

Traitement de l'information et vision artificielle

TP6 - Ondelettes 2D, compression et débruitage d'image.

Yonatan DELORO

Pour le 5 juin 2017

1 Visualisation des ondelettes 2D

1.

La fonction `MakeONFilter` permet de calculer le filtre miroir associé à une certaine ondelette. On représente en figures 1 à 5 ces différents filtres miroirs pour des ondelettes de Haar, de Daubechies et des Symmlets.

La différence principale entre les différents filtres réside dans la localisation des fréquences du spectre, qui va aussi de paire avec la régularité des ondelettes. Ainsi, les ondelettes de Daubechies ou les Symmlets sont plus irrégulières et ont un spectre en fréquence plus concentré que les ondelettes de Haar.

2.

Grâce aux démonstrations "toon0231.m", "toon0232.m" et "toon0233.m", on visualise en figures 6 à 8 trois différentes images en noir et blanc de résolution (256, 256) et leurs transformées en ondelettes de type "Coiflets 2" périodisées, grâce à la fonction `FWT2_P0`, en partant d'une résolution la plus grossière égale à (8, 8) ($L = 3$ reprenant la notation du code).

On retrouve bien la répartition des coefficients comme expliqué en page 12 des notes de cours : l'image à la résolution la plus faible ($2^3, 2^3$) est située dans le coin supérieur gauche ; les coefficients de détails des trois types ($k \in \{1, 3\}$) à cette échelle complètent alors le carré. De même, les coefficients de détails des trois types à l'échelle supérieure complètent à nouveau le plus grand carré. Et ce récursivement, jusqu'à permettre de reconstituer l'image à sa résolution initiale.

3.

Supposons qu'on ait calculé la transformée en ondelettes W d'une image 2D de résolution (256, 256), en s'arrêtant à la résolution (16, 16).

4 puissances de 2 séparent la résolution la plus grossière ($16 = 2^4$) de la résolution de l'image ($256 = 2^8$). Par conséquent, l'approximation multi-résolution est ici une séquence de 5 espaces emboîtés V_j , V_0 où vit notre image 2D initiale, V_4 où vit l'image à la résolution la plus grossière. Ainsi, les coefficients d'échelle de j pour lesquels il y aura dans W des coefficients associés à l'ondelette mère $\psi_{j,(n_1,n_2)}^k$ (k numéro de l'espace de détail, $\in \{1, 2, 3\}$) sont $\{1, 2, 3, 4\}$.

Aussi, il y aura dans le coin supérieur gauche de W les coefficients associés à l'ondelette père $\Phi_{4,(n_1,n_2)}$.

Si l'on garde les mêmes notations que dans les notes de cours, en se basant sur la représentation des coefficients en page 12, puisqu'il y a $(\frac{256}{2^j})^2$ coefficients pour représenter une ondelette à

l'échelle l , alors le coefficient associé à l'ondelette mère $\psi_{j,(n_1,n_2)}^k$ (échelle $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, type de détails $k \in \{1, 2, 3\}$) se trouve dans W en les coefficients (m_1, m_2) calculés comme suit :

- si $k = 1$: $m_1 = \frac{256}{2^4} + \sum_{l=j+1}^4 \frac{256}{2^l} + n_1 = 2^{8-j} + n_1$, et $m_2 = n_2$.
- si $k = 2$: en $m_1 = n_1$, et $m_2 = \frac{256}{2^4} + \sum_{l=j+1}^4 \frac{256}{2^l} + n_2 = 2^{8-j} + n_2$.
- si $k = 3$: en $m_1 = 2^{8-j} + n_1$, et $m_2 = 2^{8-j} + n_2$.

4. Afin d'obtenir l'image 2D à la résolution (256,256) correspondant à l'ondelette mère $\psi_{j,(n_1,n_2)}^k$, on calcule la transformée inverse, à l'aide de la fonction IWT2_P0, de la transformée en ondelettes W de l'image dont on annule tous les coefficients autres que celui positionné en les coordonnées (m_1, m_2) calculées précédemment qui correspondent au coefficient associé à cette ondelette. En figure 9, on affiche ainsi les images 2D à la résolution (256,256) correspondant aux ondelettes de Daubechies 4, mères, des espaces de détails $k \in \{1, 2, 3\}$ au niveau d'échelle $j = 1$ (haute résolution $(2^7, 2^7)$) et au niveau d'échelle $j = 4$ (basse résolution $(2^4, 2^4)$) : soit $\psi_1^1, \psi_1^2, \psi_1^3$ et $\psi_4^1, \psi_4^2, \psi_4^3$

5. On représente en figure 10 la transformée inverse en Daubechies 4 de la transformée W dont on a annulé tous les coefficients sauf celui au centre l'image pris égal à 1.

Cela suggère que pour obtenir une image de l'ondelette père $\Phi_{j,(n_1,n_2)}$ à la résolution (256, 256), il suffit d'annuler tous les coefficients de W la transformée en ondelettes sauf les coefficients associés aux trois ondelettes mères $\psi_{j,(n_1,n_2)}^1, \psi_{j,(n_1,n_2)}^2, \psi_{j,(n_1,n_2)}^3$ et à l'ondelette père $\Phi_{j,(\lfloor \frac{n_1}{2^{5-j}} \rfloor, \lfloor \frac{n_2}{2^{5-j}} \rfloor)}$. On obtient le résultat en figure 11 pour (n_1, n_2) correspondant au centre de l'image et pour l'espace d'échelle $j = 1$.

