

# Úvod do teorie grafů

DELTA - Střední škola informatiky a ekonomie, s.r.o.

Ing. Luboš Zápotočný

23.10.2025

CC BY-NC-SA 4.0

**Graf**

# Graf

„Zjednodušení reálného světa, kde je problém znázorněn pomocí bodů a čar které tyto body spojují.“

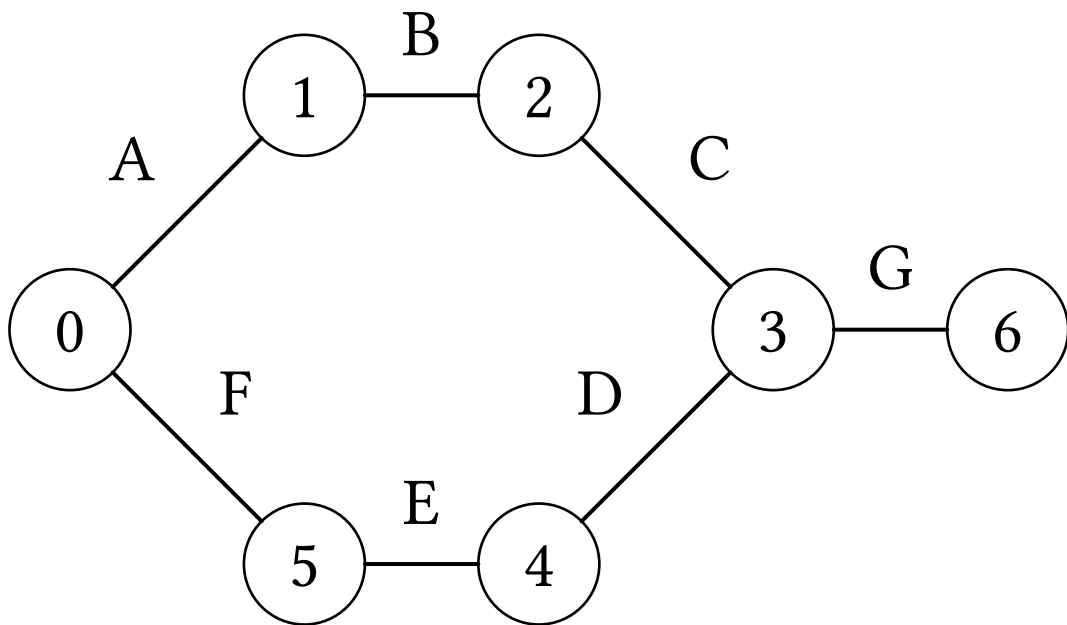
## Terminologie v teorii grafů

- Body nazýváme **vrcholy grafu**
- „Čáry“, které tyto body spojují nazýváme **hrany grafu**

# Značení

- $V$ : množina vrcholů (*vertices*)
- $E$ : množina hran (*edges*)
- $G = (V, E)$ : graf  $G$  je **uspořádanou** dvojicí množin  $V$  a  $E$
- **Smyčka**: hrana z vrcholu  $x$  do vrcholu  $x$

# Příklad grafu



$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

# Příklad grafu

**Velikost množiny** (počet prvků) je označena pomocí svislých čar

## Otázka

Tvoří množiny  $V$  a  $E$ , kde  $|V| = 1$  a  $|E| = 0$ , graf? Ano  
A co obráceně? Ne

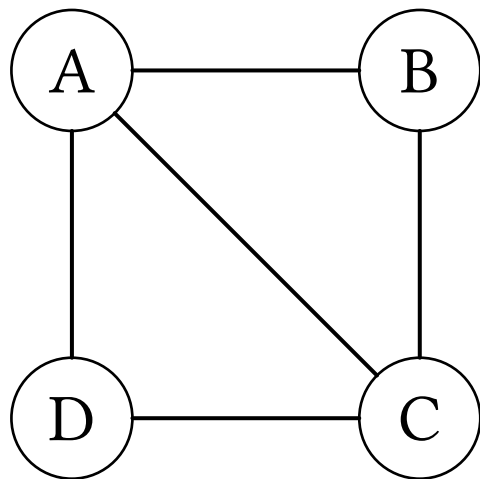
# Orientovaný a neorientovaný graf

**Neorientovaný graf**  $G = (V, E)$  je definován jako **uspořádaná** dvojice množin  $V$  a  $E$

**Orientovaný graf** je definován analogicky, pouze každé hraně dodáme **orientaci**

- Tedy jeden z vrcholů hrany prohlásíme za **počáteční** a druhý z vrcholů hrany za **koncový**
- Graficky orientaci hrany znázorníme **jednostrannou šipkou**

# Orientovaný a neorientovaný graf



## Neorientovaný graf

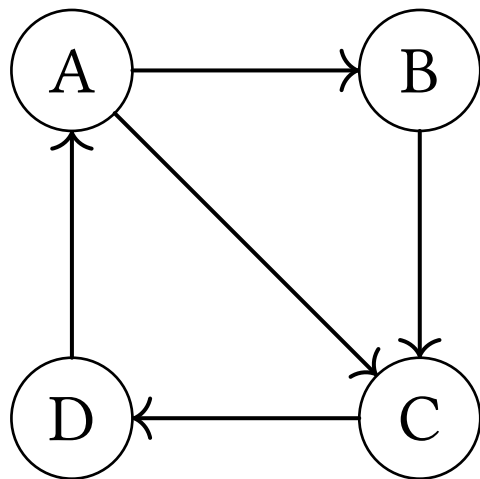
$$V = \{A, B, C, D\}$$

$$E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}, \{A, C\}\}$$

Hrany nemají orientaci -  
znázorněny čarami bez šipek.



