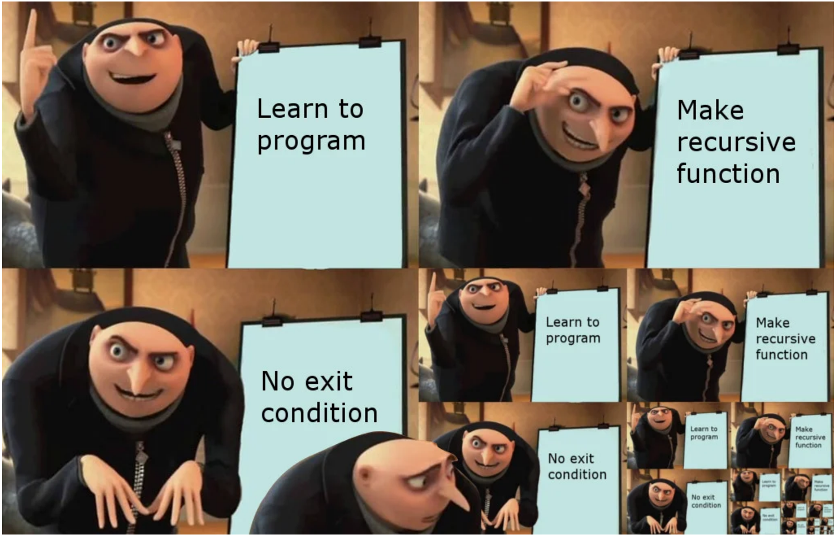
DELTA TopGun

(06) Rekurze

Luboš Zápotočný, Tomáš Faltejsek, Michal Havelka

2023

Obsah


Learn to program
Make recursive function
No exit condition
Learn to program
Make recursive function
No exit condition
Learn to program
Make recursive function
No exit condition

Rekurze

Funkci či procedura, která volá sama sebe

Rekurze

Funkci či procedura, která volá sama sebe

Existuje i nepřímá rekurze, ve které se rekurzivní krok může provést až po několika zavolání jiných funkcí

Rekurze

Funkci či procedura, která volá sama sebe

Existuje i nepřímá rekurze, ve které se rekurzivní krok může provést až po několika zavolání jiných funkcí

Většina rekurzivních algoritmů lze zapsat lineárním způsobem

Rekurze

Funkci či procedura, která volá sama sebe

Existuje i nepřímá rekurze, ve které se rekurzivní krok může provést až po několika zavolání jiných funkcí

Většina rekurzivních algoritmů lze zapsat lineárním způsobem

Rekurze je jádro funkcionálního programování

Rekurze a stack

Rekurentní rovnice

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{pro n} = 0 \\ 1, & \text{pro n} = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{pro n} \geq 2 \end{cases}$$

Rekurentní rovnice

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{pro n} = 0 \\ 1, & \text{pro n} = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{pro n} \geq 2 \end{cases}$$

Fibonacciho číslo

Rekurentní rovnice

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{pro n} = 0 \\ 1, & \text{pro n} = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{pro n} \geq 2 \end{cases}$$

Fibonacciho číslo

$$F(n) = \begin{cases} 1, & \text{pro n} = 0 \\ n * F(n-1) & \text{pro n} > 0 \end{cases}$$

Rekurentní rovnice

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{pro n} = 0 \\ 1, & \text{pro n} = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{pro n} \geq 2 \end{cases}$$

Fibonacciho číslo

$$F(n) = \begin{cases} 1, & \text{pro n} = 0 \\ n * F(n-1) & \text{pro n} > 0 \end{cases}$$

Faktoriál

Rekurentní rovnice

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{pro n} = 0 \\ 1, & \text{pro n} = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{pro n} \geq 2 \end{cases}$$

Fibonacciho číslo

$$F(n) = \begin{cases} 1, & \text{pro n} = 0 \\ n * F(n-1) & \text{pro n} > 0 \end{cases}$$

Faktoriál

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{pro n} = 0 \\ 2 * T(n-1) + 1, & \text{pro n} > 0 \end{cases}$$

Rekurentní rovnice

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{pro n} = 0 \\ 1, & \text{pro n} = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{pro n} \geq 2 \end{cases}$$

