

Modéliser l'Aléa - TP3 : Simulation de files d'attente.

Tong ZHAO & Yonatan DELORO

Pour le 11 juin 2017

Question 1 : évolution de la file à 1 guichet

Soit (X_t) le nombre d'éléments dans la file FIFO à 1 guichet à l'instant t , pour des temps d'arrivée des clients indépendants de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et des temps de services indépendants entre eux et des temps d'arrivée et de loi $\mathcal{E}(\mu)$ (les espérances respectives de ces temps sont donc $\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\mu}$).

Notons (Z_n) les états successifs de la chaîne (X_t) (changements de longueur de file) et (T_n) les différents instants de ces variations de longueur, ainsi que :

$$\forall t \in [T_n, T_{n+1}[, \quad X_t = Z_n$$

On a alors :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(T_1 = t_0 + dt | Z_0 = t_0, X_0 = 0) &= \mathbb{P}(\mathcal{E}(\lambda) = dt) \\ \mathbb{P}(T_1 = t_0 + dt | Z_0 = t_0, X_0 \geq 1) &= \mathbb{P}(\mathcal{E}(\lambda + \mu) = dt) \end{cases}$$

Aussi on a :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Z_1 = 1 | Z_0 = 0) &= 1 \\ \mathbb{P}(Z_1 = r + 1 | Z_0 = r) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad r \geq 1 \\ \mathbb{P}(Z_1 = r - 1 | Z_0 = r) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad r \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi pour simuler (X_t) , il suffit de stocker dans une liste T les différents temps de changements du système (T_n) et dans une liste X les états de la chaîne (Z_n) entre ces instants (T_n) .

On donne en figures 1 à 4 différentes simulations de la chaîne (X_t) en fonction de la densité de trafic $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

On observe ainsi trois régimes différents :

- $\rho < 1$: Lorsque le temps de service au guichet est en moyenne 2 fois plus rapide par exemple que l'arrivée d'une nouvelle personne dans la file ($\rho = 1/2$, figure 1), la longueur de la file oscille et ne dépasse pas 8 personnes après 100 itérations.
- $\rho > 1$: Ainsi lorsque c'est l'arrivée d'une nouvelle personne qui est en moyenne 2 fois plus rapide que le temps de service ($\rho = 2$, figure 2), alors la file augmente en taille continument et inexorablement.
- $\rho = 1$: Ce régime pour lequel le temps moyen d'attente d'une nouvelle personne dans la file est égal au temps de service au guichet ($\rho = 1$) est un régime qu'on peut qualifier de "critique". En effet on peut observer deux dynamiques différentes selon les simulations : soit la longueur de la file se met à augmenter globalement, augmentation ponctuelle

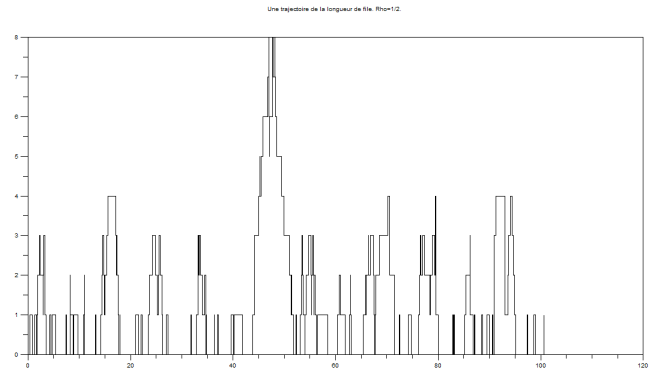


FIGURE 1 – Une simulation de la file pour $\rho = 1/2$ ($\lambda = 1, \mu = 2$)