# Orientovaný a neorientovaný graf



## Orientovaný graf

$$V = \{A, B, C, D\}$$

$$E = \{(A, B), (B, C), (C, D), (D, A), (A, C)\}$$

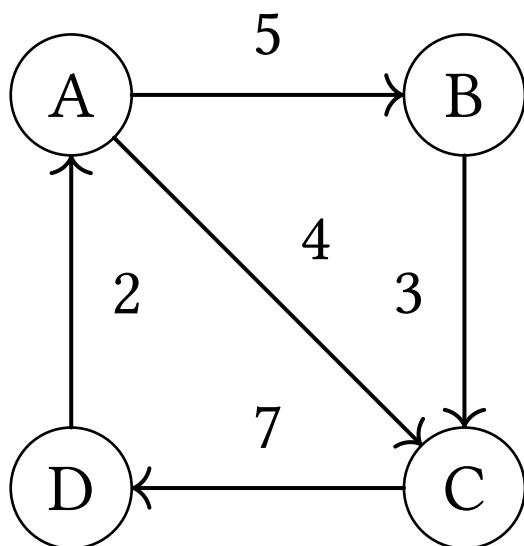
Hrany mají orientaci - znázorněny šipkami. Hrany jsou uspořádané dvojice.

# Ohodnocení uzlu či hrany

## Ohodnocení uzlu či hrany

Graf rovněž může být **hranově** či **vrcholově** ohodnocený. Hraně či vrcholu můžeme přidělit libovolné reálné číslo (**ohodnocení**).

# Ohodnocení uzlu či hrany



## Příklad ohodnoceného grafu

Hrany mají přiřazené hodnoty (váhy), které mohou reprezentovat:

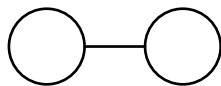
- Vzdálenost mezi místy
- Cenu přepravy
- Čas cesty
- Kapacitu spojení

# Úplný graf

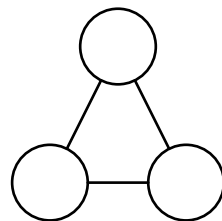
**Úplný graf** je takový graf, ve kterém jsou každé dva vrcholy spojené hranou. Takový graf značíme  $K_n$ , kde  $n$  je počet vrcholů



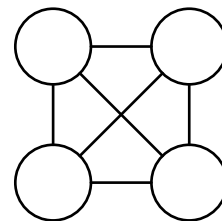
$K_1$



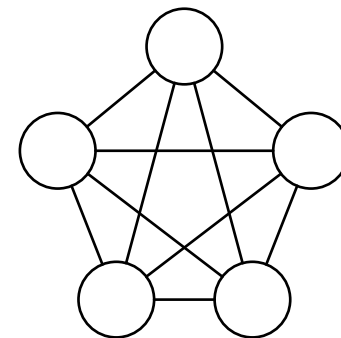
$K_2$



$K_3$



$K_4$



$K_5$

# Počet hran v úplném grafu

Kolik je maximální počet neorientovaných hran v úplném grafu  $K_n$ ?

Konstruktivně lze odvodit následující součet:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)$$

$$S = (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + 1$$

$$2S = n + n + \dots + n = n * (n - 1)$$

$$S = \frac{n * (n - 1)}{2} \dots \mathcal{O}(n^2)$$

# Podgraf

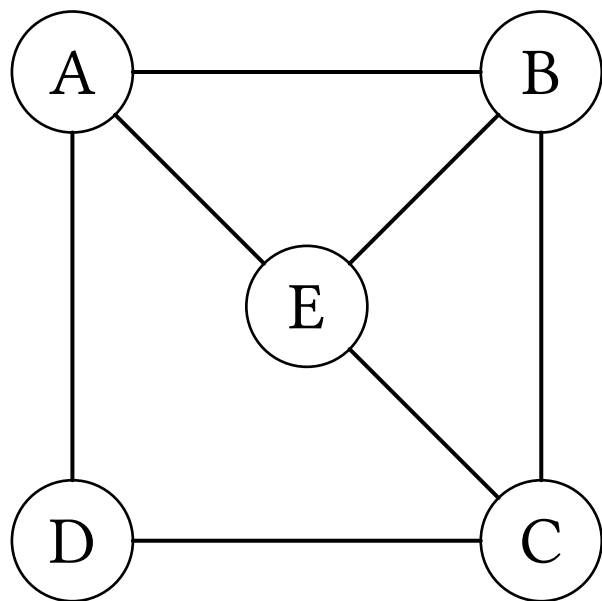
**Podgraf** grafu  $G$  je graf  $G'$ , který vznikl odebráním některých vrcholů a hran z původního grafu  $G$

Máme-li graf  $G = (V, E)$  a jsou-li  $V'$  a  $E'$  podmnožiny  $V$  a  $E$  a platí, že  $G' = (V', E')$  je grafem. Pak nazýváme  $G'$  **podgrafem** grafu  $G$

Pokud platí, že  $V' = V$  (podgraf obsahuje všechny vrcholy původního grafu), pak nazýváme  $G'$  **faktorem** grafu  $G$