Fibonacciho číslo

$$F(n) = \begin{cases} 1, & \text{pro n} = 0 \\ n * F(n-1) & \text{pro n} > 0 \end{cases}$$

Faktoriál

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{pro n} = 0 \\ 2 * T(n-1) + 1, & \text{pro n} > 0 \end{cases}$$

Počet nutných přemístění při přesunu Hanojské věze

Výpis spojového seznamu od konce

Koncová rekurze

Koncová rekurze je taková rekurze, ve které je jako poslední instrukce rekurzivní volání sama sebe

Koncová rekurze

Koncová rekurze je taková rekurze, ve které je jako poslední instrukce rekurzivní volání sama sebe

Poslední instrukce musí být doopravdy pouze jedno zavolání funkce

Koncová rekurze

Koncová rekurze je taková rekurze, ve které je jako poslední instrukce rekurzivní volání sama sebe

Poslední instrukce musí být doopravdy pouze jedno zavolání funkce

Typická implementace Fibonacciho čísla není koncová rekurze, protože poslední instrukcí je součet dvou čísel

Fibonacciho číslo

```c
#include <stdio.h>

unsigned long long fib(int n) {
    if (n < 2) return n;
    return fib(n-1) + fib(n-2);
}

int main () {
    printf("%llu\n", fib(45));
}
```

Fibonacciho číslo

```c
#include <stdio.h>

unsigned long long fib(int n) {
    if (n < 2) return n;
    return fib(n-1) + fib(n-2);
}

int main () {
    printf("%llu\n", fib(45));
}
```

Časová náročnost

time ./fib

real 0m3.019s

Fibonacciho číslo - koncová rekurze

```c
#include <stdio.h>

unsigned long long fib_tail(int a, int b, int n) {
    if (n == 0) return a;
    return fib_tail(b, a+b, n-1);
}

unsigned long long fib(int n) {
    return fib_tail(0, 1, n);
}

int main () {
    printf("%llu\n", fib(45));
}
```

Fibonacciho číslo - koncová rekurze

```c
#include <stdio.h>

unsigned long long fib_tail(int a, int b, int n) {
    if (n == 0) return a;
    return fib_tail(b, a+b, n-1);
}

unsigned long long fib(int n) {
    return fib_tail(0, 1, n);
}

int main () {
    printf("%llu\n", fib(45));
}
```

Časová náročnost

time ./fib-tail

real 0m0.022s

Koncová rekurze a stack

Při provádění koncové rekurze může být původní stack frame přepoužit

Koncová rekurze a stack

Při provádění koncové rekurze může být původní stack frame přepoužit

Pouze se změní registry na hodnoty nově předaných parametrů a skočí se na začátek původního rámce

Rozděl a panuj

Programovací paradigma, které rozděluje problém na několik menších podproblémů, které už je jednodušší vyřešit

Rozděl a panuj

Programovací paradigma, které rozděluje problém na několik menších podproblémů, které už je jednodušší vyřešit

Povahově to bývají rekurzivní algoritmy

Rozděl a panuj

Programovací paradigma, které rozděluje problém na několik menších podproblémů, které už je jednodušší vyřešit

Povahově to bývají rekurzivní algoritmy

Zároveň je nutné do časové složitosti zakomponovat režii pro spojení výsledků podproblemů

Merge sort

Merge sort

- Rozdělí neseřazenou množinu dat na dvě podmnožiny o přibližně stejné velikosti

Merge sort

- Rozdělí neseřazenou množinu dat na dvě podmnožiny o přibližně stejné velikosti

- Seřadí obě podmnožiny

Merge sort

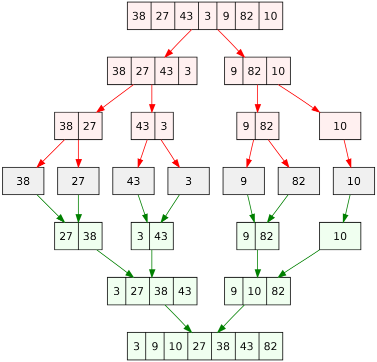
- Rozdělí neseřazenou množinu dat na dvě podmnožiny o přibližně stejné velikosti

