

Du Big Bang à l'apocalypse: Symétries et solitons dans la cosmologie

Éric Dupuis

Université de Montréal, département de physique
Conférences du vendredi des stagiaires

27-06-2014

- 1 Cosmologie
 - Cosmologie 101
 - Notions de symétrie
 - Symétrie et cosmologie

- 2 Solitons - Appareillage mathématique
 - Équation d'ondes et soliton
 - Formalisme Lagrangien
 - Kink

- 3 Quotidien en cosmologie théorique des particules

Cosmologie 101

- ① Cosmologie : Structure/origine/évolution de l'univers
 - ① Big Bang
 - ② Modèles inflationnistes
 - ③ Expansion de l'univers
- ② Règles : Relativité générale, mécanique quantique, théorie des champs
- ③ Configurations : Constantes de couplage, paramètres libres

Questions fondamentales (style cosmo)

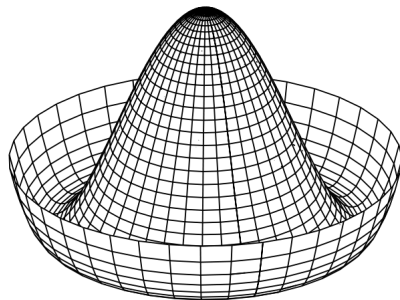
- ① D'où venons-nous ? (État primordial de l'univers)
- ② Qui sommes-nous ? (État actuel de l'univers)
- ③ Où allons-nous ? (Évolution de l'univers)

État d'origine \rightarrow État actuel

Big Bang :

- Matière compressée
- Température très élevée
- **État instable**

Forme symétrique : Importance
en cosmologie



La symétrie en physique

Définition (approximative)

Symétrie : Synonyme d'**invariance**. La symétrie d'un système physique définit un ensemble de transformations qui laissent certaines de ses propriétés inchangées (Théorème de Noether).

Symétrie de l'univers (postulats de la relativité restreinte)

- ① Homogénéité : Invariance sous translation $\rightarrow \vec{p}$
- ② Isotropie : Invariance sous rotation $\rightarrow \vec{L}$

Groupe : Opérations de base entre ses éléments.

Transformations \leftrightarrow Générateurs du groupe.

Exemple : $U(n)$, $O(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$

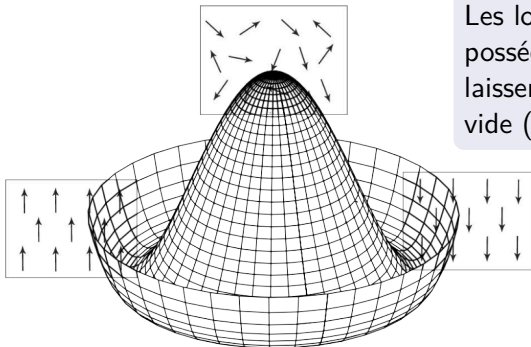
Ferroaimant de Heisenberg : Dipôles magnétiques en 2D

$$H = -J \sum_i \sum_{\text{voisins } j} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

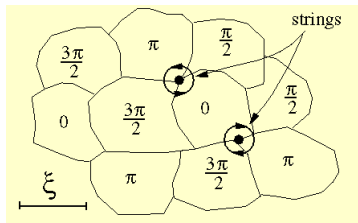
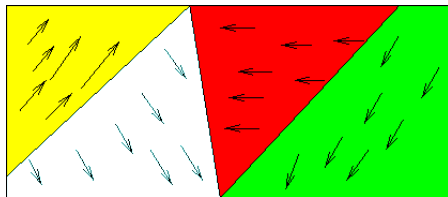
Invariance de H sous rotation
dans le plan **SO(2)**

Brisure spontanée de symétrie

Les lois de la nature peuvent posséder des symétries qui ne laissent toutefois pas l'état de vide (fondamental) invariant.



- ① Température critique (Curie)
- ② Vides dégénérés, différent dans l'espace : défauts topologiques (solitons)



Symétries en physique des particules

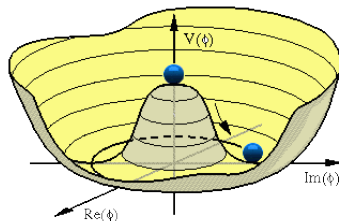
Modèle standard permet les associations suivantes :

Groupes de Lie, transformations continues

Force	Groupe de symétrie	Bosons - Générateurs
Nucléaire faible	$SU(2)$	W^{\pm}, Z^0
Nucléaire forte	$SU(3)$	g
Électromagnétique	$U(1)$	γ
	(symétries internes)	

Brisure de symétrie - Particules

Mécanisme de Higgs : Bosons de Goldstone et de jauge



Symétrie électrofaible : Glashow, Salam et Weinberg

$$SU(2) \times U(1)$$

Grande unification :

$$G \rightarrow H \rightarrow \dots \rightarrow SU(3) \times U(1)$$

Fin de 1ère section

Supposition : Potentiel U

1) Origine $\rightarrow \max(U)$, Big Bang

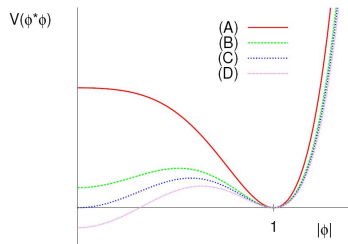
2) État actuel

\rightarrow vide métastable ?