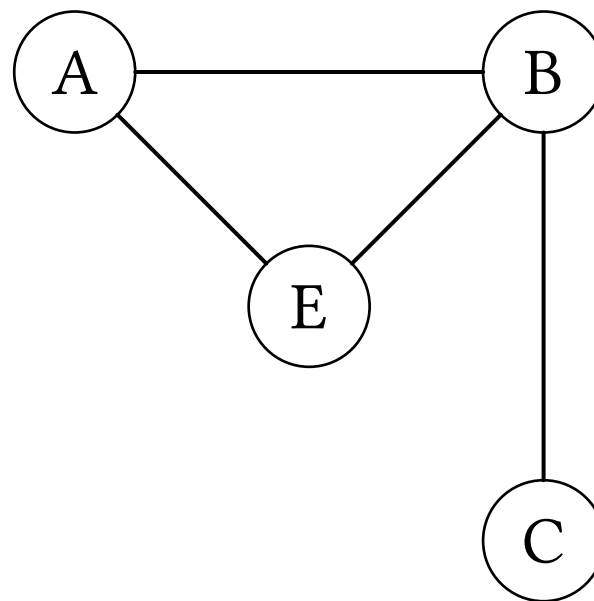
# Podgraf

Graf  $G$



$$V = \{A, B, C, D, E\}$$

Podgraf  $G'$



$$V' = \{A, B, C, E\}$$

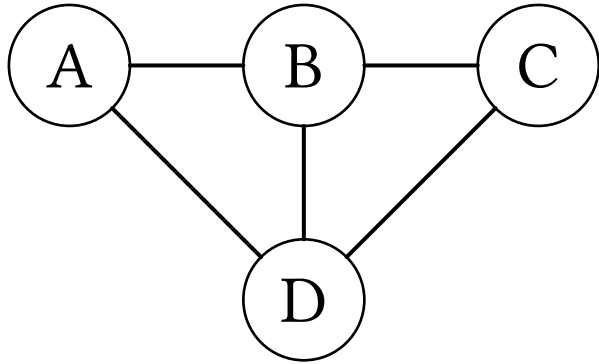
**Sled, tah, cesta a kružnice**



# Sled

**Sled** je posloupnost vrcholů  $V_i$  a hran  $E_i$

# Sled



## Příklad sledu:

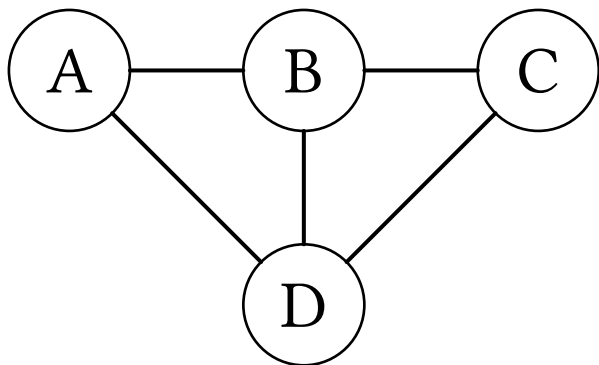
$A \rightarrow \{A, B\} \rightarrow B \rightarrow \{B, C\} \rightarrow$   
 $C \rightarrow \{C, B\} \rightarrow B \rightarrow \{B, D\} \rightarrow$   
 $D$

Všimněte si, že uzel  $B$  i hrana  $(B, C)$  se ve sledu opakují.

# Tah

**Tah** je sled, ve kterém se neopakují hrany

# Tah



## Příklad tahu:

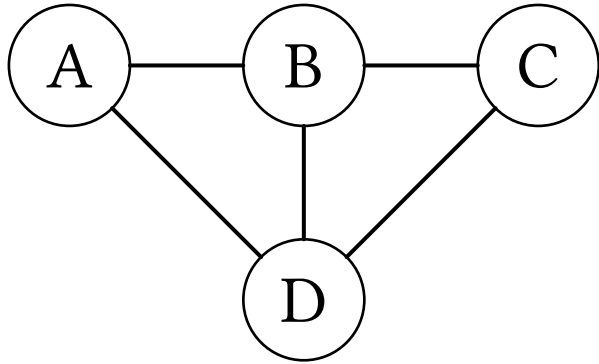
$A \rightarrow \{A, B\} \rightarrow B \rightarrow \{B, D\} \rightarrow$   
 $D \rightarrow \{D, C\} \rightarrow C \rightarrow \{C, B\} \rightarrow$   
 $B$

Všimněte si, že uzel  $B$  se opakuje, ale žádná hrana se neopakuje.

# Cesta

**Cesta** je tah, ve kterém se neopakují uzly

# Cesta



**Příklad cesty:**

$A \rightarrow \{A, B\} \rightarrow B \rightarrow \{B, D\} \rightarrow$   
 $D \rightarrow \{D, C\} \rightarrow C$

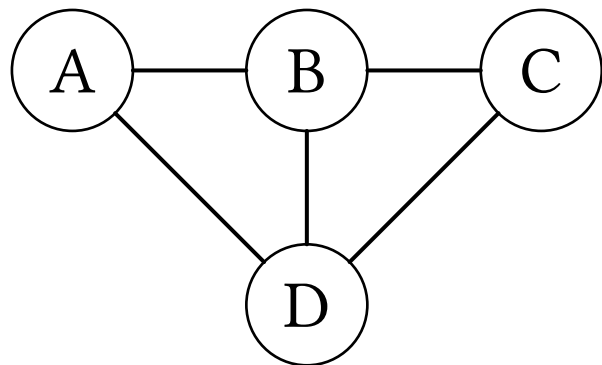
Všimněte si, že se neopakují  
ani uzly, ani hrany.

