Úvod do teorie grafů

DELTA - Střední škola informatiky a ekonomie, s.r.o.

Ing. Luboš Zápotočný

24.10.2025

Graf

Graf

„Zjednodušení reálného světa, kde je problém znázorněn pomocí bodů a čar které tyto body spojují.“

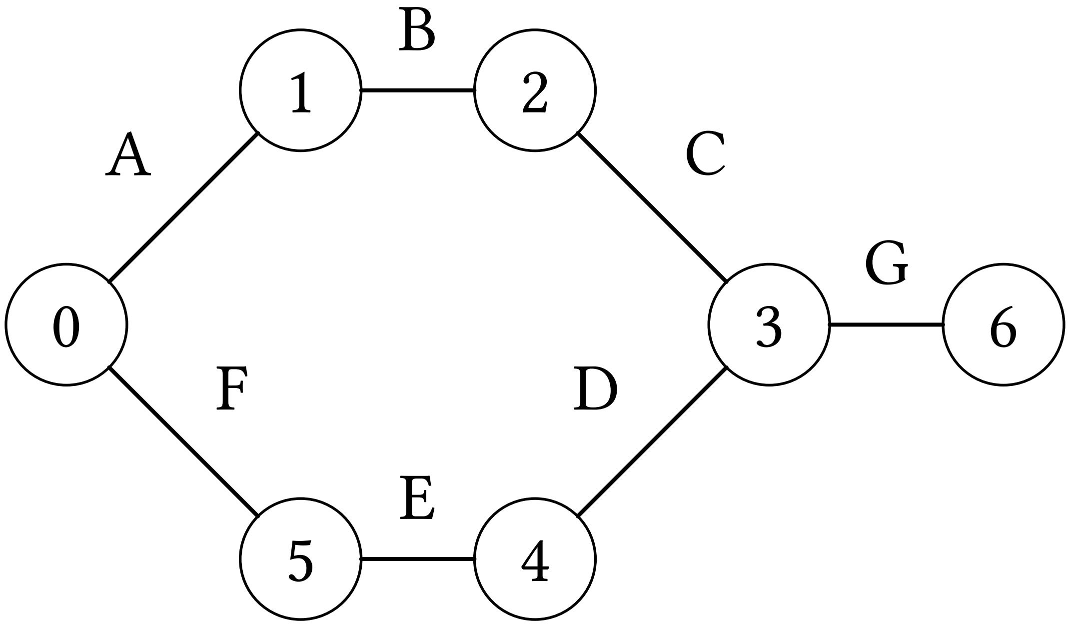
Terminologie v teorii grafů

- Body nazýváme **vrcholy grafu**
- „Čáry“, které tyto body spojují nazýváme **hrany grafu**

Značení

- V: množina vrcholů (*vertices*)
- E: množina hran (*edges*)
- $G = (V, E)$: graf G je **uspořádanou** dvojicí množin V a E
- **Smyčka**: hrana z vrcholu x do vrcholu x

Příklad grafu



$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

Příklad grafu

Velikost množiny (počet prvků) je označena pomocí svislých čar

Otázka

Tvoří množiny V a E, kde $|V| = 1$ a $|E| = 0$, graf? Ano

A co obráceně? Ne

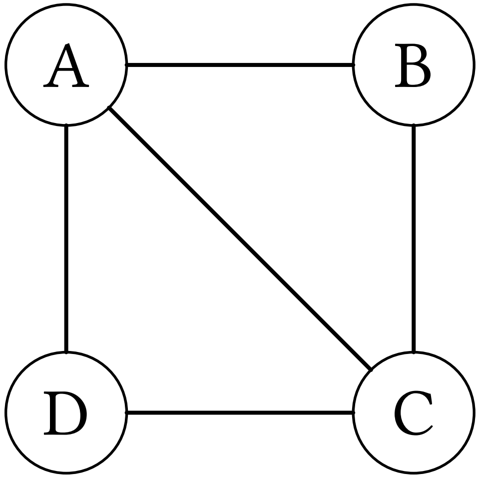
Orientovaný a neorientovaný graf

Neorientovaný graf $G = (V, E)$ je definován jako **uspořádaná** dvojice množin V a E

Orientovaný graf je definován analogicky, pouze každé hraně dodáme **orientaci**

- Tedy jeden z vrcholů hrany prohlásíme za **počáteční** a druhý z vrcholů hrany za **koncový**
- Graficky orientaci hrany znázorníme **jednostrannou šipkou**

Orientovaný a neorientovaný graf



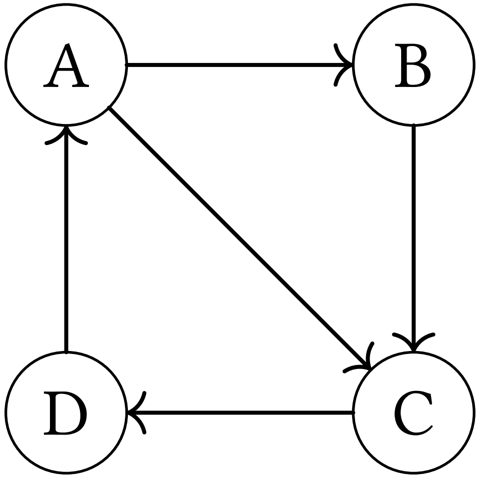
Neorientovaný graf

$$V = \{A, B, C, D\}$$

$$E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\},$$
$$\{D, A\}, \{A, C\}\}$$

Hrany nemají orientaci - znázorněny čarami bez šipek.

