

Traitement de l'information et vision artificielle TP2 - Transformée de Fourier, aliasing et filtre de Wiener.

Yonatan DELORO

Pour le 29 mars 2017

Note 1 : Les figures apparaissent en fin du rapport et je m'excuse pour les "allers-retours" occasionnés.

Note 2 : Pour une raison indéterminée, mes scripts ne compilent sous Octave qu'en sélectionnant tout le code et en appuyant sur F9 (ne pas essayer F5). Merci enfin de fermer Octave entre la compilation des deux TPs (des variables portent le même nom)

1 Partie a : Transformée de Fourier et aliasing

1.1 Transformée de Fourier d'une image

1.2. On travaille sur l'image "walltree.jpg" que l'on représente en RGB et en niveau de gris en figure 1.

3. On pourra trouver en figure 2 les parties réelles et imaginaires, le module et la phase de la transformée de Fourier bidimensionnelle de l'image. Pour plus de lisibilité, nous les représentons shiftées, c'est-à-dire en plaçant les basses fréquences au centre des images.

4. Le filtre passe-bas idéal est codé dans le fichier "low_pass_filter.m" de telle manière à supprimer les hautes fréquences d'une transformée de Fourier déjà shiftée (les basses fréquences positionnées au centre).

5. On applique tout d'abord ce filtre passe-bas pour une fréquence de coupure $f_c = 0.75$. Pour visualiser l'image filtrée shiftée dans le domaine de Fourier, il faut donc calculer la transformée de Fourier de l'image, la shifter, puis la multiplier terme à terme à notre filtre. Pour observer l'image filtrée dans le domaine "temporel", il s'agit donc de déshifter l'image précédente pour lui appliquer ensuite la transformée de Fourier inverse dont on prend la partie réelle (partie imaginaire potentiellement non nulle à cause des erreurs d'arrondis).

Les résultats sont données en figure 3. En figure 4, on observe également le résultat de l'application sur l'image du filtre passe-bas pour différentes fréquences de coupures. Plus f_c est faible, plus l'image est floutée et plus elle est contrastée (on supprime toutes les fréquences au-dessus de f_c).

En figure 5, on applique le filtre de fréquence de coupure $f_c = 0.75$ à un rectangle noir sur fond blanc. Si on applique n'importe quel filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c < 1$ à la transformée de Fourier, on obtient une image toute blanche. En appliquant la transformée de Fourier inverse, on retrouve bien le rectangle noir de départ, mais le fond blanc a viré au gris, ce qui est dû à l'atténuation des hautes fréquences.

1.2 Aliasing

1. Comme on l'observe en figures 6, changer la taille de l'image "brickwall.jpg" ou son rapport d'aspect fait apparaître des "escaliers" sur les contours ainsi que la présence de moires. Cela correspond au phénomène d'aliasing, qui est causé par le repliement des hautes fréquences sur les basses fréquences lors de l'échantillonnage (la fréquence d'échantillonnage est alors inférieure à deux fois la fréquence maximale de l'image, ce qui viole le critère de Nyquist).

2. Dans le fichier "subsampling.m", on code une fonction qui échantillonne l'image en prenant un pixel sur T . En figure 7 et 8, on visualise les résultats pour différentes périodes, et on observe toujours le phénomène d'aliasing. En effet, si on sous-échantillonne à $T = 2$ par exemple, c'est-à-dire qu'on ne conserve qu'un pixel sur 2 par ligne et par colonne, la fréquence d'échantillonnage passe à $N1/2$ (resp. $N2/2$) dans la direction horizontale (resp. verticale) où $N1 \times N2$ sont les dimensions de l'image. Ainsi la condition de Nyquist a encore plus de mal à être respectée, ce qui explique l'aliasing encore présent.

Pour y remédier, une solution serait d'appliquer un filtre passe-bas sur l'image avant l'échantillonnage, pour éliminer toutes les fréquences supérieures à la moitié de la fréquence à laquelle on va échantillonner.

2 Partie b : filtre de Wiener

2.1 Plaque floue

1. 2. L'image originale de la voiture est donnée en figure 9, ainsi que la plaque extraite de l'image et à laquelle a été préalablement appliquée une rotation pour la ramener dans le plan horizontal et faciliter l'expression du noyau de convolution.

2.2 Construction du noyau de convolution

1. Comme le flou est dû à la translation rectiligne de la voiture, il résulterait d'une convolution de l'image avec un segment horizontal. Autrement dit si on appelle f l'image sans flou, g l'image floutée, et h un tel noyau de convolution, on a :

$$g = f \star h + n \quad (1)$$

avec n un bruit additif. Notre noyau de convolution h consiste donc en un segment horizontal de longueur L , que l'on a estimé préalablement à la main en mesurant le décalage opéré par le flou sur un sommet de la plaque de l'image d'origine (on a pris $L = 30$), et qui va donc permettre de faire la moyenne sur L pixels par convolution.

2. Le module de la TFD H du noyau de convolution h est représenté en figure 10. En figure 11, on trouvera une représentation du profil longitudinal du module de H pour la ligne correspondant au milieu de l'image de la plaque. Il s'agit bien d'un sinus cardinal, comme on peut le retrouver par le calcul.

3. Le module de la TFD de l'image de la plaque est donné figure 12.

2.3 Application du filtre de Wiener

1. Pour calculer la transformée de Fourier F de l'image défloutée f (qui vérifie pour rappel $G = FH + N$, en passant (1) en Fourier), Wiener propose l'estimateur :

$$\hat{F} = WG, \quad W = \frac{\bar{H}}{|H|^2 + K} \quad (2)$$

où la matrice K correspond au rapport bruit sur signal. La matrice K étant inconnue, on construit le filtre de Wiener W , en considérant K comme une constante ($K(u, v) = K \quad \forall u, v$).

2. La fonction "deblurr" calcule la TFD de l'image, lui applique le filtre de Wiener construit avec un noyau de convolution de longueur L et une matrice $K(u, v)$ constante égale à K , et renvoie l'image défloutée en prenant la transformée de Fourier inverse. En figure 13, on représente côte à côte l'image originale et l'image défloutée avec les paramètres $L = 30$ et $K = 0.001$. En figure 14, on représente l'image défloutée enregistrée avec la commande "imwrite", qui semble opérer aussi un renforcement de contraste sur l'image défloutée.

3. Les meilleures paramètres L et K obtenues avec différentes expérimentations sont $L = 30$ et $K = 0.01$. En enregistrant l'image avec la commande "imwrite", on arrive à lire l'inscription sur la plaque : "N443 JJ0". La probable application d'un changement de contraste opérée par "imwrite" améliore très certainement la lecture de la plaque, puisque les caractères sont noirs sur fond blanc. En figure 15, on trouvera côte à côte l'image originale et l'image défloutée avec ces paramètres, et en figure 16 l'image défloutée après application de la fonction "imwrite".

4. En figure 17, on représente le profil longitudinal du module de W le filtre de Wiener, dans la direction où il n'est pas constant, et pour $K = 0.01$ que l'on a considéré comme "meilleur" paramètre pour le défloutage. En figures 18 et 19, on représente le même profil pour $K = 0.1$ et $K = 0.001$.

