EXPÉRIENCE 6

PROPAGATION DE FAISCEAUX GAUSSIENS

6.1- BUTS

Étudier la propagation de faisceaux optiques à section gaussienne dans l'approximation paraxiale. Se familiariser avec la technique de la matrice ABCD.

6.2- OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Vous êtes déjà familiers avec les lois de l'optique géométrique dans l'approximation paraxiale et en particulier avec les lois de combinaison de lentilles. Il existe toutefois une façon plus puissante d'évaluer les trajets optiques dans le cas de systèmes optiques complexes : la technique de la matrice ABCD.

Soit un faisceau optique qui se déplace de gauche à droite le long de l'axe z et qui rencontre une surface ayant un rayon de courbure R. Par convention, on place l'origine du système de coordonnées au point de rencontre de la surface et de l'axe z. Si le centre de courbure de la surface est à gauche de l'origine, R sera négatif. En une position z donnée, un rayon optique est décrit par une position x et un angle γ. La propagation du rayon dans un milieu d'indice de réfraction constant est décrite par une matrice de transfert **T** et la réfraction à la surface par une matrice de réfraction **R**. La matrice ABCD, ou matrice du système, est égale au produit de toutes les matrices impliquées par le déplacement du rayon d'un point a à un point b :

$$\begin{pmatrix} x' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \gamma \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{n+1}\,\mathbf{R}_{n}\,\mathbf{T}_{n}\,\mathbf{R}_{n-1}\mathbf{T}_{n-1}\ldots\mathbf{R}_{1}\mathbf{T}_{1}\begin{pmatrix} x \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Pour fixer les idées, prenons trois milieux d'indices n_1, n_2 et n_3 séparés par deux surfaces de rayons de courbures R_1 (positif) et R_2 (négatif), voir figure 6.1. Pour la propagation du faisceau à partir d'un point une distance s devant la première surface, on a que :

$$x_1' = x_1 - s\gamma_1, \qquad \gamma_1' = \gamma_1$$

et donc

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

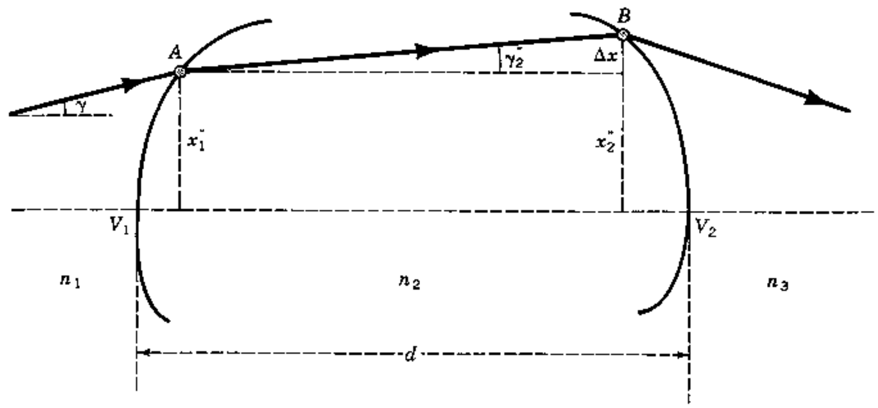

Figure 6.1. Construction pour la propagation d'un rayon dans trois milieux d'indices différents.

(N'oubliez pas que, par convention, s est négatif et donc $-s$ positif). Il n'est pas trop difficile de montrer que la matrice de réfraction de la première surface est telle que :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_1 - n_2}{n_2 R_1} & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \gamma_1' \end{pmatrix}$$

Puis, la matrice de transfert d'une surface à l'autre et la matrice de réfraction à la deuxième surface s'écriront :

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} & \dfrac{n_2}{n_3} \end{pmatrix}$$

et ainsi de suite.