- Seřadí obě podmnožiny

- Spojí seřazené podmnožiny do jedné seřazené množiny

Merge sort

- Rozdělí neseřazenou množinu dat na dvě podmnožiny o přibližně stejné velikosti
- Seřadí obě podmnožiny
- Spojí seřazené podmnožiny do jedné seřazené množiny



[Wikipedia]

Odvození asymptotické složitosti

Master theorem

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Odvození asymptotické složitosti

Master theorem

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Případ 1:

$$f(n) = \mathcal{O}\left(n^{log_b(a)-\epsilon}\right) \implies T(n) = \Theta\left(n^{log_b(a)}\right)$$

Odvození asymptotické složitosti

Master theorem

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Případ 1:

$$f(n) = \mathcal{O}\left(n^{log_b(a)-\epsilon}\right) \implies T(n) = \Theta\left(n^{log_b(a)}\right)$$

Případ 2:

$$f(n) = \Theta\left(n^{log_b(a)}\right) \implies T(n) = \Theta\left(n^{log_b(a)} log(n)\right)$$

Odvození asymptotické složitosti

Master theorem

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Případ 1:

$$f(n) = \mathcal{O}\left(n^{log_b(a)-\epsilon}\right) \implies T(n) = \Theta\left(n^{log_b(a)}\right)$$

Případ 2:

$$f(n) = \Theta\left(n^{log_b(a)}\right) \implies T(n) = \Theta\left(n^{log_b(a)} log(n)\right)$$

Případ 3:

$$f(n) = \Omega\left(n^{log_b(a)+\epsilon}\right) \implies T(n) = \Theta\left(f(n)\right)$$

[Wikipedia]

Merge sort - odvození asymptotické složitosti

Jakou asymptotickou složitost má tedy merge sort?

Násobení dvou čísel

Mějme dvě n-ciferná čísla x a y, která chceme vynásobit

n je mocnina dvou

Obě čísla rozdělíme na horních $\frac{n}{2}$ a dolních $\frac{n}{2}$ cifer

Násobení dvou čísel

Mějme dvě n-ciferná čísla x a y, která chceme vynásobit
n je mocnina dvou
Obě čísla rozdělíme na horních $\frac{n}{2}$ a dolních $\frac{n}{2}$ cifer

$$x = x_U \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L,$$

$$y = y_U \cdot 10^{\frac{n}{2}} + y_L,$$

Násobení dvou čísel

Mějme dvě n-ciferná čísla x a y, která chceme vynásobit
n je mocnina dvou
Obě čísla rozdělíme na horních $\frac{n}{2}$ a dolních $\frac{n}{2}$ cifer

$$x = x_U \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L,$$

$$y = y_U \cdot 10^{\frac{n}{2}} + y_L,$$

Výsledný součin $x \cdot y$ dvou n-ciferných čísel x a y pak můžeme poskládat ze 4 součinů $\frac{n}{2}$ ciferných čísel:

Násobení dvou čísel

Mějme dvě n-ciferná čísla x a y, která chceme vynásobit
n je mocnina dvou
Obě čísla rozdělíme na horních $\frac{n}{2}$ a dolních $\frac{n}{2}$ cifer

$$x = x_U \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L,$$
$$y = y_U \cdot 10^{\frac{n}{2}} + y_L,$$

Výsledný součin $x \cdot y$ dvou n-ciferných čísel x a y pak můžeme poskládat ze 4 součinů $\frac{n}{2}$ ciferných čísel:

$$x \cdot y = x_U \cdot y_U \cdot 10^n + (x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$

Násobení dvou čísel

Mějme dvě n-ciferná čísla x a y, která chceme vynásobit
n je mocnina dvou
Obě čísla rozdělíme na horních $\frac{n}{2}$ a dolních $\frac{n}{2}$ cifer

$$x = x_U \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L,$$
$$y = y_U \cdot 10^{\frac{n}{2}} + y_L,$$

Výsledný součin $x \cdot y$ dvou n-ciferných čísel x a y pak můžeme poskládat ze 4 součinů $\frac{n}{2}$ ciferných čísel:

$$x \cdot y = x_U \cdot y_U \cdot 10^n + (x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$

Jakou asymptotickou složitost má tedy tento styl násobení?