Orientovaný a neorientovaný graf



Orientovaný graf

$$V = \{A, B, C, D\}$$

$$E = \{(A, B), (B, C), (C, D), (D, A), (A, C)\}$$

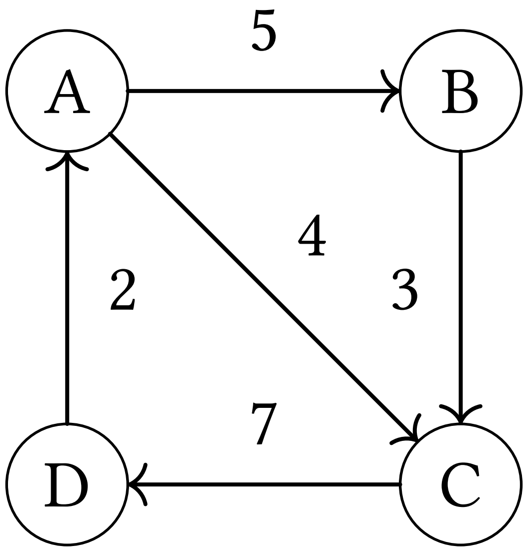
Hrany mají orientaci - znázorněny šipkami. Hrany jsou uspořádané dvojice.

Ohodnocení uzlu či hrany

Ohodnocení uzlu či hrany

Graf rovněž může být **hranově** či **vrcholově** ohodnocený. Hraně či vrcholu můžeme přidělit libovolné reálné číslo (**ohodnocení**).

Ohodnocení uzlu či hrany



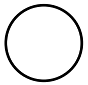
Příklad ohodnoceného grafu

Hrany mají přiřazené hodnoty (váhy), které mohou reprezentovat:

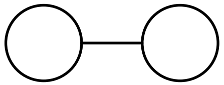
- Vzdálenost mezi místy
- Cenu přepravy
- Čas cesty
- Kapacitu spojení

Úplný graf

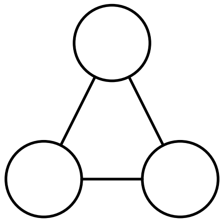
Úplný graf je takový graf, ve kterém jsou každé dva vrcholy spojené hranou. Takový graf značíme K_n, kde n je počet vrcholů



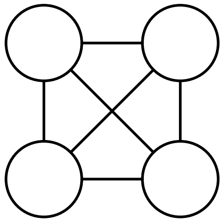
K_1



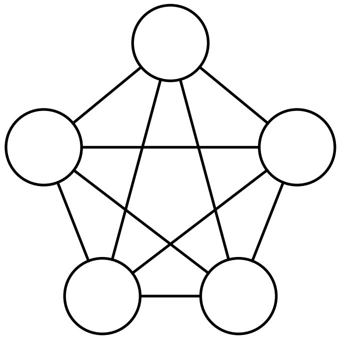
K_2



K_3



K_4



K_5

Počet hran v úplném grafu

Kolik je maximální počet neorientovaných hran v úplném grafu K_n?

Konstruktivně lze odvodit následující součet:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$$

$$S = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 1$$

$$2S = n + n + \ldots + n = n * (n-1)$$

$$S = \frac{n * (n-1)}{2} \ \ldots\ \mathcal{O}(n^2)$$

Podgraf

Podgraf grafu G je graf G', který vznikl odebráním některých vrcholů a hran z původního grafu G

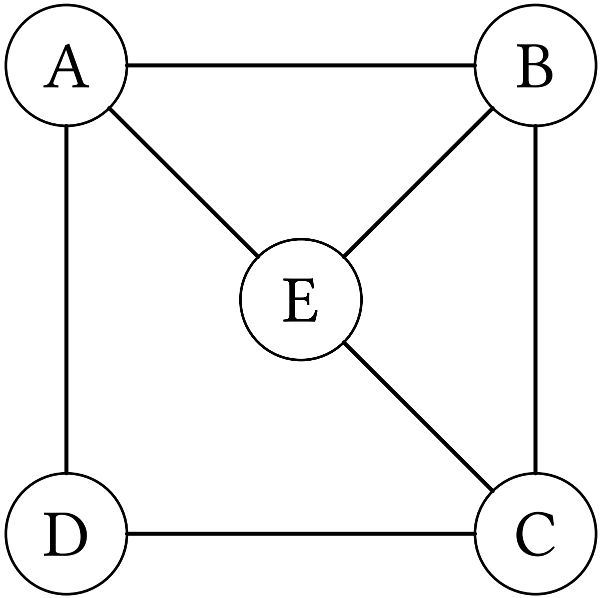
Máme-li graf $G = (V, E)$ a jsou-li V' a E' podmnožiny V a E a platí, že $G' = (V', E')$ je grafem, pak nazýváme G' **podgrafem** grafu G

Pokud platí, že $V' = V$ (podgraf obsahuje všechny vrcholy původního grafu), pak nazýváme G' **faktorem** grafu G

Pokud podgraf obsahuje všechny hrany původního grafu na vybraných vrcholech, pak nazýváme G' **indukovaným podgrafem** grafu G

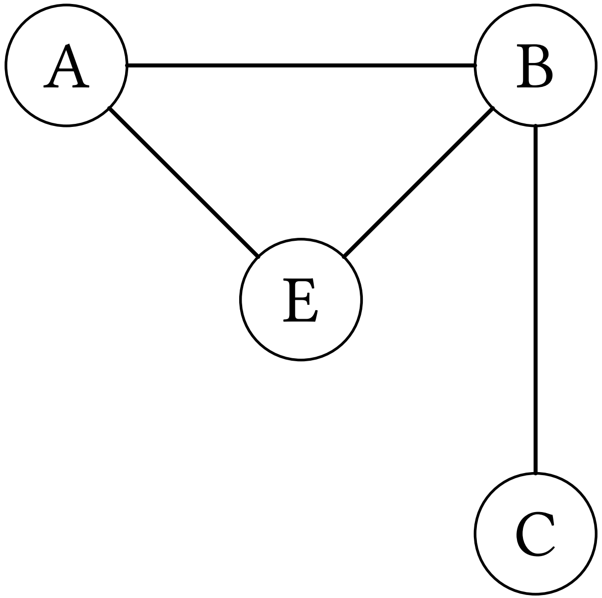
Podgraf

Graf G



$$V = \{A, B, C, D, E\}$$

Podgraf G'



