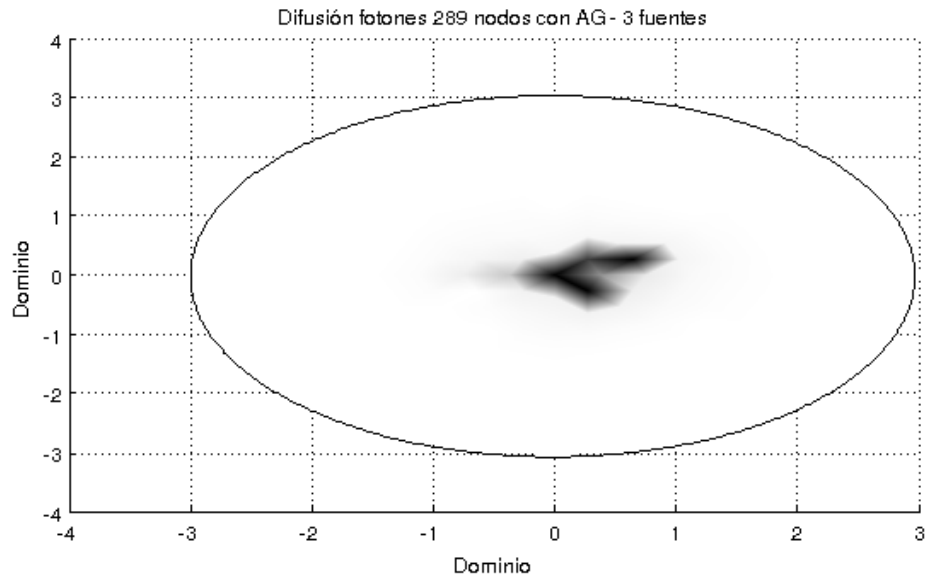


Figura 6.11: Difusión de fotones con algoritmo genético de 289 nodos y 3 fuentes.

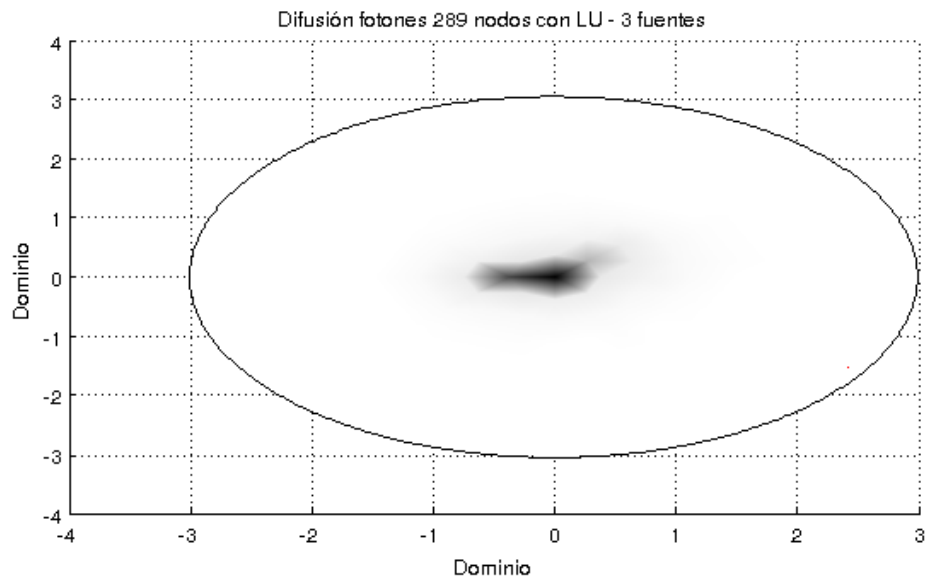


Figura 6.12: Difusión de fotones con método LU de 289 nodos y 3 fuentes.

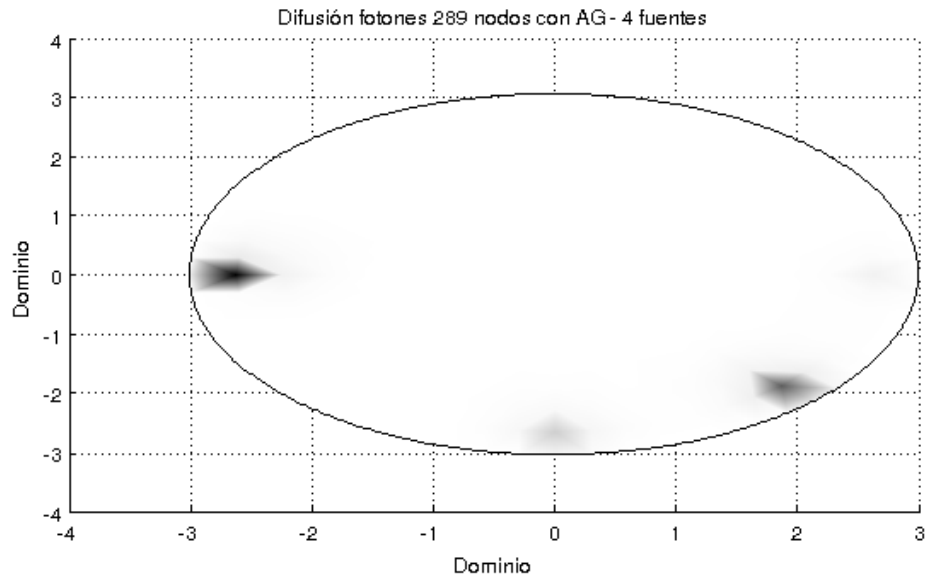


Figura 6.13: Difusión de fotones con algoritmo genético de 289 nodos y 4 fuentes.

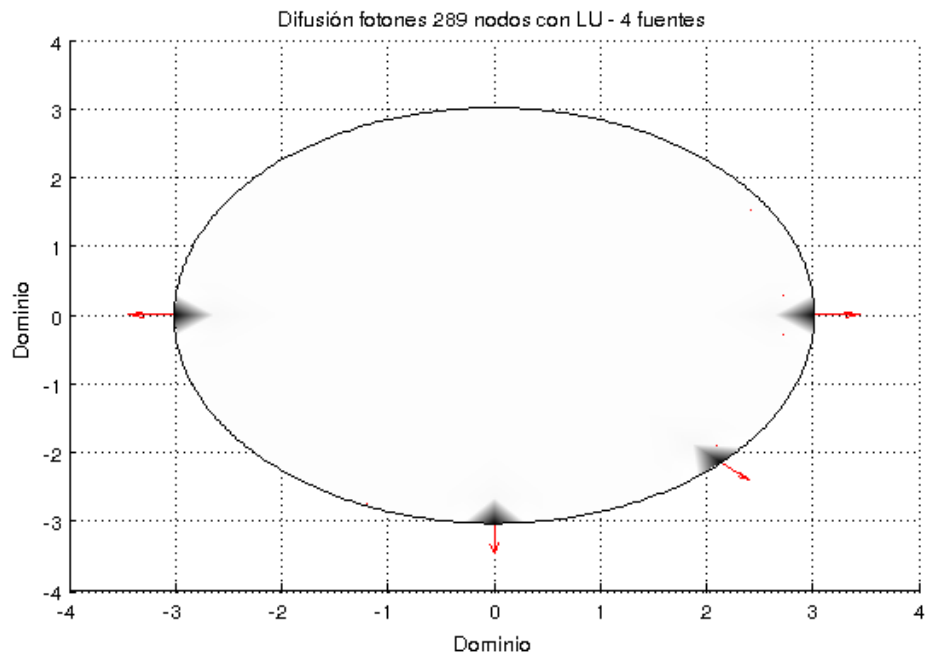


Figura 6.14: Difusión de fotones con método LU de 289 nodos y 4 fuentes.



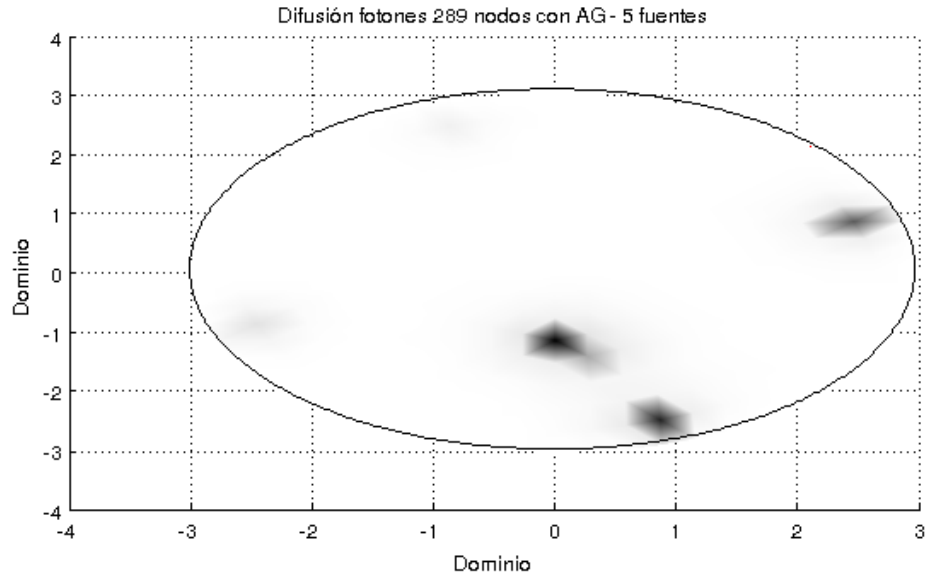


Figura 6.15: Difusión de fotones con algoritmo genético de 289 nodos y 5 fuentes.

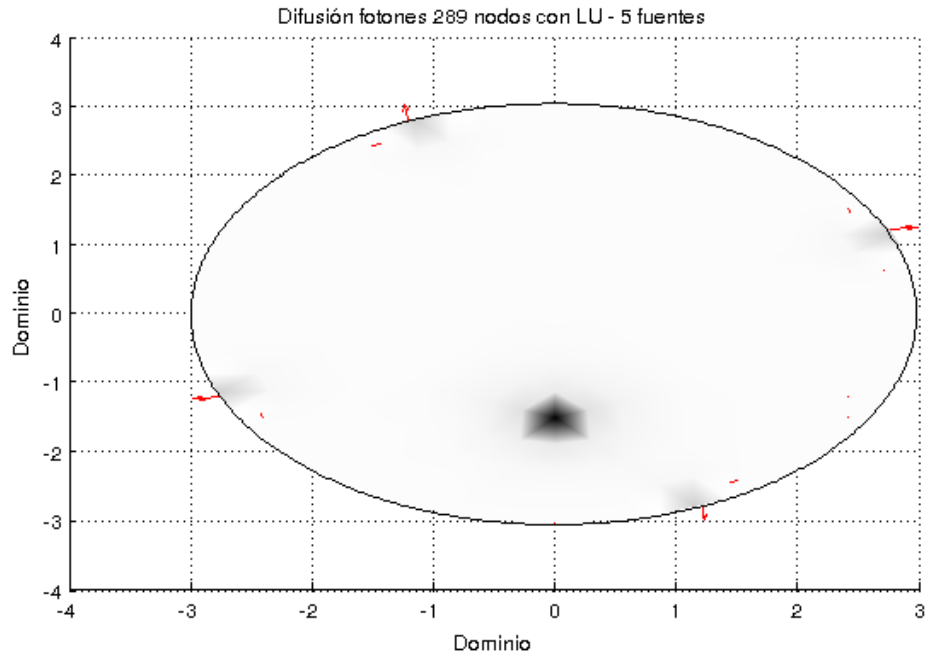


Figura 6.16: Difusión de fotones con método LU de 289 nodos y 5 fuentes.

De estas gráficas de 289 nodos, se puede observar que el AG localiza las fuentes de fotones, donde mejor localiza las fuentes es en la figura de 289 nodos con 3 fuentes (figura 6.11). En las gráficas de 4 y 5 fuentes (figura 6.13 y 6.15), existen fuentes en el borde del dominio, pero el AG de igual forma localiza las fuentes.

En las figuras 6.17 y 6.18 se muestran difusiones de fotones para 1089 nodos con 3 fuentes, una con método LU y otra con algoritmo genético.

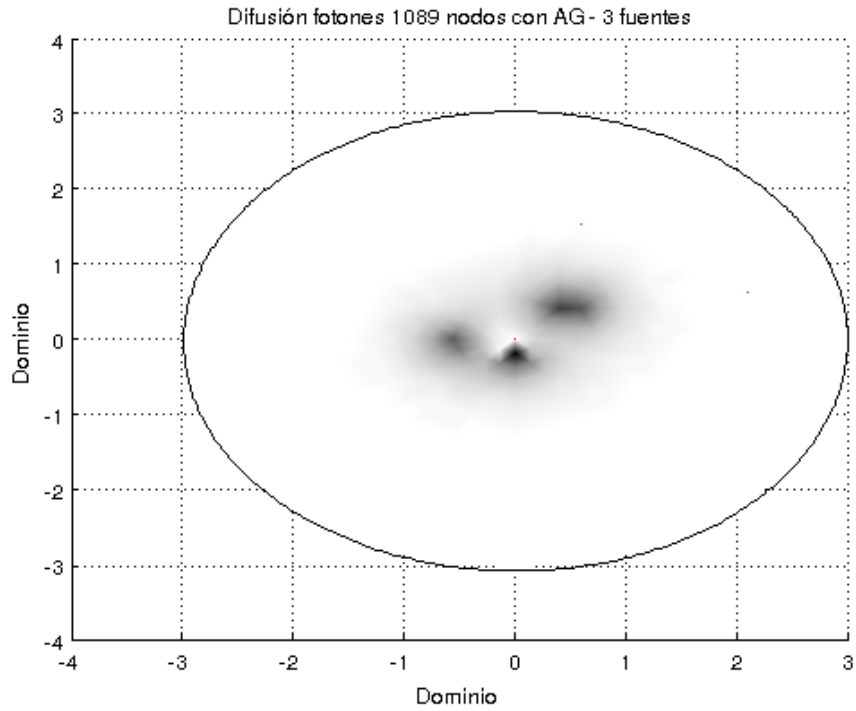


Figura 6.17: Difusión de fotones con algoritmo genético de 1089 nodos y 3 fuentes.

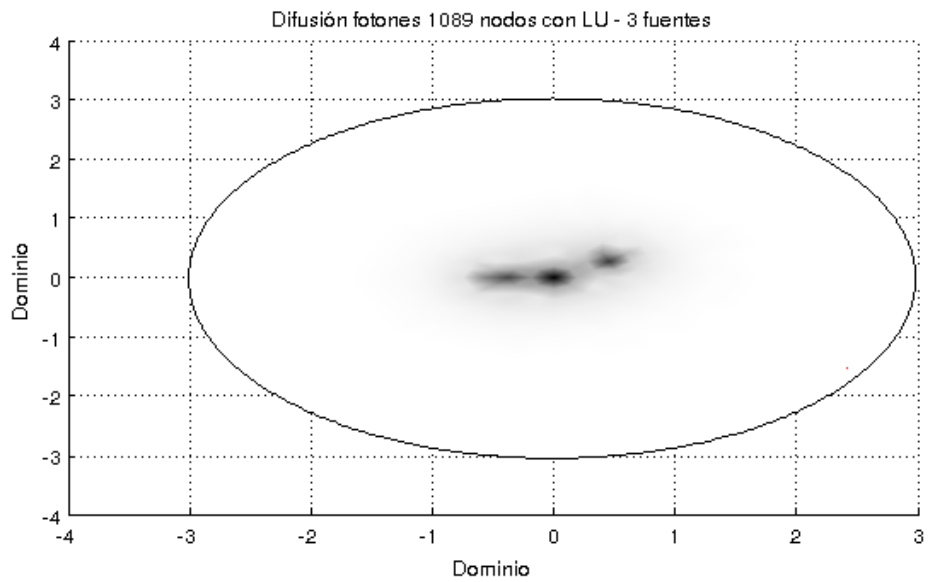


Figura 6.18: Difusión de fotones con método LU de 1089 nodos y 3 fuentes.

De estas gráficas de 1089 nodos, se puede observar que el AG localiza las fuentes de fotones, además existe similitud entre las gráficas de 1089 nodos.

En las figuras 6.19 y 6.20 se muestran difusiones de fotones para 4225 nodos con 3 fuentes, una con método LU y otra con algoritmo genético.

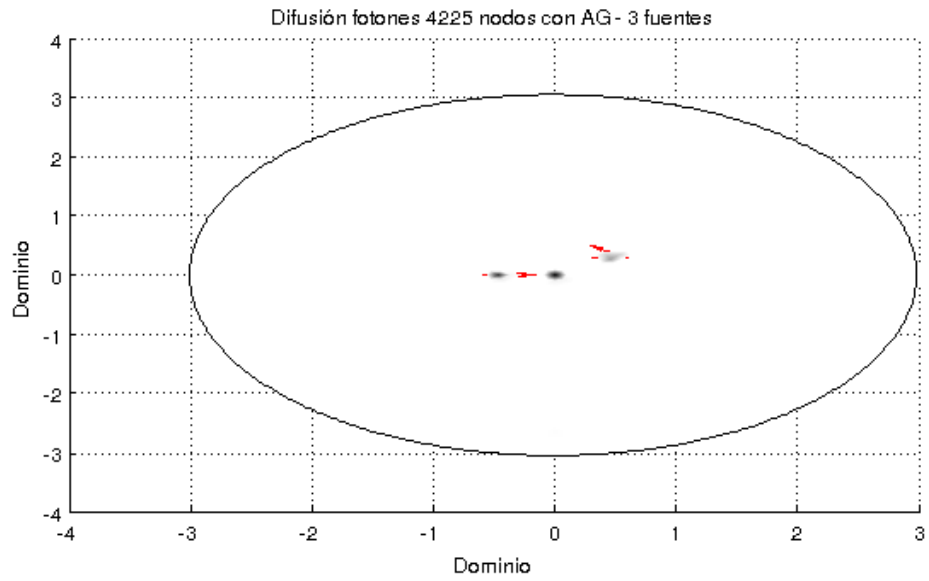


Figura 6.19: Difusión de fotones con algoritmo genético de 4225 nodos y 3 fuentes.

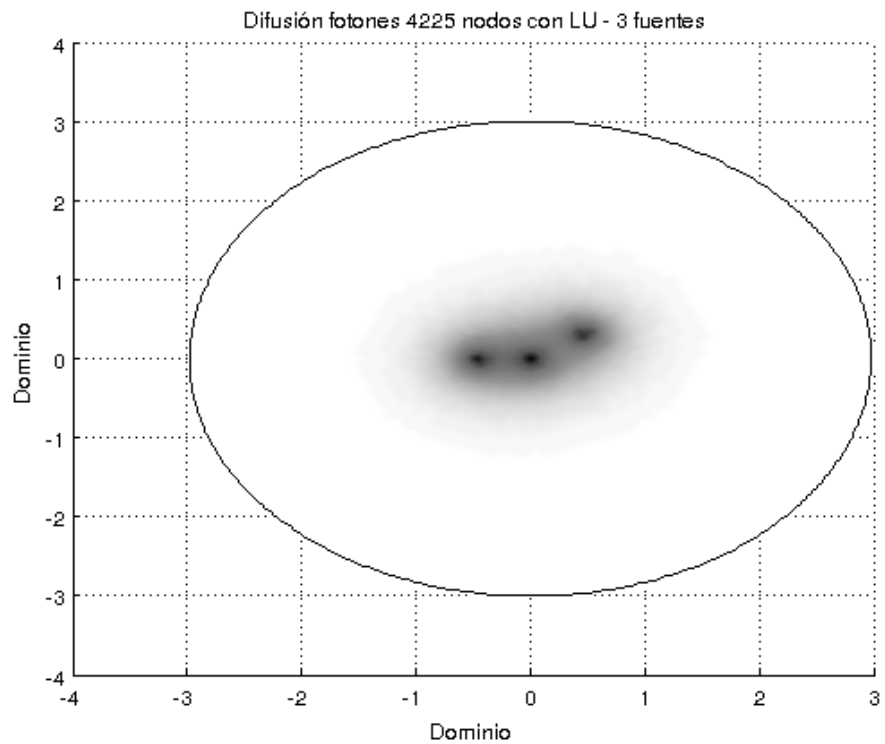


Figura 6.20: Difusión de fotones con método LU de 4225 nodos y 3 fuentes.