6. De même, afin d'obtenir une image de l'ondelette mère $\psi_{j,(n_1,n_2)}^k$, on annule tous les coefficients de W la transformée en ondelettes sauf le coefficient associé à cette ondelette dont on a calculé les coordonnées en question 3, et on prend la transformée inverse de cette matrice.

On affiche respectivement en figures 12 et 13 les surfaces des ondelettes (respectivement de Haar et Symmlets 8) mères associées aux espaces de détails le plus grossier ($j = 4$, résolution $(2^7, 2^7)$) et le plus fin ($j = 1$, résolution $(2^4, 2^4)$), et localisées au centre de l'image : $\psi_{1,(2^6,2^6)}^k$ et $\psi_{4,(2^3,2^3)}^k$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$.

7. Les toons "toon0521.m" à "toon0524.m" s'intéressent à la compression d'une image cérébrale. "toon0521.m" affiche cette IRM (figure 14) ; "toon0522.m" calcule sa transformée en ondelettes W de type "Coiflet 2" (en s'arrêtant à la résolution la plus grossière 2^3).

"toon0523.m" reconstruit l'image en calculant la transformée inverse de W dont on n'a gardé qu'un certain pourcentage de ses premiers coefficients (coefficients de l'image et des espaces de détails aux résolutions les plus faibles). Résultats en figure 15, en ne gardant que les 1,5,10 et 20% premiers coefficients de W .

De même, "toon524.m" reconstruit l'image en calculant la transformée inverse de W dont il ne garde qu'un certain pourcentage de ses derniers coefficients (coefficients des espaces de détails aux meilleures résolutions). Résultats en figure 16, en ne gardant que les 1,5,10 et 20% meilleurs coefficients de W .

Ainsi on observe que la reconstruction fonctionne nettement mieux pour ce type d'image en prenant les coefficients associés aux espaces de détails les plus fins qu'en prenant seulement les coefficients d'ondelettes les plus grossières. En particulier, la compression préserve mieux les contours, les frontières qui sont l'information utile sur ce type de photos.

8. Les toons "toon0541.m" à "toon0548.m" s'intéressent à la compression d'une photo de visage. "toon0541.m" affiche l'image noir et blanc d'Ingrid Daubechies (figure 17) ; "toon0542.m"

calcule sa transformée en ondelettes comme précédemment ; "toon0543.m" effectue une recherche des régions sparsées de la transformée (en annulant les faibles coefficients) et affiche les coefficients non nuls (figure 18).

On affiche grâce à "toon0548.m" en figure 19 les reconstitutions des images (par transformée inverse) compressées par transformée en ondelettes "Coiflets 2" et par transformée de Fourier, dont on n'a gardé que les premiers 95% coefficients triés. On remarque que la compression par ondelettes restitue beaucoup mieux l'image que la compression par transformée de Fourier à nombre de coefficients conservé égal. En particulier, la compression par ondelettes permet de faire ressortir à la fois les variations importantes ainsi que les détails de la photo, quand l'image compressée par Fourier paraît plus bruitée. La transformée en ondelettes semble mieux identifier où se situe l'information (à quel niveau d'échelle).

"toon0547.m" permet de visualiser les images résiduelles (erreurs de reconstruction) pour les deux méthodes de compression (en retenant 95% des coefficients). On restitue ces visualisations en figure 19. Là encore on n'observe une erreur plus uniforme et petite dans le cas de la transformée par ondelettes, la compression par transformée par Fourier fait apparaître une erreur parfois importante au niveau des bords.

Enfin, "toon0546.m" permet de comparer les compressions par transformée en ondelettes et par transformée de Fourier, en calculant l'erreur de compression en fonction du nombre de coefficients considérés pour chacune des 2 transformées. Comme on l'observe en figure 20, la compression par ondelettes donne toujours une erreur moins importante que la compression par Fourier dès que le nombre de coefficients retenus dépasse la centaine. La différence d'erreurs de compression entre les deux méthodes est ensuite stable selon le nombre de coefficients de la transformée retenue.

2 Débruitage d'image

1.

Dans les fichiers "SNR.m" et "PSNR.m", on implémente les fonctions calculant le "Signal to Noise Ratio" (SNR) et le "Peak Signal to Noise Ratio" (PSNR) qui sont tous deux des mesures de la qualité d'approximation d'une image par son approximée (rapport signal moyen/maximal sur différence moyenne bruit-signal). On a par définition que PSNR est toujours plus grand que SNR (critère plus strict). On sera bien entendu d'autant plus satisfait que les valeurs de ces deux critères seront élevées.

2.

On considère une image en noir et blanc (photographie d'Ingrid Daubechies) et on la bruitte d'un bruit gaussien d'écart-type $\sigma = 20$ indépendant en chaque pixel grâce à la fonction "randn". On affiche en figure 22 l'image d'origine et l'image bruitée.

3.

Dans le fichier "wavelet_denoise.m", on implémente une fonction qui calcule la transformée en ondelettes de l'image bruitée (ondelettes de Daubechies 4, niveau d'échelle le plus grossier à 2^4) et qui annule tous les coefficients d'amplitude inférieure à un seuil θ passé en argument de la fonction.

On trace en figure 23 les courbes de nos deux indicateurs SNR et PSNR en fonction du seuil θ choisi.