# Kružnice

**Kružnice** je uzavřená cesta, ve které se neopakují hrany

- Uzavřená cesta je cesta, ve které se shoduje první a poslední uzel

# Kružnice



## Příklad kružnice:

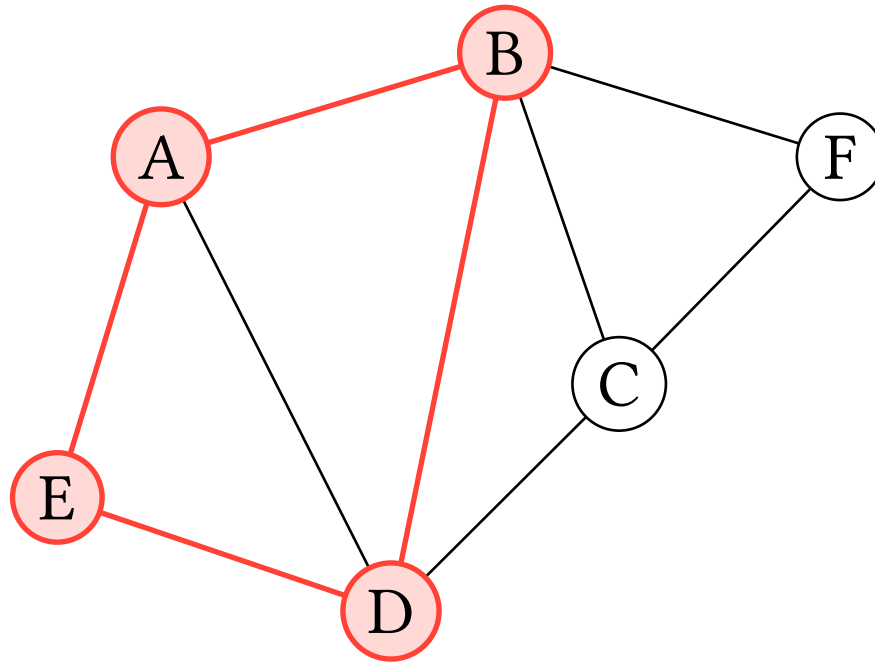
$A \rightarrow (A, B) \rightarrow B \rightarrow (B, D) \rightarrow$   
 $D \rightarrow (D, A) \rightarrow A$

Všimněte si, že začínáme a končíme v uzlu  $A$ , přičemž se žádný jiný uzel ani hrana neopakuje.



# Kružnice

Kružnicí (resp. cyklem) rozumíme posloupnost vrcholů a hran  $(V_0, E_1, V_1, \dots, E_t, V_t = V_0)$  kde vrcholy  $V_0, \dots, V_t$  jsou navzájem různé vrcholy grafu  $G$



Příklad kružnice: červeně jsou vyznačeny vrcholy a hrany tvořící kružnici  $A - B - D - E - A$

# Kružnice

Kružnice na minulém obrázku je **podgrafem** původního grafu

**Indukovaný podgraf** je podgraf, který vznikne vybráním některých vrcholů a všech hran mezi nimi

Kružnice z minulého obrázku **není indukovaný podgrafem** původního grafu, protože neobsahuje hranu mezi vrcholy  $A$  a  $D$

# Les a strom

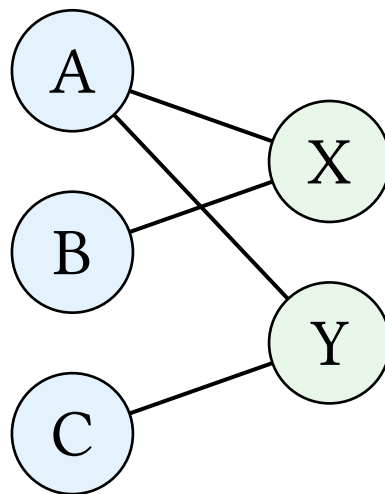
**Souvislý** graf je takový graf, ve kterém z každého vrcholu existuje cesta do jakéhokoli jiného vrcholu

## Poznámka

Neorientovaný graf bez kružnic nazýváme **les**.  
Souvislý les pak nazýváme **strom**.

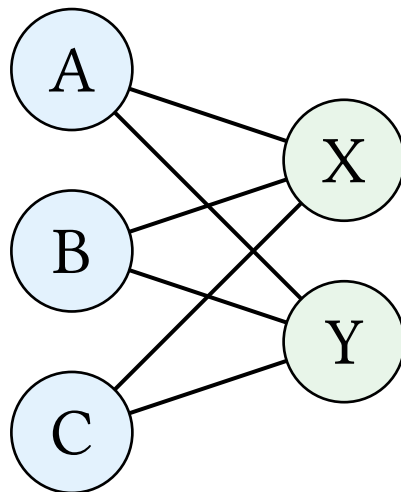
# Bipartitní graf

**Bipartitní graf** je takový graf, jehož množinu vrcholů lze rozdělit na dvě části, tak, že z každého vrcholu jedné části jde hrana pouze do vrcholů druhé části a naopak



# Úplný bipartitní graf

Pokud jde z každého vrcholu jedné části hrana do každého vrcholu druhé části, mluvíme o **úplném bipartitním grafu**