De estas gráficas de 4225 nodos, se puede observar que el AG localiza las fuentes de fotones, pero es de menor resolución la gráfica del AG (figura 6.19), esto se debe a que al aumentar la cantidad de nodos, se empieza a perder precisión de la densidad.

Desde un punto de vista clínico, lo relevante de la solución de la EAD, es la determinación de las fuentes de fotones, ya que estas indican zonas tumorales, es por ello que el estudio para problemas relacionados con Imagen Óptica no solo es suficiente el resultado numérico, sino que es importante un estudio analítico que permita determinar si la técnica utilizada es adecuada para resolver el problema. En este sentido si se analiza en resultado de mejor resolución dado por 4225 nodos y su resolución con el método numérico que se presenta en la figura 6.20 y se compara con un caso medio de 1089 nodos resuelto con AG (figura 6.17), y se gráfica la difusión de la imagen del corte transversal del cerebro humano en que se simuló la difusión. La aproximación con AG con 1089 nodos que se muestra en la figura 6.17 de igual forma permite obtener un resultado sin *ruido*, lo cual es un aspecto relevante de este estudio. La imagen obtenida, es evidente que tiene una menor resolución a nivel de densidad de fotones por unidad de área, donde en particular para estos experimentos el área de aproximación no supera los  $36 \text{ cm}^2$  y al comparar ambas gráficas, se obtienen densidades parecidas y ubicación de fuentes de fotones similares.

En el anexo G se muestran gráficas de espectro con el método LU y AG en 289 nodos en 1, 2 y 6 fuentes, y gráficas de espectro con 1089 y 4225 nodos en 4 y 5 fuentes.

## 6.2. Análisis de aproximación de densidades

En esta sección se analizan gráficas de aproximación en los nodos en distintas fuentes y su densidad de fotones (normalizada) con el método LU y AG, se podrá observar que el AG estima ciertas zonas de densidades de fotones.

En las figuras 6.21, 6.22 y 6.23, se muestran las aproximaciones de 289 nodos en distintas fuentes y su densidad con el método numérico (LU) y AG, los cuales corresponden al mejor caso estudiado ya que el AG estima varias zonas de densidades de fotones y se obtiene un buen resultado numérico.

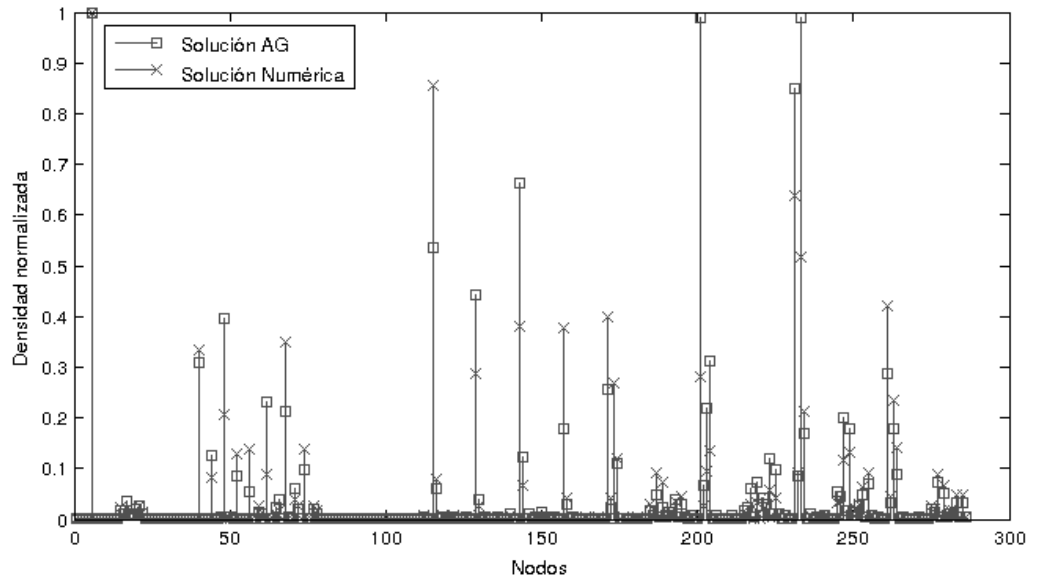


Figura 6.21: Solución AG y numérica de 289 nodos y 3 fuentes.

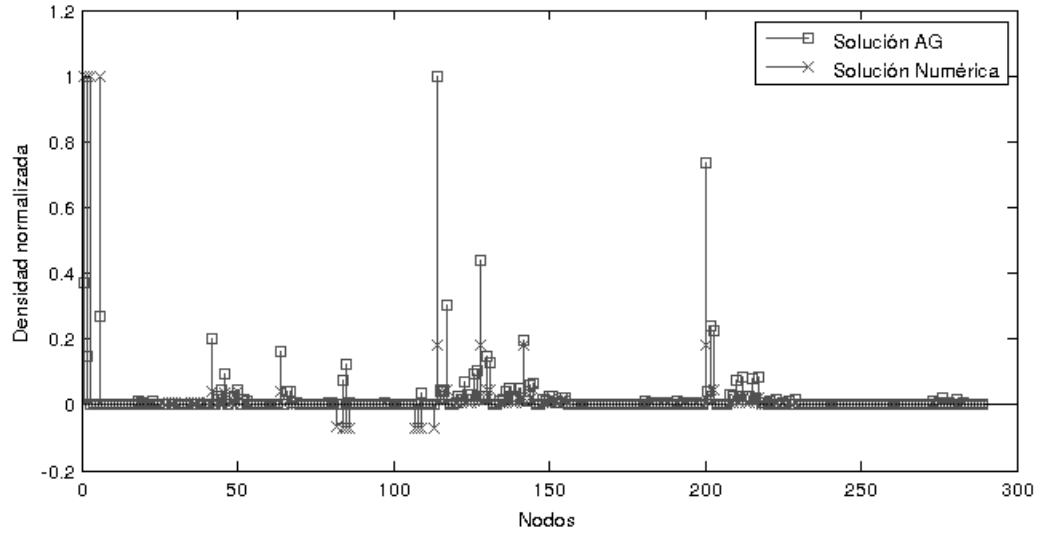


Figura 6.22: Solución AG y numérica de 289 nodos y 4 fuentes.

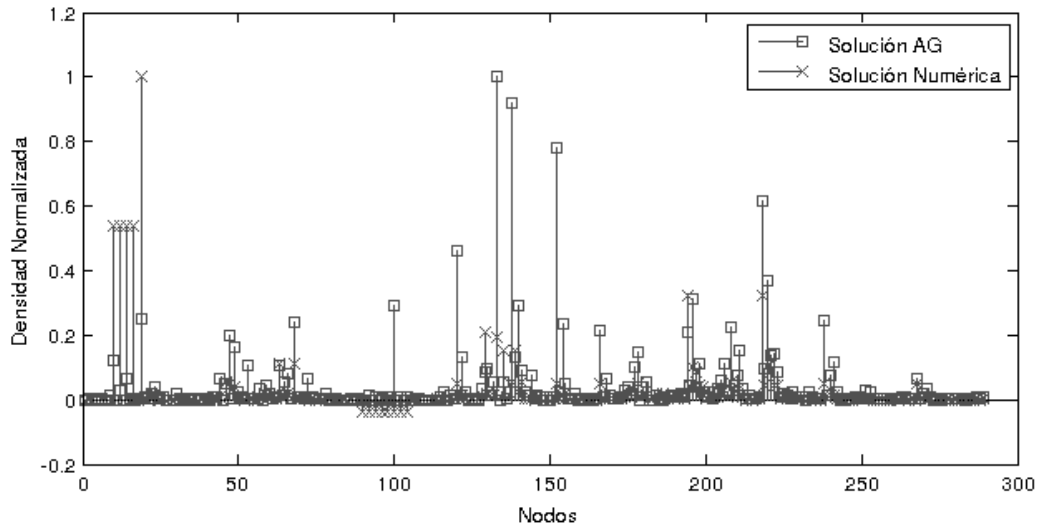


Figura 6.23: Solución AG y numérica de 289 nodos y 5 fuentes.

En la figura 6.24 se muestran las aproximaciones de 1089 nodos con 3 fuentes y su densidad con el método numérico (LU) y AG, el cual corresponde a un caso medio estudiado ya que el AG estima ciertas zonas de densidades de fotones pero si estima zonas de alta densidad de fotones y se obtiene un regular resultado numérico.

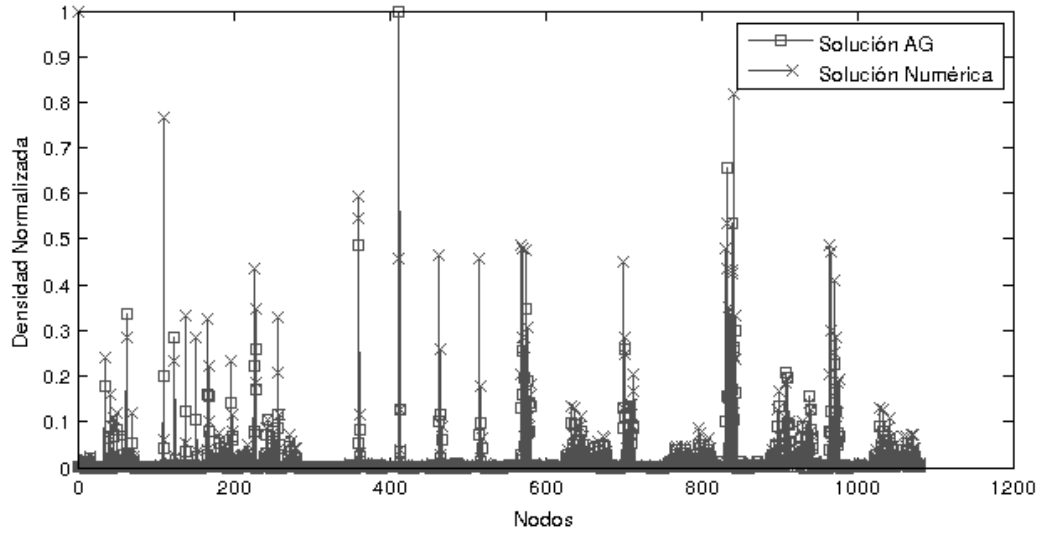


Figura 6.24: Solución AG y numérica de 1089 nodos y 3 fuentes.

En la figura 6.25 se muestran las aproximaciones de los 4225 nodos con 3 fuentes y su densidad con el método numérico (LU) y AG, el cual corresponde al peor caso estudiado. Se observa que a pesar del mal resultado numérico, el AG logra estimar zonas de alta densidad de fotones.

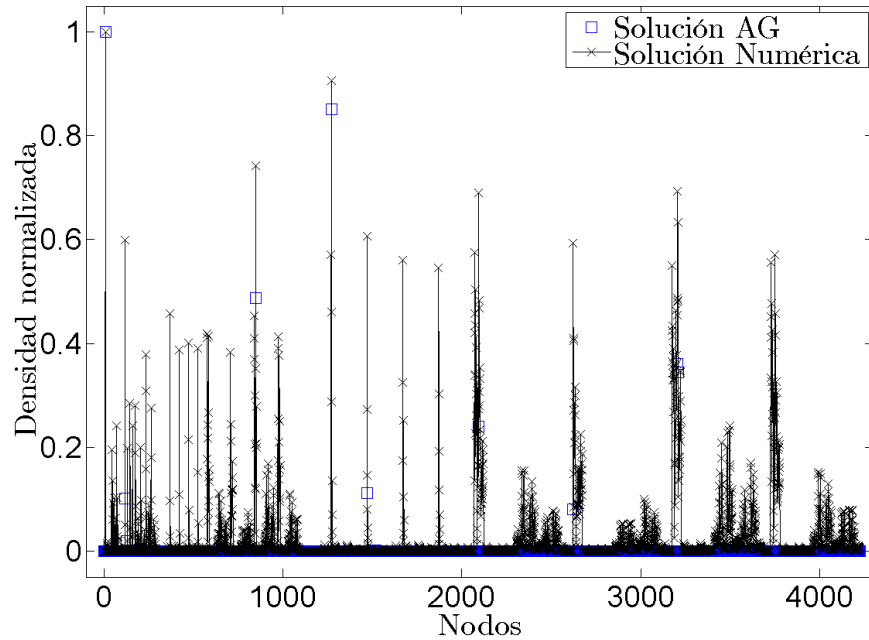


Figura 6.25: Solución AG y numérica de 4225 nodos y 3 fuentes.

De estas gráficas se puede observar que la de mejor caso estudiado es la gráfica de 289 nodos con 3 fuentes (figura 6.21), además en todas las gráficas de esta sección se puede observar

que el AG estima zonas de densidades altas de fotones que están cercanas a las fuentes, esto ayuda al médico en identificar el tumor. Sin embargo el AG pierde precisión al aumentar el número de nodos, pero para el caso médico, no interesa tanto la precisión del AG, sino que el AG identifique las zonas donde están las fuentes de fotones, y esto el AG si lo hace.

Las gráficas de aproximación de 289 nodos en 1, 2 y 6 fuentes, y gráficas de aproximación de 1089 y 4225 nodos en 4 y 5 fuentes se muestran en el anexo H.

En este capítulo se analizaron las gráficas de las soluciones normalizadas con LU y AG, como las gráficas de espectro en que se analiza la gráfica analítica, que se observa que el AG pierde precisión a medida que aumenta el número de nodos pero para los números de nodos utilizados en la aplicación, el AG localiza las fuentes de fotones. Además se analizó la gráfica médica, en que las zonas negras es donde está el tumor presente. También se analizó las gráficas de aproximación de densidades en los nodos donde se observa que el AG estima zonas de densidades altas de fotones que están cercanas a las fuentes.

# Capítulo 7

## Conclusiones

En este trabajo se resolvió la operación de estimar la difusión de fotones desde una fuente al interior hacia los detectores de fotones, resolviendo la ecuación diferencial de difusión de la luz en medios turbios mediante una solución con algoritmos genéticos con elementos finitos. Al resolver la operación nombrada se puede estudiar el comportamiento de nuevas sondas moleculares de bioluminiscencia en aplicaciones oncológicas, donde el principal interés es el monitoreo de procesos patológicos en vivo, ya sea para detectar diversas patologías como para su tratamiento y efectos de los fármacos utilizados.

En el trabajo se observa que a un mayor número de incógnitas, el modelo comienza a perder precisión, esto se puede deber a una gran combinatoria de los cromosomas, ya que se tienen más de 4000 fenotipos (en el caso de 4225 nodos), sin embargo para 4225 nodos el AG procesa una matriz de 17.850.625 de elementos ( $4225 \times 4225$ ), con lo que se obtiene una aproximación considerable de la solución, ya que el AG localiza los puntos donde existe una gran densidad de fotones.

Al modelar soluciones heurísticas, es normal que los primeros resultados no sean los esperados, ya que el modelamiento puede estar correcto, pero puede que le falte reafinarse o estudiar mejor los parámetros involucrados, en el caso del AG, los parámetros estudiados son la población inicial, restricciones y función de Fitness. Entonces al reafinar el modelamiento de solución, se puede obtener las soluciones que se esperan del punto de vista numérico, ya que si se analiza medicamente, las soluciones son muy cercanas a lo requerido en imagen óptica, que es visualizar la difusión para poder interpretarlas.

El método demuestra que para sistemas de ecuaciones de dimensión media, por ejemplo de aproximadamente 1000 incógnitas, el AG obtiene buenos resultados, por lo cual una investigación futura sería establecer los límites en que el AG es eficaz ya que en el mundo real existen infinitos sistemas de ecuaciones a resolver y en varios casos de dimensiones menor a 1000, por tanto el uso de este método puede ser aplicable a dichos problemas.

Del punto de vista científico, resulta interesante que el AG a través de la Pseudo-aleatoriedad de las soluciones, este logra resolver los sistemas de ecuaciones, en que no se aplica directamente un método numérico. La inclusión indirecta en AG está presente en la disminución del RMSE y es probable que otras medidas como gradientes de funciones o manipulación de hiperplanos permita aproximar también a resultados numéricos.

Por lo anterior, es que el estudio de esta técnica basada en AG puede servir como base para investigaciones relacionadas con la solución de sistemas de ecuaciones y ecuaciones diferenciales en la Licenciatura en Ciencia de la Computación de la Universidad de Santiago de Chile y colaborar en temas de investigación de pregrado.

Como proyección futura queda resolver el sistemas de ecuaciones mediante AG con computación paralela, ya que de esta forma se puede disminuir el tiempo de ejecución para 4225 nodos. La ventaja de trabajar con Meta-heurísticas como el algoritmo genéticos, es que la inclusión de condiciones físicas del problema colaboran en la aproximación de la solución. Además también queda como proyección futura, aproximar la solución de ecuaciones diferenciales, que con cierto método, se obtenga un sistema de ecuaciones no de  $n \times n$ , es decir obtener un sistema de ecuaciones donde el número de ecuaciones sea mayor al número de variables, es factible que



el AG de buena aproximación, ya que para sistemas de ecuaciones cuadrados el AG disminuye el RMSE y para sistemas no cuadrados, la técnica usada en este trabajo se aplicaría de igual forma.

El trabajo de investigación realizado ha sido presentado en el congreso “Infonor-Chile 2015”, en el Workshop de “Sistemas Inteligentes y Aplicaciones” donde el artículo lleva por nombre “Arturo Benson” y “Oscar Rojas”. Con lo cual el trabajo colabora en el desarrollo de investigación y producción científica de la Licenciatura en Ciencia de la Computación.

# Referencias Bibliográficas

Acero, I., & López, M. (2007). Métodos de Resolución de Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden n. En I. Acero, & M. López, Ecuaciones Diferenciales. Teoría y Problemas (pág. 10). Madrid: Editorial Tébar, S.L.

Acero, I., & López, M. (2007). Series de Fourier. En I. Acero, & M. López, Ecuaciones diferenciales:teoría y problemas (págs. 8-15). Madrid: Editorial Tébar, S.L.

Alexandrakis, G., Farrrel, T., & Patterson, M. (1998). Accuracy of the diffusion approximation in determining the optical properties of a two-layer turbid medium. Appl Opt, 7401-7409.

Arendt, W., & Warma, M. (2003). Dirichlet and Neumann boundary conditions:What is in between? Journal of Evolution Equations, 17.

Arias, & J.Rúa, Tópicos de Ecuaciones Diferenciales (pág. 10). Medellín: Universidad de Medellín.

Arranz, J., & A, P. (2013). Algoritmos genéticos. Universidad Carlos III , 8.

Arridge, R. (1999). Optical tomography in medical imaging. Londres :Department of Computer Science, University College, 41-93.

Bargueño, V., & Durán, M. (2013). Problemas de Ecuaciones Diferenciales con introducciones teórica. Madrid: UNED.

Becerril, J., & Elizarraraz, D. (2004). Ecuaciones Diferenciales Técnicas de Solución y Aplicaciones. Ciudad de México: Universidad Autónoma Metropolitana.

Bevilacqua, F., Piguét, D. & Marquet, P. (1999). In vivo local determination of tissue optical properties: applications to human brain. OSA, 4939-4950.

Boyce, W., & DiPrima, R. (2000). Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera. Ciudad de México: Editorial Limusa.

Braun, M. (1990). Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones. Ciudad de México: Uversidad Nacional Autónoma de México.