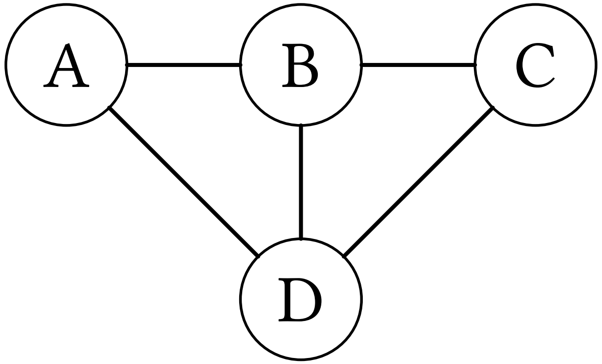
$$V' = \{A, B, C, E\}$$

Sled, tah, cesta a kružnice

Sled

Sled je posloupnost vrcholů V_i a hran E_i

Sled



Příklad sledu:

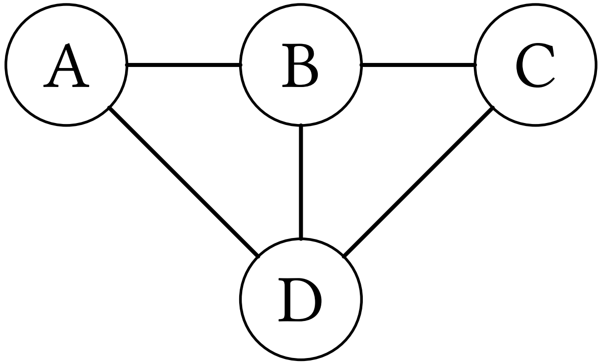
$A \to \{A, B\} \to B \to \{B, C\} \to C \to \{C, B\} \to B \to \{B, D\} \to D$

Všimněte si, že uzel B i hrana (B, C) se ve sledu opakují.

Tah

Tah je sled, ve kterém se neopakují hrany

Tah



Příklad tahu:

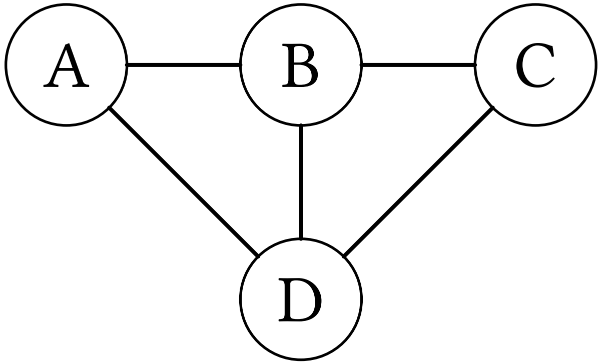
$A \to \{A, B\} \to B \to \{B, D\} \to D \to \{D, C\} \to C \to \{C, B\} \to B$

Všimněte si, že uzel B se opakuje, ale žádná hrana se neopakuje.

Cesta

Cesta je tah, ve kterém se neopakují uzly

Cesta



Příklad cesty:

$$A \to \{A, B\} \to B \to \{B, D\} \to D \to \{D, C\} \to C$$

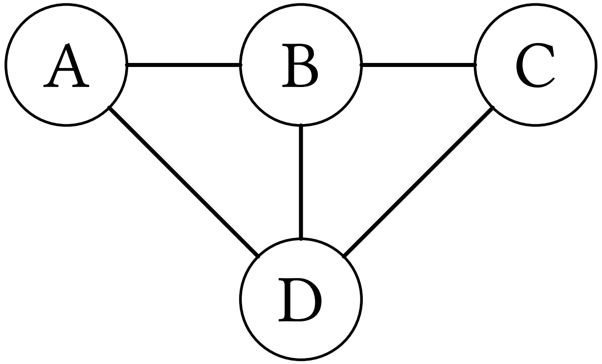
Všimněte si, že se neopakují ani uzly, ani hrany.

Kružnice

Kružnice je uzavřená cesta, ve které se neopakují hrany

- Uzavřená cesta je cesta, ve které se shoduje první a poslední uzel

Kružnice



Příklad kružnice:

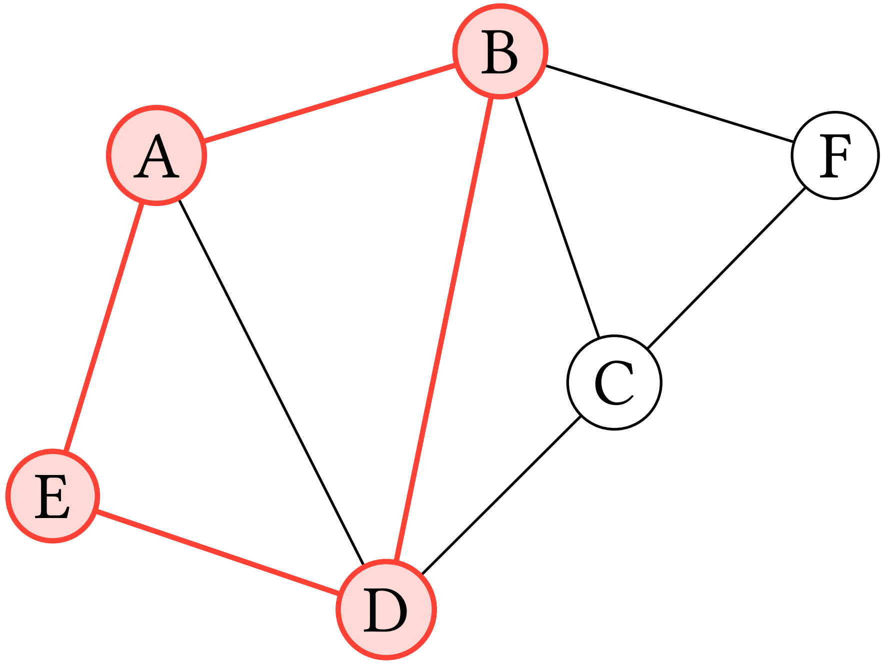
$A \to (A, B) \to B \to (B, D) \to D \to (D, A) \to A$