$K_{3,2}$

# Úplný bipartitní graf

Jak by vypadal graf

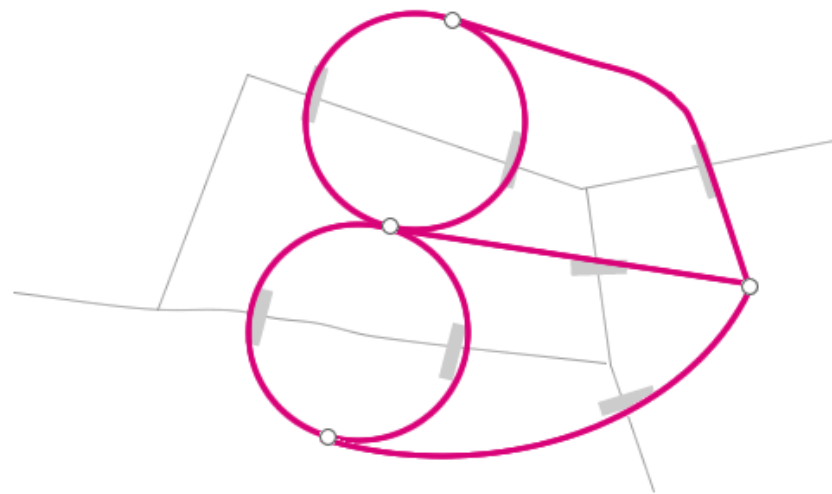
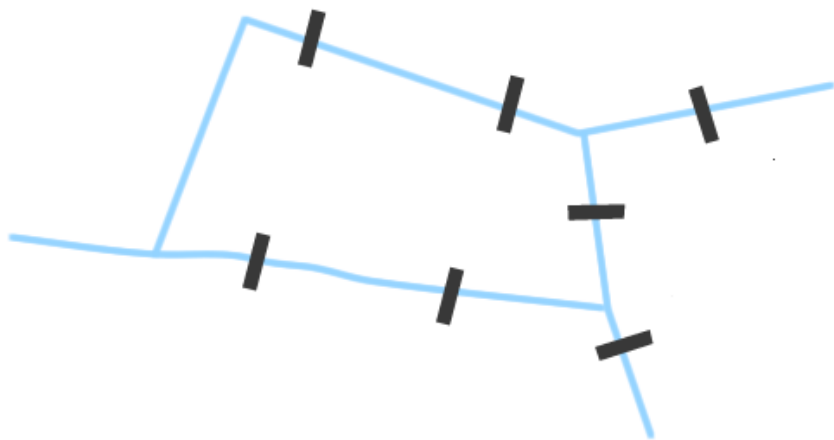
- $K_{2,2}$
- $K_{1,5}$
- $K_{5,1}$

# Historie



# Eulerova úloha

Je možné projít každým mostem ve městě právě jednou?



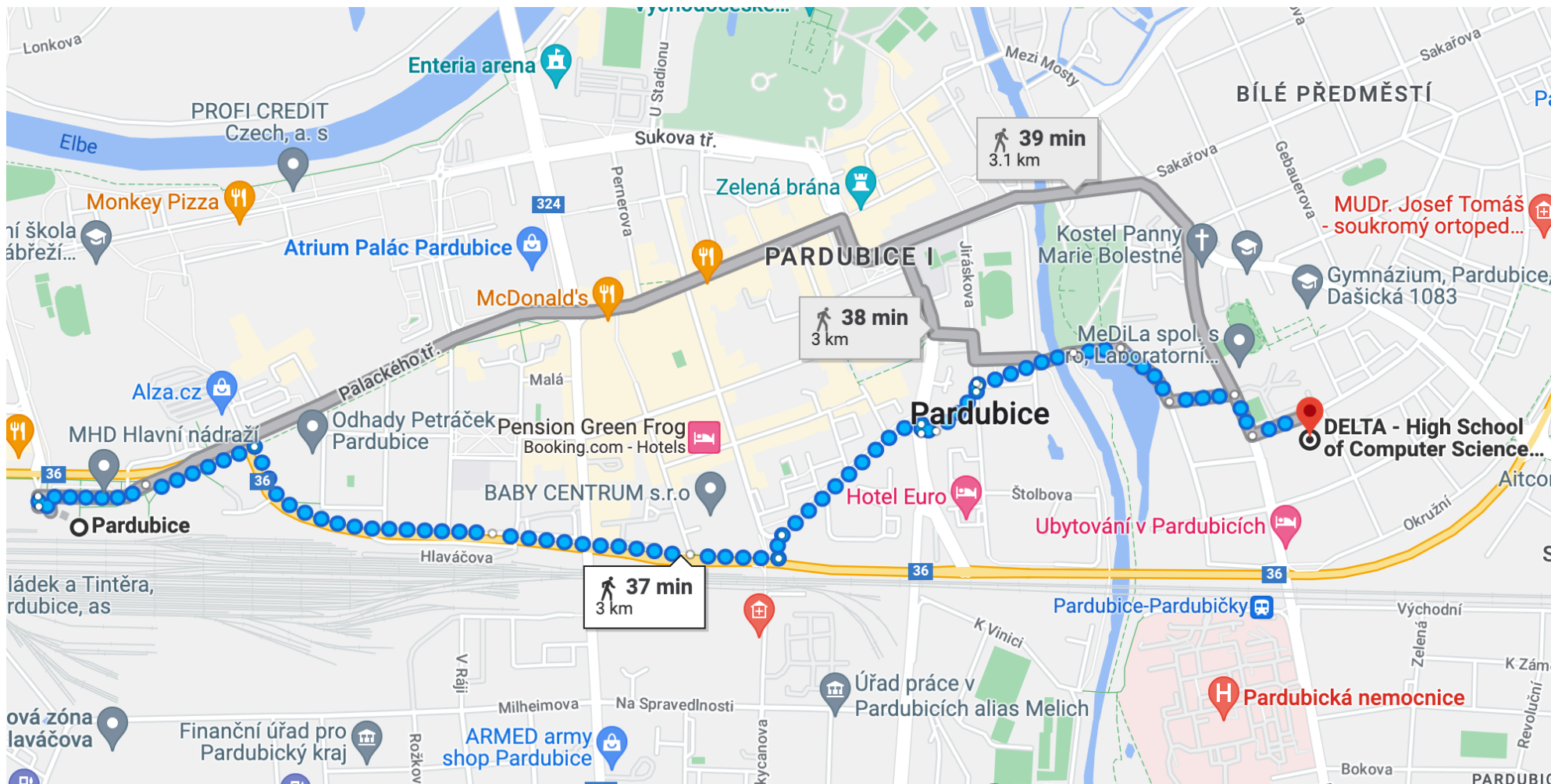
Sedm mostů města Königsbergu (převzato z [teorie-grafu.cz](http://teorie-grafu.cz))