On obtient un maximum de SNR en $\theta = 65$ puis un maximum de PSNR en $\theta = 70$.

On décide ainsi d'afficher l'image débruitée pour ces deux valeurs de seuils (voir figure 24). On obtient effectivement des images où le bruit a diminué, mais aussi où les contours

se sont floutés drastiquement. En effet, les pixels de contours ne représentent qu'une faible proportion des pixels de l'image, ce qui explique les bonnes performances des 2 indicateurs SNR et PSNR qui moyennisent la différence entre le signal et le bruit sur tous les pixels.

4.

Comme la transformée en ondelette n'est pas invariante pas translation, une idée simple pour augmenter la qualité du débruitage consiste à appliquer la fonction précédente à l'image translatée de différentes longueurs, et à moyenner les images débruitées. Cette méthode est déjà implémentée dans la fonction "all_shifts_denoising" qui s'appuie donc sur la fonction "wavelet_denoise" codée précédemment.

5.

On représente enfin en figure 25 les courbes de SNR et PSNR en fonction différentes valeurs de θ et pour des nombres de translations de l'image $m \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Alors qu'on s'attendrait à des meilleures performances à θ fixé plus m est élevé (plus robuste), on obtient curieusement la même courbe pour les différentes valeurs de m ...

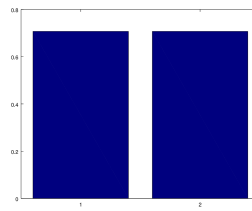


FIGURE 1 – Filtre miroir associé aux ondelettes de Haar

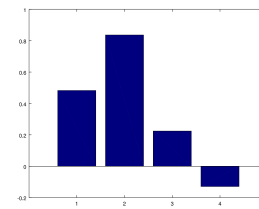


FIGURE 2 – Filtre miroir associé aux ondelettes de Daubechies 4

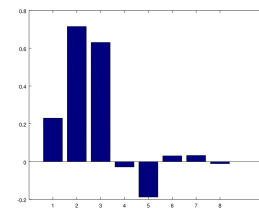


FIGURE 3 – Filtre miroir associé aux ondelettes de Daubechies 8

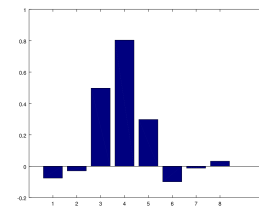


FIGURE 4 – Filtre miroir associé aux Symmlets 4

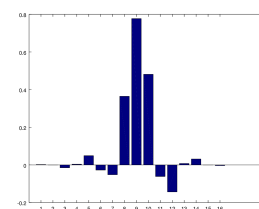


FIGURE 5 – Filtre miroir associé aux Symmlets 8

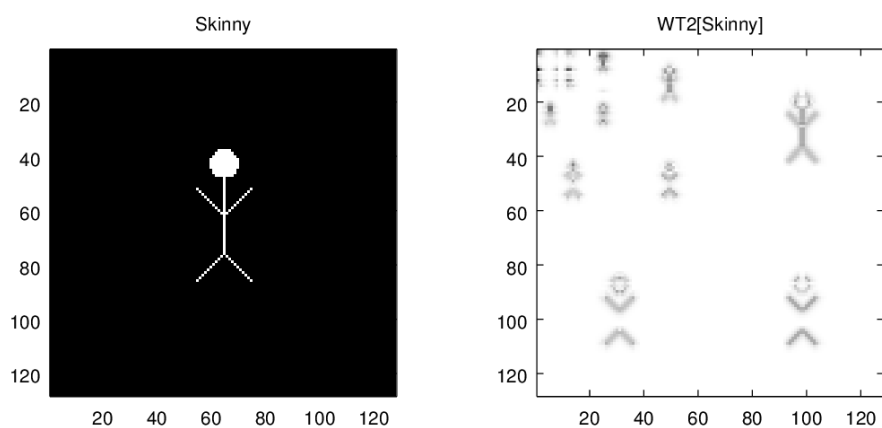


FIGURE 6 – Transformée en ondelettes "Coiflets 2" de l'image de "toon0231.m" en s'arrêtant à la résolution (8,8). Résolution de l'image initiale (256,256)

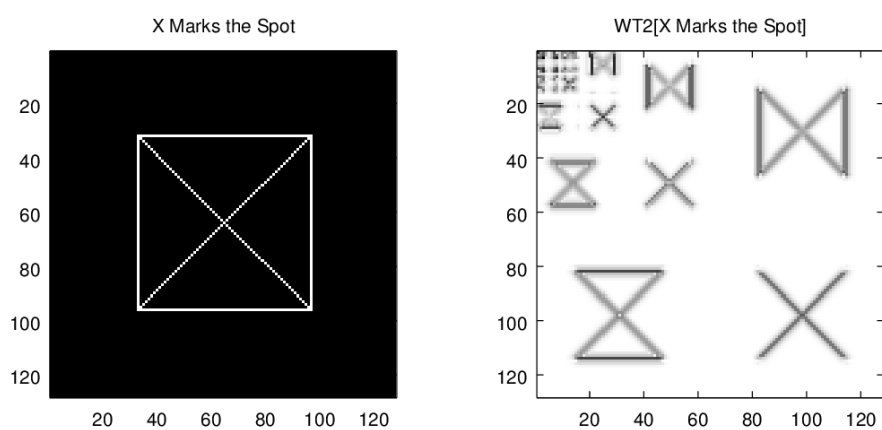


FIGURE 7 – Transformée en ondelettes "Coiflets 2" de l'image de "toon0232.m" en s'arrêtant à la résolution (8,8). Résolution de l'image initiale (256,256)