Všimněte si, že začínáme a končíme v uzlu A, přičemž se žádný jiný uzel ani hrana neopakuje.

Kružnice

Kružnicí (resp. cyklem) rozumíme posloupnost vrcholů a hran $(V_0, E_1, V_1, ..., E_t, V_t = V_0)$ kde vrcholy $V_0, ..., V_t$ jsou navzájem různé vrcholy grafu G

Kružnice



Kružnice

Kružnice na minulém obrázku je **podgrafem** původního grafu

Kružnice z minulého obrázku ale **není indukovaný podgrafem** původního grafu, protože neobsahuje hranu mezi vrcholy A a D

Les a strom

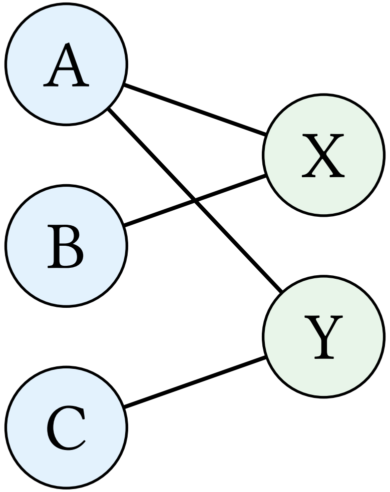
Souvislý graf je takový graf, ve kterém z každého vrcholu existuje cesta do jakéhokoli jiného vrcholu

Poznámka

Neorientovaný graf bez kružnic nazýváme **les**.
Souvislý les pak nazýváme **strom**.

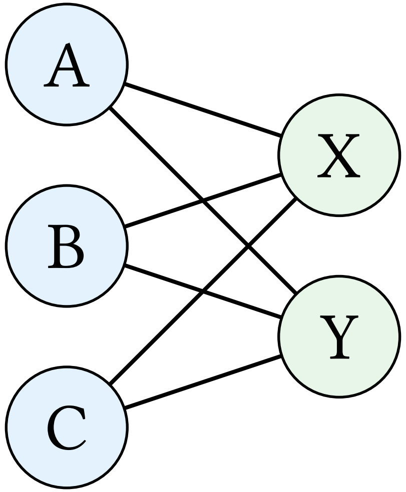
Bipartitní graf

Bipartitní graf je takový graf, jehož množinu vrcholů lze rozdělit na dvě části, tak, že z každého vrcholu jedné části jde hrana pouze do vrcholů druhé části a naopak



Úplný bipartitní graf

Pokud jde z každého vrcholu jedné části hrana do každého vrcholu druhé části, mluvíme o **úplném bipartitním grafu**



$K_{3,2}$

Úplný bipartitní graf

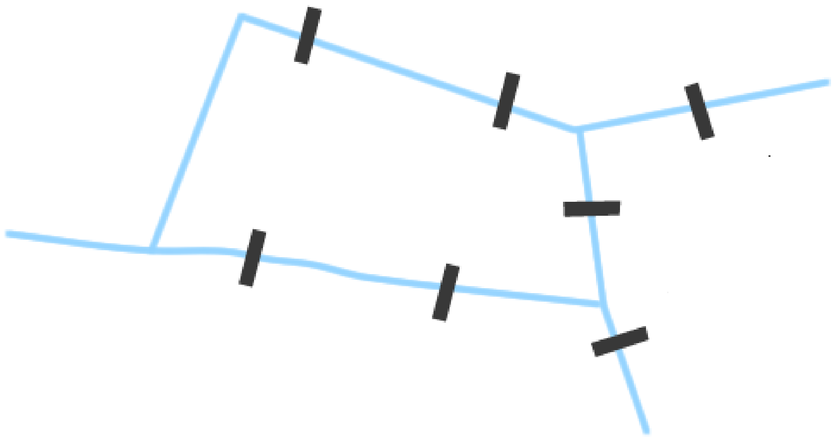
Jak by vypadal graf

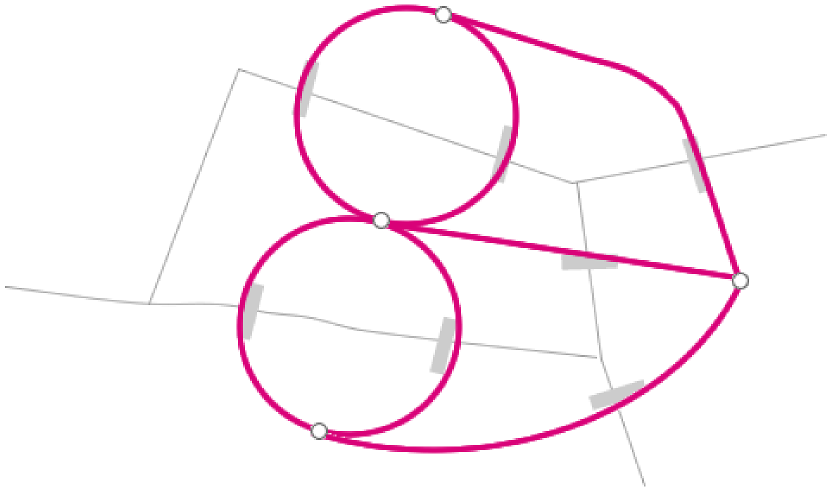
- $K_{2,2}$
- $K_{1,5}$
- $K_{5,1}$
- $K_{2,3,2}$

Historie

Eulerova úloha

Je možné projít každým mostem ve městě právě jednou?