- Lorsque K est trop petit, on a $W \simeq \frac{\bar{H}}{|H|^2} \simeq \frac{1}{H}$. Par conséquent, l'image est défloutée sous l'hypothèse que le flou n'est presque dû qu'à la translation rectiligne de la voiture, ce qui est faux en pratique puisqu'il y a également du bruit. L'image défloutée est peu contrastée.
- Lorsque K est trop grand, il peut devenir même supérieur au module de H et on atténue alors les hautes fréquences. L'image est excessivement contrastée.

5. En figure 20, on visualise le module de w la transformée inverse de W . On en déduit qu'il est intéressant de représenter son profil longitudinal en plaçant l'origine au même niveau que là où on a placé le noyau de convolution h .

Comment interpréter w ? On avait $\hat{F} = WG$, donc en prenant la transformée inverse $\hat{f} = w \star g$ où f est l'estimée de l'image défloutée. Par conséquent, on peut voir d'une certaine manière w comme l'inverse du noyau de convolution h . En figure 21,22,23 on trace le profil pour des valeurs de K 0.01, 0.1 et 0.001 respectivement.

Image RGB



Image en noir et blanc



FIGURE 1 – Images RGB et Niveau de Gris

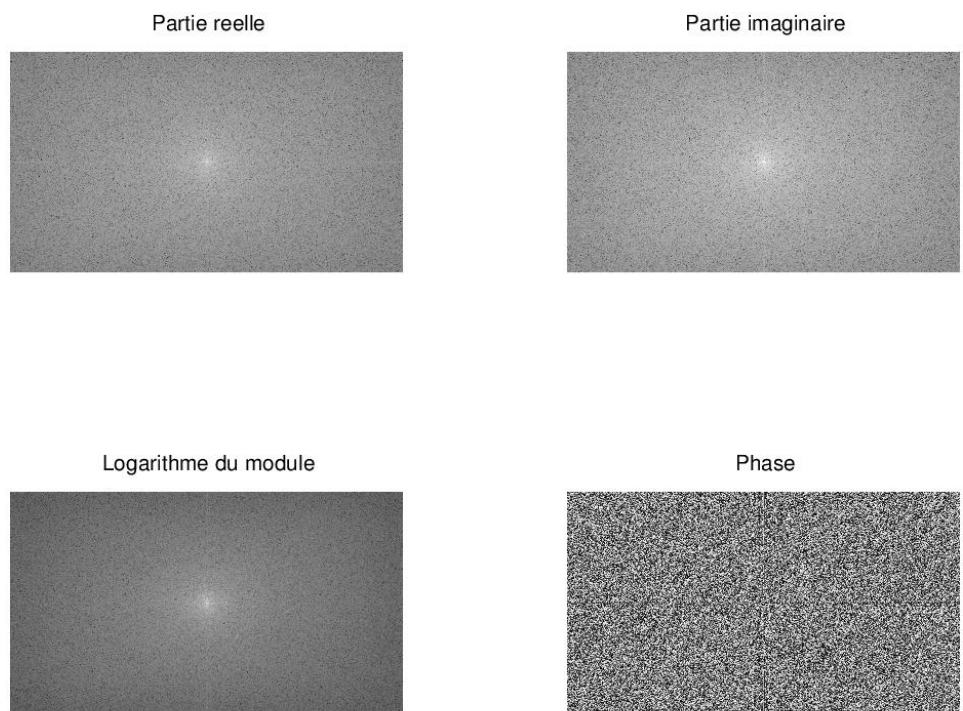


FIGURE 2 – Transformée de Fourier de l'image

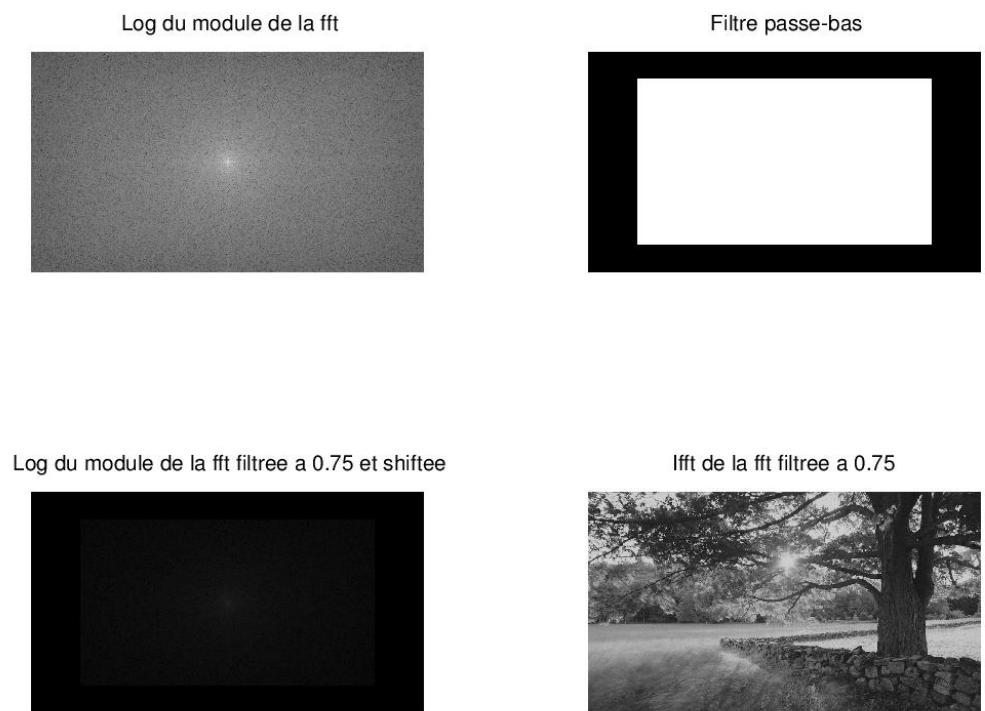


FIGURE 3 – Application à l'image d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = 0.75$



FIGURE 4 – Applications à l'image de filtres passe-bas de fréquence de coupure différentes.