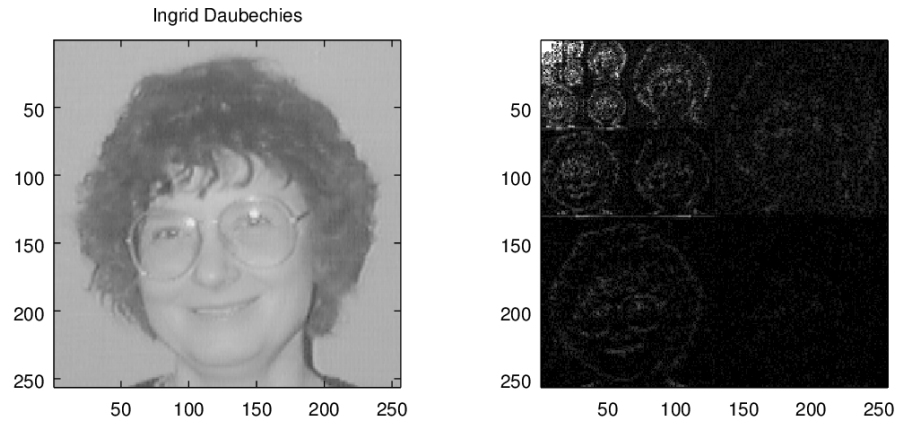


FIGURE 8 – Transformée en ondelettes "Coiflets 2" de l'image de "toon0233.m" en s'arrêtant à la résolution (8,8). Résolution de l'image initiale (256,256)

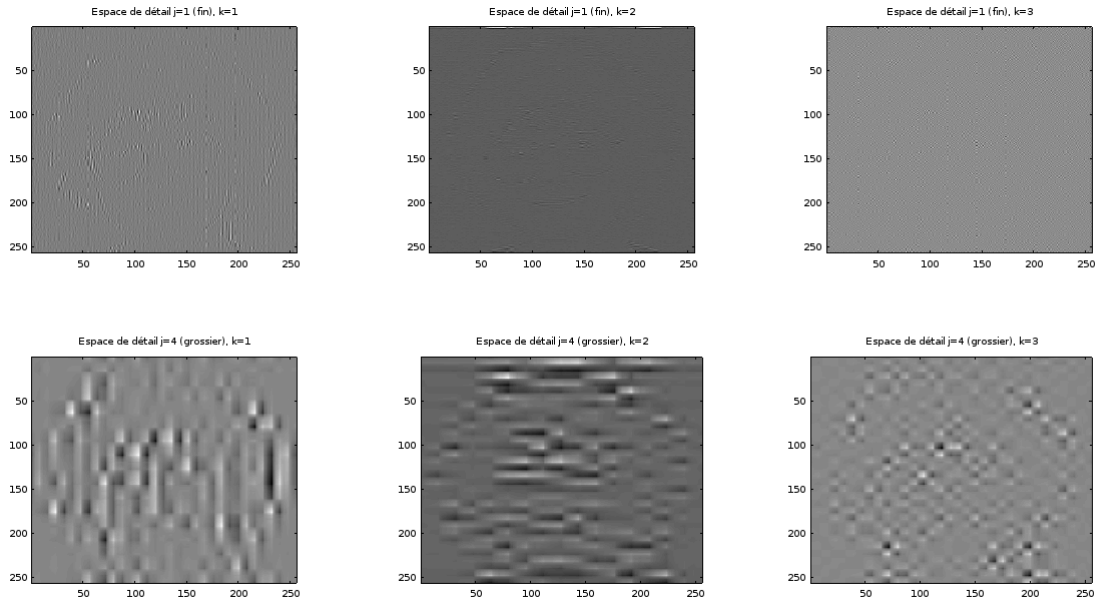


FIGURE 9 – Images 2D à la résolution (256,256) correspondant aux ondelettes de Daubechies 4 mères des espaces de détails $k \in \{1, 2, 3\}$ au niveau d'échelle $j = 1$ (haute résolution $(2^7, 2^7)$, sur la première ligne de la figure) et au niveau d'échelle $j = 4$ (basse résolution $(2^4, 2^4)$, sur la deuxième ligne)