Caballero, R., Molina, J., Luque, M., Torrico, A., & Gomez, T. (2013). Algoritmos genéticos para la resolución de problemas de Programación por Metas Entera. Aplicación a la Economía de la Educación. Universidad de Málaga, 12.

Calderón, G., & Gallo, R. (2011). Introducción al método de los elementos finitos: Un enfoque matemático. Mérida: Universidad de los Andes.

Campos, B., & Chiralt, C. (2011). Ecuaciones Diferenciales. Castellón: Universidad Jaime.

Cañada, A. (2006). Apuntes de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Granada: Universidad de Granada.

Carmen, M. (2009). La Ecuación del Calor de Fourier: Resolución mediante Métodos de Análisis en Variable Real y en Variable Compleja. Universidad Tecnológica Nacional, 9.

Carmona, I. (1998). Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior. En I. Carmona, Ecuaciones Diferenciales (pág. 87). Naucalpan de Juárez,: Longman de México Editores.

- Carrillo, A., Herrera, I., & Yates, R. (2008). Método de Elementos Finitos. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Chaquet, J., & Carmona, E. (2012). Solving differential equations with Fourier series and Evolution Strategies. *Applied Soft Computing*, 12.
- Chipperfield, A., Fleming, P., Pohlheim, H., & Fonseca, C. (2005). Genetic Algorithm Tool-box For Use with MATLAB. Sheffield: University of Sheffield.
- Dang, Q., & Ehrhardt, M. (2012). On Dirac delta sequences and their generating functions. *Applied Mathematics Letters*.
- Edwards, C., & Penney, D. (2001). Ecuaciones Lineales de Orden Superior. En C. Edwards, & D. Penney, *Ecuaciones Diferenciales* (pág. 102). Ciudad de México: Pearson Education.
- Emre, M., Celike, F., & Kingravi, H. (2011). On Euclidean norm approximations. *Pattern Recognition*. Estévez, P. (1997). Optimización mediante Algoritmos genéticos. Instituto de Ingenieros de Chile, 10.
- Fernández, C., Vázquez, F., & Vegas, F. (2003). Ecuaciones diferenciales y en diferencias: sistemas dinámicos. Madrid: Paraninfo.
- Firbank, M. (1996). An investigation of light transport through scattering bodies with non-scattering regions. *s.l. : Phys Med Biol*, 767-783.
- Galeano, J. (2013). Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. Universidad Nacional de Colombia, 58.
- García, P., & De La Lanza, C. (1983). Apuntes de Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Gestal, M. (2013). Introducción a los Algoritmos Genéticos. La Coruña: Universidad de la Coruña. 54
- Gestal, M., Rivero, D., Rabuñal, J., Dorado, J., & Pazos, A. (2010). Introducción a los Algoritmos Genéticos y la Programación Genética. Universidade da Coruña, 76.
- Gil, N. (2006). ALGORITMOS GENETICOS. Universidad Nacional de Colombia, 65.
- Gómez, J. (2004). El operador derivada, sus propiedades y sus aplicaciones. Universidad Nacional Autónoma de México, 136.
- Gómez, J., & Gamboa, J. (2012). Formulación de un algoritmo genético para el problema de programación de órdenes de trabajo de una empresa de artes gráficas. *Fundación Universitaria Konrad Lorenz*, 74.
- González, B., Hernández, D., Jiménez, M., Marrero, M., & Sanabria, A. (2013). Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Problemas resueltos. Universidad de La Laguna, 11.
- Guíñez, V., Labarca, R., & Martínez, M. (2013). Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden. En V. Guíñez, R. Labarca, & M. Martínez, *Ecuaciones Diferenciales* (pág. 28). Santiago: Universidad de Santiago de Chile.
- He, Y., & Hui, C. (2010). A binary coding genetic algorithm for multi-purpose process scheduling: A case study. *Chemical Engineering Science*, 13.
- Jiménez, V. (2000). Ecuaciones y Sistemas Diferenciales Lineales. Métodos de Resolución. En V. Jiménez, *Ecuaciones Diferenciales* (pág. 96). Murcia: Universidad de Murcia.
- Jimenes, V. (2000). Ecuaciones diferenciales: cómo aprenderlas, cómo enseñarlas. Murcia: EDITUM.
- kent, R., Saff, E., & Snider, A. (2005). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Ciudad de México: Pearson Educación.
- Kent, R., Saff, E., & Snider, A. (2005). Ecuaciones Diferenciales Parciales. En R. Kent, E. Saff, & A. Snider, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (pág. 85). Ciudad de México: Pearson Education.

- Kuri-Morales, A. (2003). Solution of Simultaneous Non-Linear Equations using Genetic Algorithms. WSEAS Transactions on SYSTEMS, 44-51.
- Liu, Y. (2010). Different initial solution generators in genetic algorithms for solving the probabilistic traveling salesman problem. Applied Mathematics and Computation, 13.
- Lobo, F., & Lima, C. (2007). Adaptive Population Sizing Schemes in Genetic Algorithms. Studies in Computational Intelligence, 185-204.
- Marrugat, J., Villa, J. & Paversi, M. (1999). Supuesto de máxima indeterminación. Gaceta Sanitaria, 490.
- Massoud, F y Gambhir, S. (2003). Molecular imaging in living subjects: seeing fundamental biological processes in a new light?. California : GENES & DEVELOPMENT, 545-580.
- Masterakis, N. (2005). Solving Non-linear Equations via Genetic Algorithms. Military Institutes of University Education, 5.
- MathWorks. (2014). Global Optimization Toolbox. Natick: The MathWorks, Inc.
- Melián, B., Moreno, J., & Moreno, J. (2009). Algoritmos Genéticos. Una visión práctica. Revista de didáctica de las matemáticas, 29?47.
- Mitchell, M. (1999). An Introduction to Genetic Algorithms. London: A Bradford Book The MIT Press. 55
- Navarrina, F., Colominas, I., Casteleiro, M., Gomez, H., & París, J. (2005). Método de Residuos Ponderados: Problemas de Equilibrio 1D. Coruña: Universidad de La Coruña.
- Nayak, T., & Dash, T. (2012). Solution to Quadratic Equation Using Genetic Algorithm. Odisha: National Institute of Science and Technology.
- Peral, I. (2007). Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.
- Plaat, O. (1974). Ecuaciones Lineales. En O. Plaat, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (pág. 51). Barcelona: Editorial Reverté, s.a.
- Rajakumar, B., & Aloysius, G. (2013). APOGA: An Adaptive Population Pool Size Based Genetic Algorithm. AASRI Conference on Intelligent Systems and Control , 9.
- Rámirez, A. (2012). Métodos iterativos de solución de SEL. Universidad de Guanajuato, 23.
- Reddy, J. (1993). An Introduction to the Finite Element Method. McGraw-Hill.
- Renner, G., & Ekárt, A. (2003). Genetic algorithms in computer aided design. Computer-Aided Design, 18.
- Restrepo, L., González, J. (2007). De Pearson a Spearman. Universidad de Caldas, 10 .
- Rodríguez, R., & Zuazua, E. (2013). Series de Fourier y fenómeno de Gibbs. Universidad Complutense de Madrid, 41.
- Rojas, O. (2009). Diseño e Implementación de un Algoritmo Paralelo para la Solución de la Ecuación Diferencial del Transporte de la Luz en Medios Difusos, mediante Elementos Finitos. Universidad Santiago de Chile, 151.
- Rojas, O., & Rannou, F. (2009). Modelamiento y simulación de la difusión de fotones de luz en medios turbios utilizando elementos finitos y computo paralelo. Universidad de Santiago de Chile, 4.
- Romero, S., Moreno, F., & Rodríguez, I. (2001). Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP's). Huelva: Universidad de Huelva.
- Rudolph, G. (1994). Convergence Analysis of Canonical Genetic Algorithms. IEEE Transactions on Neural Networks, 96-101.
- Sánchez, L., & Legua, M. (2006). Ecuaciones diferenciales y transformadas de Laplace con aplicaciones. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.

- Simmons, G., & Krantz, S. (2007). Ecuaciones diferenciales. Monterrey: Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.
- Stewart, J. (2007). Cálculo. Trascendentes tempranas, 4a. edición. Ciudad de México: Thomson Learning. 56
- Tarvainen, T. (2006). Computational Methods for Light in Transport in Optical Tomography. Kuopio, University Publications C. Natural and Environmental Sciences, 2006.
- Varona, J. (1996). Métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Logroño: Universidad de La Rioja.
- Vera, A. (2007). Factorización LU. Universidad de Puerto Rico, 6.
- Vidal, A. (2013). Algoritmos Heurísticos en Optimización. Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela.
- Weinberger, H. (1965). Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. Barcelona: Reverté, S. A.
- Wolsson, K. (1989). A condition equivalent to linear dependence for functions with vanishing Wronskian. Linear Algebra and its Applications, 8.
- Wongrat, W., Younes, A., Elkamel, A., Douglas, P., & Lohi, A. (2009). Control vector optimization and genetic algorithms for mixed-integer dynamic optimization in the synthesis of rice drying processes. University of Waterloo, 21.
- Xu, X., Liang, X., & Ren, J. (2007). Optimization of heat conduction using combinatorial optimization algorithms. International Journal of Heat and Mass Transfer, 8.
- Yao, S., Sun, J., & Zettl, A. (2014). Symplectic geometry and dissipative differential operators. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 10-15.
- Zhou, G., Min, H., & Gen, M. (2003). A genetic algorithm approach to the bi-criteria allocation of customers to warehouses. International Journal of Production Economics, 35 - 45.
- Zill, D. (1997). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Ciudad de México: International Thomson Publishing Company .

# Anexo A

## Teoría ecuaciones diferenciales ordinarias

En este anexo se exponen métodos determinísticos para la solución de EDOs, en la sección A.1 se explican métodos para EDOs de orden 1, en la sección A.2 se explican métodos para EDOs de orden 2 y en la sección A.3 se explica como es la resolución para EDOs de orden mayor que 2.

### A.1. Ecuaciones diferenciales de orden 1

En la sección 1.1 (pag 3) se dijo que estas EDOs son de la forma  $f(x, y, y') = 0$ . A continuación se explican métodos determinísticos para la solución de EDOs de orden 1.

#### a) Ecuación de variables separable

Si una ecuación como  $f(x, y, y') = 0$  mediante operaciones algebraicas (Varona, 1996) se lleva a la forma:

$$h(y)dy = g(x)dx \quad (\text{A.1})$$

Se dice que es ecuación de variables separable. Entonces al integrar en ambos lados queda:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx \quad (\text{A.2})$$

$$H(y) = G(x) + C \quad (\text{A.3})$$

Donde  $H$  y  $G$  son las primitivas de  $h$  y  $g$ . Es decir:

$$H'(y) = h(y) \quad (\text{A.4})$$

$$G'(x) = g(x) \quad (\text{A.5})$$

Es bueno despejar  $y$  de la ecuación (A.3), si se puede, es decir obtener una expresión como la ecuación (A.6).

$$y = H^{-1}(G(x) + C) \quad (\text{A.6})$$

#### b) Ecuación lineal

Esta ecuación es de la forma (Campos & Chiralt, 2011):

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (\text{A.7})$$

Su solución está dada por la ecuación (A.8).

$$y \cdot u(x) - \int u(x) \cdot Q(x) dx = C \quad (\text{A.8})$$

Donde:

$$u(x) = e^{\int P(x) dx} \quad (\text{A.9})$$

c) Ecuación exacta

Sea la ecuación de forma:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (\text{A.10})$$

La ecuación es exacta (Simmons & Krantz, 2007) si se cumple:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{A.11})$$

Si (A.11) se cumple, entonces existe una función  $f(x, y)$  tal que cumple en las ecuaciones (A.12) y (A.13).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q \quad (\text{A.13})$$

Pero al remplazar las ecuaciones (A.12) y (A.13) en la ecuación (A.10), se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad (\text{A.14})$$

Lo que implica:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Por lo que la solución está dada por la ecuación (A.16).

$$f(x, y) = C \quad (\text{A.16})$$

Además si una ecuación como en (A.10), no es exacta, se puede convertir en ecuación exacta usando los factores de integración (Braun, 1990) que se muestran en las fórmulas (A.17) y (A.18).

$$u(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx} \quad (\text{A.17})$$

$$u(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy} \quad (\text{A.18})$$

d) Ecuación homogénea

Sea la ecuación de forma:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (\text{A.19})$$

La ecuación A.19 es homogénea (Zill, 1997), si  $P(tx, ty) = t^\alpha \cdot P(x, y)$  y  $Q(tx, ty) = t^\alpha \cdot Q(x, y)$ , donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Al usar el cambio de variable  $z = \frac{y}{x}$ , la ecuación se transforma en una ecuación de variables separable (González, Hernández, Jiménez, Marrero, & Sanabria, 2013).

## A.2. Ecuaciones diferenciales de orden 2

En la sección 1.1 (pag 3) se dijo que estas EDOs son de la forma  $f(x, y, y', y'') = 0$ . A continuación se explican métodos determinísticos para la solución de EDOs de orden 2.

### 1) Ecuaciones homogéneas

Son ecuaciones de la forma  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ . Si  $a(x)$ ,  $b(x)$  y  $c(x)$  son coeficientes constantes, entonces se tiene la ecuación (A.20) (Boyce & DiPrima, 2000).

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{A.20})$$

Donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , para hallar la solución de la ecuación (A.20) se debe resolver una ecuación de 2° grado, que se denomina ecuación característica (Edwards & Penney, 2001), que se presenta en la ecuación (A.21).

$$a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0 \quad (\text{A.21})$$

Las raíces de la ecuación (A.21) indican cómo será la solución de la ecuación diferencial (A.20) (Carmona, 1998), como se muestra en la tabla A.1, donde  $A$  y  $B$  son constantes.

Raíces de $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$	Solución
$\lambda_1, \lambda_2$ reales y distintas	$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1, \lambda_2$ reales e iguales	$y = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x}$
$\lambda_1, \lambda_2$ complejas: $\alpha + \beta i$	$y = e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$

Tabla A.1: Raíces de la ecuación característica.

### 2) Ecuaciones no homogéneas

Son ecuaciones de forma  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ . Para su resolución se debe obtener 2 funciones:  $y_h$  y  $y_p$ , donde  $y_h$  corresponde a la solución de  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ , y  $y_p$  corresponde a una solución particular que depende del tipo de función que sea  $f(x)$  (Gutiérrez, Labarca, & Martínez, 2013).

La solución final va estar dada por la fórmula (A.22) (Jiménez, 2000).

$$y = y_h + y_p \quad (\text{A.22})$$

A continuación se explican 2 métodos para encontrar  $y_p$ .

#### a) Método de coeficientes indeterminados

Sea la ecuación de coeficientes constantes en (A.23) (Stewart, 2007).

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (\text{A.23})$$

En la tabla A.2 se expone el tipo de función que es  $y_p$ .

$f(x) =$	$y_p =$
$c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$	$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$
$ce^{kx}$	$ae^{kx}$
$c \cdot \cos(wx) + d \cdot \sin(wx)$	$a \cdot \cos(wx) + b \cdot \sin(wx)$
Modificación: si $y_p$ coincide con $y_h$ , se multiplica $y_p$ por $x$ (o $x^2$ si es necesario)	

Tabla A.2: Tipo de función de la solución particular.

Entonces  $y_p$  se reemplaza en la ecuación A.23 y se hallan los coeficientes correspondientes (Acero & López, 2007).



b) Método de variación de parámetros

La solución particular está dada por la fórmula (A.24) (Becerril & Elizarraraz, 2004):

$$y_p = y_1(x) \cdot v_1(x) + y_2(x) \cdot v_2(x) \quad (\text{A.24})$$

Donde  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  son parte de la solución homogénea  $y_h$  (en que  $y_h$  se expresa como  $y_h = Ay_1(x) + By_2(x)$ ), y  $v_1(x)$  y  $v_2(x)$  están dados por las fórmulas (A.25) y (A.26).

$$v_1(x) = \int \frac{-y_2(x) \cdot f(x)}{a(x) \cdot W(y_1, y_2)} dx \quad (\text{A.25})$$

$$v_2(x) = \int \frac{y_1(x) \cdot f(x)}{a(x) \cdot W(y_1, y_2)} dx \quad (\text{A.26})$$

Donde  $W(y_1, y_2)$  se denomina Wronskiano (Wolsson, 1989) y su cálculo se muestra en la fórmula (A.27).

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (\text{A.27})$$

### A.3. Ecuaciones diferenciales de orden $n$

En la sección 1.1 (pag 3) se dijo que estas EDOs son de la forma  $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , donde  $y^{(n)}$  es la  $n$ -sima derivada. La resolución de estas ecuaciones es análoga a la resolución de las ecuaciones de orden 2 (Braun, 1990).

Por ejemplo si se tiene una ecuación de orden  $n$  homogénea de coeficientes constantes, se aplica el mismo procedimiento descrito en la sección A1.2 1). Si la ecuación es no homogénea, el método de los coeficientes indeterminados se aplica de forma análoga a lo descrito en la sección A1.2 2)a) (Plaat, 1974), no ocurre lo mismo con el método de variación de parámetros.

# Anexo B

## Algoritmos genéticos

En este anexo se describen las características de los algoritmos genéticos (AG), operaciones del AG, el algoritmo en pseudocódigo, funcionamiento del AG y conceptos importantes como: el cromosoma y la función de Fitness.

Los algoritmos genéticos son métodos adaptativos que se usan en problemas de búsqueda y optimización, se basan en el principio de supervivencia del más apto (Gestal, Rivero, Rabuñal, Dorado, & Pazos, 2010), que corresponden a los que se seleccionan para ser reproducidos y mutados, obteniendo la siguiente generación de individuos que estarán más adaptados que la generación anterior (Arranz & A, 2013). Entonces los individuos que tengan mejor adaptabilidad se conservarán y los que no se rechazarán.

Del punto de vista biológico, los individuos se adaptan a su entorno para sobrevivir mediante el proceso de evolución, en el cual aquellos aspectos o cambios que favorecen su competitividad son preservados, y aquellos aspectos que debilitan su adaptación son eliminados (Cabaellero, Molina, Luque, Torrico, & Gomez, 2013). Es así como opera los algoritmos genéticos en problemas de búsqueda y optimización.

En la implementación del sistema se podrá observar ciertas características de los algoritmos genéticos, que se describen a continuación (Gil, 2006):

- Los AG tienen descendencia múltiple, pueden explorar el espacio de soluciones en múltiples direcciones a la vez. Otros algoritmos son en serie y sólo pueden explorar el espacio de soluciones hacia una solución en una dirección al mismo tiempo, y si la solución que descubren resulta subóptima, se inicia el trabajo de nuevo.
- Los AG se desenvuelven bien en problemas que la función objetivo es discontinua, cambia con el tiempo, o tiene muchos óptimos locales
- Los AG manipulan muchos parámetros simultáneamente. Variados problemas de la vida real no pueden definirse en términos de un único valor que hay que minimizar o maximizar, sino que deben expresarse en términos de múltiples objetivos.
- El problema de cómo escribir la función objetivo debe considerarse cuidadosamente para que se pueda alcanzar una mayor aptitud. Si se elige mal una función objetivo o se define de manera inexacta, el AG será incapaz de encontrar una solución al problema, o puede acabar resolviendo el problema equivocado.
- Se debe elegir cuidadosamente los otros parámetros de un AG -el tamaño de la población, ritmo de mutación y cruzamiento, el tipo y fuerza de la selección. Si el tamaño de la población es demasiado pequeño, puede que el AG no explore suficientemente el espacio de soluciones para encontrar buenas soluciones consistentemente.
- Un problema muy conocido que puede surgir con un AG se conoce como convergencia prematura. Si un individuo que es más apto que la mayoría de sus competidores emerge muy pronto en el curso de la ejecución, originaría que el algoritmo converja hacia el óptimo local que representa ese individuo, en lugar de rastrear el paisaje adaptativo lo bastante a fondo para encontrar el óptimo global.