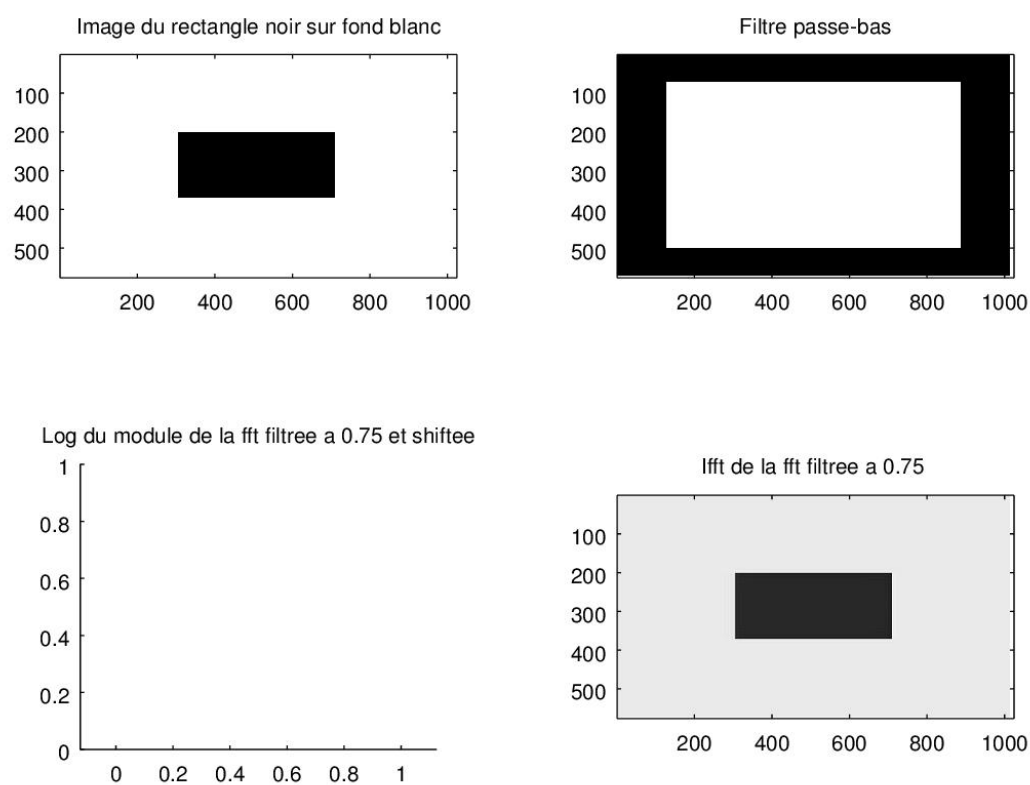


FIGURE 5 – Application à une image de synthèse "rectangle noir sur fond blanc" d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = 0.75$

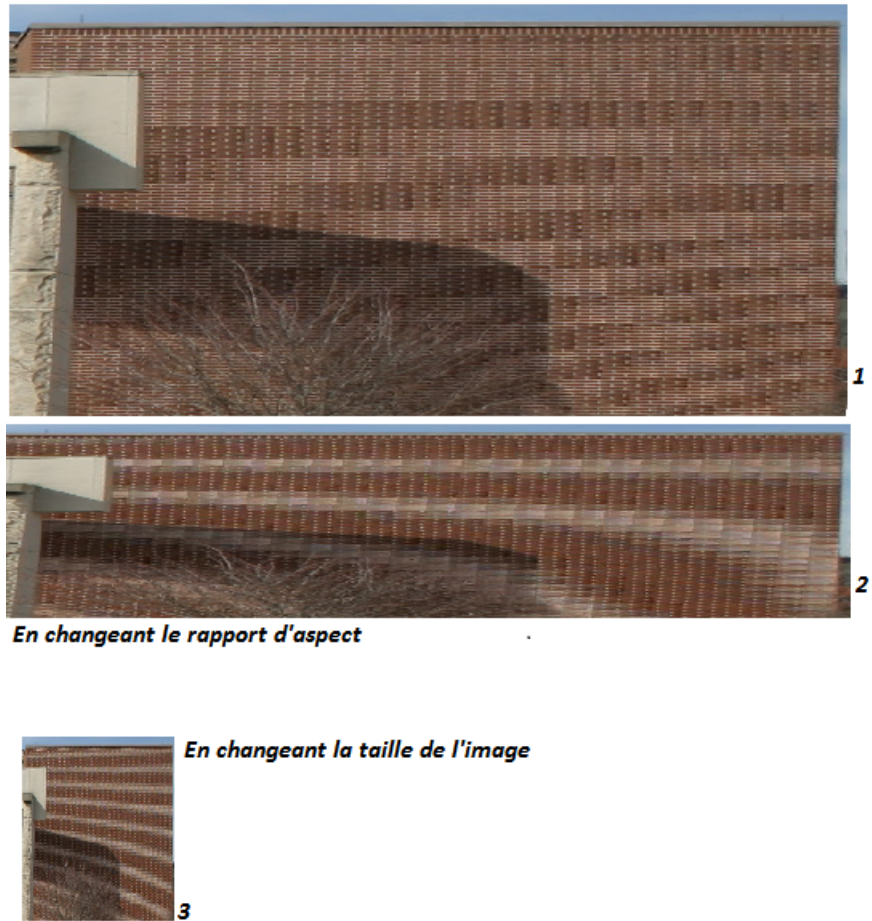


FIGURE 6 – Phénomènes d'aliasing obtenus en changeant la taille ou le rapport d'aspect.

1 pixel sur 2



1 pixel sur 3



1 pixel sur 4



1 pixel sur 5



1 pixel sur 6



1 pixel sur 7



1 pixel sur 8



1 pixel sur 9



1 pixel sur 10



FIGURE 7 – Sous-échantillonnages de l'image de différentes périodes (de 2 à 10)