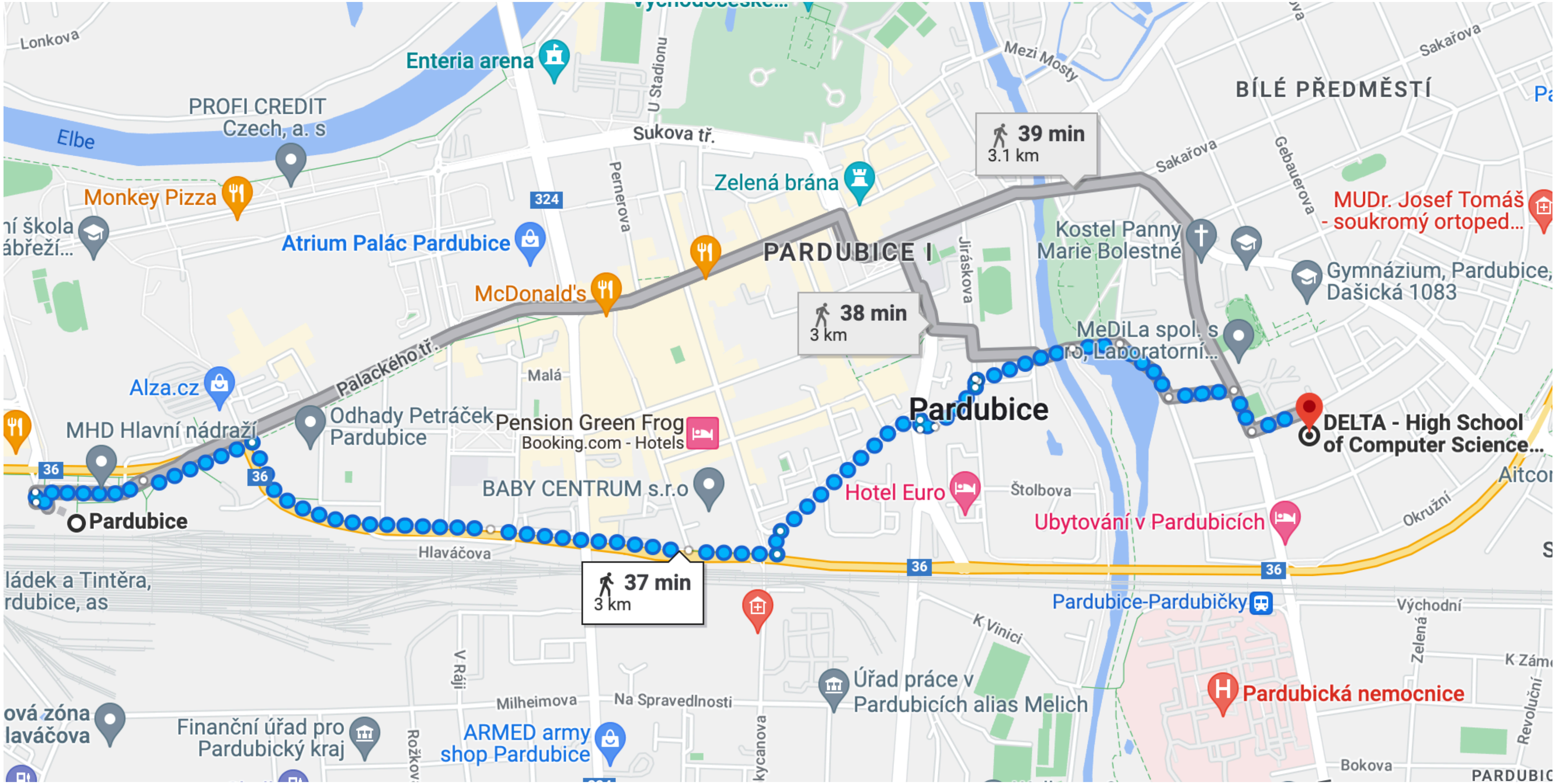
Sedm mostů města Königsbergu (převzato z teorie-grafu.cz)

Eulerova úloha

Euler matematicky dokázal (1736), že úloha není řešitelná

Motivace

Mapa - nalezení nejkratší cesty


39 min
3.1 km
38 min
3 km
37 min
3 km
Pardubice
PARDUBICE I
BÍLÉ PŘEDMĚSTÍ
DELTA - High School of Computer Science...
Enteria arena
Zelená brána
Atrium Palác Pardubice
McDonald's
Monkey Pizza
PROFI CREDIT Czech, a. s
Elbe
Alza.cz
MHD Hlavní nádraží
Odhady Petráček Pardubice
Pension Green Frog
Booking.com - Hotels
BABY CENTRUM s.r.o
Hotel Euro
Ubytování v Pardubicích
Kostel Panny Marie Bolestné
Gymnázium, Pardubice, Dašická 1083
MUDr. Josef Tomáš - soukromý ortoped...
Pardubice-Pardubičky
Úřad práce v Pardubicích alias Melich
Pardubická nemocnice
Finanční úřad pro Pardubický kraj
ARMED army shop Pardubice
Palackého tř.
Sukova tř.
Hlaváčova
Sakařova
Mezi Mosty
Štolbova
Okružní
Východní
Milheimova
Na Spravedlnosti
V Ráji
Lonkova

Reprezentace grafů v počítači

Reprezentace grafů obecně

Náležitosti reprezentace:

- Musí popisovat množinu vrcholů **V**
- Množinu hran **E**
- Incidenční zobrazení **f**

Metody reprezentace:

1. Maticová reprezentace
2. Reprezentace formou seznamu sousedů

Matice sousednosti

- Matice **uzel - uzel**
- V neorientovaném grafu je matice symetrická
- Hodnota prvku na indexu a_{ij} odpovídá počtu hran vedoucích z vrcholu i do j

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jaký graf reprezentuje tato matice?