# Eulerova úloha

Euler matematicky dokázal (1736), že úloha není řešitelná

**Motivace**

# Mapa - nalezení nejkratší cesty



# **Reprezentace grafů v počítači**

# Reprezentace grafů obecně

## Náležitosti reprezentace:

- Musí popisovat množinu vrcholů **V**
- Množinu hran **E**
- Incidenční zobrazení **f**

## Metody reprezentace:

1. Maticová reprezentace
2. Reprezentace formou seznamu sousedů

# Matice sousednosti

- Matice **uzel - uzel**
- V neorientovaném grafu je matice symetrická
- Hodnota prvku na indexu  $a_{ij}$  odpovídá počtu hran vedoucích z vrcholu  $i$  do  $j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jaký graf reprezentuje tato matice?



# Matice sousednosti

## Poznámka

U orientovaných grafů je hodnota prvku v  $i$ -tém sloupci a  $j$ -tém řádku 1, pokud je  $i$ -tý vrchol počátečním vrcholem  $j$ -té hrany, a  $-1$ , pokud je jejím koncovým vrcholem.

# Matice sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost  $\mathcal{O}(|V|^2)$
- Časová složitost kontroly existence hrany  $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost přidání hrany  $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost odebrání hrany  $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost přidání vrcholu  $\mathcal{O}(|V|^2)$

# Matice incidence

- Matice **vrchol - hrana**
- Využití u grafů bez smyček
- V neorientovaném grafu má prvek  $a_{ij}$  hodnotu 1, pokud i-tý vrchol inciduje s j-tou hranou (je jejím koncovým bodem), jinak 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jaký graf reprezentuje tato matice?

# Matice incidence

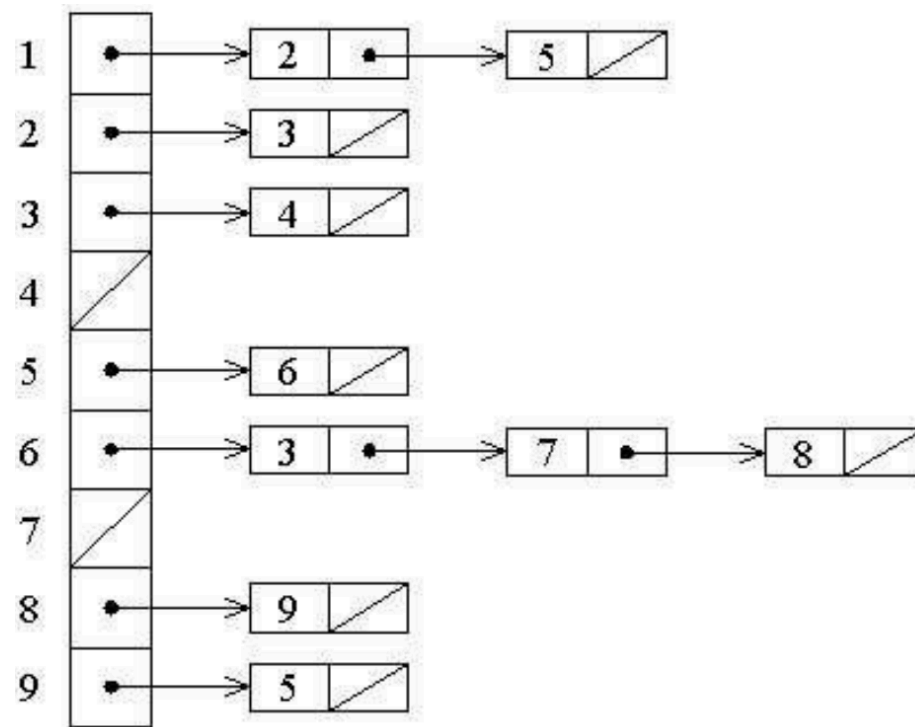
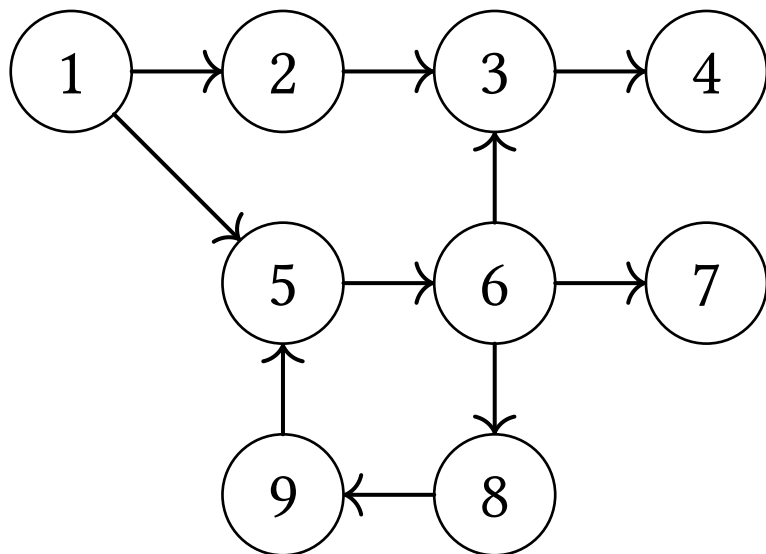
## Poznámka

U orientovaných grafů je hodnota 1 u počátečního uzlu hrany a  $-1$  u koncového uzlu hrany.