Cualquier solución a un problema se representa dando valores a una serie de parámetros, estos parámetros se codifican en una cadena de valores denominada cromosoma (Gestal, 2013), en el capítulo 2, se muestra como funciona el cromosoma. Entre las características del cromosoma están:

- Se asigna un determinado número de bits a cada parámetro (o individuo).
- El número de bits asignados depende del grado de ajuste que se desee alcanzar.
- Los parámetros no necesariamente deben estar codificados con el mismo número de bits.
- Existen situaciones donde se determina la cantidad de bits de cada individuo, si no existe una situación donde se determine la cantidad de bits, entonces la cantidad de bits se asigna al azar.
- La asignación en bits a los individuos, se hace al azar.

En la formulación (B.1), se muestra un cromosoma que codifica 3 parámetros (o individuos).

$$C = \{11010, 011, 10110\} \quad (B.1)$$

Donde:

Parámetro 1: 11010  
Parámetro 2: 011  
Parámetro 3: 10110

En los problemas de optimización se busca minimizar o maximizar una función denominada función de Fitness, esta función evalúa cada parámetro del cromosoma. Los parámetros mejor evaluados se seleccionan para la siguiente generación y este proceso se repite consecutivamente (Estévez, 1997). La condición de término es una de las siguientes:

- Establecer un cierto número de generaciones (Zhou, Min, & Gen, 2003).
- Establecer un margen de error (He & Hui, 2010).

Si el tamaño de la población inicial es demasiado pequeña, el AG puede no obtener la solución más óptima, aunque si el tamaño es muy grande, el AG computacionalmente es ineficiente (Lobo & Lima, 2007). Lo mejor es que el tamaño de la población inicial no sea ni tan grande ni tan pequeño. Además si disminuye el tamaño de la población, aumenta la optimización en cierta medida y si aumenta el tamaño de la población, aumenta la fiabilidad de la optimización (Rajakumar & Aloysius, 2013).

El AG realiza 4 operaciones para encontrar la solución más óptima, estas son:

- 1) Cruce: Se elige un punto de corte al azar entre 2 cromosomas y se intercambia las subsecuencias que están antes y después de ese punto de corte, para crear 2 hijos (Mitchell, 1999).
- 2) Mutación: Se cambia al azar algunos de los bits del cromosoma, pero este cambio puede empeorar la aptitud del cromosoma mutado (Vidal, 2013).
- 3) Evaluación: se determina el valor de un individuo dada la función de Fitness (Gómez & Gamboa, 2012).
- 4) Selección: Se elige los individuos mejor adaptados (mejor evaluados) para la siguiente generación (Melián, Moreno, & Moreno, 2009).

Para comprender mejor cómo funciona el AG, la figura B.1 muestra el funcionamiento del AG (Renner & Ekárt, 2003).

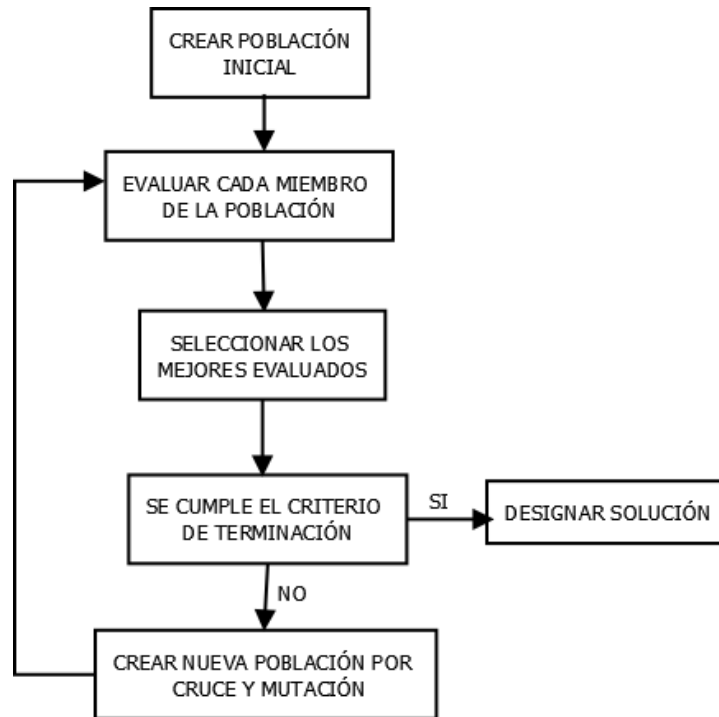


Figura B.1: Funcionalidad del algoritmo genético.

Además el funcionamiento del AG se describe en pseudocódigo (Gestal, Rivero, Rabuñal, Dorado, & Pazos, 2010) en el algoritmo 4, de manera que la implementación del AG se realiza fácilmente, si se comprende el algoritmo 4.

---

**Algoritmo 4** Funcionalidad del algoritmo genético.

---

**Entrada:** Cantidad de generaciones, cantidad de individuos.

**Salida:** Individuos seleccionados de la última iteración.

Iniciar contador generaciones en cero

**mientras** No se cumpla el criterio de terminación **hacer**

    Crear población temporal

**mientras** Población temporal no esté llena **hacer**

        Cruzar padres

        Mutar uno de los hijos

        Evaluar los hijos

        Seleccionar los hijos mejores evaluados a la población temporal

**fin mientras**

    Aumentar contador generaciones

    Establecer la población temporal como población actual

**fin mientras**

Designar solución la población actual

---

## Anexo C

# Resolución de la ecuación del calor y ecuación de sequedad de arroz mediante algoritmos genéticos

En este anexo se explica como se resuelve mediante AG dos ecuaciones diferenciales especiales, que son la ecuación del calor y la ecuación de sequedad de arroz. En particular se determina el cromosoma y la función de Fitness.

En la ecuación del calor, se da una situación física en que se tiene una varilla delgada de longitud  $\pi$ , cuyos extremos se mantienen a  $0^\circ$  Celsius y su superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura está dada por una función  $f(x)$ , entonces existe una función  $u(x, t)$  que representa la temperatura de la varilla en la sección transversal de abscisa  $x$  y en el tiempo  $t$  (Cañada, 2006). La ecuación en derivadas parciales que representa este problema está dada por la ecuación (C.1).

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (C.1)$$

Donde  $k \in \mathbb{R}$ ,  $0 < x < \pi$  y  $t > 0$ . Las condiciones de fronteras para C.1 son las mismas de la ecuación de calor en la sección 1.2 (pag 5), se había dicho que una condición de frontera es  $u(x, 0) = f(x)$ , dependiendo del tipo de función que sea  $f(x)$ , se determina la dificultad en resolver la ecuación C.1 de forma determinística junto a las condiciones de frontera, la solución numérica puede ser costosa en términos de tiempo. Los AG encuentran una solución rápida en eficiencia sobre todo si se usan técnicas de paralelismo.

En la ecuación C.1, si se da una situación en que un material se compone de  $M$  secciones, en las cuales existen distintas conducciones de calor, la ecuación a este problema estaría dada por (C.2).

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k_p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (C.2)$$

Donde  $k_p$  es diferente en las  $M$  secciones del material, si se desea encontrar la máxima temperatura en las  $M$  secciones en cada iteración y después de ciertas iteraciones, obtener la mínima de las máximas temperaturas halladas. La solución mediante el A. G consiste en (Xu, Liang, & Ren, 2007):

- i) Elegir los  $k_p$  como población inicial.
- ii) Calcular la máxima temperatura de cada cromosoma.
- iii) Ordenar la población por la máxima temperatura (de mayor a menor) y generar reproducción.
- iv) Realizar cruce entre 2 individuos.

v) Realizar mutación.

vi) Si se cumple la condición de termino, fin; sino ir al paso (ii).

De acuerdo con i), el AG codifica los  $k_p$  al cromosoma, como se muestra en la formulación (C.3).

$$C = \{k_{p1}, k_{p2}, \dots, k_{pM}\} \quad (C.3)$$

Como se quiere obtener la mínima de las máximas temperaturas halladas, la función de Fitness se define en la formulación (C.4).

$$F = \min(\max(u_{i-1}, u_i)), i = 1 \dots n \quad (C.4)$$

A partir de los  $k_{pi}$  del cromosoma (C.3), estos se remplazan en la ecuación (C.2), obteniendo temperaturas  $u_i$ , de estas se selecciona la mayor, después los  $k_{pi}$  se remplazan en cada ecuación de las  $M$  secciones del material (en cada ecuación se selecciona la mayor temperatura), aquellas  $u_i$  que al ser evaluadas en la función (C.4) cumplen con la condición, se le seleccionan los  $k_{pi}$  asociados para la siguiente generación.

En el caso de que en un problema cuya ED está modelada por la ecuación del calor y está presente una fuerza  $G(t)$  en la posición  $x^*$ , la ecuación (C.2) se convierte en la ecuación (C.5).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(t)\delta(x - x^*) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, 0 < x < 1, t > 0 \quad (C.5)$$

Donde  $\delta$  es la función Delta Dirac (Dang & Ehrhardt, 2012), la ecuación (C.5) está sujeta a las condiciones de frontera que se muestran en la formulación (C.6).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (C.6)$$

Las temperaturas en cierta posición  $x^*$ , se pueden conocer a partir de experimentos pero la fuerza  $G(t)$  se desconoce, si se estima  $G(t)$  se puede calcular  $u(x, t)$ . En el problema presente puede haber  $n$  fuerzas  $G(t)$ , así que el algoritmo genético crea una población inicial de individuos  $G_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ , como se muestra en la formulación (C.7).

$$C = \{G_1, G_2, \dots, G_n\} \quad (C.7)$$

Además en ciertos instantes se puede calcular una temperatura muestral  $v$ , cuya diferencia con la temperatura obtenida  $u$  (la cual se obtiene conociendo  $G(t)$ ) debe ser mínima, así la función de Fitness se define en la formulación (C.8).

$$F = \max \left\{ \frac{1}{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2} \right\} \quad (C.8)$$

Entonces la funcionalidad del algoritmo genético en este problema consiste en que a partir de los  $G_i$  que están en el cromosoma C.7, obtener una temperatura  $u_i$ , después obtener temperaturas muestrales  $v_i$ , evaluar las temperaturas  $u_i$  y  $v_i$  en la función C.8, los  $u_i$  que cumplan con la condición, se le seleccionan los  $G_i$  asociados para la siguiente generación.

En una estructura de arroz como la que se muestra en la figura C.1.

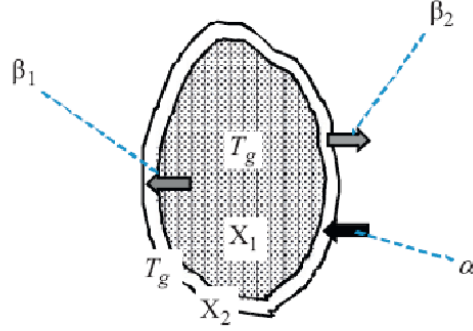


Figura C.1: Figura de la estructura del arroz.

Dónde:

- $\beta_1$  = Masa interna.
- $\beta_2$  = Masa externa.
- $\alpha$  = Calor externo.
- $T_g$  = Temperatura del grano.
- $x_1$  = Humedad del grano interior.
- $x_2$  = Humedad del grano exterior.

La transferencia de masa ocurre por difusión y vaporización, y el calor se transfiere en la superficie del grano (Wongrat, Younes, Elkamel, Douglas, & Lohi, 2009). El modelo de esta situación se describe mediante las ecuaciones (C.9) y (C.10).

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\beta_1}{\rho_g \cdot \tau_1} (x_2 - x_1) \quad (C.9)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-\beta_2}{\rho_g \cdot \tau_2} (x_2 - x_1) \quad (C.10)$$

Donde:

- $\rho_g$  = Densidad de la sequedad del arroz.
- $\tau_1$  = Volumen del grano interior.
- $\tau_2$  = Volumen del grano exterior.

Además se tienen las siguientes consideraciones:

- Los granos de arroz en una operación unitaria reciben la misma calidad de aire.
- Propiedades del aire se asumen constantes.
- La temperatura de los granos se considera uniforme.

Mediante operaciones algebraicas se obtienen dos EDO, obtener la solución determinística no es gran dificultad ni tampoco lo sería la solución numérica en el caso de que  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\rho_g$ ,  $\tau_1$  y  $\tau_2$  sean constantes, si son coeficientes variables, entonces tanto la solución determinística como numérica son costosas. El AG busca una solución rápida en términos de eficiencia.

En la ecuación del proceso de sequedad de arroz, la sequedad debe disminuir por lo que las humedades  $x_1$  y  $x_2$  deben aumentar. Para  $n$  arroz, se tiene:

$$x_{1i} \geq x_{1(i-1)} \Rightarrow x_{1i} - x_{1(i-1)} \geq 0 \quad (C.11)$$

$$x_{2i} \geq x_{2(i-1)} \Rightarrow x_{2i} - x_{2(i-1)} \geq 0 \quad (C.12)$$

Donde  $i = 1, 2, \dots, n$ , el cromosoma se muestra en la formulación (C.13).

$$C = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}\} \quad (C.13)$$

Como las humedades aumentan, la función de Fitness minimiza el error entre las soluciones, esta función se muestra en la formulación (C.14).

$$F = \min \left\{ \sum_{i=1}^n (x_{1i} - x_{1(i-1)})^2 + \sum_{i=1}^n (x_{2i} - x_{2(i-1)})^2 \right\} = \min \left\{ \sum_{i=1}^n [(x_{1i} - x_{1(i-1)})^2 + (x_{2i} - x_{2(i-1)})^2] \right\} \quad (C.14)$$



## Anexo D

# Resolución de MEF en la EAD

En este anexo se resuelve la ecuación de aproximación de la difusión (D.1) mediante el MEF.

$$-\nabla k(r) \nabla \phi(r) + u_a(r) \phi(r) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(r)}{\partial t} = q_0(r) \quad (\text{D.1})$$

$$-\nabla k(r) \nabla \phi(r) + u_a(r) \phi(r) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(r)}{\partial t} = q_0(r) / \cdot \psi(r)$$

$$-\nabla k(r) \nabla \phi(r) \psi(r) + u_a(r) \phi(r) \psi(r) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(r)}{\partial t} \psi(r) = q_0(r) \psi(r) / \int_{\Omega} d\Omega$$

$$\int_{\Omega} -\nabla k(r) \nabla \phi(r) \psi(r) d\Omega + \int_{\Omega} u_a(r) \phi(r) \psi(r) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(r)}{\partial t} \psi(r) d\Omega = \int_{\Omega} q_0(r) \psi(r) d\Omega \quad (\text{D.2})$$

Pero según la fórmula de Green (D.3).

$$\int_{\Omega} -\nabla k(r) \nabla \phi(r) \psi(r) d\Omega = \int_{\Omega} k(r) \nabla \phi(r) \nabla \psi(r) d\Omega + \int_{\partial\Omega} -k(r) (n(r) \nabla \phi(r)) \psi(r) d(\partial\Omega) \quad (\text{D.3})$$

Entonces al remplazar (D.3) en la ecuación (D.2), queda:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k(r) \nabla \phi(r) \nabla \psi(r) d\Omega + \int_{\partial\Omega} -k(r) (n(r) \nabla \phi(r)) \psi(r) d(\partial\Omega) + \int_{\Omega} u_a(r) \phi(r) \psi(r) d\Omega + \\ \int_{\Omega} \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(r)}{\partial t} \psi(r) d\Omega = \int_{\Omega} q_0(r) \psi(r) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

La solución  $\phi(r)$  se aproxima a una base lineal de la forma:

$$\phi(r) = \sum_{j=1}^N \phi_j \psi_j(r) \quad (\text{D.5})$$

Entonces al remplazar (D.5) en la ecuación (D.4), se obtiene la ecuación (D.6). La función de prueba  $\psi(r)$  queda como función  $\psi_i(r)$ , asumiendo que el problema está formulado en un dominio de dos dimensiones y no existe reflexión en el borde del dominio.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k(r) \nabla \sum_{j=1}^N \phi_j \psi_j(r) \nabla \psi_i(r) d\Omega + \int_{\partial\Omega} -k(r) \left( n(r) \nabla \sum_{j=1}^N \phi_j \psi_j(r) \right) \psi_i(r) d(\partial\Omega) + \\ \int_{\Omega} u_a(r) \sum_{j=1}^N \phi_j \psi_j(r) \psi_i(r) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{c} \frac{\partial \sum_{j=1}^N \phi_j \psi_j(r)}{\partial t} \psi_i(r) d\Omega = \int_{\Omega} q_0(r) \psi_i(r) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} k(r) \nabla \phi_j \psi_j(r) \nabla \psi_i(r) d\Omega + \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega} -k(r) (n(r) \nabla \phi_j \psi_j(r)) \psi_i(r) d(\partial\Omega) + \\ & \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} u_a(r) \phi_j \psi_j(r) \psi_i(r) d\Omega + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_j \psi_j(r)}{\partial t} \psi_i(r) d\Omega = \int_{\Omega} q_0(r) \psi_i(r) d\Omega \end{aligned} \quad (D.7)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Omega} k(r) \nabla \psi_j(r) \nabla \psi_i(r) d\Omega \right) \phi_j + \sum_{j=1}^N \left( \int_{\partial\Omega} -k(r) (n(r) \nabla \psi_j(r)) \psi_i(r) d(\partial\Omega) \right) \phi_j + \\ & \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Omega} u_a(r) \psi_j(r) \psi_i(r) d\Omega \right) \phi_j + \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Omega} \frac{1}{c} \psi_j(r) \psi_i(r) d\Omega \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial t} = \int_{\Omega} q_0(r) \psi_i(r) d\Omega \end{aligned} \quad (D.8)$$

A las integrales se les puede asignar como coeficientes:

$$k_{ij} = \int_{\Omega} k(r) \nabla \psi_j(r) \nabla \psi_i(r) d\Omega \quad (D.9)$$

$$b_{ij} = \int_{\partial\Omega} -k(r) (n(r) \nabla \psi_j(r)) \psi_i(r) d(\partial\Omega) \quad (D.10)$$

$$c_{ij} = \int_{\Omega} u_a(r) \psi_j(r) \psi_i(r) d\Omega \quad (D.11)$$

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{c} \psi_j(r) \psi_i(r) d\Omega \quad (D.12)$$

$$q_i = \int_{\Omega} q_0(r) \psi_i(r) d\Omega \quad (D.13)$$

Entonces, se tiene:

$$\sum_{j=1}^N k_{ij} \phi_j + \sum_{j=1}^N b_{ij} \phi_j + \sum_{j=1}^N c_{ij} \phi_j + \sum_{j=1}^N m_{ij} \frac{\partial \phi_j}{\partial t} = q_i$$

$$(\sum_{j=1}^N k_{ij} + \sum_{j=1}^N b_{ij} + \sum_{j=1}^N c_{ij}) \phi_j + \sum_{j=1}^N m_{ij} \frac{\partial \phi_j}{\partial t} = q_i$$

$$\sum_{j=1}^N (k_{ij} + b_{ij} + c_{ij}) \phi_j + \sum_{j=1}^N (m_{ij}) \frac{\partial \phi_j}{\partial t} = q_i \quad (D.14)$$

En notación matricial la expresión (D.14) queda como la ecuación (D.15), donde  $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]^t$ .

$$(K + B + C) \phi + M \frac{\partial \phi}{\partial t} = Q \quad (D.15)$$

Se debe calcular las integrales de la ecuación (D.9) a (D.13), y al simplificar de forma algebraica la ecuación (D.15) se procede a resolver el sistema de ecuaciones. Si se quiere resolver la ecuación (D.15) en estado estable, se tiene que  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$  y luego el sistema es  $F \cdot \phi = Q$ , donde  $F = K + B + C$  es simétrica, definida positiva y dispersa.