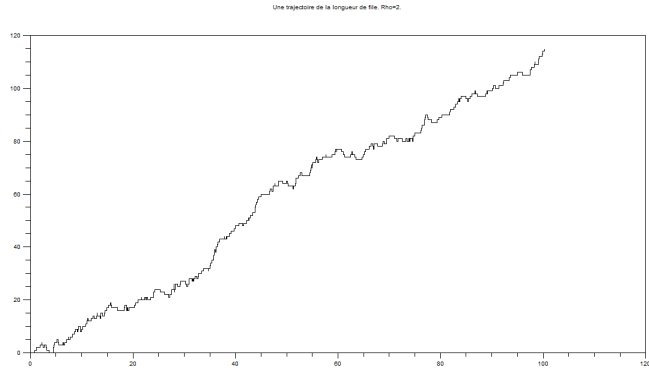


FIGURE 2 – Une simulation de la file pour $\rho = 2$ ($\lambda = 2, \mu = 1$)

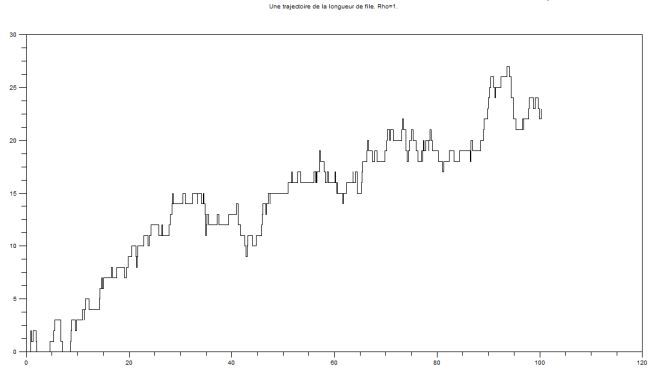


FIGURE 3 – Une simulation de la file pour $\rho = 1$ ($\lambda = 1, \mu = 1$)

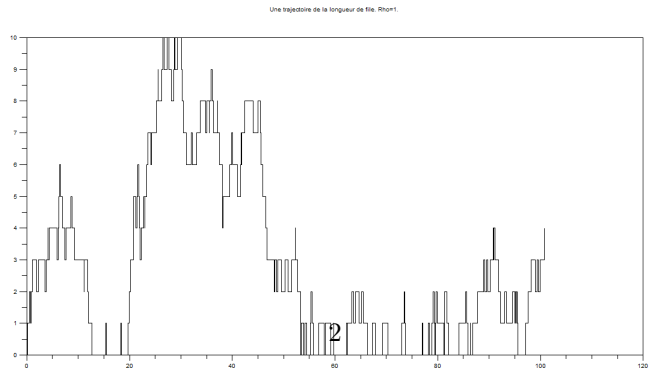


FIGURE 4 – Une autre simulation de la file pour $\rho = 1$ ($\lambda = 1, \mu = 1$)

régulièrement par quelques brèves diminutions et on retrouve ainsi le comportement asymptotique du régime $\rho > 1$ (figure 3) ; soit la longueur de la file oscille en restant bornée et on retrouve alors le comportement oscillant du régime $\rho < 1$ (figure 4).

Question 2 : espérance et variance de la longueur de file

On veut calculer l'espérance et la variance de la longueur de la file en régime stationnaire.

Grâce au théorème ergodique, si l'espérance de la longueur de file reste bornée, on peut espérer approcher cette espérance en régime stationnaire en calculant la moyenne du nombre d'individus dans la file sur une longue trajectoire temporelle de la chaîne X .

Autrement dit on choisit T assez grand (et notera N tel que $X_T = Z_N$) tel qu'on puisse écrire (en appliquant le théorème pour $f = Id$ pour reprendre la notation de l'énoncé) :

$$E_T = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T X_t = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} Z_n(T_{n+1} - T_n) \simeq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X_\infty = k)k = \mathbb{E}(X_\infty)$$

De même, on peut également approcher la variance comme suit (en appliquant le théorème pour $f : x \rightarrow (x - E_T)^2$ pour reprendre la notation de l'énoncé) :

$$\begin{aligned} V_T &:= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (X_t - E_T)^2 = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} (Z_n(T_{n+1} - T_n) - E_T)^2 \\ &\simeq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X_\infty = k)(k - E_T)^2 \simeq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X_\infty = k)(k - E(X_\infty))^2 = \mathbb{V}(X_\infty) \end{aligned}$$

Pour s'assurer que l'espérance et la variance restent bornées, il faut se placer dans le régime $\rho < 1$ comme on a pu l'observer avec les simulations de comportement de la chaîne en question 1.