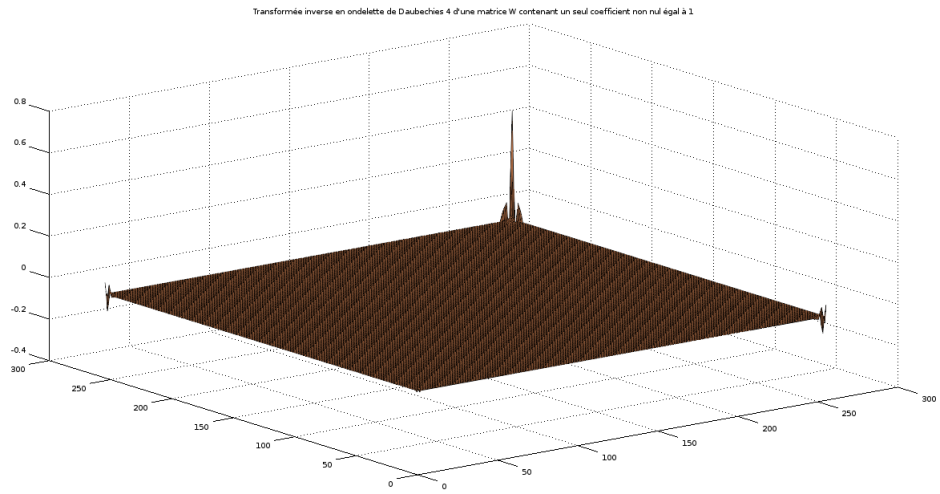


FIGURE 10 – Transformée inverse en Daubechies 4 de la transformée W dont on a annulé tous les coefficients sauf celui au centre l'image.

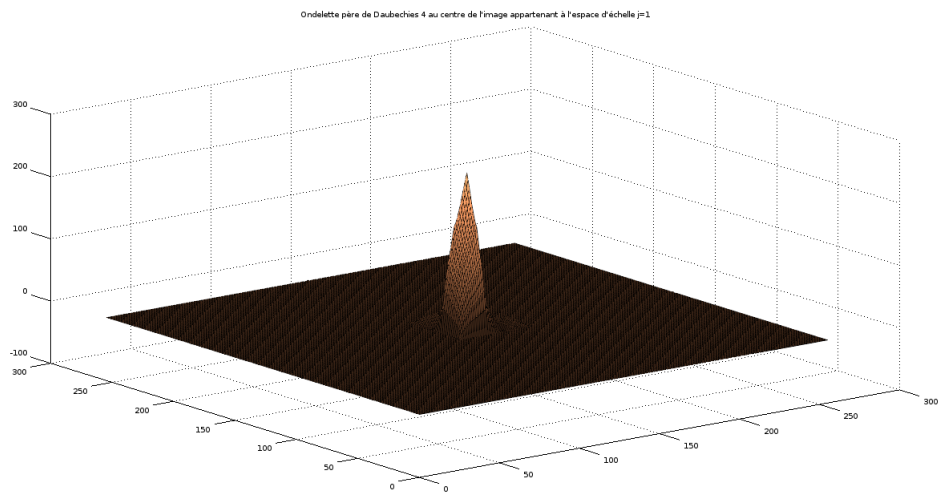


FIGURE 11 – Surfaces de l'ondelette père de Daubechies 4 au centre de l'image à l'espace d'échelle $j = 1$ (fin).

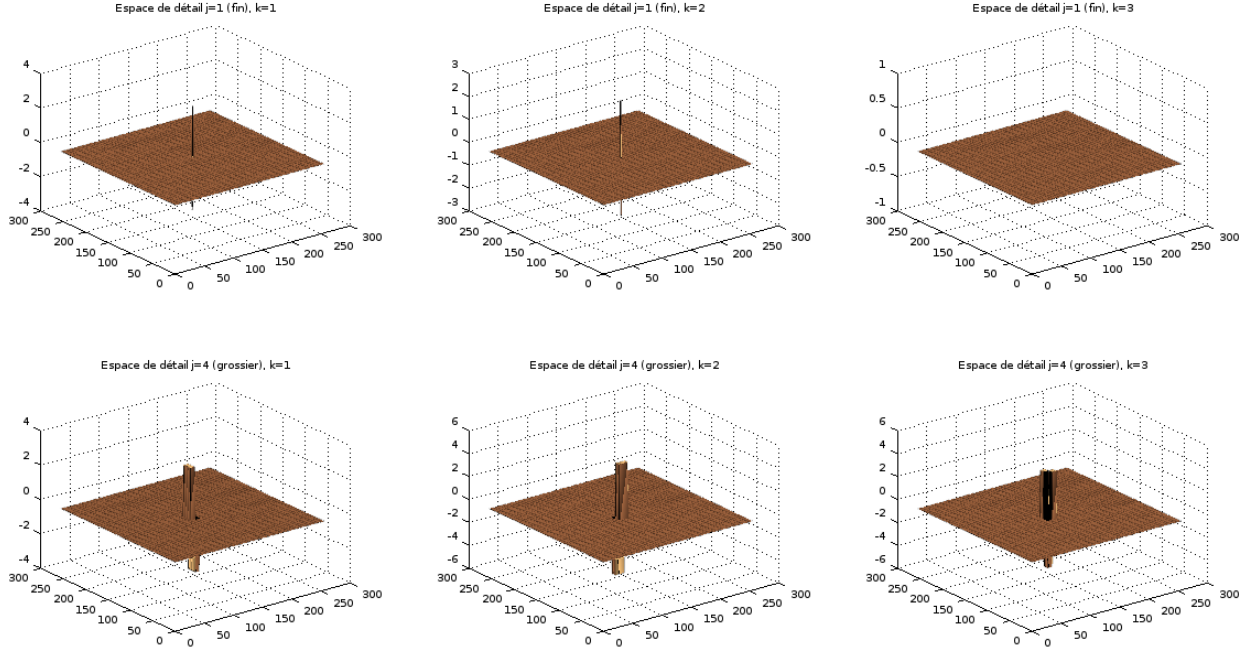


FIGURE 12 – Surfaces des ondelettes de Haar mères associées aux espaces de détails le plus grossier (résolution $(2^7, 2^7)$) et le plus fin (résolution $(2^4, 2^4)$), localisées au centre de l'image : $\psi_{1,(2^6,2^6)}^k$ et $\psi_{4,(2^3,2^3)}^k$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$