## Anexo E

# Tablas del modelamiento funcional

La descripción de los flujos de datos que corresponden al nivel 1 y nivel 2, se exponen de la tabla E.1 hasta la tabla E.13.

Flujo de datos	tam_población_válida
Descripción	Tamaño válido de la población
Origen	Control de datos de entrada
Destino	Cálculo de soluciones

Tabla E.1: Descripción de tam\_población\_válida.

Flujo de datos	generaciones_válida
Descripción	Cantidad válida de generaciones
Origen	Control de datos de entrada
Destino	Cálculo de soluciones

Tabla E.2: Descripción de generaciones\_válida.

Flujo de datos	matriz
Descripción	Matriz del sistema de ecuaciones a trabajar
Origen	Control de datos de entrada
Destino	Cálculo de soluciones

Tabla E.3: Descripción de matriz.

Flujo de datos	vector
Descripción	Vector del sistema de ecuaciones a trabajar
Origen	Control de datos de entrada
Destino	Cálculo de soluciones

Tabla E.4: Descripción de vector.

Flujo de datos	geometría
Descripción	Conjunto de nodos, elementos y fronteras del dominio
Origen	Control de datos de entrada
Destino	Gráficas de espectro

Tabla E.5: Descripción de geometría.

Flujo de datos	sol_obtenidas
Descripción	Conjunto de la solución numérica y solución AG
Origen	Cálculo de soluciones
Destino	Cómputo de medidas

Tabla E.6: Descripción de sol\_obtenidas.

Flujo de datos	sol_numérica
Descripción	Solución numérica del sistema de ecuaciones
Origen	Calculo de soluciones
Destino	Gráficas de espectro

Tabla E.7: Descripción de sol\_numérica.

Flujo de datos	sol_ag
Descripción	Solución obtenida del sistema de ecuaciones mediante AG
Origen	Cálculo de soluciones
Destino	Gráficas de espectro

Tabla E.8: Descripción de sol\_ag.

Flujo de datos	X0
Descripción	Población inicial a usar en el AG
Origen	Generación población inicial
Destino	Aplicación de AG

Tabla E.9: Descripción de X0.

Flujo de datos	F
Descripción	Función de Fitness a usar en el AG
Origen	Determinación de función de Fitness
Destino	Aplicación de AG

Tabla E.10: Descripción de F.

Flujo de datos	R
Descripción	Restricción de las soluciones del AG
Origen	Determinación de restricción
Destino	Aplicación de AG

Tabla E.11: Descripción de R.

Flujo de datos	valores_sol_ag
Descripción	Valores de la solución AG
Origen	Aplicación de AG
Destino	Filtrado de soluciones

Tabla E.12: Descripción de valores\_sol\_ag.

Flujo de datos	valores_sol_numérica
Descripción	Valores de la solución numérica
Origen	Cálculo de solución numérica
Destino	Filtrado de soluciones

Tabla E.13: Descripción de valores\_sol\_numérica.

La descripción del proceso "Aplicación" se expone en la tabla E.14 y la descripción de los subprocesos se exponen de la tabla E.15 hasta la tabla E.20.

Proceso	Aplicación
Número	0
Descripción	Aplicación adaptativa
Entrada	dim_sel num_fuente tam_población generaciones
Salida	espectro_sol_ag espectro_sol_numérica medidas

Tabla E.14: Descripción del proceso Aplicación.

Proceso	Generación población inicial
Número	2.1
Descripción	INICIO OBTENER tam_población_válida CALCULAR X0 ENVIAR X0 FIN
Entrada	tam_población_válida
Salida	X0

Tabla E.15: Descripción del proceso Generación población inicial.

Proceso	Determinación de función de Fitness
Número	2.2
Descripción	INICIO LEER matriz, vector CALCULAR F ENVIAR F FIN
Entrada	matriz, vector
Salida	F

Tabla E.16: Descripción del proceso Determinación de función de Fitness.

Proceso	Determinación de restricción
Número	2.3
Descripción	INICIO LEER matriz, vector CALCULAR R ENVIAR R FIN
Entrada	matriz, vector
Salida	R

Tabla E.17: Descripción del proceso Determinación de restricción.

Proceso	Aplicación de AG
Número	2.4
Descripción	INICIO OBTENER generaciones_válida , X0, F, R CALCULAR sol_ag ENVIAR sol_ag , valores_sol_ag FIN
Entrada	generaciones_válida , X0, F, R
Salida	sol_ag, valores_sol_ag

Tabla E.18: Descripción del proceso Aplicación de AG.

Proceso	Cálculo de solución numérica
Número	2.5
Descripción	INICIO LEER matriz, vector CALCULAR sol_numérica ENVIAR sol_numérica , valores_sol_numérica FIN
Entrada	matriz, vector
Salida	sol_numérica , valores_sol_numérica

Tabla E.19: Descripción del proceso Cálculo de solución numérica.

Proceso	Filtrado de soluciones
Número	2.6
Descripción	INICIO OBTENER valores_sol_ag , valores_sol_numérica ENVIAR sol_obtenidas FIN
Entrada	valores_sol_ag , valores_sol_numérica
Salida	sol_obtenidas

Tabla E.20: Descripción del proceso Filtrado de soluciones.



## Anexo F

# Tablas del diseño arquitectónico

La especificación de los módulos que son inferiores a los módulos principales, se exponen de la tabla F.1 hasta la tabla F.7.

Módulo	Identificar datos
Descripción	Se captan los datos del archivo de entrada
Entradas	carga de datos
Salidas	datos cargados
Módulos superiores	Controlar datos de entrada

Tabla F.1: Especificación de Identificar datos.

Módulo	Verificar datos
Descripción	Verifica que los datos de entrada sean válidos
Entradas	datos cargados
Salidas	datos válidos
Módulos superiores	Controlar datos de entrada

Tabla F.2: Especificación de Verificar datos.

Módulo	Calcular solución AG
Descripción	Permite el cálculo de la solución AG
Entradas	matriz, vector
Salidas	solución AG calculada
Módulos superiores	Calcular soluciones

Tabla F.3: Especificación de Calcular solución AG.

Módulo	Calcular solución numérica
Descripción	Permite el cálculo de la solución numérica
Entradas	matriz, vector
Salidas	solución numérica calculada
Módulos superiores	Calcular soluciones

Tabla F.4: Especificación de Calcular solución numérica.

Módulo	Mostrar medidas
Descripción	Muestra las medidas de error entre las soluciones
Entradas	medidas calculadas
Salidas	Nula
Módulos superiores	Calcular medidas

Tabla F.5: Especificación de Mostrar medidas.

Módulo	Graficar espectro solución AG
Descripción	Permite el gráfico de espectro de la solución AG
Entradas	geometría, solución AG
Salidas	espectro solución AG graficada
Módulos superiores	Graficar espectros

Tabla F.6: Especificación de Graficar espectro solución AG.

Módulo	Graficar espectro solución numérica
Descripción	Permite el gráfico de espectro de la solución numérica
Entradas	geometría, solución numérica
Salidas	espectro solución numérica graficada
Módulos superiores	Graficar espectros

Tabla F.7: Especificación de Graficar espectro solución numérica.

## Anexo G

# Gráficas de espectro de las soluciones

En este anexo se muestran gráficas de espectro de las soluciones normalizadas con el método LU y AG con distintos nodos y fuentes. De la figura G.1 hasta la figura G.6 se muestran las gráficas de 289 nodos en 1, 2 y 6 fuentes.

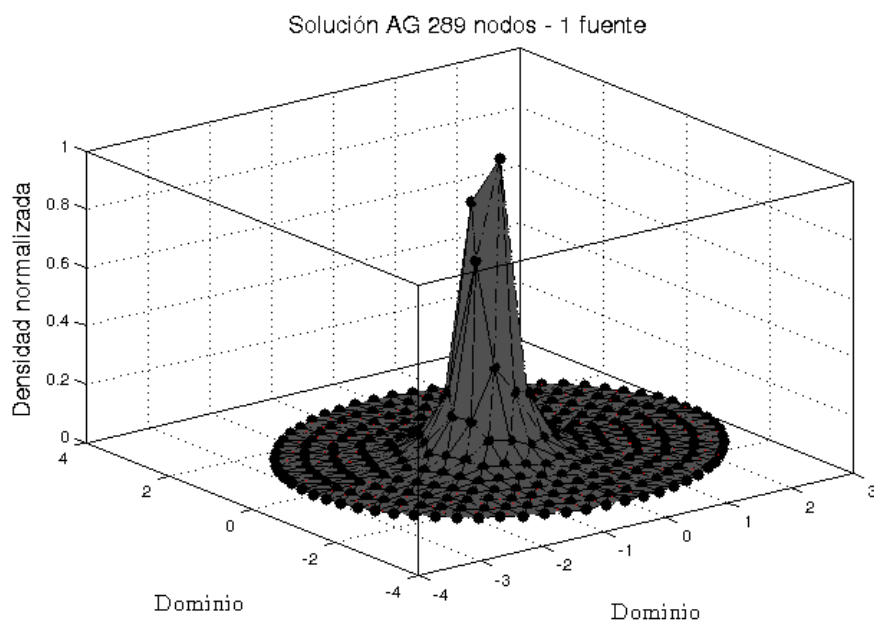


Figura G.1: Solución normalizada con algoritmos genéticos de 289 nodos y 1 fuentes.

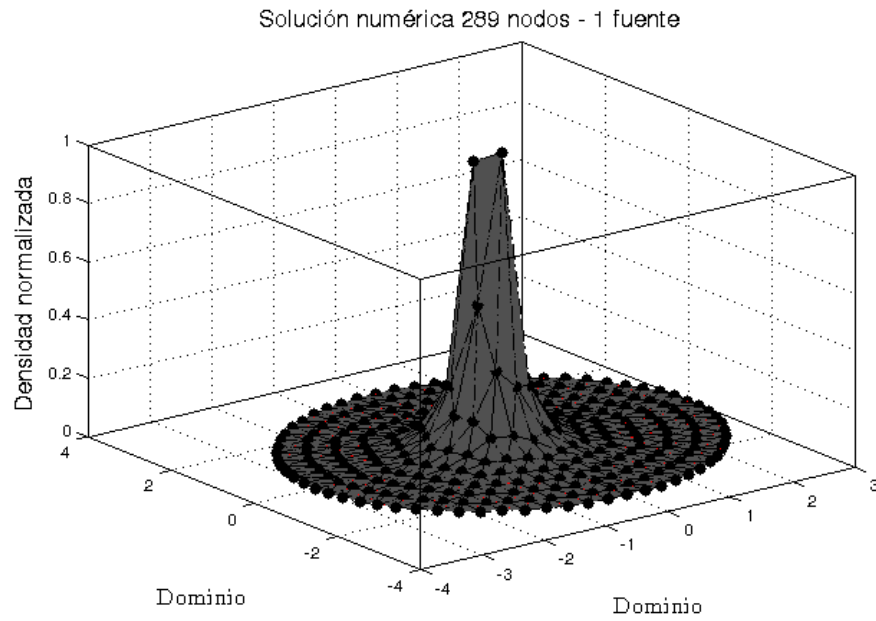


Figura G.2: Solución normalizada con método LU de 289 nodos y 1 fuentes.

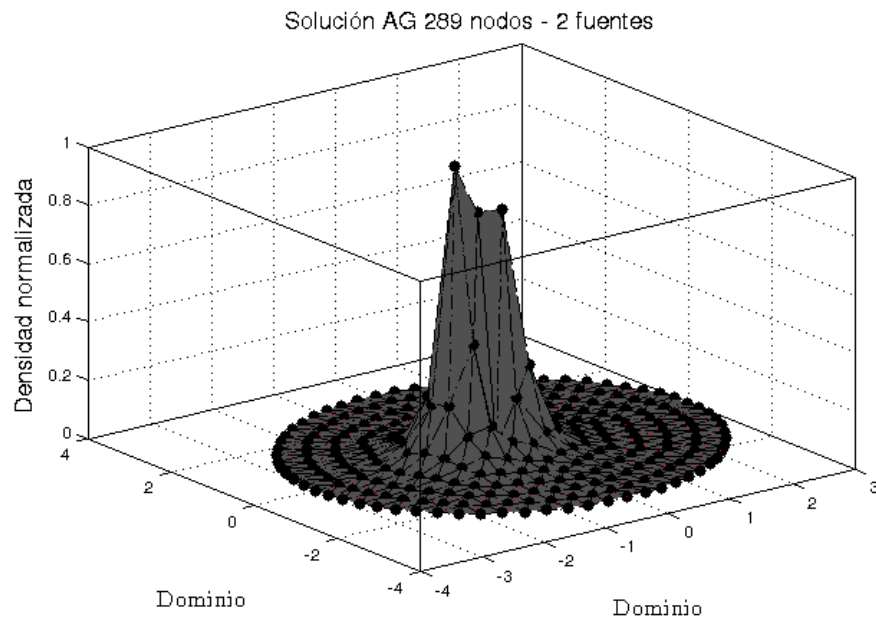


Figura G.3: Solución normalizada con algoritmos genéticos de 289 nodos y 2 fuentes.

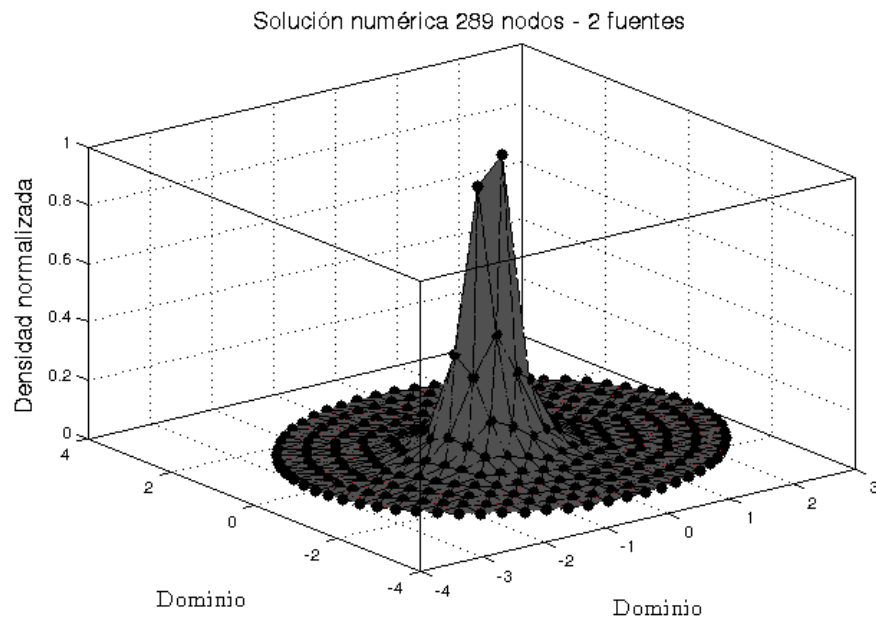


Figura G.4: Solución normalizada con método LU de 289 nodos y 2 fuentes.

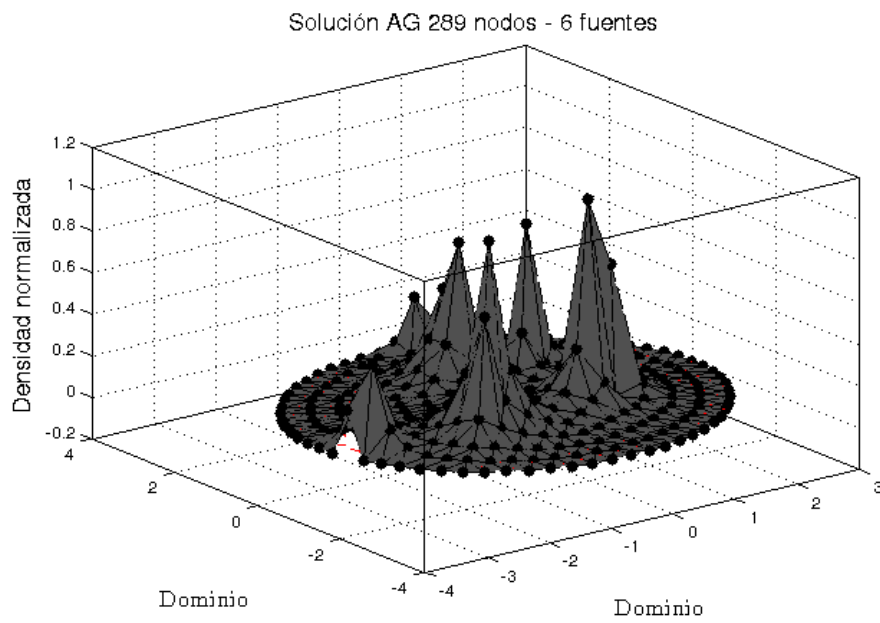


Figura G.5: Solución normalizada con algoritmos genéticos de 289 nodos y 6 fuentes.

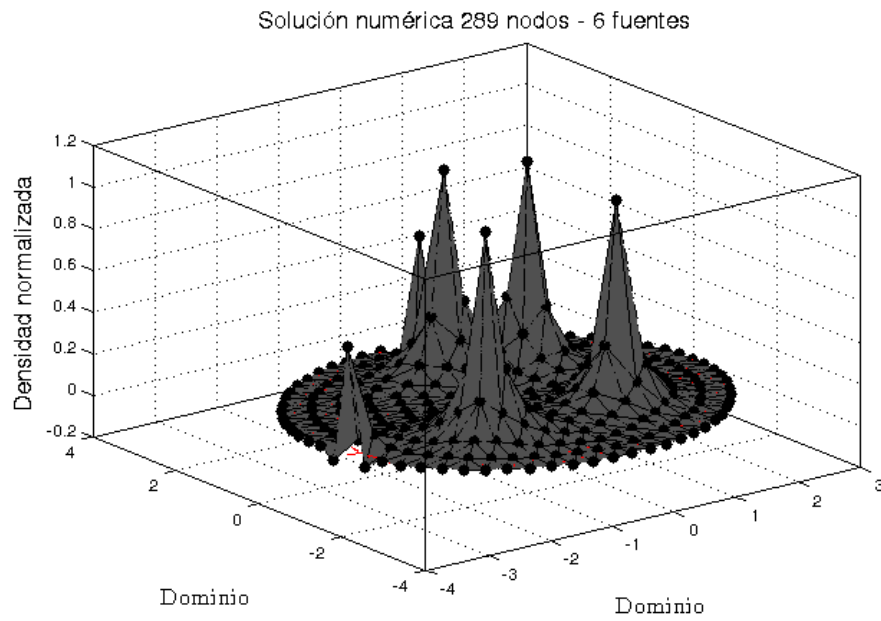


Figura G.6: Solución normalizada con método LU de 289 nodos y 6 fuentes.

De la figura G.7 hasta la figura G.10 se muestran las gráficas de las soluciones normalizadas de 1089 nodos en 4 y 5 fuentes.

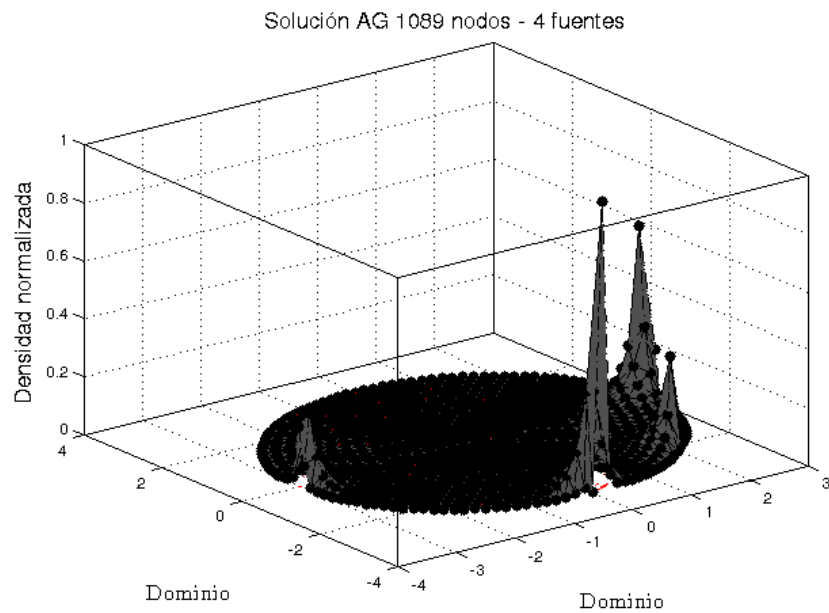


Figura G.7: Solución normalizada con algoritmos genéticos de 1089 nodos y 4 fuentes.