Sur les figures 5 à 12, on trace l'évolution des quantités E_T et V_T au fil de T pour les trois régimes de ρ . On obtient bien convergence quand T tend vers l'infini pour le régime $\rho < 1$, divergence pour $\rho > 1$, et convergence ou divergence pour le régime critique $\rho = 1$.

Aussi dans le cas "toujours convergent" $\rho = \frac{1}{2}$, on peut comparer les valeurs finales $E_{1000} \simeq 0.90$ et $V_{1000} \simeq 1.56$ aux valeurs d'espérance et de variance théorique de longueur de file données par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_\infty) &= \frac{\rho}{1 - \rho} = 1 \\ \mathbb{V}(X_\infty) &= \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = 2 \end{aligned}$$

Les différences entre les valeurs calculées sur la trajectoire à 1000 itérations et les valeurs théoriques sont raisonnables. On obtiendrait aussi de plus petites différences avec le choix d'un ρ bien inférieur à 1.

C'est ce que l'on observe en figures 13 et 14 où l'on trace les écarts $E_{T=1000} - \mathbb{E}(X_\infty)$ et $V_{T=1000} - \mathbb{V}(X_\infty)$ en fonction de ρ . On observe ainsi que la convergence du théorème ergodique est ici d'autant plus rapide que la densité de trafic ρ est proche de 0, ce qui est assez intuitif finalement.

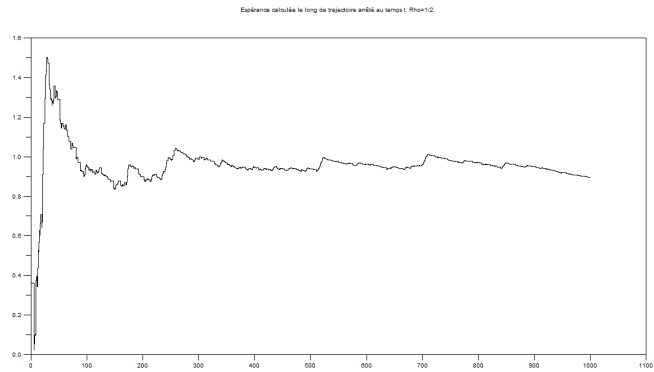


FIGURE 5 – Nombre moyen d’individus dans la file sur une trajectoire de la chaîne arrêtée à chaque instant t (en abscisse) $\rho = 1/2$ ($\lambda = 1, \mu = 2$)

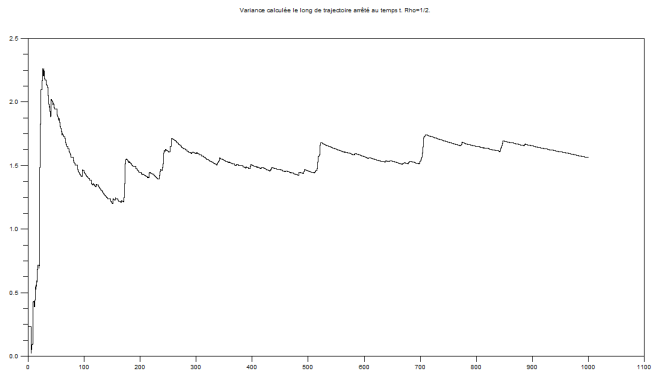


FIGURE 6 – Variance du nombre d’individus dans la file sur une trajectoire de la chaîne arrêtée à chaque instant t (en abscisse) $\rho = 1/2$ ($\lambda = 1, \mu = 2$)