1 pixel sur 2



1 pixel sur 10

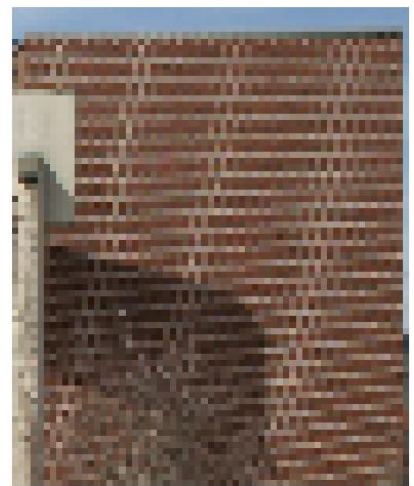


FIGURE 8 – Sous-échantillonnages de l'image de périodes 2 et 10

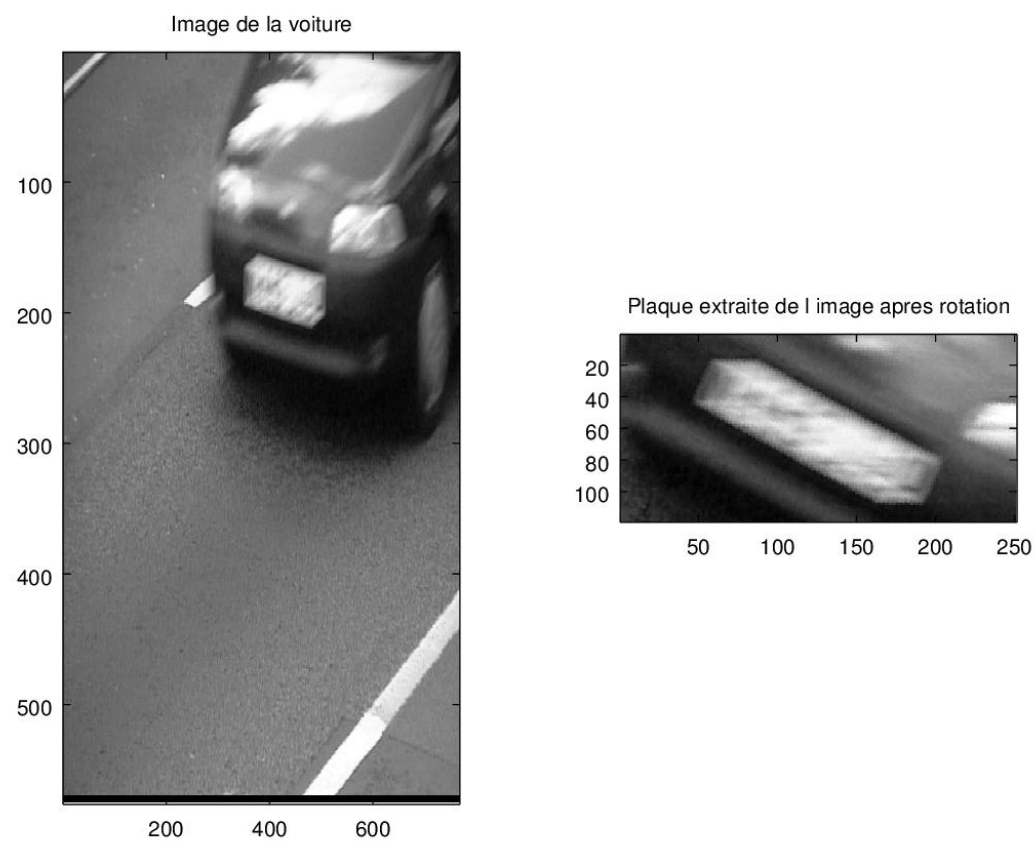


FIGURE 9 – Images de la voiture et de la plaque extraite après rotation

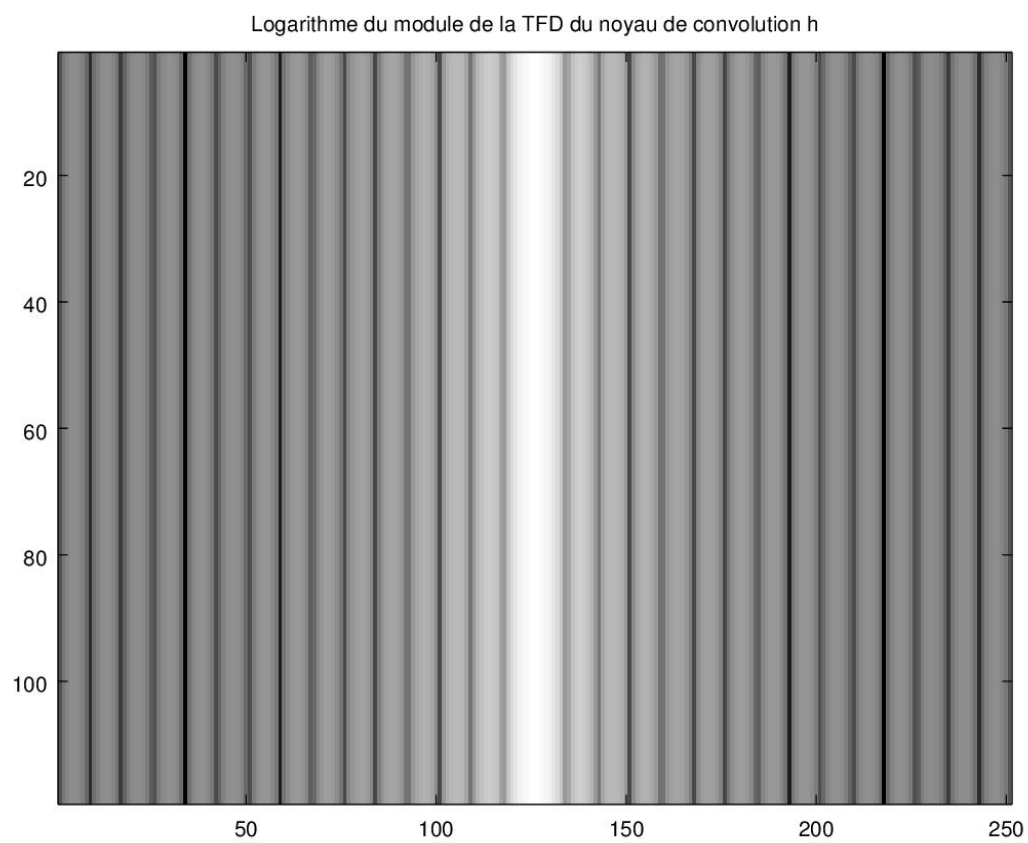


FIGURE 10 – Module de sa TFD H du noyau de convolution h ($L=30$)

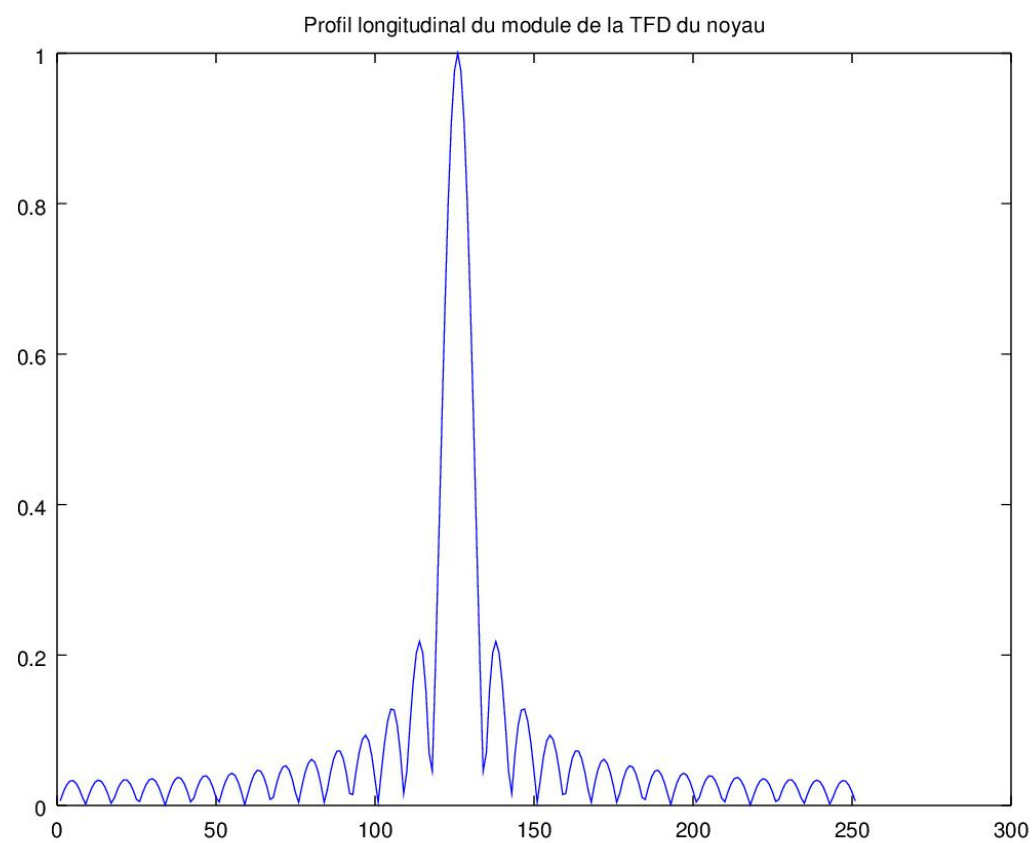


FIGURE 11 – Profil longitudinal du module de H , TFD du noyau, pour la ligne correspondant au milieu de l'image de la plaque