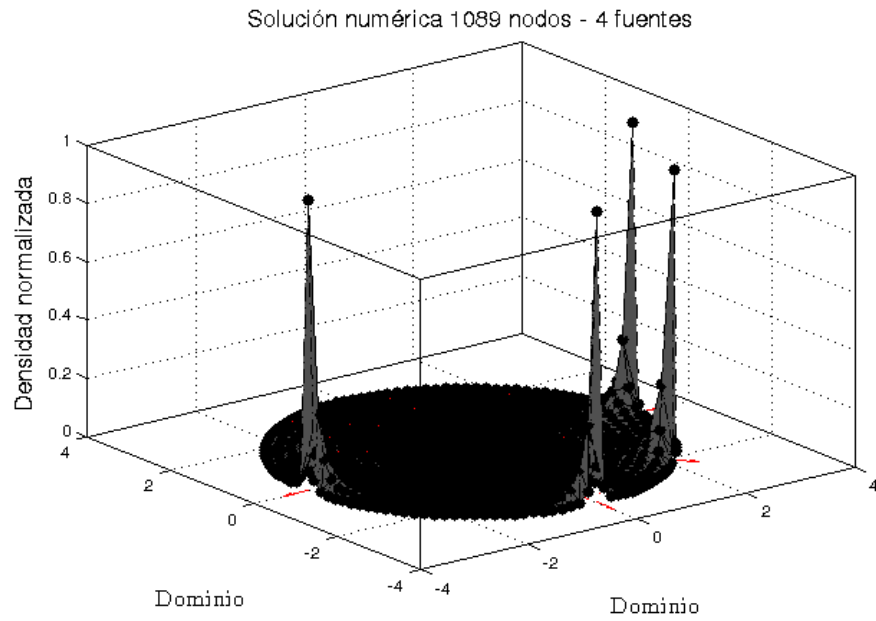


Figura G.8: Solución normalizada con método LU de 1089 nodos y 4 fuentes.

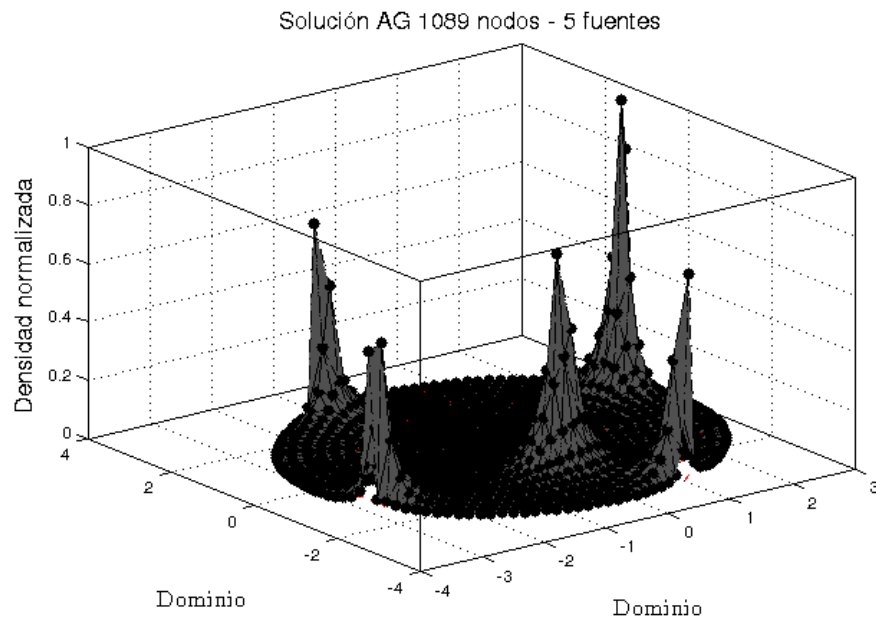


Figura G.9: Solución normalizada con algoritmos genéticos de 1089 nodos y 5 fuentes.

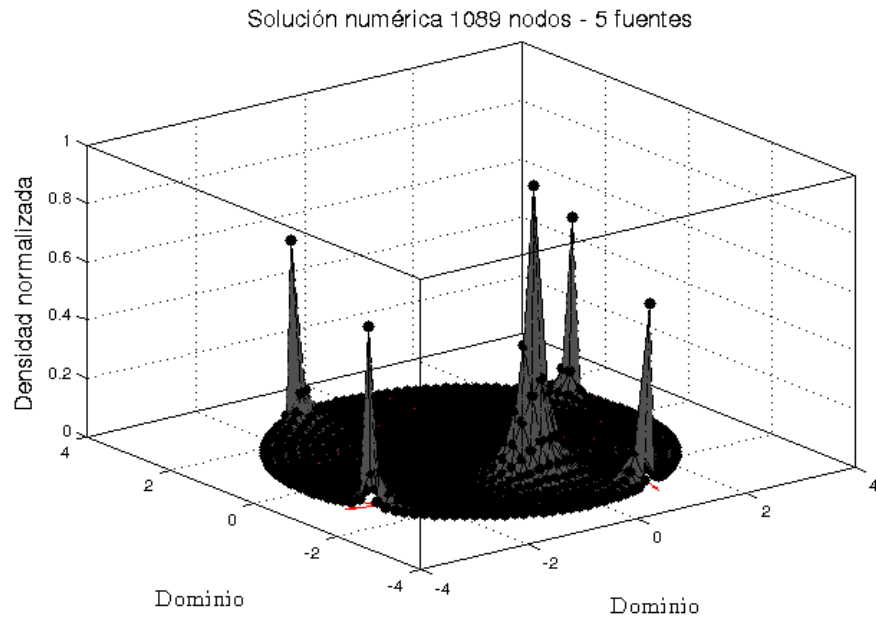


Figura G.10: Solución normalizada con método LU de 1089 nodos y 5 fuentes.

De la figura G.11 hasta la figura G.14 se muestran las gráficas de las soluciones normalizadas de 4225 nodos en 4 y 5 fuentes.

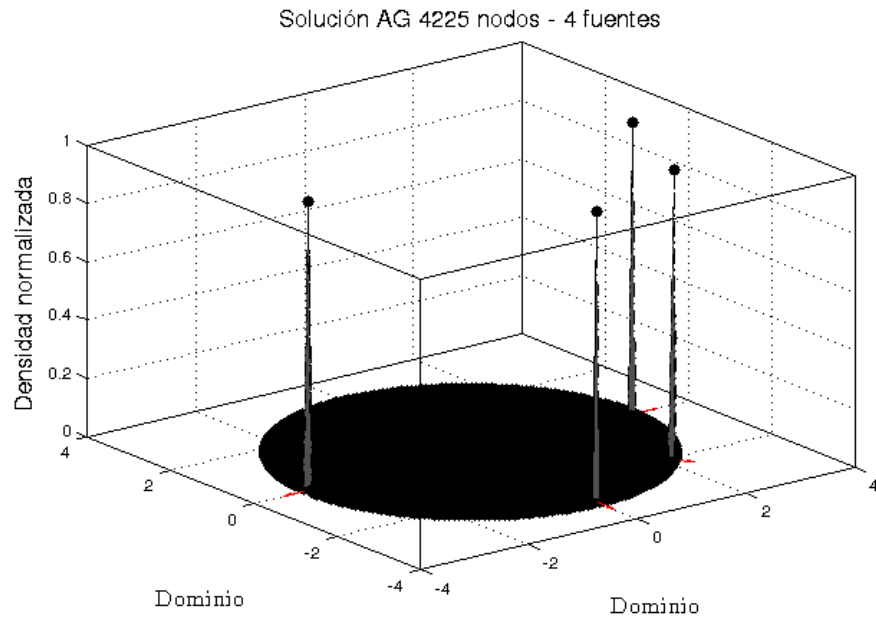


Figura G.11: Solución normalizada con algoritmos genéticos de 4225 nodos y 4 fuentes.



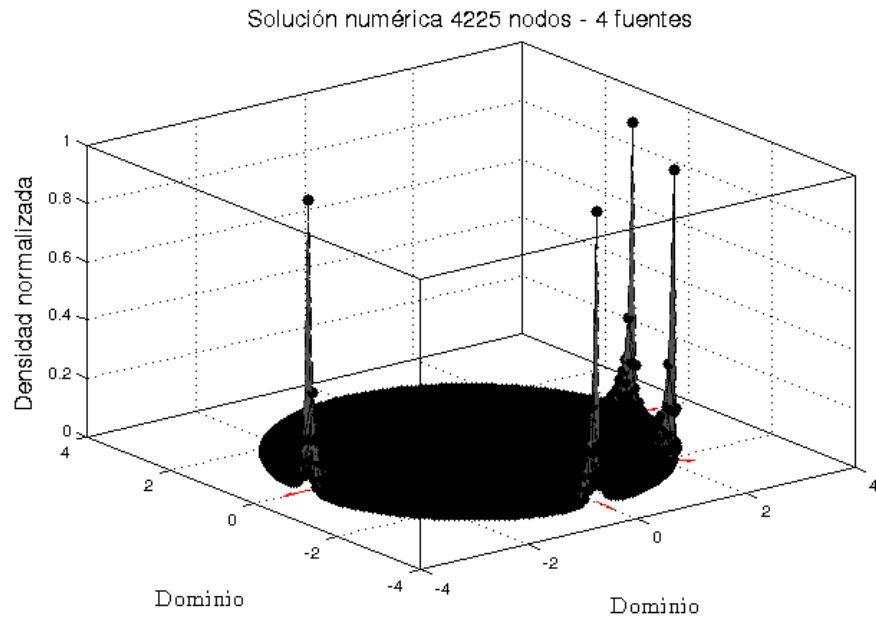


Figura G.12: Solución normalizada con método LU de 4225 nodos y 4 fuentes.

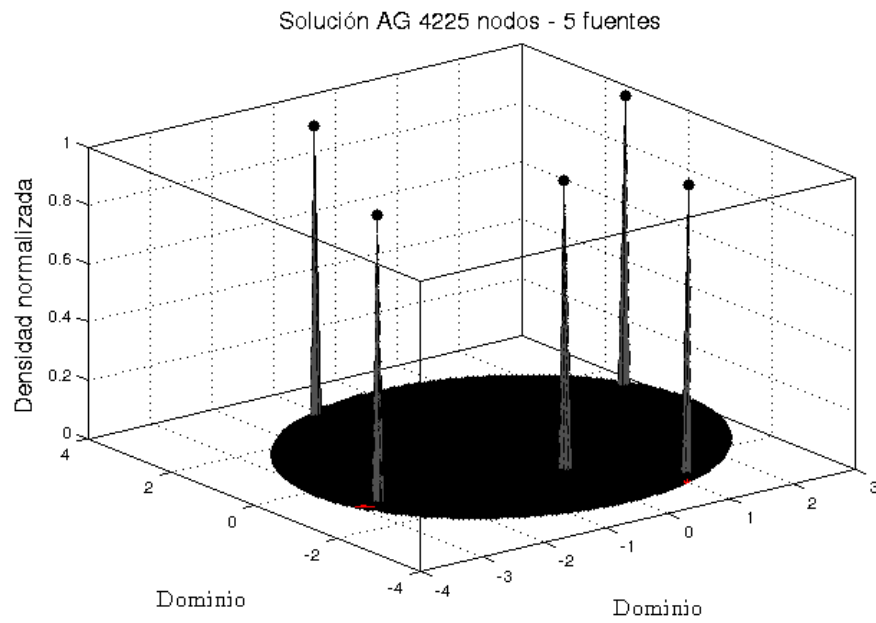


Figura G.13: Solución normalizada con algoritmos genéticos de 4225 nodos y 5 fuentes.

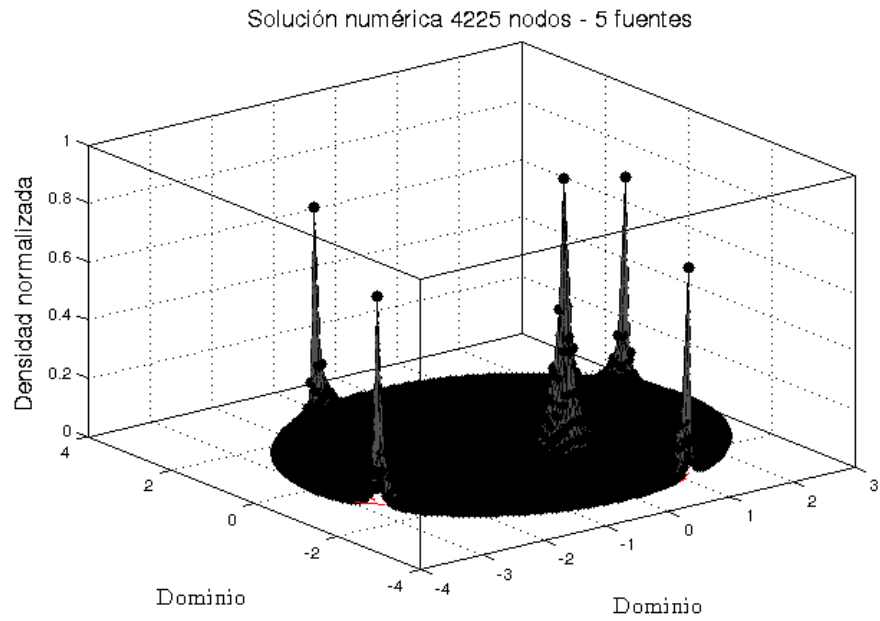


Figura G.14: Solución normalizada con método LU de 4225 nodos y 5 fuentes.

En las figuras siguientes se muestran las difusiones de fotones con AG y método LU. De la figura G.15 hasta la figura G.20 se muestran las gráficas de 289 nodos en 1, 2 y 3 fuentes.

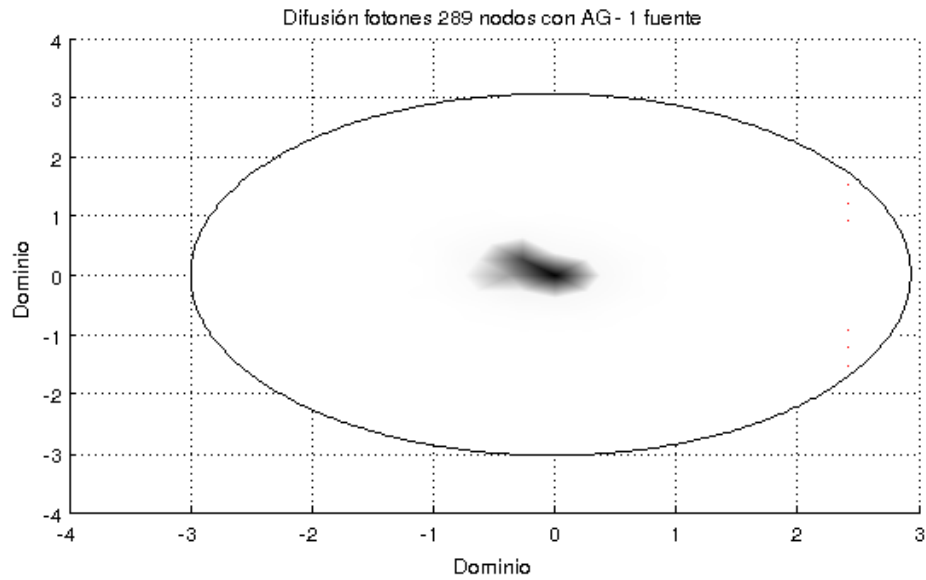


Figura G.15: Difusión de fotones con algoritmo genético de 289 nodos y 1 fuentes.

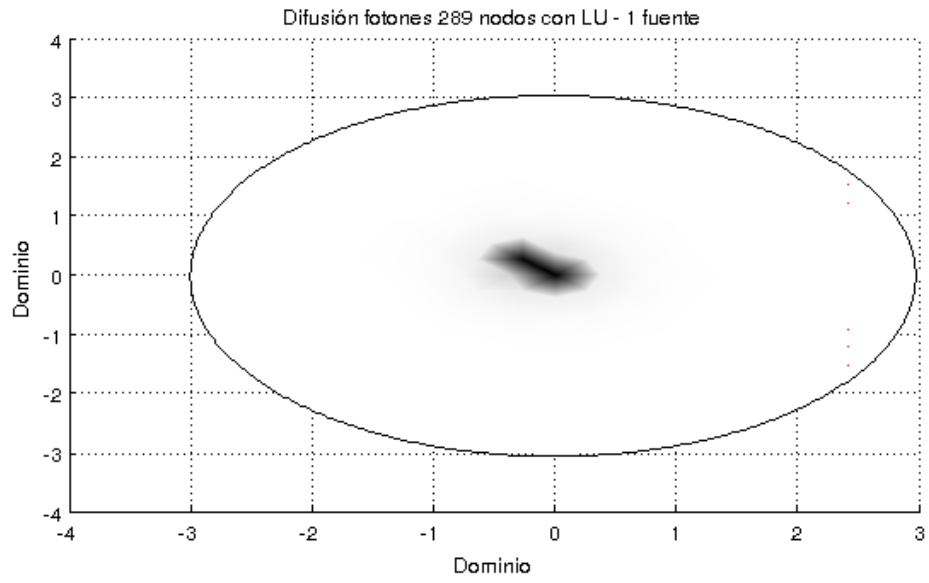


Figura G.16: Difusión de fotones con método LU de 289 nodos y 1 fuentes.

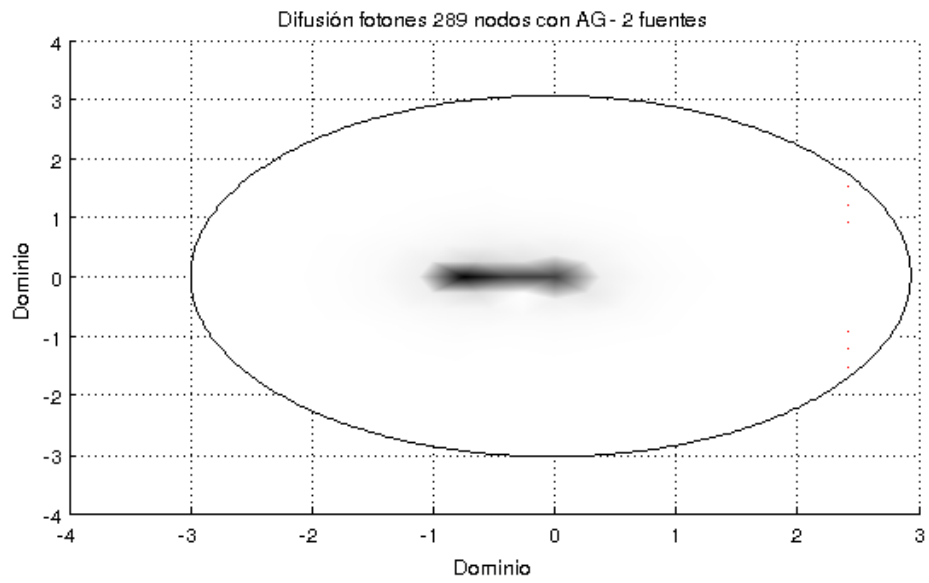


Figura G.17: Difusión de fotones con algoritmo genético de 289 nodos y 2 fuentes.