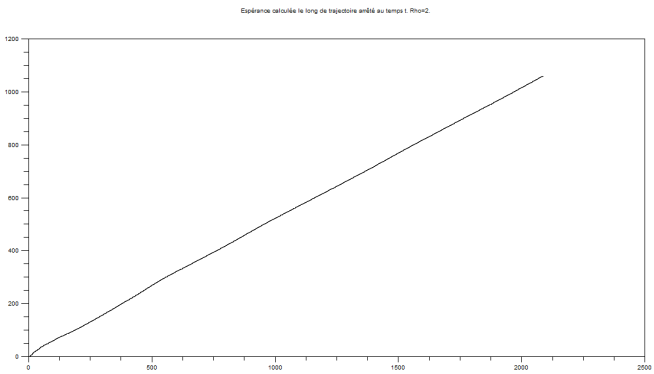


FIGURE 7 – Nombre moyen d’individus dans la file sur une trajectoire de la chaîne arrêtée à chaque instant t (en abscisse) $\rho = 2$ ($\lambda = 2, \mu = 1$)

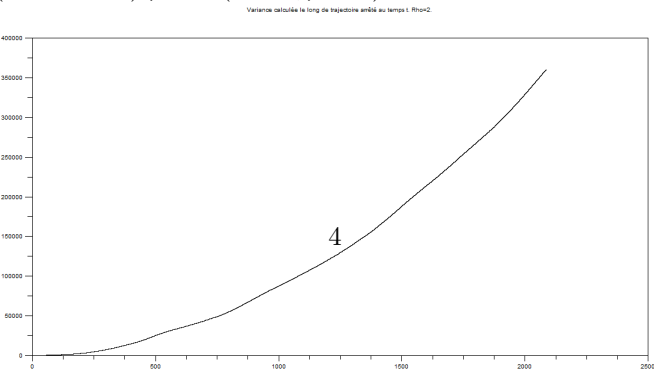


FIGURE 8 – Variance du nombre d’individus dans la file sur une trajectoire de la chaîne arrêtée à chaque instant t (en abscisse) $\rho = 2$ ($\lambda = 2, \mu = 1$)

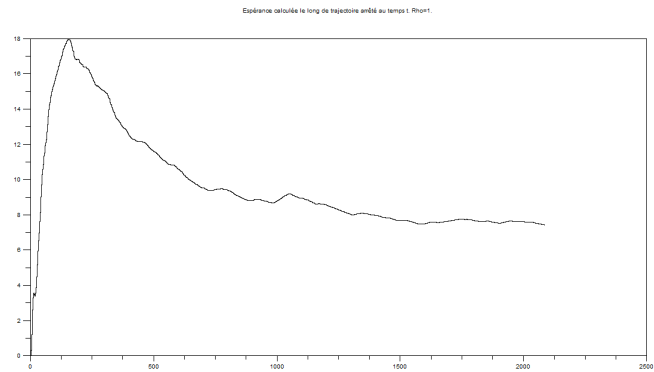


FIGURE 9 – Nombre moyen d’individus dans la file sur une trajectoire de la chaîne arrêtée à chaque instant t (en abscisse) $\rho = 1$ ($\lambda = 1, \mu = 1$)

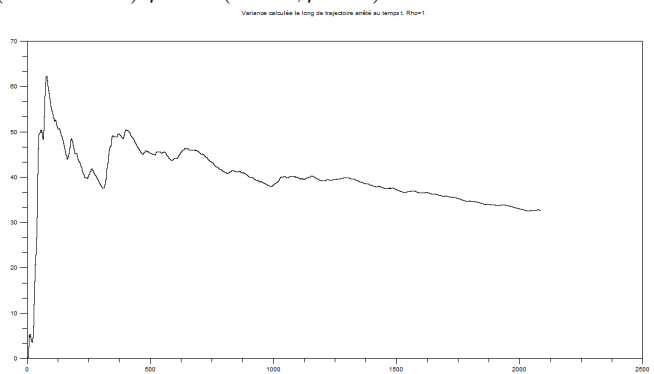


FIGURE 10 – Variance du nombre d’individus dans la file sur une trajectoire de la chaîne arrêtée à chaque instant t (en abscisse) $\rho = 1$ ($\lambda = 1, \mu = 1$)