Tableau 6.1 – Matrices ABCD

Transfert sur une distance *d*	$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Lentille mince de focale *f*	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$
Réfraction à une surface de rayon de courbure *R*	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$
Réflexion sur un miroir sphérique de rayon de courbure *R*	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & -1 \end{pmatrix}$

6.3- FAISCEAUX GAUSSIENS

L'optique géométrique simple décrite ci-dessus ne tient pas compte de la nature ondulatoire de la lumière, ce qui conduit à des prédictions non physiques. Par exemple, selon l'optique géométrique, un faisceau parallèle sera focalisé par une lentille en un point de taille infinitésimale, ce que les lois de la diffraction empêchent. Pour aller au-delà de l'optique géométrique, il faut résoudre explicitement l'équation d'onde déduite de l'électromagnétisme. Dans l'approximation paraxiale, qui implique une symétrie cylindrique et des angles de convergence ou divergence petits, une solution robuste de l'équation d'onde s'écrit

$$E(\vec{r}) = \Psi(x,y,z)e^{-ikz},$$

avec

$$\Psi(x,y,z) = E_0 \exp\left\{\frac{-(x^2+y^2)}{w(z)^2}\right\}.$$

La fonction enveloppe du faisceau est donc une gaussienne, d'où le nom *d'optique gaussienne* pour décrire cette théorie. La quantité *w(z)* représente la demi-largeur à *1/e* de cette gaussienne. L'optique gaussienne prédit que (voir l'appendice)

$$w(z)^2 = w_0^2\left[1+\left(\frac{z-z_0}{q_0}\right)^2\right], \text{ avec } q_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \tag{1}$$

où w_0 est la demi-largeur minimale qu'atteindra le faisceau en $z=z_0$ et q_0, appelé *paramètre confocal*, représente la distance de part et d'autre de z_0 pour laquelle la largeur du faisceau à augmenté d'un facteur √2 (pour les amateurs de photographie, q_0 correspond à la profondeur de champ). De même, le rayon de courbure du front d'onde est donné par

$$R(z) = (z - z_0)\left[1 + \left(\frac{q_0}{z - z_0}\right)^2\right].$$

Dans un régime où $z\text{-}z_0 >> q_0$, on a que

$$w(z) \approx \frac{\lambda(z - z_0)}{\pi w_0},$$

donc la largeur du faisceau augmente linéairement avec z, l'angle de divergence étant donné par $\lambda/\pi w_0$. De même dans ce régime, $R(z) \approx z - z_0$.

ATTENTION : les équations qui précèdent sont relatives au champ électrique de l'onde alors que vous en mesurerez l'intensité! N'oubliez donc pas que I ∝ E^2.

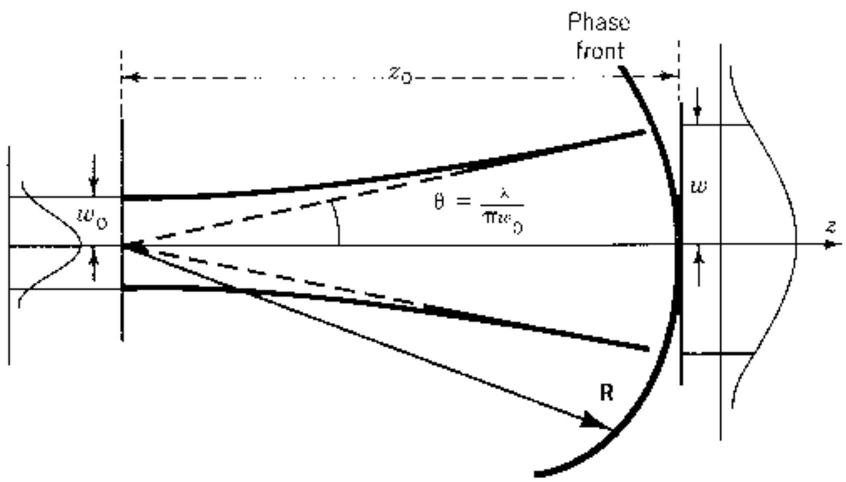

Figure 6.3- Propagation d'un faisceau gaussien.

Beaucoup de faisceaux optiques peuvent être décrits adéquatement par l'optique gaussienne. En particulier, tous les faisceaux lasers dont la cavité résonante est à symétrie cylindrique auront une section gaussienne.