Karacubovo násobení

Vylepšení předchozího snímku

Karacubovo násobení

Vylepšení předchozího snímku

$$x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U = (x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L$$

Karacubovo násobení

Vylepšení předchozího snímku

$$x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U = (x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L$$

Důkaz

Karacubovo násobení

Vylepšení předchozího snímku

$$x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U = (x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L$$

Důkaz

$$x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U = (x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L$$

Karacubovo násobení

Vylepšení předchozího snímku

$$x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U = (x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L$$

Důkaz

$$\begin{aligned} x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U &= (x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L \\ &= x_U \cdot y_U + x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U + x_L \cdot y_L - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L \end{aligned}$$

Karacubovo násobení

Vylepšení předchozího snímku

$$x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U = (x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L$$

Důkaz

$$\begin{aligned}
x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U &= (x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L \\
&= x_U \cdot y_U + x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U + x_L \cdot y_L - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L \\
&= x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U + x_L \cdot y_L - x_L \cdot y_L
\end{aligned}$$

Karacubovo násobení

Vylepšení předchozího snímku

$$x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U = (x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L$$

Důkaz

$$\begin{aligned}
x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U &= (x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L \\
&= x_U \cdot y_U + x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U + x_L \cdot y_L - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L \\
&= x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U + x_L \cdot y_L - x_L \cdot y_L \\
&= x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U
\end{aligned}$$

Karacubovo násobení

Máme tedy násobení pomocí této rovnice

$$x \cdot y = x_U \cdot y_U \cdot 10^n + (x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$

ve které můžeme použít předchozí vylepšení

$$x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U = (x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L$$

Karacubovo násobení

Máme tedy násobení pomocí této rovnice

$$x \cdot y = x_U \cdot y_U \cdot 10^n + (x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$

ve které můžeme použít předchozí vylepšení

$$x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U = (x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L$$

Tedy

$$x \cdot y = x_U \cdot y_U \cdot 10^n + (x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$

Karacubovo násobení

Máme tedy násobení pomocí této rovnice

$$x \cdot y = x_U \cdot y_U \cdot 10^n + (x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$

ve které můžeme použít předchozí vylepšení

$$x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U = (x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L$$

Tedy

$$x \cdot y = x_U \cdot y_U \cdot 10^n + (x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$
$$= x_U \cdot y_U \cdot 10^n + ((x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$

Karacubovo násobení

$$x \cdot y = x_U \cdot y_U \cdot 10^n + (x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$
$$= x_U \cdot y_U \cdot 10^n + ((x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$

Jaké a kolik operace se vyskytují v prvním vzorci?

Karacubovo násobení

$$x \cdot y = x_U \cdot y_U \cdot 10^n + (x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$
$$= x_U \cdot y_U \cdot 10^n + ((x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$

Jaké a kolik operace se vyskytují v prvním vzorci?

Víme, že asymptotická složitost tohoto algoritmu je $\mathcal{O}(n^2)$

Karacubovo násobení

$$x \cdot y = x_U \cdot y_U \cdot 10^n + (x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$
$$= x_U \cdot y_U \cdot 10^n + ((x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$

Jaké a kolik operace se vyskytují v prvním vzorci?

Víme, že asymptotická složitost tohoto algoritmu je $\mathcal{O}(n^2)$

Jaké a kolik operace se vyskytují v prvním vzorci?

Karacubovo násobení

$$x \cdot y = x_U \cdot y_U \cdot 10^n + (x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$
$$= x_U \cdot y_U \cdot 10^n + ((x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$

Jaké a kolik operace se vyskytují v prvním vzorci?

Víme, že asymptotická složitost tohoto algoritmu je $\mathcal{O}(n^2)$

Jaké a kolik operace se vyskytují v prvním vzorci?

Karacubovo násobení

$$x \cdot y = x_U \cdot y_U \cdot 10^n + (x_U \cdot y_L + x_L \cdot y_U) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$
$$= x_U \cdot y_U \cdot 10^n + ((x_U + x_L) \cdot (y_U + y_L) - x_U \cdot y_U - x_L \cdot y_L) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + x_L \cdot y_L$$

Jaké a kolik operace se vyskytují v prvním vzorci?

Víme, že asymptotická složitost tohoto algoritmu je $\mathcal{O}(n^2)$

Jaké a kolik operace se vyskytují v prvním vzorci?

Jakou asymptotickou složitost má tedy Karacubovo násobení?