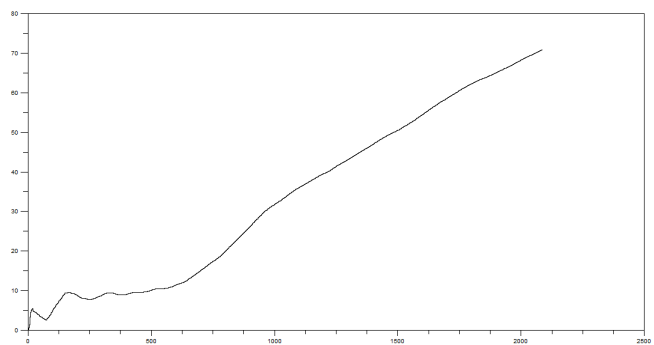


FIGURE 11 – Nombre moyen d’individus dans la file sur une autre trajectoire de la chaîne arrêtée à chaque instant t (en abscisse) $\rho = 1$ ($\lambda = 1, \mu = 1$)

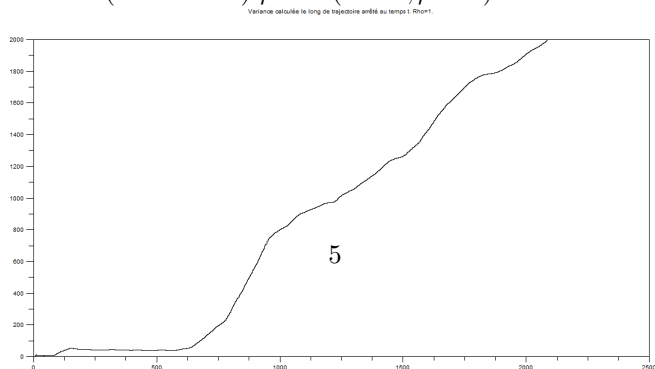


FIGURE 12 – Variance du nombre d’individus dans la file sur une autre trajectoire de la chaîne arrêtée à chaque instant t (en abscisse) $\rho = 1$ ($\lambda = 1, \mu = 1$)

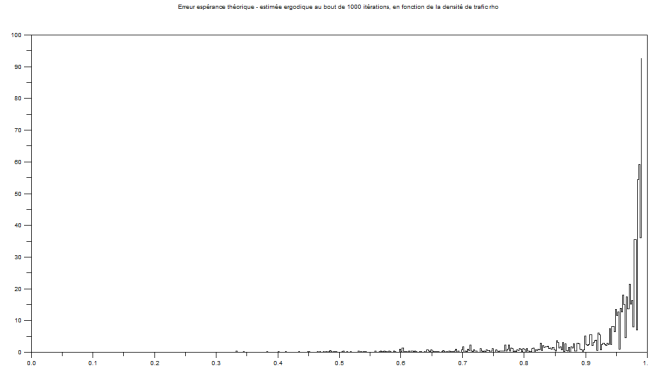


FIGURE 13 – Ecart $E_{T=1000} - \mathbb{E}(X_{\infty})$ entre l'espérance théorique et son estimée ergodique au bout de 1000 itérations, en fonction de la densité de trafic ρ (en abscisse)

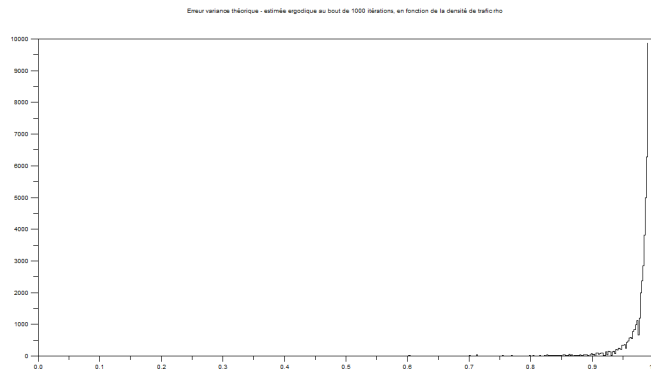


FIGURE 14 – Ecart $V_{T=1000} - \mathbb{V}(X_{\infty})$ entre la variance théorique et son estimée ergodique au bout de 1000 itérations, en fonction de la densité de trafic ρ (en abscisse)