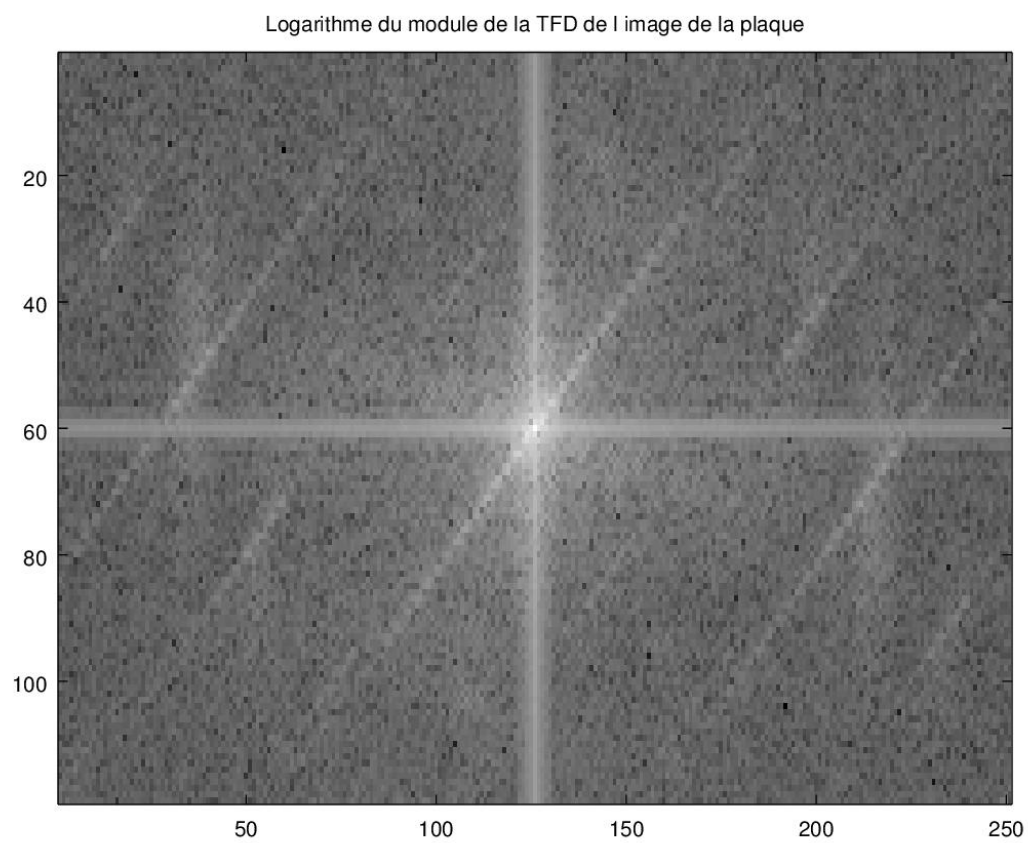


FIGURE 12 – Module de la TFD de l'image de la plaque.

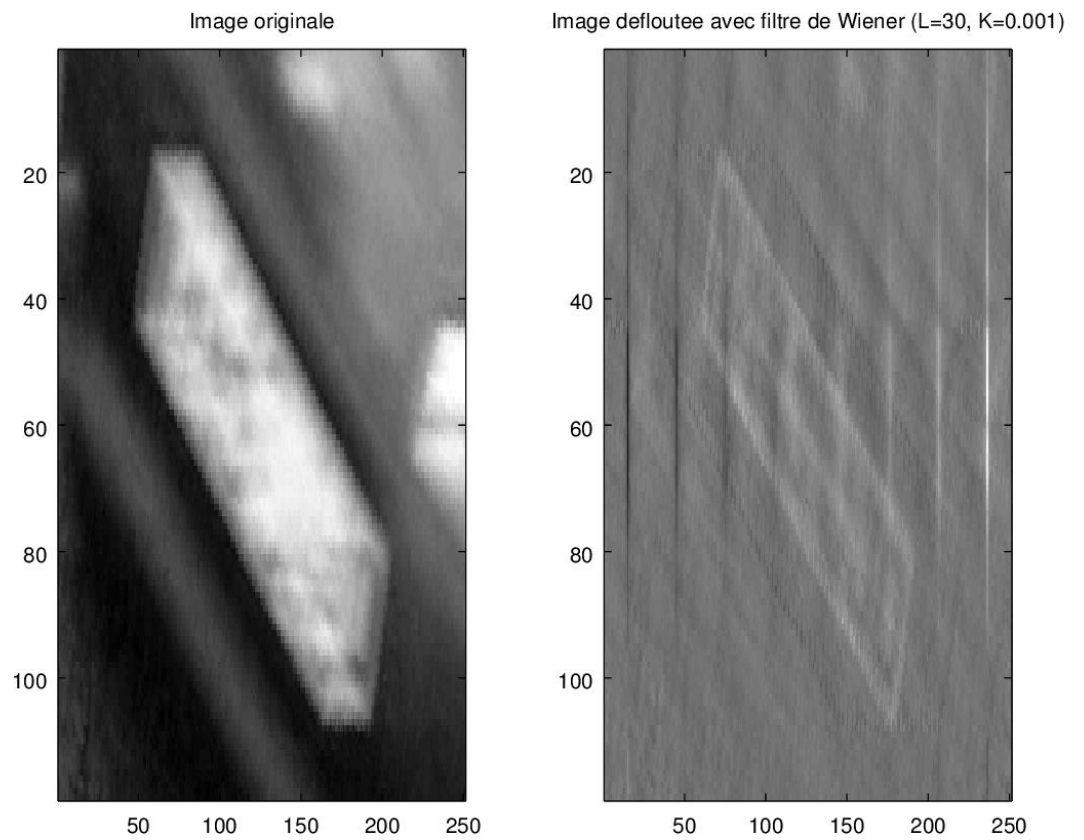


FIGURE 13 – Image originale et image défloutée avec un filtre de Wiener de paramètres $L = 30$ et $K = 0.001$



FIGURE 14 – Image originale et image défloutée avec un filtre de Wiener de paramètres $L = 30$ et $K = 0.001$ après "imwrite" ("changement de contraste" ?)