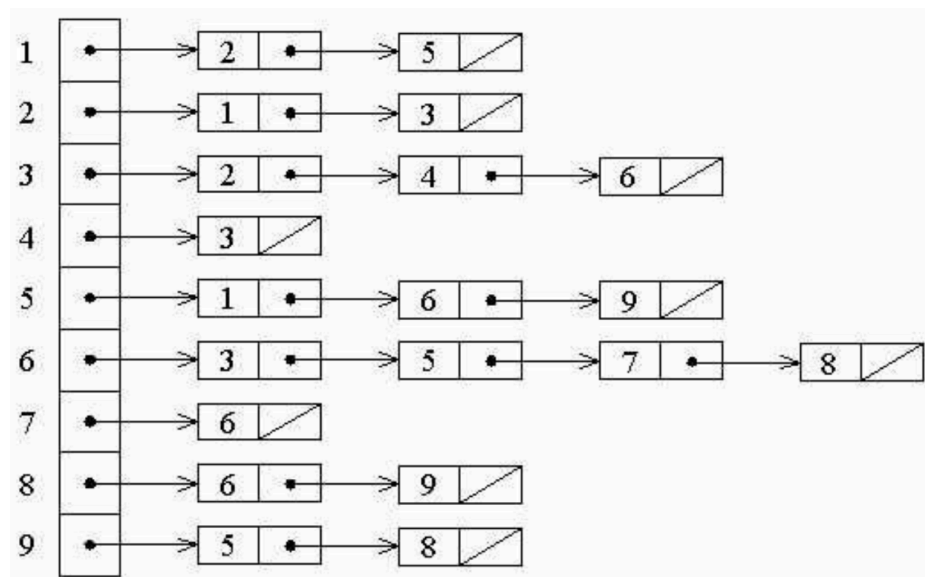
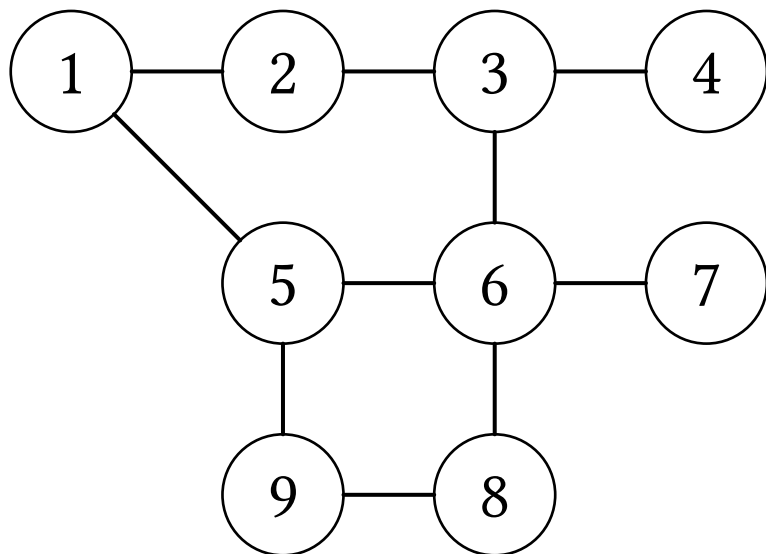
# Spojový seznam sousednosti

- Pro každý vrchol ukládáme seznam sousedů
- Sousedící vrcholy jsou uloženy v seznamech (v libovolném pořadí)

# Spojový seznam sousednosti - orientovaný graf



# Spojový seznam sousednosti - neorientovaný graf



# Spojový seznam sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost  $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Časová složitost kontroly existence hrany  $\mathcal{O}(\Delta(v))$
- Časová složitost přidání hrany  $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost odebrání hrany  $\mathcal{O}(\Delta(v))$
- Časová složitost přidání vrcholu  $\mathcal{O}(|V|)$