Matice sousednosti

Poznámka

U orientovaných grafů je hodnota prvku v i-tém sloupci a j-tém řádku 1, pokud je i-tý vrchol počátečním vrcholem j-té hrany, a -1, pokud je jejím koncovým vrcholem.

Matice sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost $\mathcal{O}(|V|^2)$
- Časová složitost kontroly existence hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost přidání hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost odebrání hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost přidání vrcholu $\mathcal{O}(|V|^2)$

Matice incidence

- Matice **vrchol - hrana**
- Využití u grafů bez smyček
- V neorientovaném grafu má prvek a_{ij} hodnotu 1, pokud i-tý vrchol inciduje s j-tou hranou (je jejím koncovým bodem), jinak 0

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Jaký graf reprezentuje tato matice?

Matice incidence

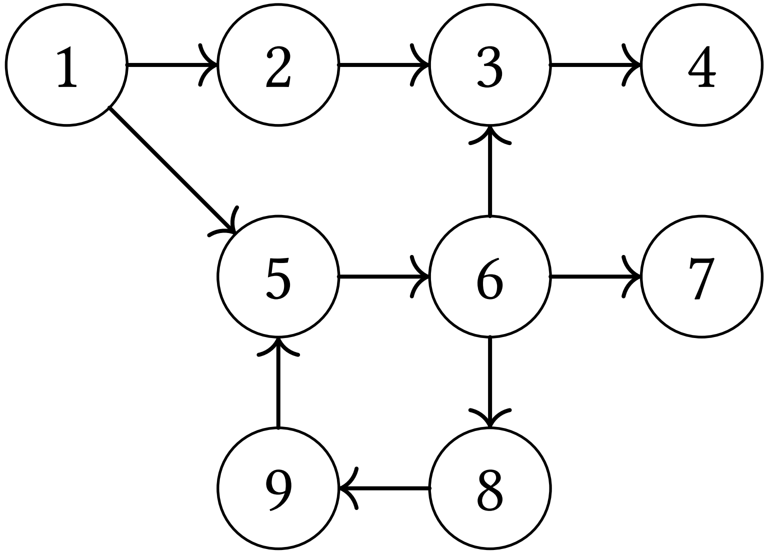
Poznámka

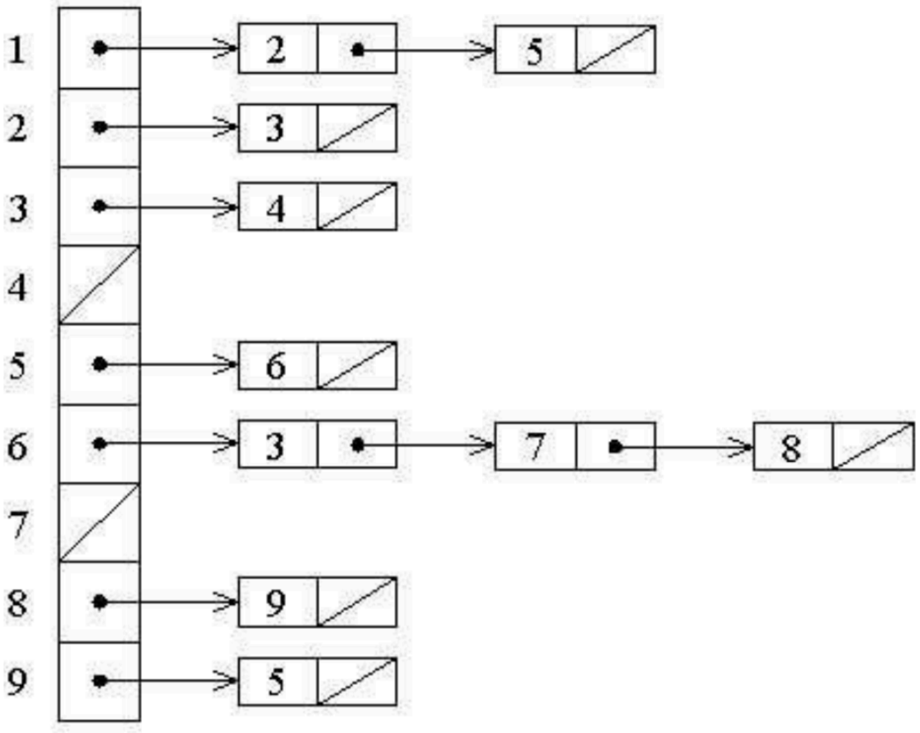
U orientovaných grafů je hodnota 1 u počátečního uzlu hrany a -1 u koncového uzlu hrany.