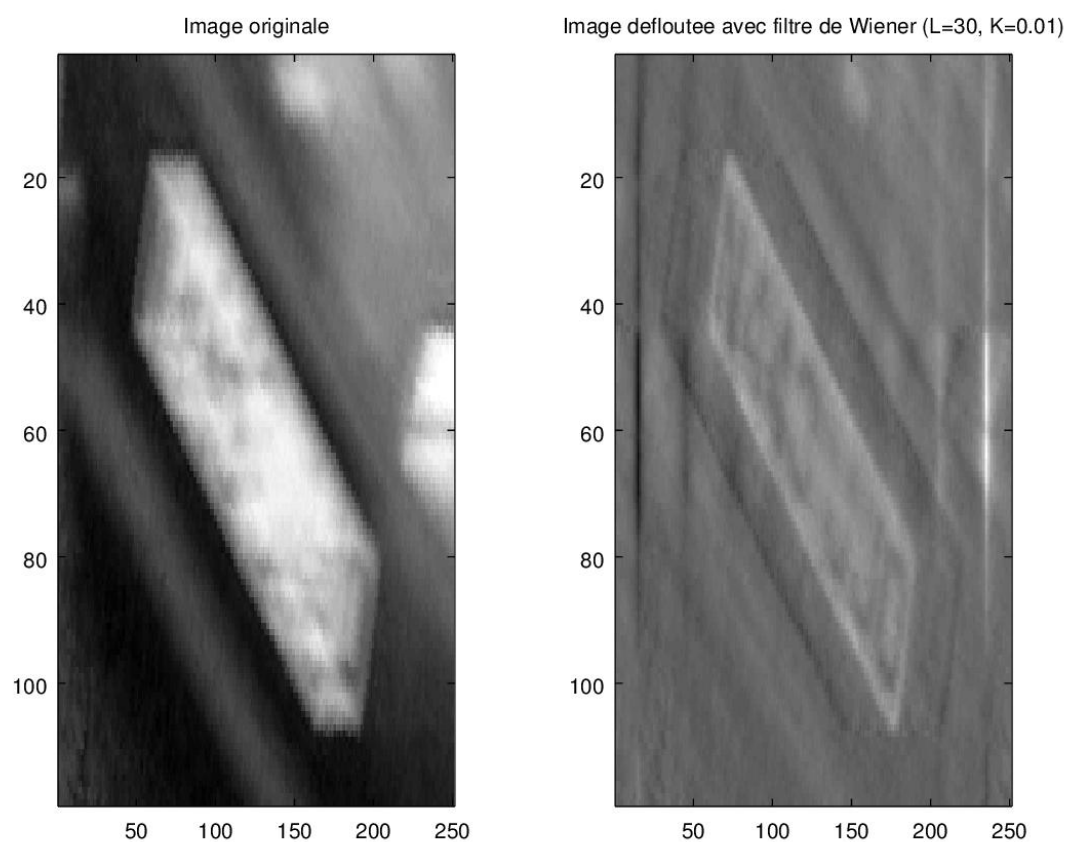


FIGURE 15 – Image défloutée avec un filtre de Wiener de "meilleurs" paramètres $L = 30$ et $K = 0.01$



FIGURE 16 – Image originale et image défloutée avec un filtre de Wiener de "meilleurs" paramètres $L = 30$ et $K = 0.01$ après "imwrite"