On peut combiner la théorie des faisceaux gaussiens et celle de la matrice ABCD en introduisant le paramètre de taille complexe q':

$$q'(z) = z - z_0 + iq_0.$$

En multipliant par $(z - z_0 - iq_0)/(z - z_0 - iq_0)$ et en utilisant les équations ci-dessus, on obtient que

$$\frac{1}{q'(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi w(z)^2} \ .$$

C'est donc dire que la partie réelle de l'inverse de *q'* est l'inverse du rayon de courbure et que sa partie imaginaire est reliée à la demi-largeur du faisceau. Finalement, le paramètre de taille complexe obéit à la loi :

$$q'(z_2) = \frac{Aq'(z_1) + B}{Cq'(z_1) + D} \ ,$$

où les valeurs A, B, C et D sont les éléments de la matrice ABCD relative à la propagation du faisceau de z_1 à z_2. De façon équivalente, cette expression peut s'écrire

$$\frac{1}{q'(z_2)} = \frac{C + D/q'(z_1)}{A + B/q'(z_1)} \,.$$

6.4 MÉTHODE DE MESURE

On peut mesurer avec précision la demi-largeur d'un faisceau gaussien en déplaçant une lame de rasoir placée devant un détecteur (une photodiode). Le signal enregistré par le détecteur (i.e. le courant) en fonction de la position *x* de la lame le long de l'axe de déplacement sera alors proportionnel à l'intégrale d'une fonction gaussienne, c'est-à-dire la fonction d'erreur :

$$I(x) = \frac{I_{\max}}{2}\left(1 - erf\left[\frac{\sqrt{2}(x - x_0)}{w}\right]\right),$$

où I_{max} est le courant maximal (faisceau laser non occulté), x_o est la position où l'intensité du faisceau est maximale et *w* est la demi-largeur à $1/e^2$ du faisceau laser. On peut ainsi trouver *w* en faisant un ajustement des données avec la fonction ci-dessus. Une façon approximative mais rapide d'estimer *w* comme point de départ pour l'ajustement est de mesurer la distance entre les points ou le signal vaut 10 % et 90 % de I_{max}. Cette distance est égale à 1,28 *w*.

6.5- APPAREILLAGE

Banc d'optique avec supports de déplacement réglables.
Laser HeNe.
Jeu de lentilles.
Photodiode avec filtre.
Lame de rasoir montée sur une table de translation micrométrique motorisée.
Picoampèremètre.
Ordinateur.

6.6- INSTRUCTIONS

6.6.1- Alignement

Il est important que toutes les pièces optiques soient bien centrées sur un axe optique commun. Commencez par aligner le faisceau laser par rapport au banc d'optique. Centrez le faisceau laser sur un une cible et déplacer celle-ci le long du banc en vous assurant que le faisceau y demeure toujours centré. Du même coup, assurez-vous que le faisceau est bien centré sur le détecteur, de façon à ce que le signal détecté lorsque la lame de rasoir est à mi-course soit approximativement la moitié du signal maximum (faisceau non occulté). Ne touchez plus par la suite à l'orientation du faisceau laser.

De même, pour introduire une lentille sur le banc, placez la lentille sur son support et ajustez celui-ci de façon à ce que le faisceau laser ne soit pas dévié ; vous pouvez vérifier ceci à l'aide de la cible utilisée précédemment placée au bout du rail. De même, vous pouvez vérifier que la réflexion du laser par la lentille recoupe la sortie du laser.

6.6.2- Contrôle

Effectuez par la suite la mesure avec l'ordinateur : cliquez sur l'icône **FGA.** **Notez que les positions sont en µm**. Les données seront sauvegardées en format ASCII sous la forme de deux colonnes. La première ligne donne le nombre de points et le nombre de balayage. Les autres lignes contiennent les positions et amplitudes du signal mesuré. Vous pouvez prédire le comportement de votre système à l'aide de la routine **Matlab** *propagation.m***.** Vous pouvez aussi lire vos données dans **Matlab** avec la routine *lecture.m*.

6.6.3- Mesures

1. Caractérisez le faisceau laser : déterminez sa demi-largeur à plusieurs positions et ensuite déterminer sa divergence, sa demi-largeur minimale w_0, le paramètre confocal q_0, ainsi que z_0 (en ajustant l'équation (1) sur vos mesures de w).
2. Une fois le laser caractérisé, placez une lentille convergente de votre choix sur le rail et mesurez la demi-largeur en plusieurs points au voisinage du point focal de façon à pouvoir extraire w_o, z_0 et q_o de vos mesures. Comparez vos résultats avec les prédictions du formalisme ABCD présenté aux pages 4 et 5 (vous pouvez utiliser la routine *propagation.m*).
3. Répétez maintenant avec deux lentilles.