Spojový seznam sousednosti

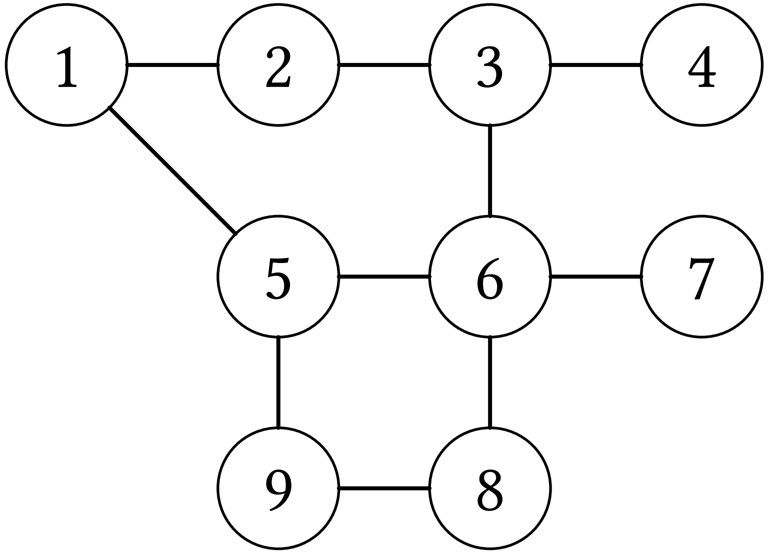
- Pro každý vrchol ukládáme (spojový) seznam sousedů
- Sousedící vrcholy jsou uloženy v seznamech (v libovolném pořadí)

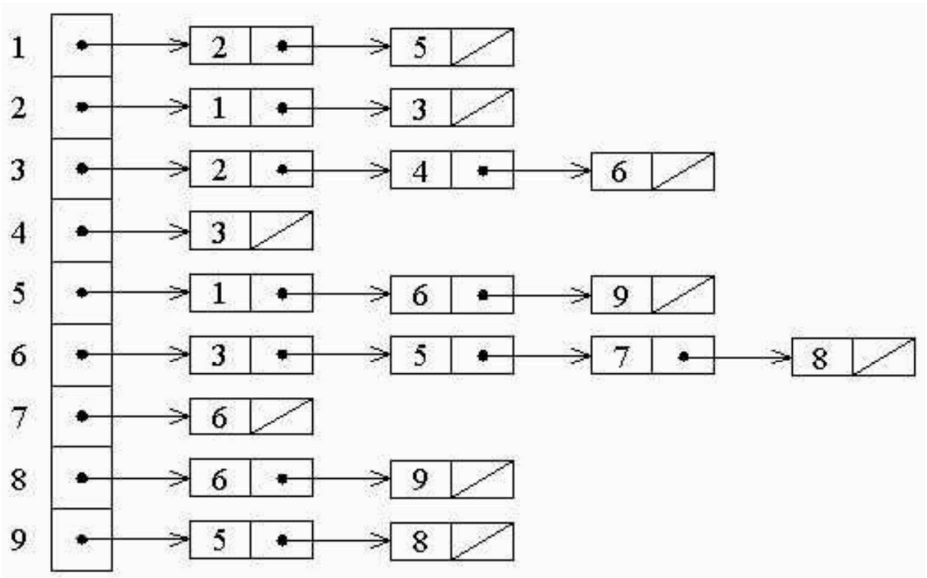
Spojový seznam sousednosti - orientovaný graf





Spojový seznam sousednosti - neorientovaný graf





Spojový seznam sousednosti - složitost operací

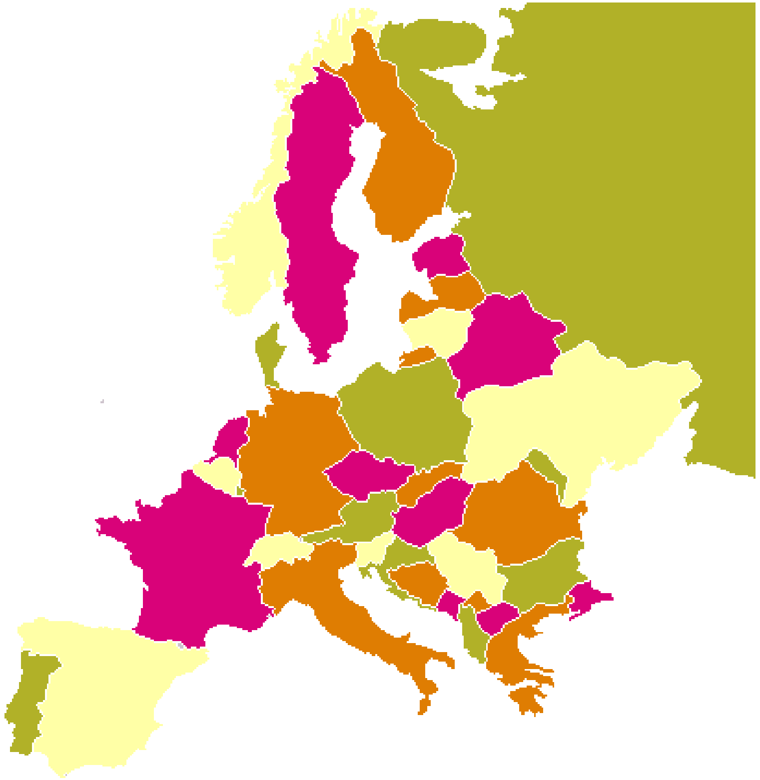
- Prostorová složitost $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Časová složitost kontroly existence hrany $\mathcal{O}(\Delta(G))$
  - $\Delta(v)$ je stupeň vrcholu v = maximální počet sousedů vrcholu v
  - $\Delta(G)$ je maximální stupeň vrcholu v grafu G
- Časová složitost přidání hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost odebrání hrany $\mathcal{O}(\Delta(G))$
- Časová složitost přidání vrcholu $\mathcal{O}(|V|)$