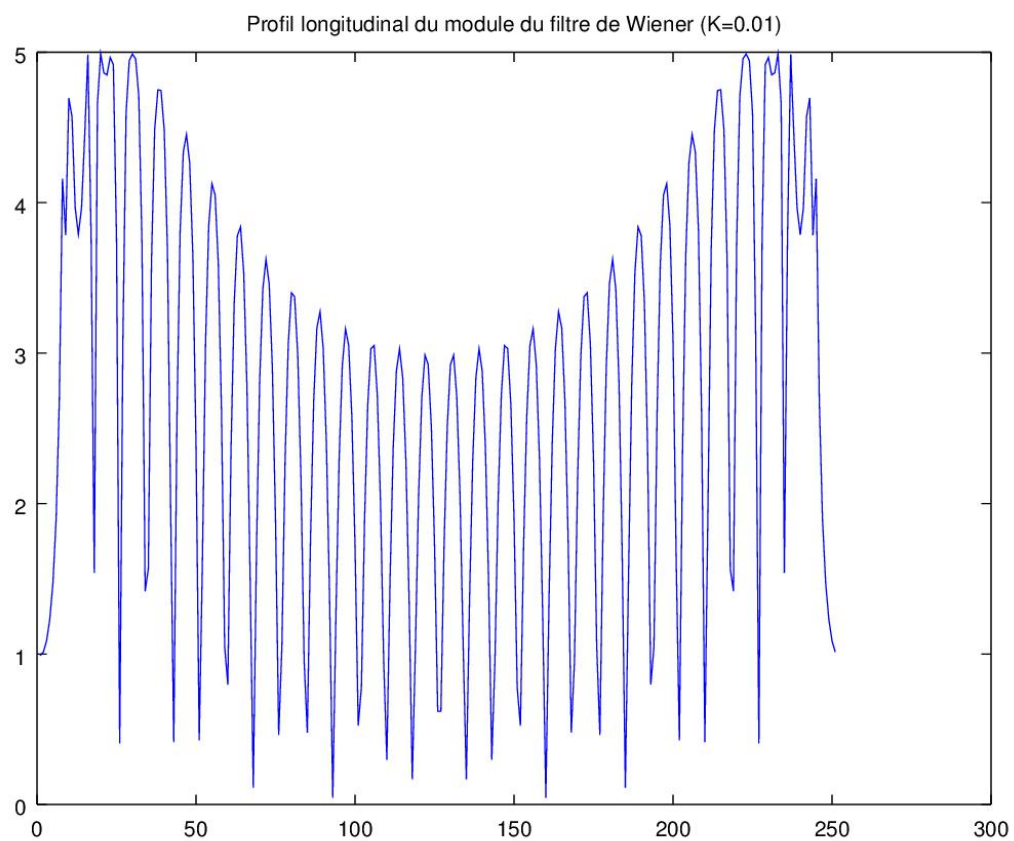


FIGURE 17 – Profil longitudinal du module du filtre de Wiener W avec $K = 0.01$

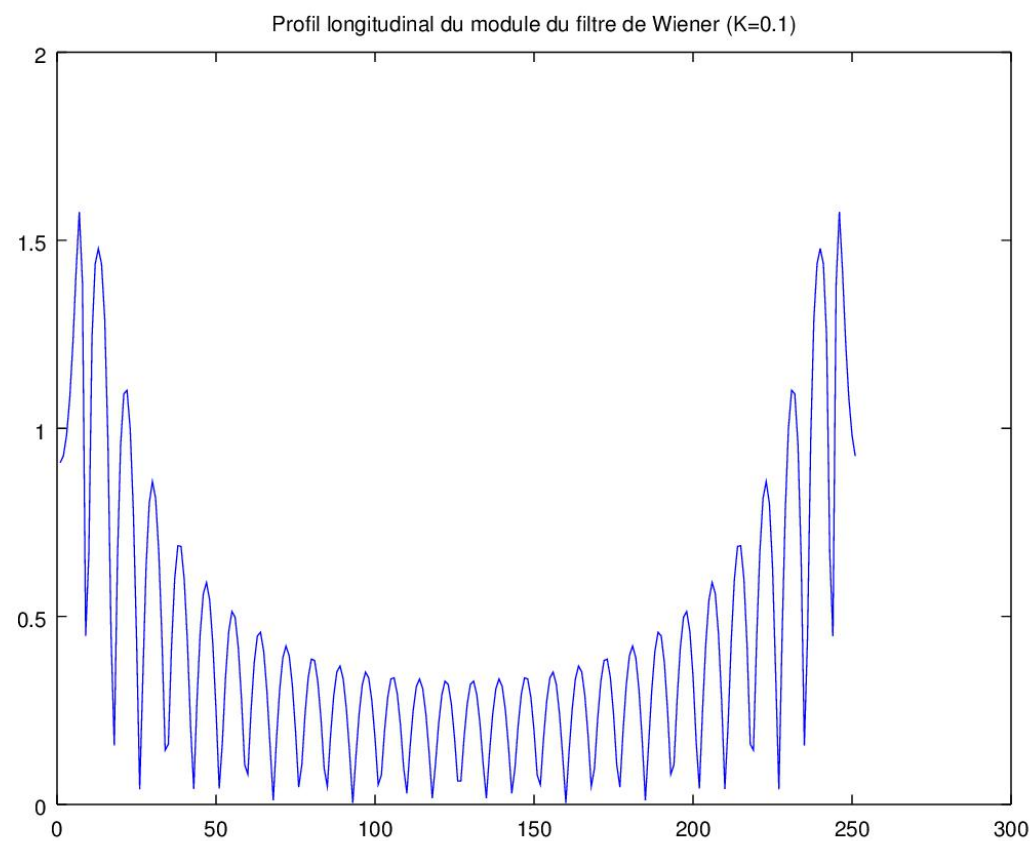


FIGURE 18 – Profil longitudinal du module du filtre de Wiener W avec $K = 0.1$

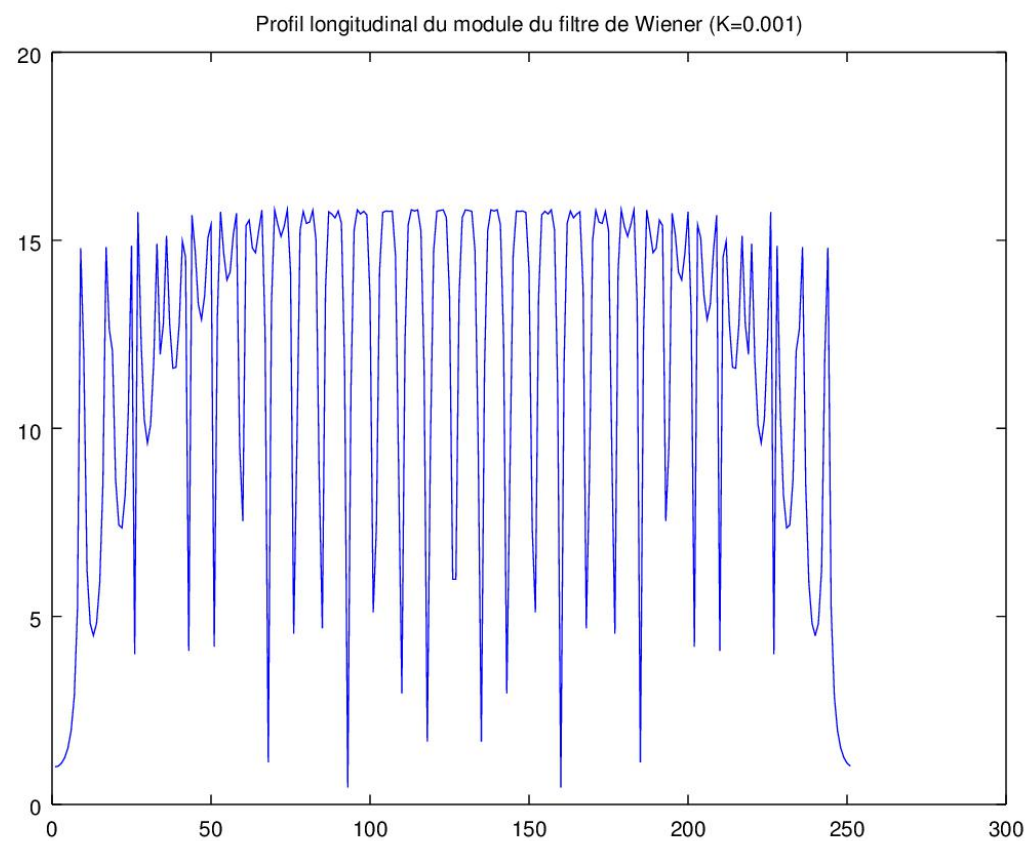


FIGURE 19 – Profil longitudinal du module du filtre de Wiener W avec $K = 0.001$

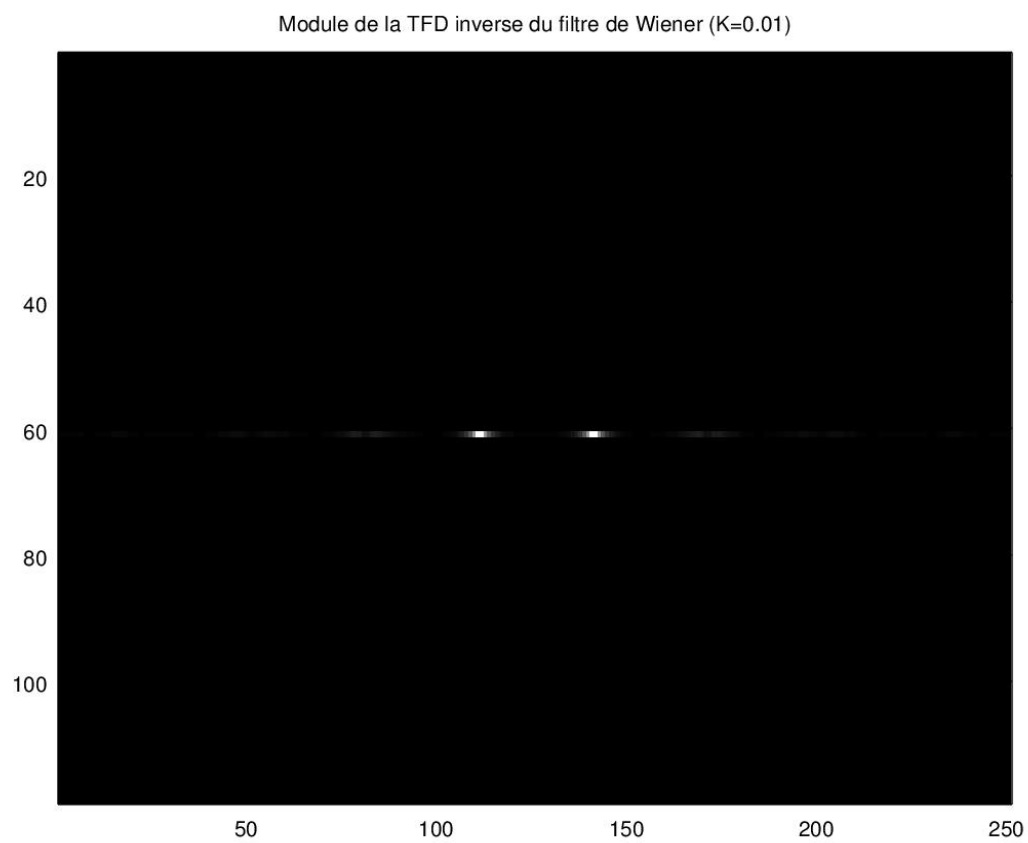