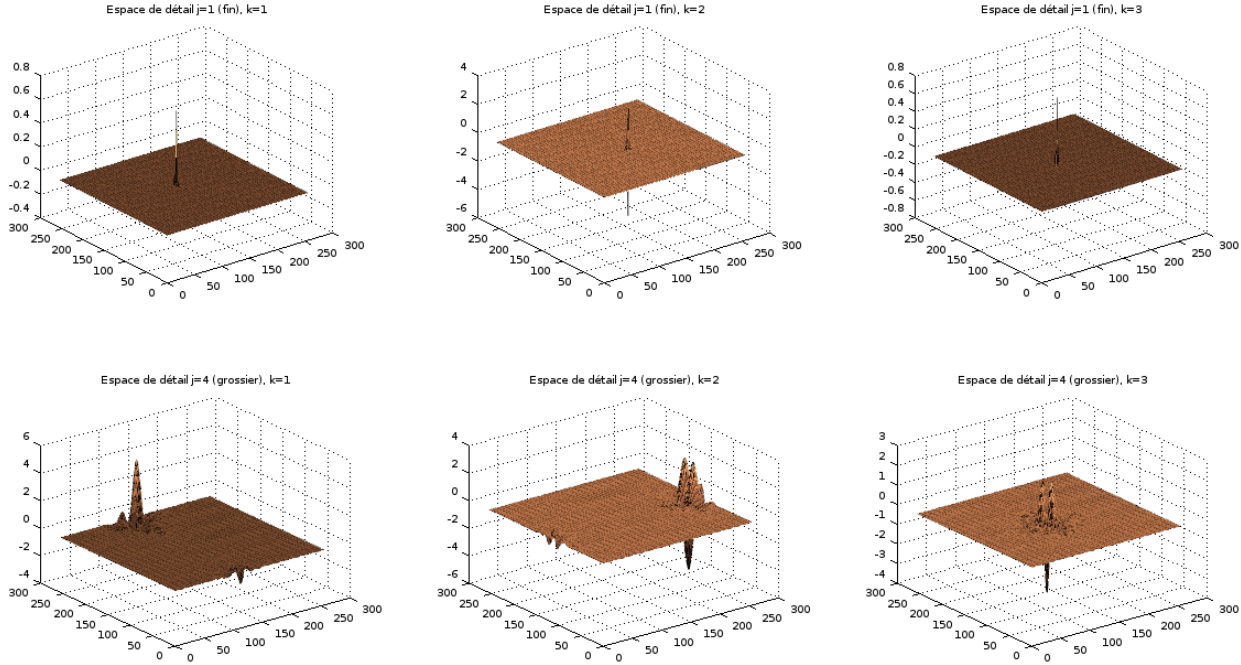


FIGURE 13 – Surfaces des Symmlets 8 mères associées aux espaces de détails le plus grossier (résolution $(2^7, 2^7)$) et le plus fin (résolution $(2^4, 2^4)$), localisées au centre de l'image : $\psi_{1,(2^6,2^6)}^k$ et $\psi_{4,(2^3,2^3)}^k$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$

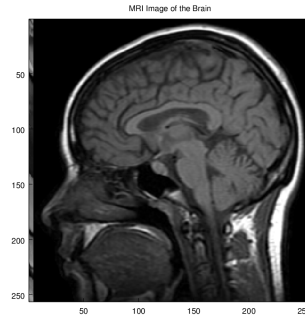


FIGURE 14 – Image cérébrale, résolution (256,256). Source : "toon0521.m"

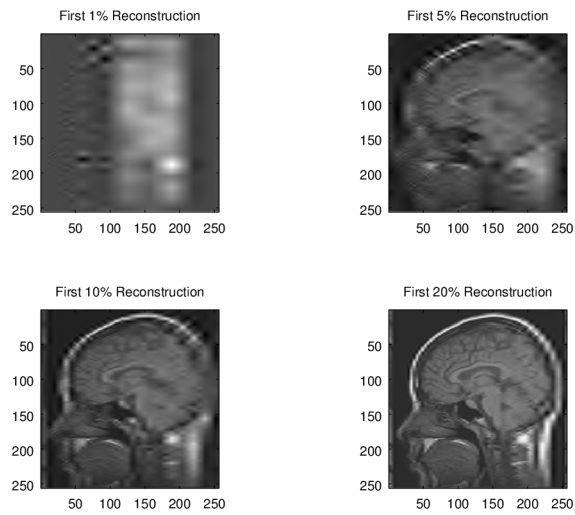


FIGURE 15 – Reconstruction de l'image compressée par transformée inverse de la transformée en Coiflets 2 dont on a gardé qu'un certain pourcentage des premiers coefficients (espace de détails à résolution faible)