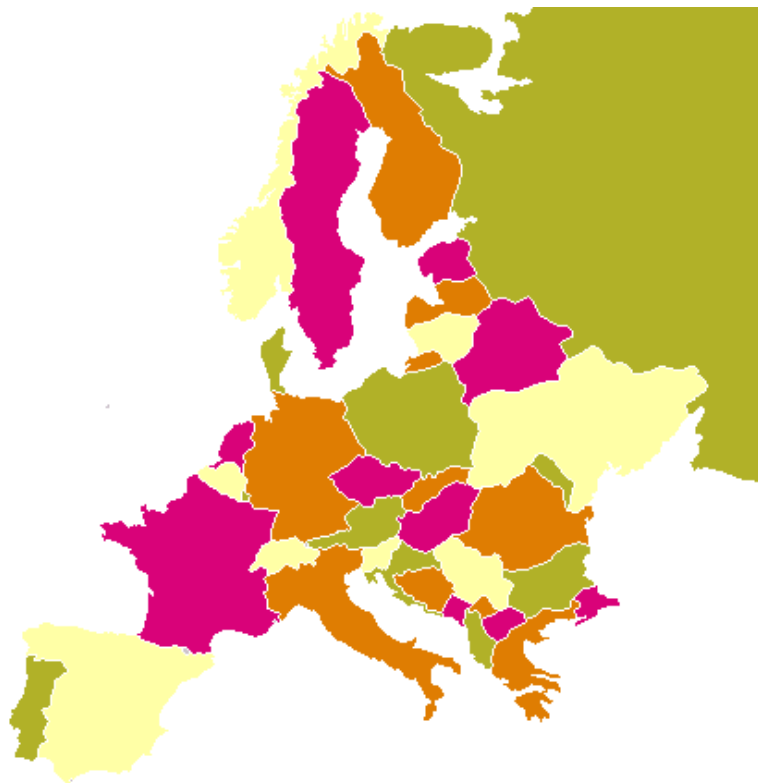


# **Praktické využití**

# Obarvení politické mapy

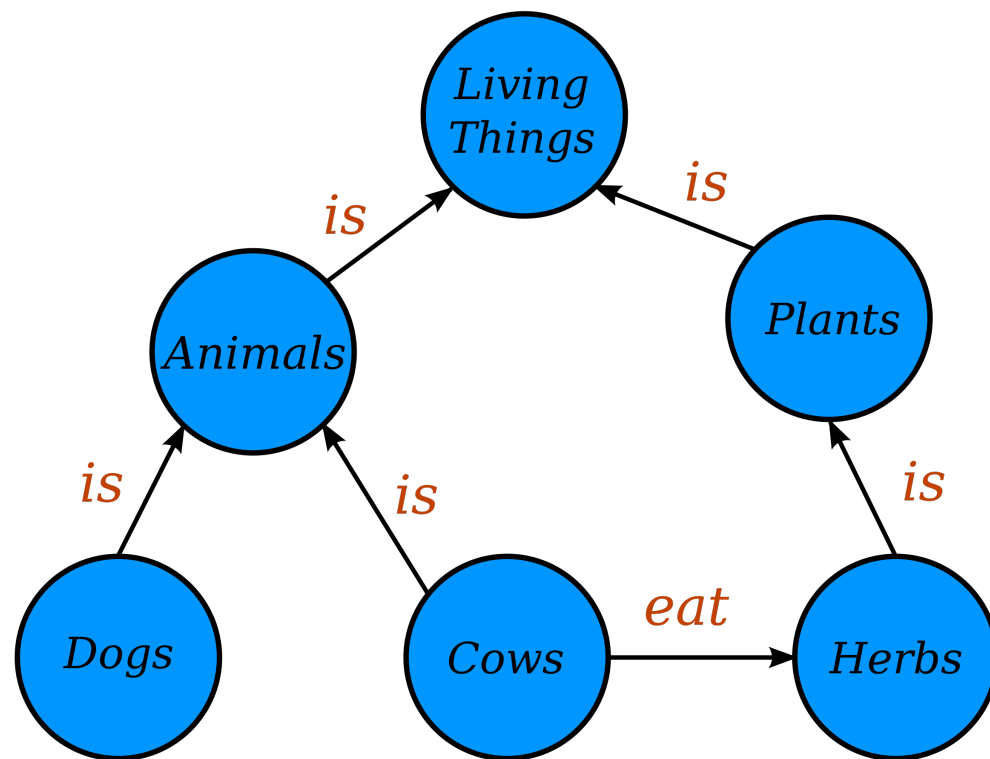
Obarvení libovolné mapy tak, aby dvě sousední země nebyly obarveny stejnou barvou (*four color theorem*)

# Obarvení politické mapy

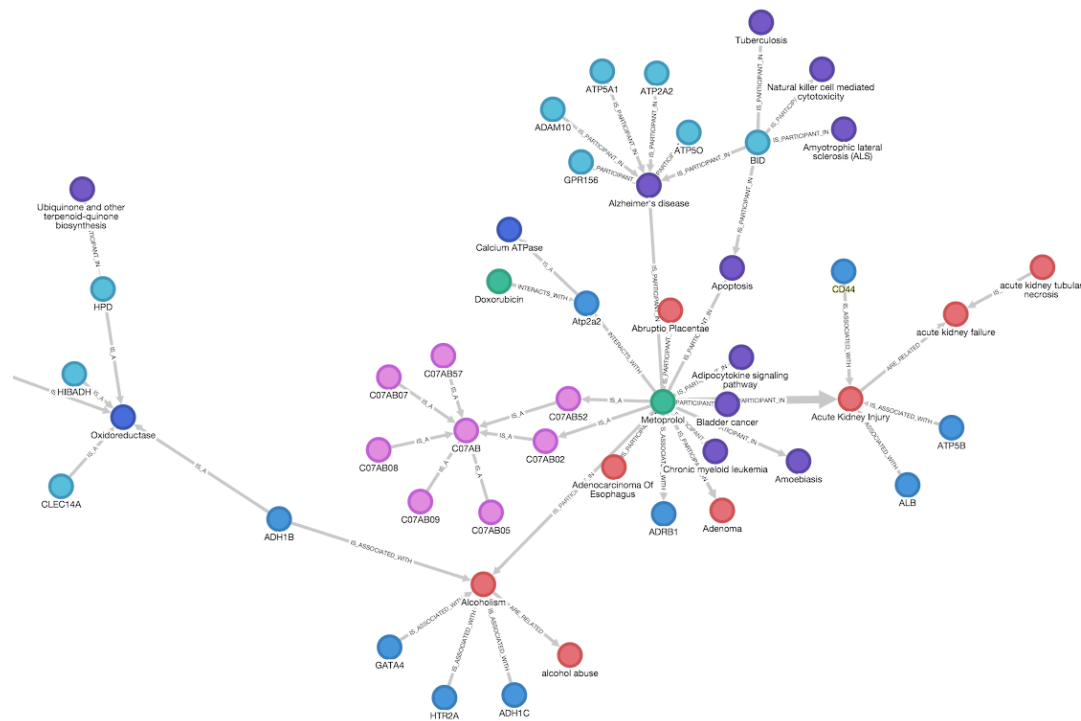


V roce 1976 dokázáno, že stačí  
**4 barvy** (Appel-Haken, 1976)

# Znalostní ontologie



# Znalostní ontologie



# Praktické využití

- PageRank (Google)
- CPM (Critical Path Method) (řízení projektů)
- Mapy
- Grafové databáze, ontologie (znalostní grafy)
- Pravděpodobnostní grafické modely
- Jádro grafu v teorii her, stavový prostor
- ... mnoho dalších úloh