Praktické využití

Obarvení politické mapy

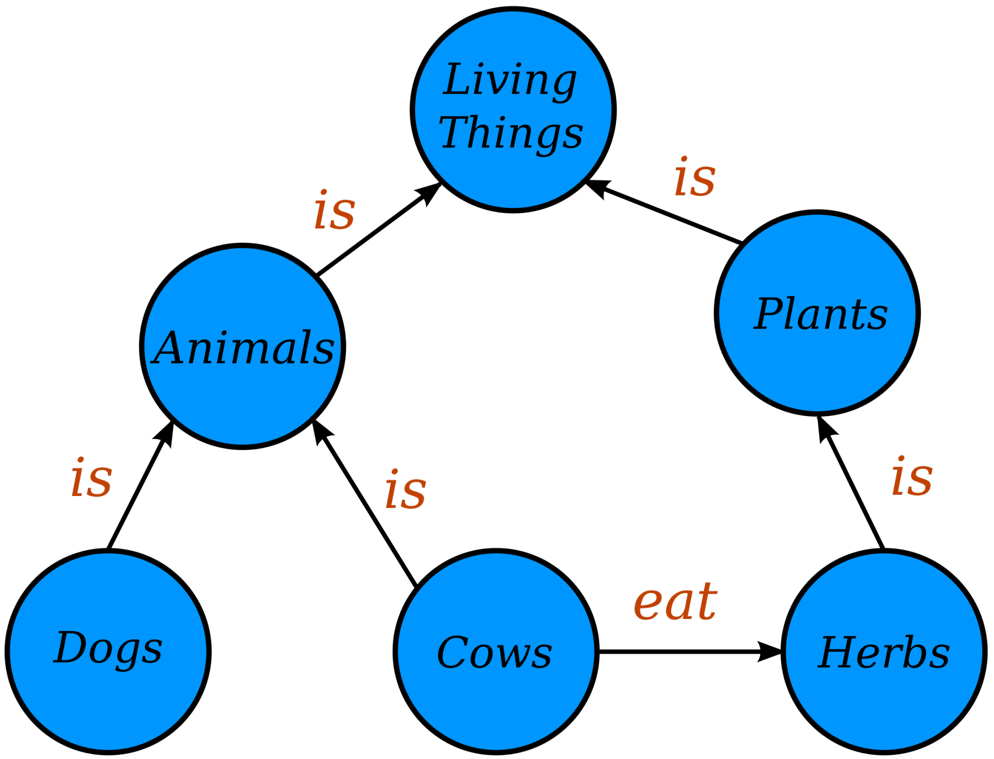
Obarvení libovolné mapy tak, aby dvě sousední země nebyly obarveny stejnou barvou (*four color theorem*)

Obarvení politické mapy

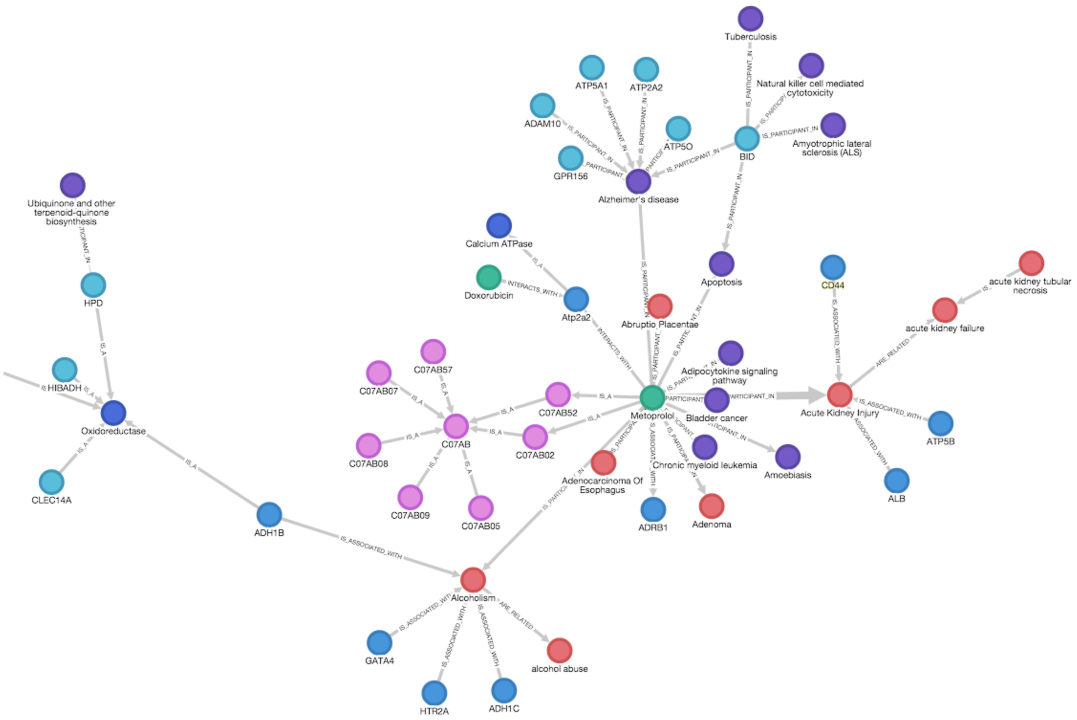


V roce 1976 dokázáno, že stačí
4 barvy (Appel-Haken, 1976)

Znalostní ontologie



Znalostní ontologie



Praktické využití

- PageRank (Google)
- CPM (Critical Path Method) (řízení projektů)
- Mapy
- Grafové databáze, ontologie (znalostní grafy)
- Pravděpodobnostní grafické modely
- Jádro grafu v teorii her, stavový prostor
- … mnoho dalších úloh