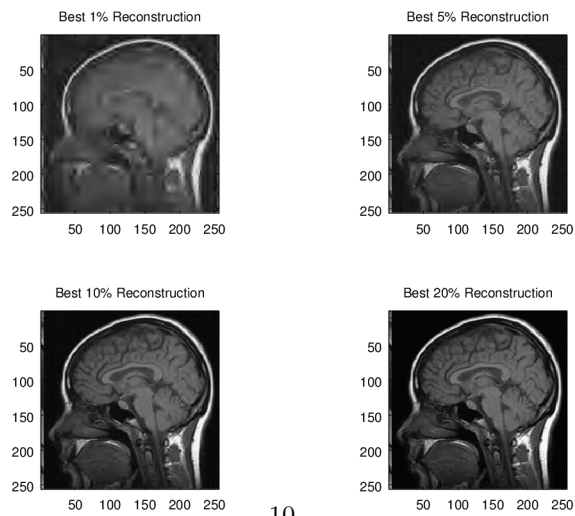


FIGURE 16 – Reconstruction de l'image compressé par transformée inverse de la transformée en Coiflets 2 dont on a gardé qu'un certain pourcentage des meilleurs coefficients (espace de détails à haute résolution)

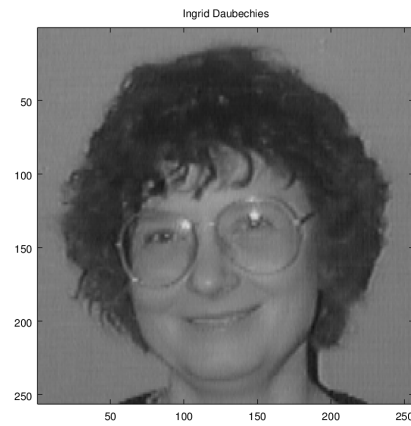


FIGURE 17 – Photographie d’Ingrid Daubechies, résolution (256,256). Source : "toon0541.m"

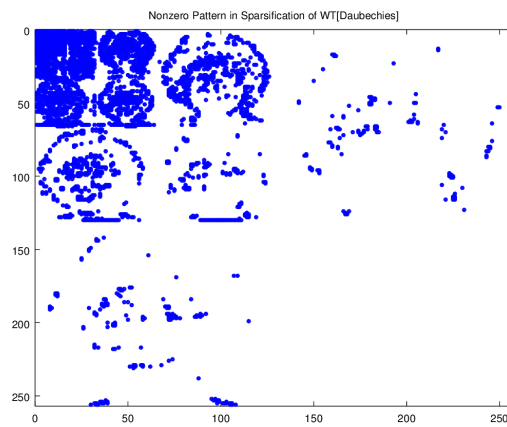


FIGURE 18 – Coefficients non nuls de la transformée en Coiflets 2 après recherche des régions sparses.

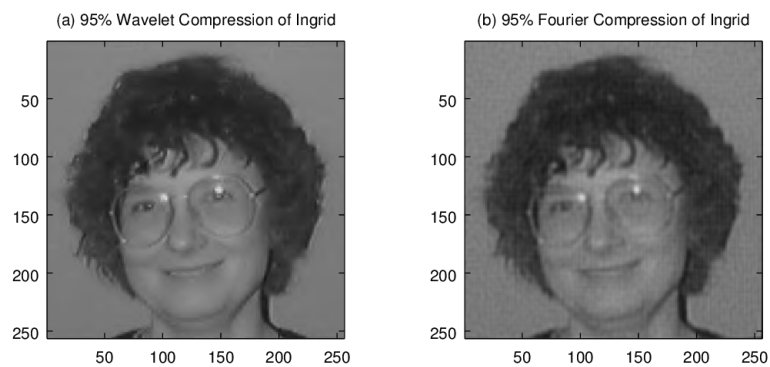


FIGURE 19 – Reconstruction de l’image (transformée inverse) compressée par ondelettes Coiflets 2 (gauche) et par transformée de Fourier (droite) dont on a gardé que 95% des coefficients.

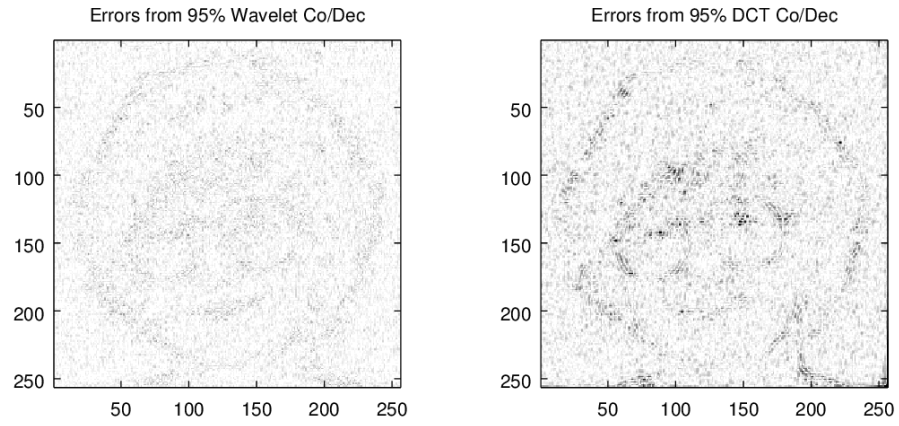


FIGURE 20 – Images résiduelles ou images d’erreurs de compression pour la méthode des ondelettes Coiflets 2 (gauche) et de la transformée de Fourier (droite) dont on a gardé que 95% des coefficients.