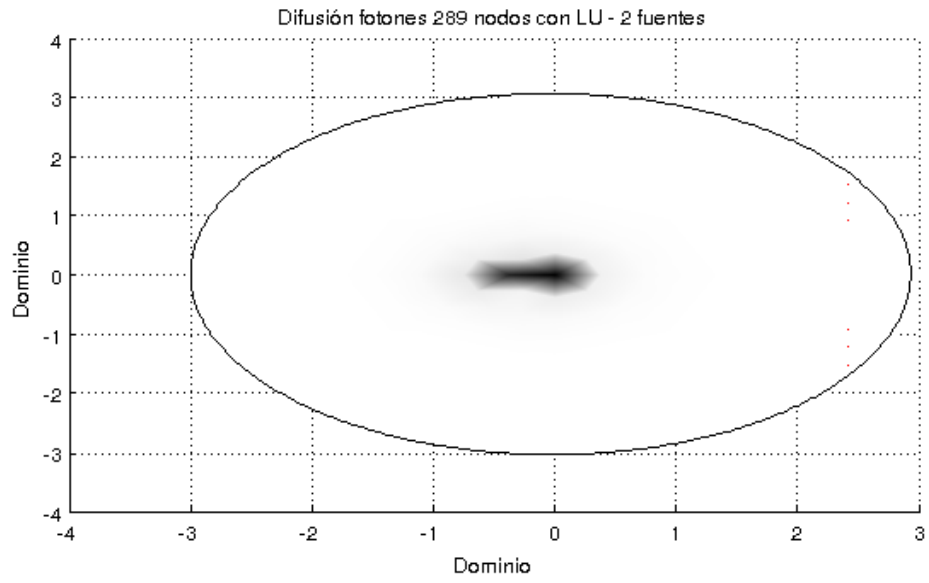


Figura G.18: Difusión de fotones con método LU de 289 nodos y 2 fuentes.

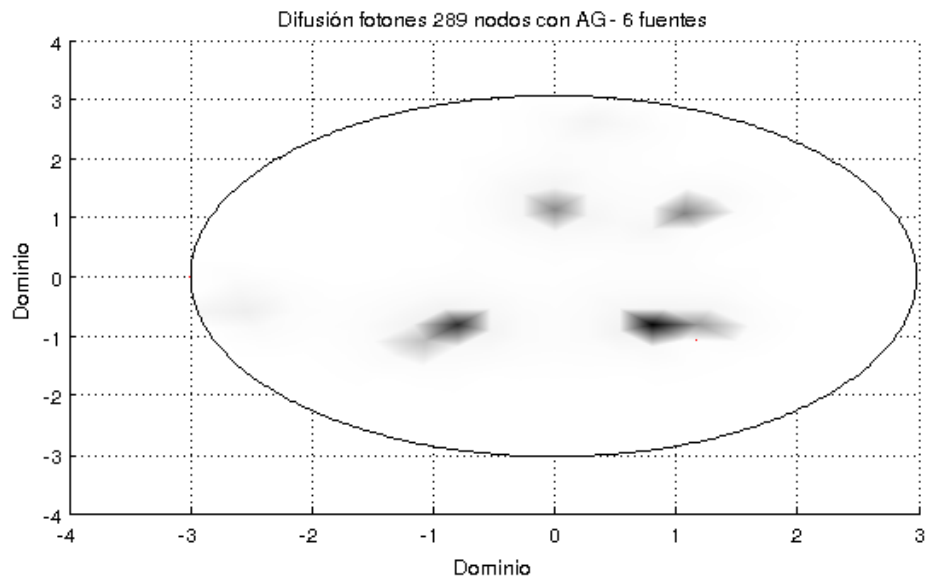


Figura G.19: Difusión de fotones con algoritmo genético de 289 nodos y 6 fuentes.

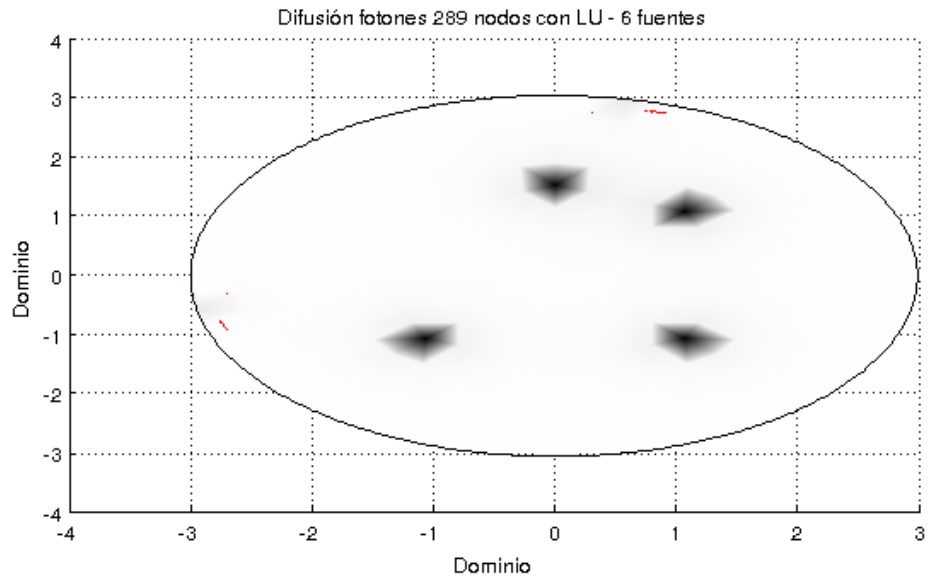


Figura G.20: Difusión de fotones con método LU de 289 nodos y 6 fuentes.

De la figura G.21 hasta la figura G.24 se muestran las gráficas de difusión de fotones de 1089 nodos en 4 y 5 fuentes.

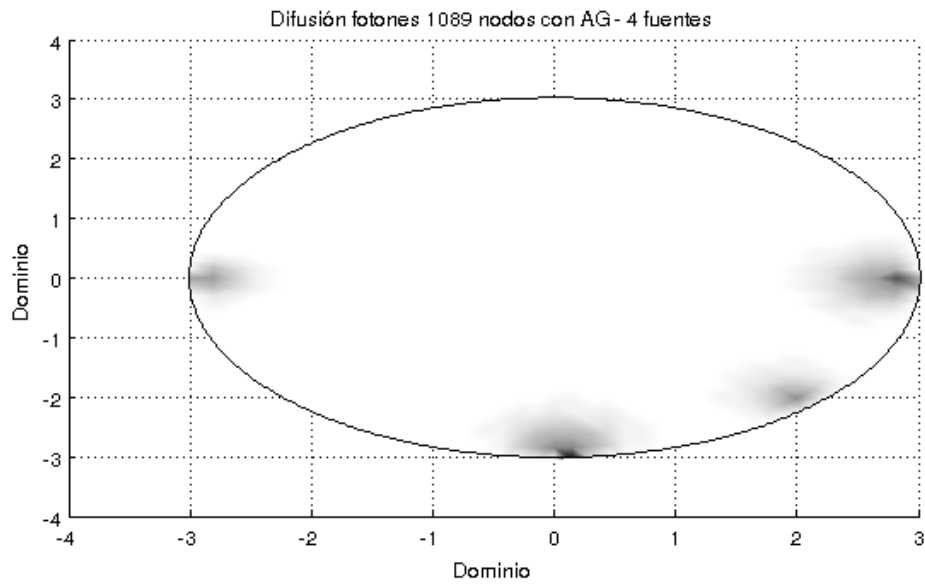


Figura G.21: Difusión de fotones con algoritmo genético de 1089 nodos y 4 fuentes.

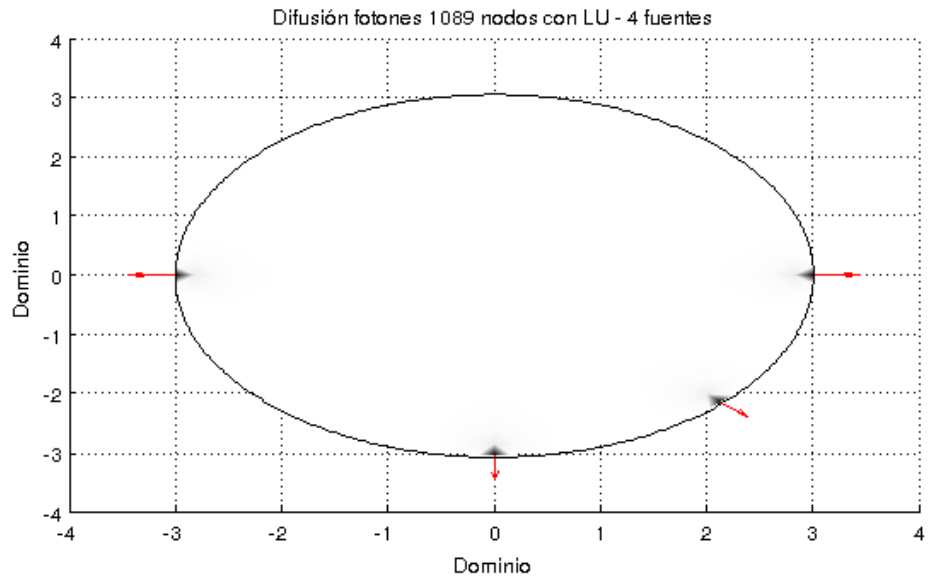


Figura G.22: Difusión de fotones con método LU de 1089 nodos y 4 fuentes.

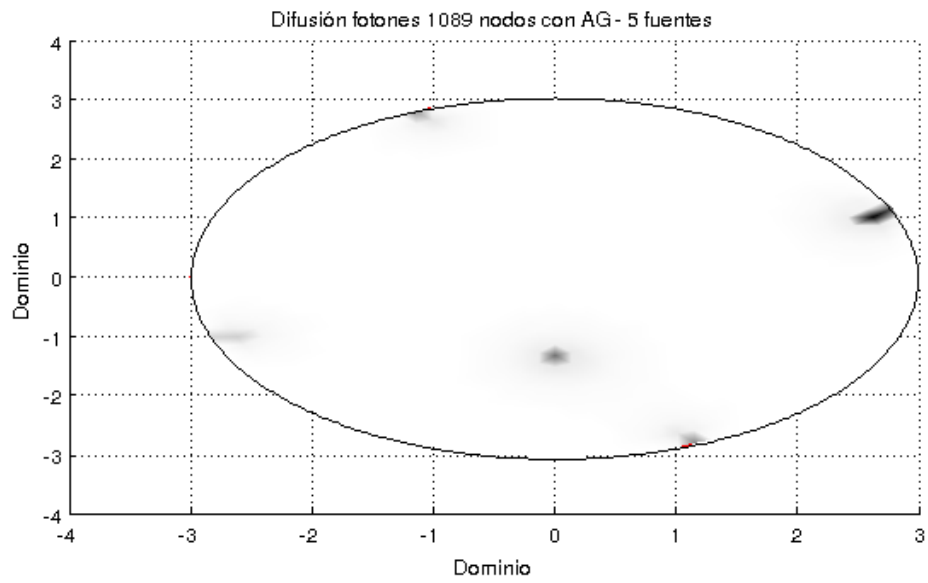


Figura G.23: Difusión de fotones con algoritmo genético de 1089 nodos y 5 fuentes.

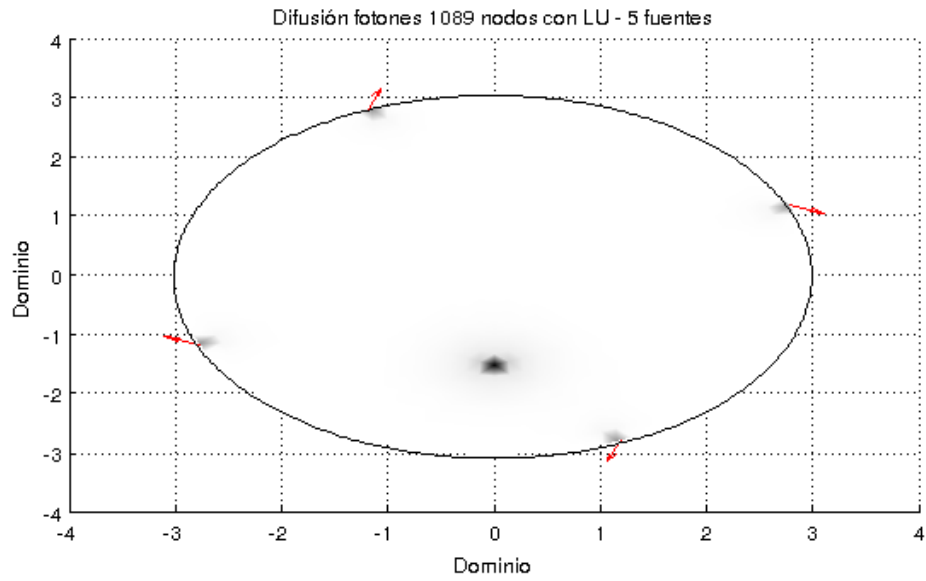


Figura G.24: Difusión de fotones con método LU de 1089 nodos y 5 fuentes.

De la figura G.25 hasta la figura G.28 se muestran las gráficas de difusión de fotones de 4225 nodos en 4 y 5 fuentes.

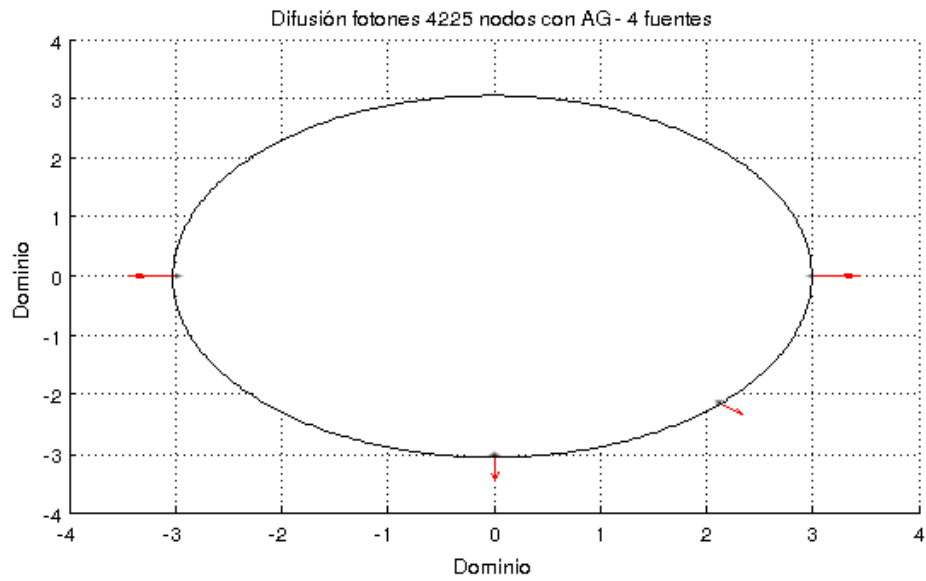


Figura G.25: Difusión de fotones con algoritmo genético de 4225 nodos y 4 fuentes.

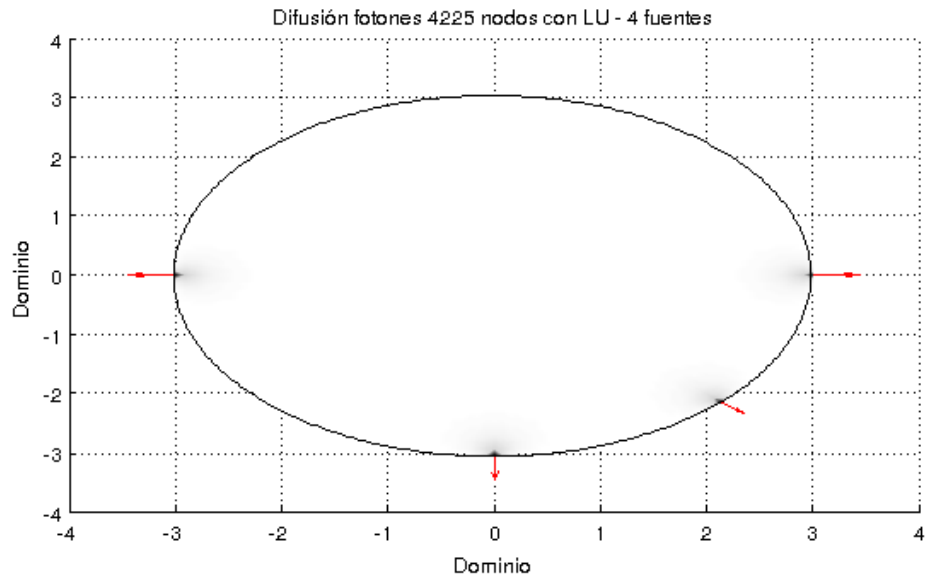


Figura G.26: Difusión de fotones con método LU de 4225 nodos y 4 fuentes.

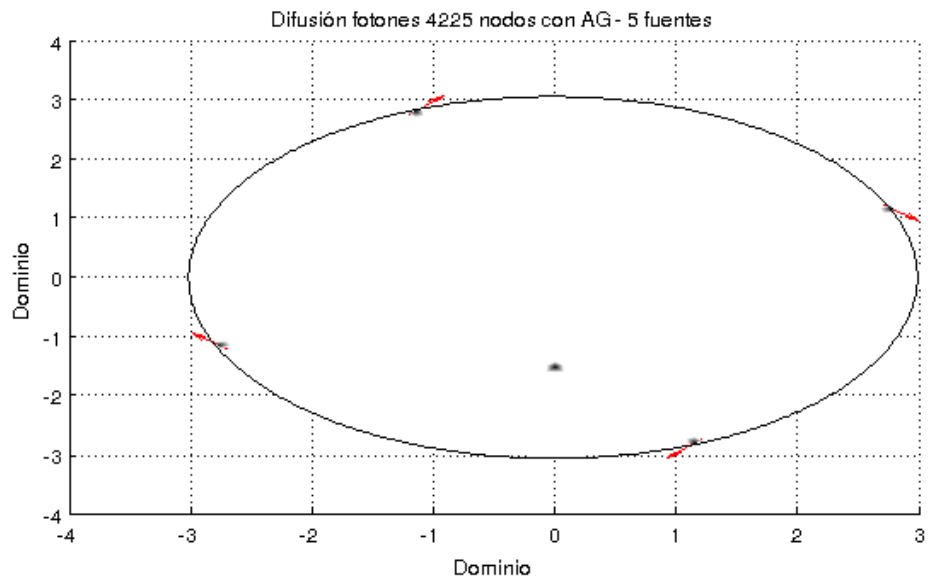


Figura G.27: Difusión de fotones con algoritmo genético de 4225 nodos y 5 fuentes.