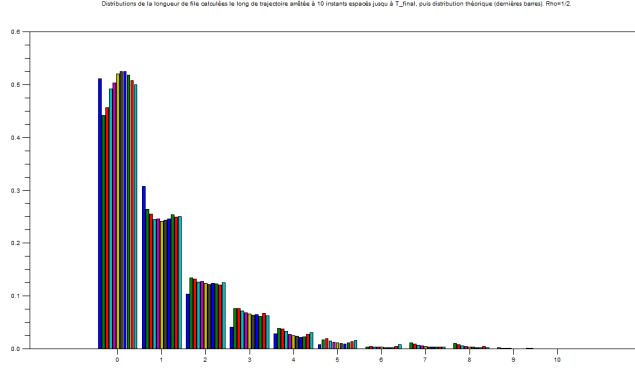


FIGURE 15 – En abscisse, nombre d’éléments k dans la file. En ordonnées, probabilités estimées (10 premières barres) et théorique (11èmes barres) que la longueur de file soit k en régime stationnaire (pour $\rho = 1/2$). Distributions de probabilités $(P_{t_i}(k), k \in \mathbb{N}^*, i \in [1, 10])$ estimées avec une trajectoire de X arrêtée à 10 instants t_i différents espacés jusqu’à $T = 1000$. A côté de ces 10 distributions (11èmes barres de l’histogramme), on représente également la distribution théorique en régime stationnaire de la longueur de file. On observe bien la convergence.

Question 3 : distribution de la longueur de la file

Enfin, dans le cas ”toujours convergent” $\rho < 1$, on cherche à approcher toujours grâce au théorème ergodique la distribution de probabilités de la longueur de file X . On peut écrire en effet que, avec T assez grand et N tel que $X_T = Z_N$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, P_T(k) := \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T 1_{X_t=k} = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} 1_{Z_n=k}(T_{n+1}-T_n) \simeq \sum_{l \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X_\infty = l) 1_{l=k} = \mathbb{P}(X_\infty = k)$$

(en appliquant le théorème avec $f_k : x \rightarrow 1_{x=k}$ pour un k donné, pour reprendre la notation de l’énoncé)

Ainsi en figure 15, on représente sous forme d’histogrammes les distributions $P_t(k)$ obtenues pour une trajectoire de X (pour $\rho = 1/2$) arrêtée à 10 instants t différents espacés jusqu’à $T = 1000$. A côté de ces 10 distributions (dernières barres de l’histogramme), on représente également la distribution théorique en régime stationnaire de la longueur de file qui exprime comme suit (voire proposition 9.2.1 du livre ”Modèles aléatoires”) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_\infty = k) = \rho^k(1 - \rho)$$

On observe bien une convergence au fil des itérations de la distribution estimée P_t avec la trajectoire arrêtée en t vers la distribution de X_∞ .

Question subsidiaire : évolution de la file à K guichets

On note toujours (X_t) le nombre d’éléments dans la file FIFO à K guichets à l’instant t , pour des temps d’arrivée des clients indépendants de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et des temps de services indépendants entre eux et des temps d’arrivée et de loi $\mathcal{E}(\mu)$.

Si (Z_n) correspond toujours aux états successifs de la chaîne (X_t) (changements de longueur de file) et (T_n) aux différents instants de ces variations de longueur, ainsi que :

$$\forall t \in [T_n, T_{n+1}[, \quad X_t = Z_n$$

On a alors :

$$\mathbb{P}(T_1 = t_0 + dt | Z_0 = t_0, X_0 = r) = \mathbb{P}(\mathcal{E}(\lambda + \min(r, K)\mu) = dt) \quad \forall r$$

Aussi on a :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Z_1 = r + 1 | Z_0 = r) &= \frac{\lambda}{\lambda + \min(r, K)\mu} & \forall r \\ \mathbb{P}(Z_1 = r - 1 | Z_0 = r) &= \frac{\mu}{\lambda + \min(r, K)\mu} & r \geq 1 \end{cases}$$

Pour simuler (X_t) , on stocke toujours dans une liste T les différents temps de changements du système (T_n) et dans une liste X les états de la chaîne (Z_n) entre ces instants (T_n) .