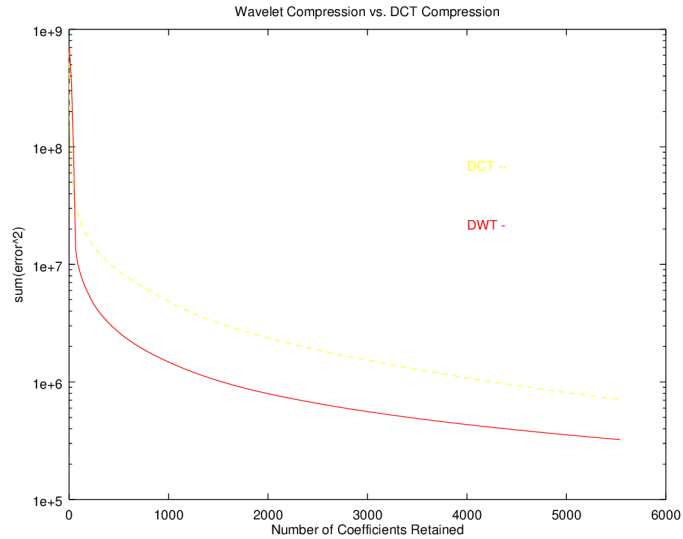


FIGURE 21 – Erreurs de compression par ondelettes Coiflets 2 et par transformée de Fourier, selon le nombre de coefficients retenus.

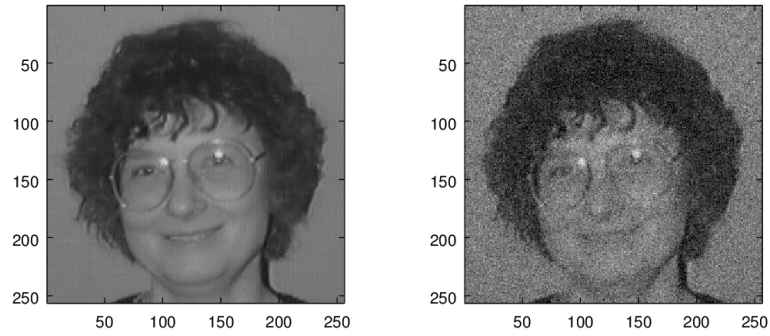


FIGURE 22 – Photographie d’Ingrid Daubechies originale et bruitée (gaussien, $\sigma = 20$, indépendant en chaque pixel)

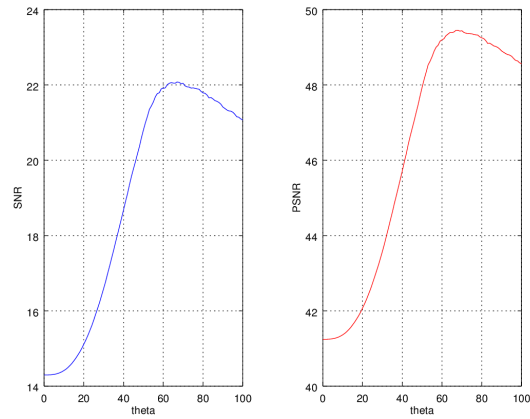


FIGURE 23 – Courbes des mesures SNR et PSNR appréciant l’approximant de l’image d’origine par l’image débruitée via l’annulation des faibles coefficients dans la base des ondelettes Daubechies 4. En fonction du seuil θ choisi.

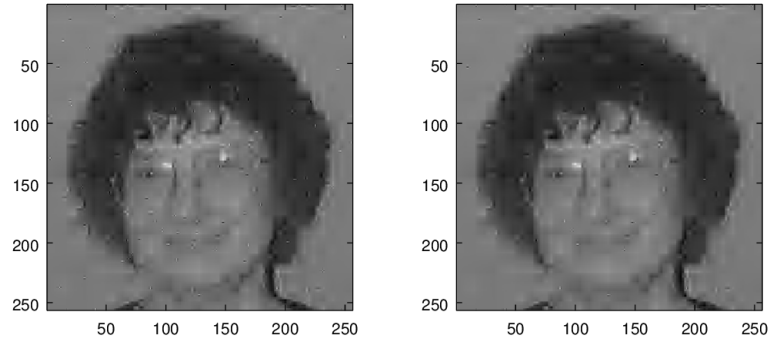


FIGURE 24 – Image débruitée pour $\theta = 65$ (gauche) et $\theta = 70$ (droite) qui correspondent aux seuils maximisant respectivement SNR et PSNR.

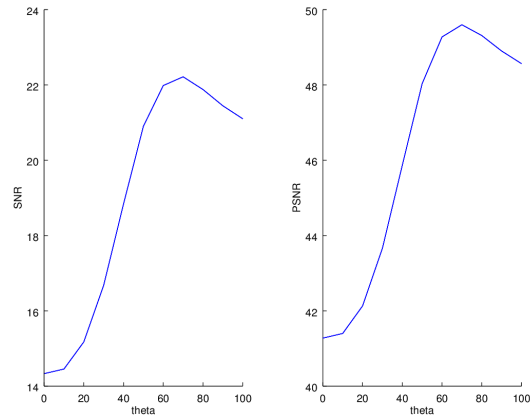


FIGURE 25 – Courbes des mesures SNR et PSNR appréciant l'approximant de l'image d'origine par l'image débruitée via l'annulation des faibles coefficients dans la base des ondelettes Daubechies 4. En fonction du seuil θ choisi (abscisses), et en fonction du nombre de translations $m = [1, 2, 4, 8]$ choisi (couleurs). Les quatre courbes sont superposées