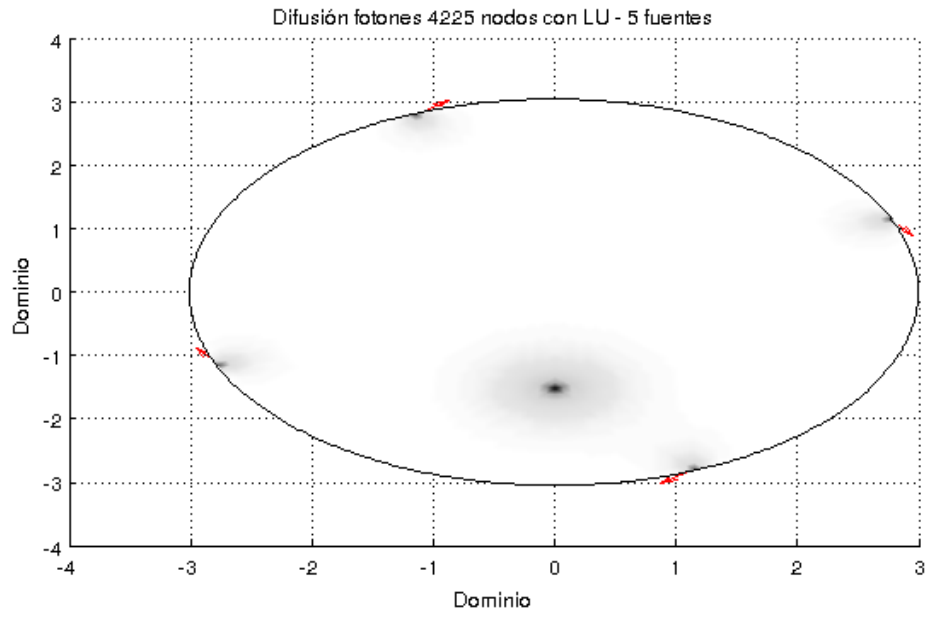


Figura G.28: Difusión de fotones con método LU de 4225 nodos y 5 fuentes.

## Anexo H

# Gráficas de aproximación de las soluciones

En este anexo se muestran aproximaciones de 289, 1089 y 4225 nodos en distintas fuentes y su densidad con el método LU y AG. En las figuras H.1, H.2 y H.3 se muestran las aproximaciones de 289 nodos en 1, 2 y 6 fuentes.

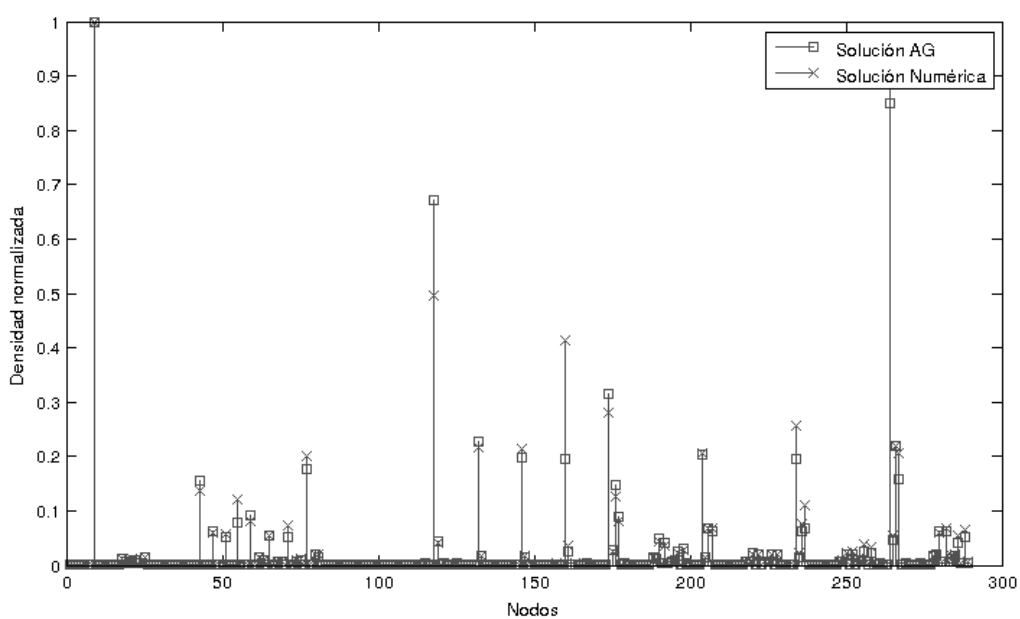


Figura H.1: Solución AG y numérica de 289 nodos y 1 fuentes.

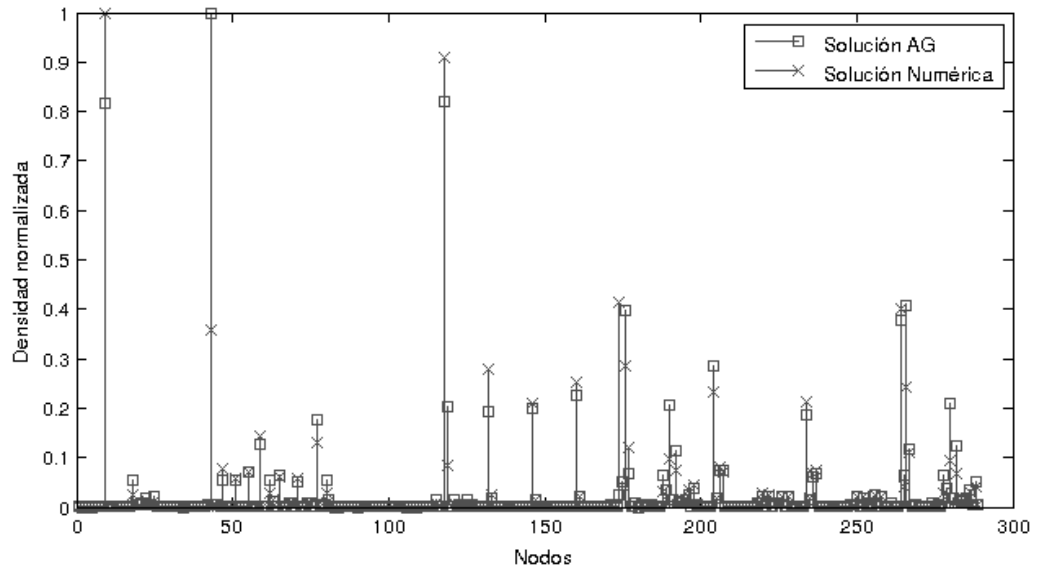


Figura H.2: Solución AG y numérica de 289 nodos y 2 fuentes.

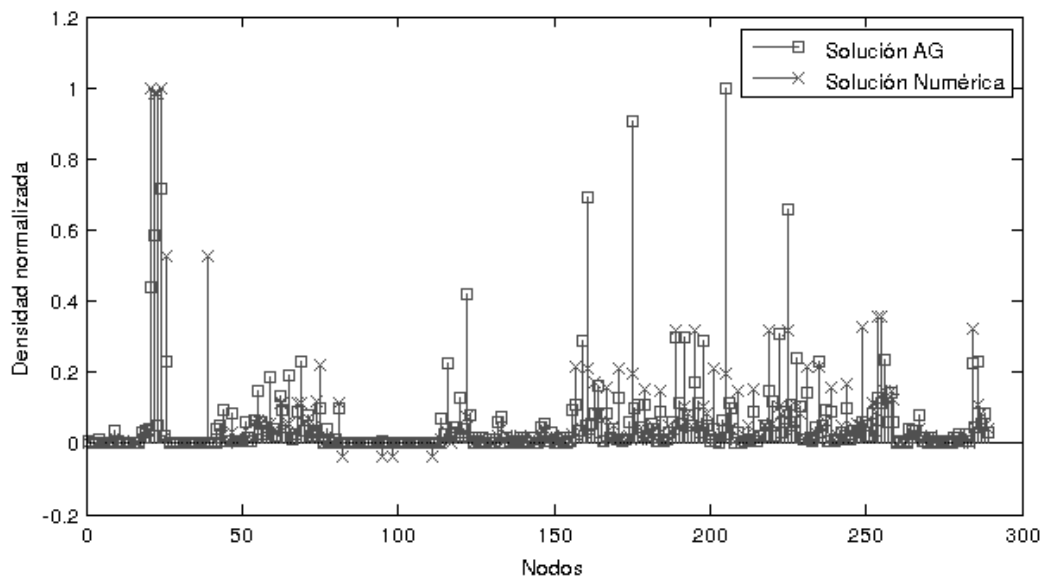


Figura H.3: Solución AG y numérica de 289 nodos y 6 fuentes.

En la figura H.4 y H.5 se muestran las aproximaciones de 1089 nodos en 4 y 5 fuentes.

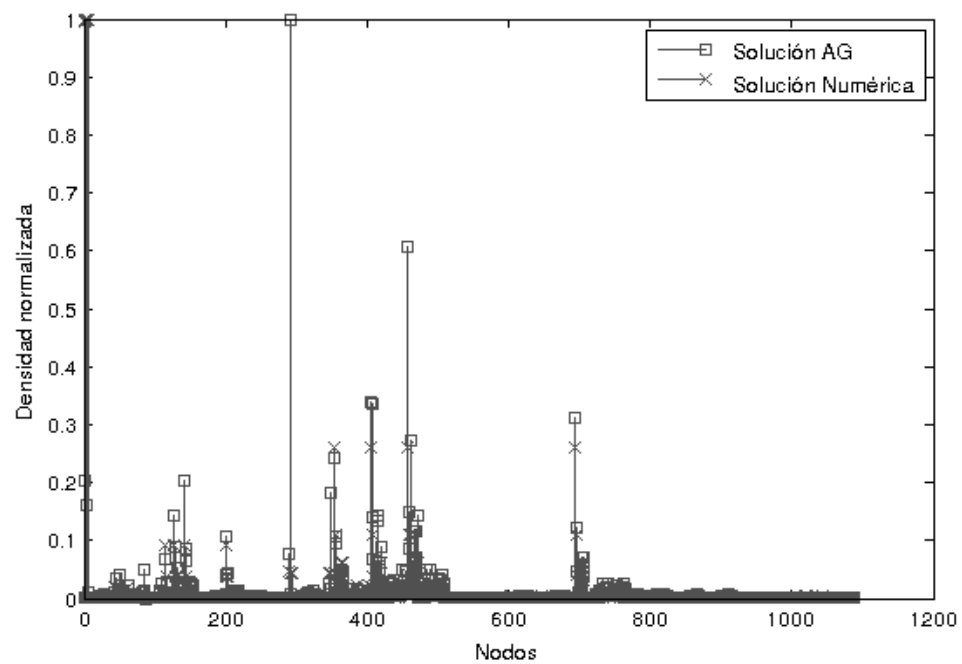


Figura H.4: Solución AG y numérica de 1089 nodos y 4 fuentes.

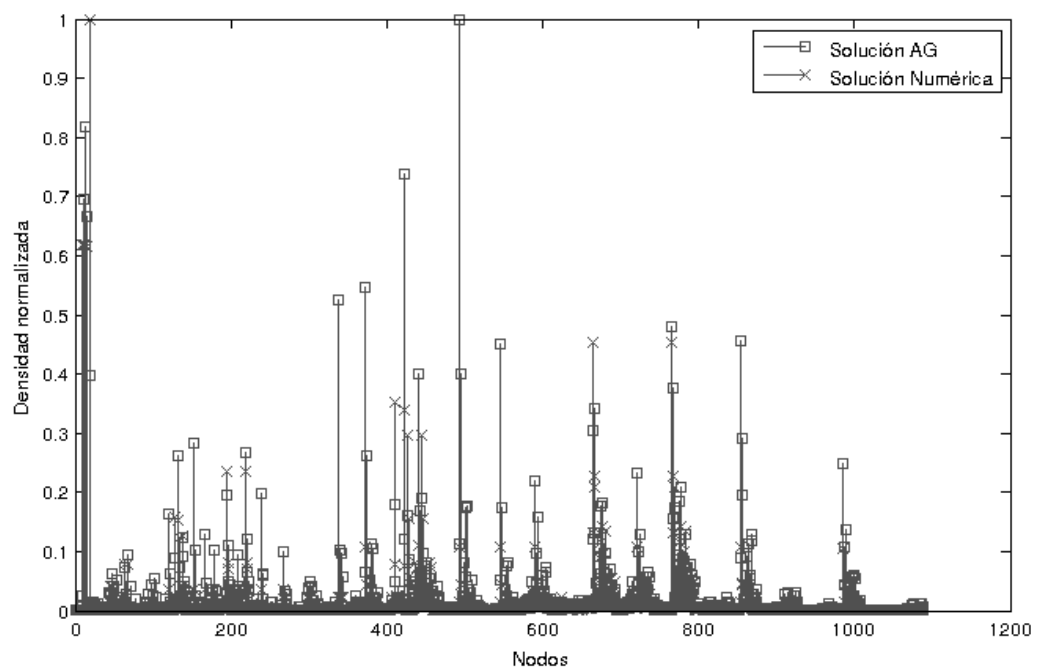


Figura H.5: Solución AG y numérica de 1089 nodos y 5 fuentes.

En la figura H.6 y H.7 se muestran las aproximaciones de 4225 nodos en 4 y 5 fuentes.

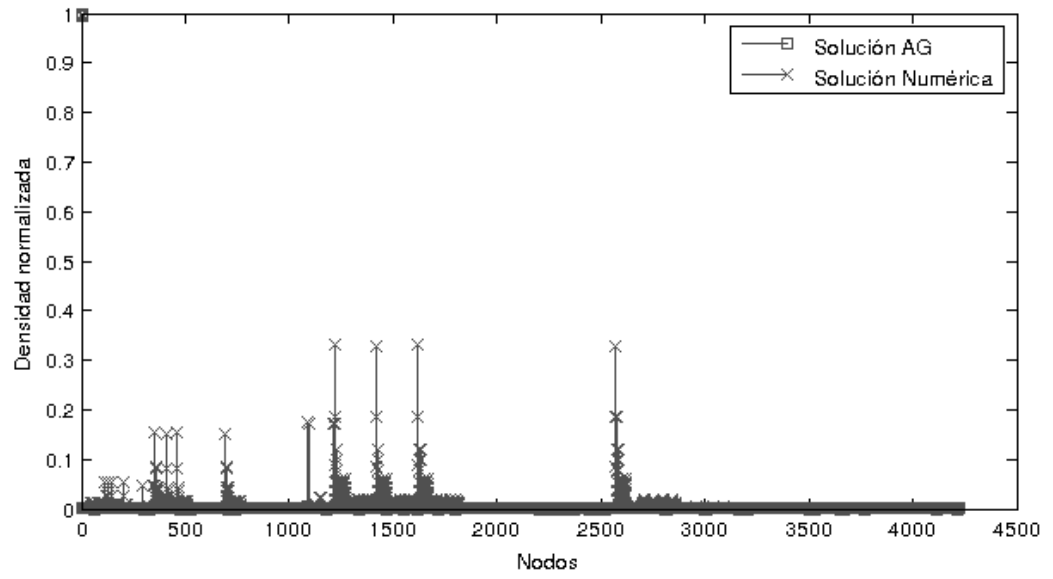


Figura H.6: Solución AG y numérica de 4225 nodos y 4 fuentes.

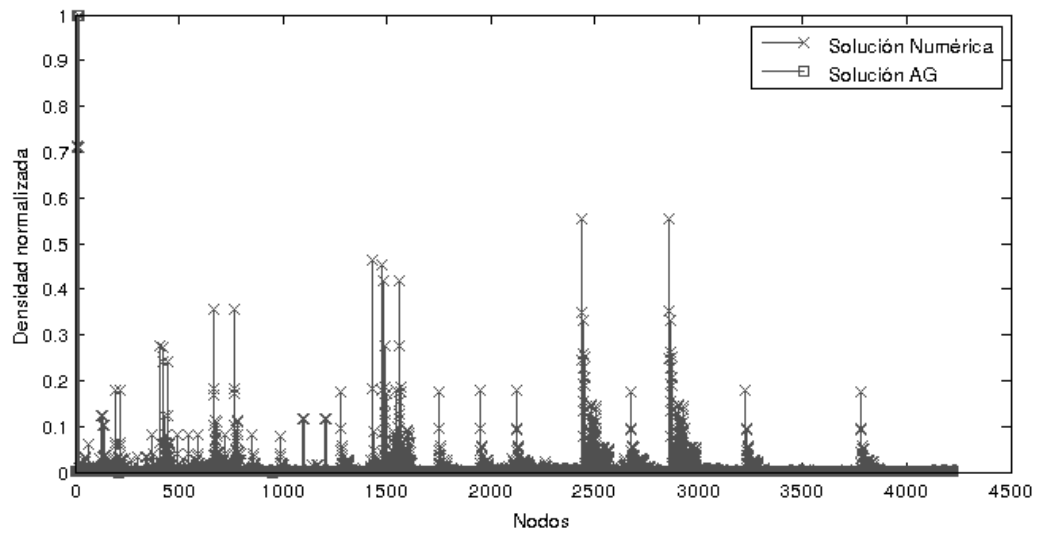


Figura H.7: Solución AG y numérica de 4225 nodos y 5 fuentes.

# Anexo I

## Manual de uso del toolbox AG

En este anexo se explica las funciones del toolbox Ag que esta incorporado en Matlab, para la resolución del sistema de ecuaciones  $A \cdot w = b$ .

`gaoptimset`: En esta función se asignan valores a los parámetros del AG, esta función se asigna a una variable (MathWorks, 2014).

Ejemplo: `opts = gaoptimset('Generations',generac,'PopulationSize',N)`

Se crea una estructura llamada `opts` y asigna el valor de la variable `generac` al parámetro 'Generations' y asigna el valor de la variable `N` al parámetro 'PopulationSize'. Cualquier parámetro del AG no especificado se le asignan valores por defecto.

`ga`: Esta función encuentra el  $x$  tal que minimiza la función de Fitness además de cumplir con la restricción establecida. Para minimizar la función de Fitness mediante la función `ga`, se le envían como parámetros la función de Fitness, y el número de variables. También se pueden establecer límites inferior y superior, y las restricciones (Chipperfield, Fleming, Pohlheim, & Fonseca, 2005).

Ejemplo: `ga(FitnessFunction,numberOfVariables,[],[],[],LB,UB, ... ConstraintFunction,opts)`

A continuación se explican 2 funciones que se usan en la implementación (`fitness` y `constraint`), ambos reciben como entradas la matriz  $A$ , el vector  $b$  y el vector incógnita  $w$ .

@(w) `fitness(A,b,w)`: La función de Fitness calcula el valor de la función y devuelve ese valor escalar.

@(w) `constraint(A,b,w)`: La función de restricción computa los valores de todas las restricciones de desigualdad e igualdad presentes.

La función '`ga`' asume que en ambas funciones tendrán una entrada  $w$ , donde  $w$  tiene tantos elementos como número de variables.

## Anexo J

# Factorización LU

Para obtener una solución numérica del sistema de ecuaciones obtenido de la EAD, el Matlab utiliza por defecto el método de factorización LU que es un método de factorización de matrices, en que se usan matrices triangulares y esto permite eficiencia al trabajar de forma computacional. Sea el sistema de ecuaciones que se muestra en (J.1), la matriz  $A$  puede ser escrita como el producto de una matriz triangular inferior  $L$  (por lo general los componentes de la diagonal de  $L$  valen 1) y una matriz triangular superior  $U$  (Vera, 2007), y se procede a resolver la ecuación (J.1) de la siguiente forma.

$$A \cdot x = b \quad (\text{J.1})$$

Al hacer  $A = L \cdot U$ , el sistema queda:

$$L \cdot U \cdot x = b$$

Se puede asignar  $y$  como el producto de  $U$  y  $x$ , como se muestra en la ecuación (J.2)

$$y = U \cdot x \quad (\text{J.2})$$

Se procede a calcular  $y$  como se muestra en la ecuación (J.3).

$$L \cdot y = b$$

$$y = L^{-1} \cdot b \quad (\text{J.3})$$

Una vez calculados los valores de  $y$ , se devuelve a la ecuación (J.2) y se calcula  $x$  como se muestra en la ecuación (J.4).

$$U \cdot x = y$$

$$x = U^{-1} \cdot y \quad (\text{J.4})$$

Como  $L$  y  $U$ , son matrices triangulares, entonces no existe ineficiencia computacional (tiempo de ejecución es óptimo) al calcular matrices inversas. Además la factorización LU de una matriz resume el proceso de eliminación gaussiana aplicado a la matriz y que es conveniente en términos del número total de operaciones de punto flotante cuando se desea calcular la inversa de una matriz o cuando se resuelve una serie de sistemas de ecuaciones con una misma matriz de coeficientes.