FIGURE 20 – Module la TFD inverse du filtre de Wiener W avec $K = 0.01$

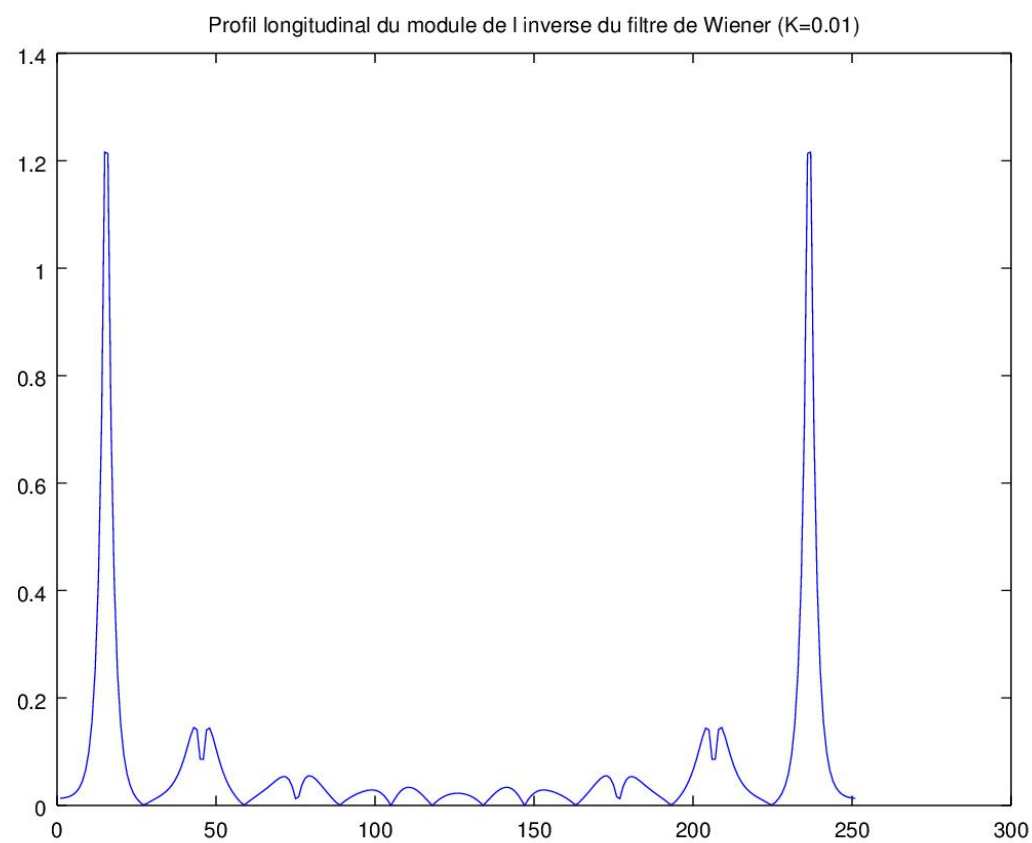


FIGURE 21 – Profil longitudinal du module la TFD inverse du filtre de Wiener W avec $K = 0.01$

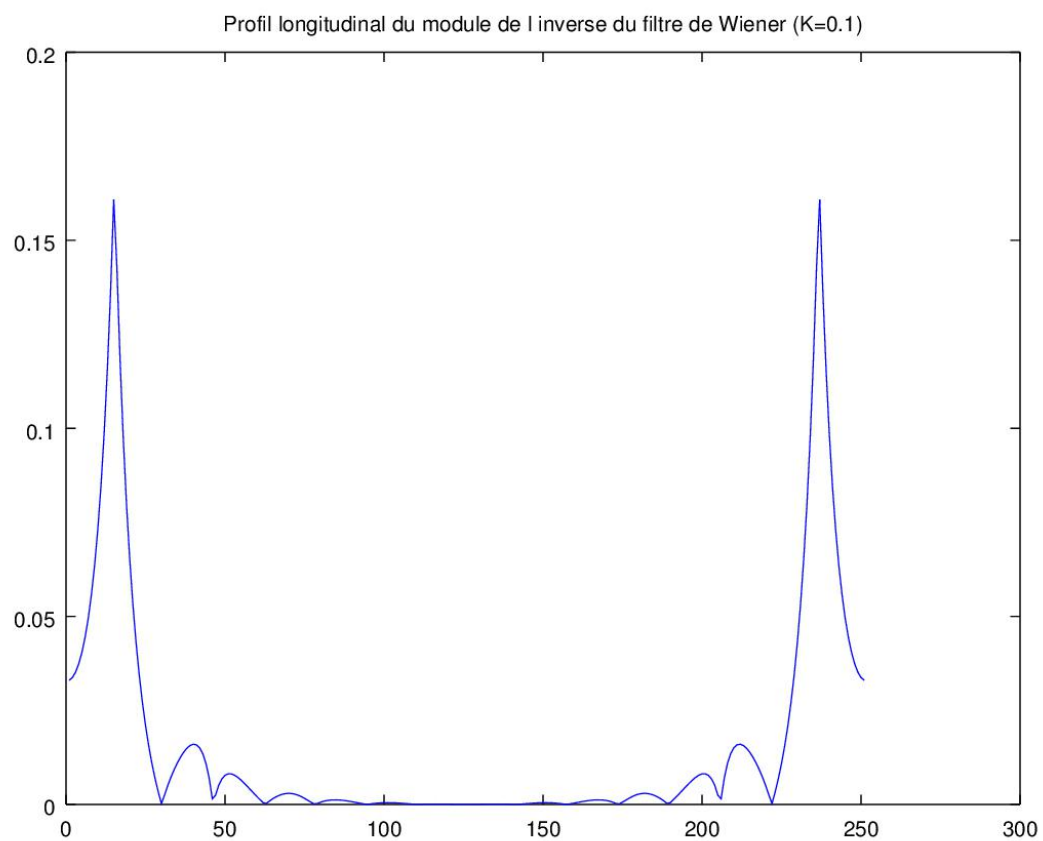


FIGURE 22 – Profil longitudinal du module la TFD inverse du filtre de Wiener W avec $K = 0.1$

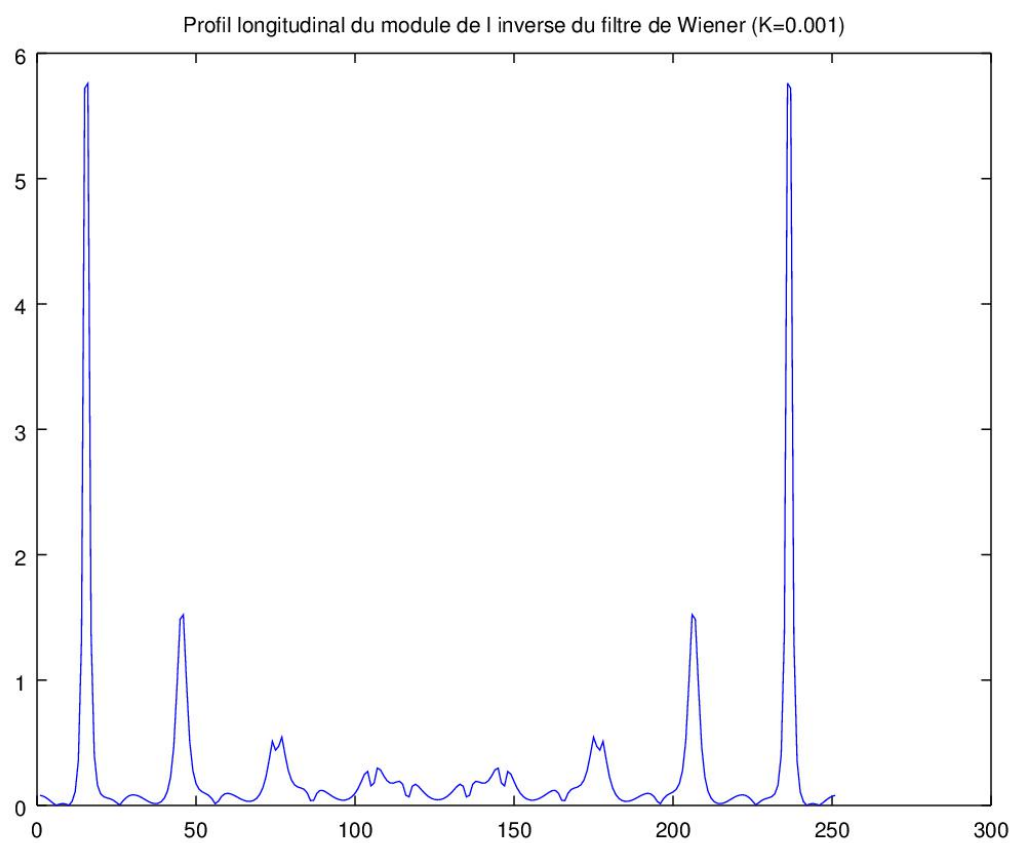


FIGURE 23 – Profil longitudinal du module la TFD inverse du filtre de Wiener W avec $K = 0.001$