Comme on l'observe sur les figures 16 à 19, on observe toujours trois types de régimes en fonction des valeurs de λ et μ , et plus précisément de la position par rapport à 1 d'une densité de trafic qu'on peut exprimer par $\rho = \frac{\lambda}{K\mu}$.

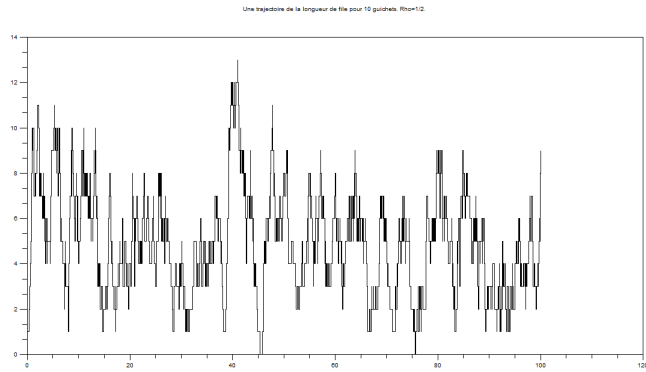


FIGURE 16 – Une simulation de la file pour $K = 10$ guichets et $\rho = 1/2$ ($\lambda = 5, \mu = 1$)

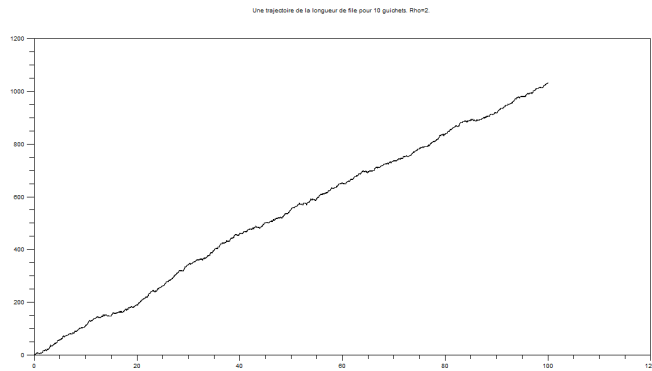


FIGURE 17 – Une simulation de la file pour $K = 10$ guichets et $\rho = 2$ ($\lambda = 20, \mu = 1$)

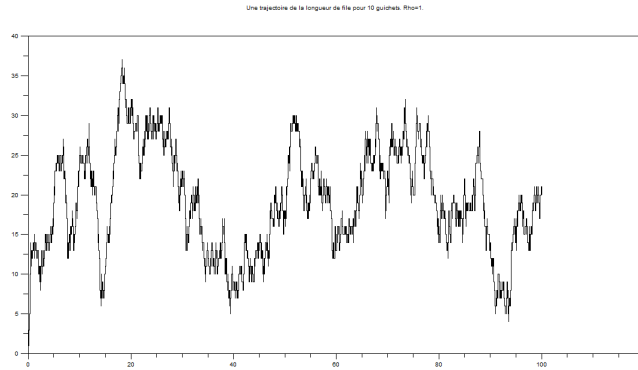


FIGURE 18 – Une simulation de la file pour $K = 10$ guichets et $\rho = 1$ ($\lambda = 10, \mu = 1$)

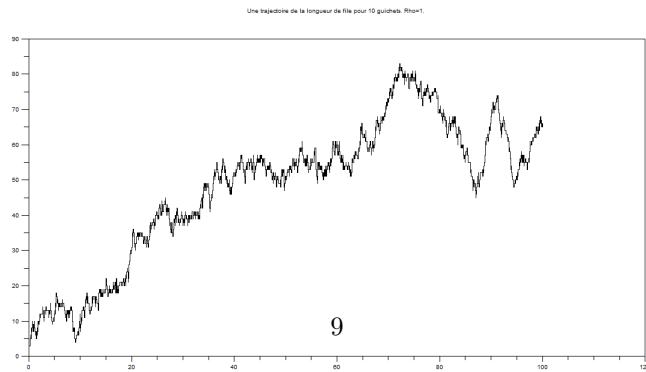


FIGURE 19 – Une autre simulation de la file pour $K = 10$ guichets et $\rho = 1$ ($\lambda = 10, \mu = 1$)