\rightarrow symétrie brisée ?

3) Évolution future

\rightarrow Vers un vrai vide ?



Solitons

Brisure de symétrie :

→ Défauts topologiques : signature des solitons

Intérêt cosmologique :

- Défaut topologique : configurations stables de matières formées lors de la transition de phase
- influence sur le taux de transition vers un vrai vide

Équation d'ondes

Champ scalaire défini dans \mathbb{R}^n : $\phi(\vec{x}, t)$

Équation d'onde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \square \phi = 0 \quad (1)$$

Deux propriétés étudiées dans les solutions ϕ

- Forme et vitesse de l'onde conservées
- Deux ondes retrouvent asymptotiquement leur forme et vitesse

Équation d'onde : $V=0$

Potentiels différents - Équations du mouvements modifiées

① terme dispersif : $\square\phi + \mathbf{m}^2\phi = 0$ (Klein-Gordon)

① onde plane : $k^2 \rightarrow k^2 + m^2$

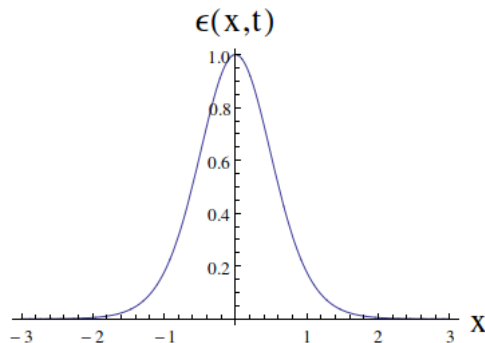
② terme non-linéaire : ϕ^3

En s'éloignant de l'équation d'onde, les deux propriétés peuvent être conservées : ondes solitaires et solitons

Sur sa monture, John Russell poursuit sa destinée, vers l'onde solitaire !



En image



Description d'un soliton topologique

① Densité d'énergie d'un soliton :

- ① Localisée dans l'espace (finitude)
- ② Conservée et non-nulle (solution non-dissipative, exigence topologique)

$$E[\phi] = \int dx dt (\mathcal{H}[\phi]) = \int dx dt \left[\frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right]$$

② Énergie finie :

- ① $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \partial_x \mathcal{H} = 0$
- ② $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi[x] = g^{(i)}$ où les $g^{(i)}$ sont les min. de V

③ Structure des vides non triviale

Formalisme Lagrangien

Notation covariante

- ① $x_0 = ct$ $x_{1,2,3} = x, y, z$
- ② $x_\mu = (x_0, \vec{x})$ $x^\mu = (x_0, -\vec{x})$
- ③ Métrique : $x^\mu = g^{\nu\mu} x_\nu$
- ④ Minkowski : $\eta^{\nu\mu} \rightarrow \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\nabla \right)$$
$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2$$

- ① *Action* : $S[\phi] = \int dt(L[\phi]) = \int dx_\mu(\mathcal{L}[\phi])$
 - ① Principe d'Hamilton : ϕ_0 | action minimisée
 - ② Premier ordre nul pour un minimum d'action
- ② *Théorie des champs* : $\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(\partial^\mu\phi)^* - V$
- ③ *Euler-Lagrange* : $\partial_\mu\left(\frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}$

Équation d'ondes - $V=0$

Par Euler-Lagrange :

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial_a\phi(\partial^a\phi)^*}{\partial_\mu\phi}\right) = 0$$

$$\partial_\mu(\partial^\mu\phi)^* = 0$$

$$\square\phi = 0$$

Kink : cas de figure typique

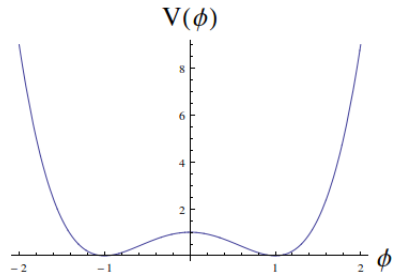
Sous : $\phi \rightarrow -\phi$ (Z_2)

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

$$\phi_0 \rightarrow -\phi_0$$

Théorie des champs :
→ Champ scalaire ϕ
→ 1+1 dimensions
→ solutions statiques

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \frac{m^2}{\lambda})^2$$



Analogie mécanique classique

$$\mathcal{H}[\phi] = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi (\partial_\mu \phi)^* + V$$

Champ

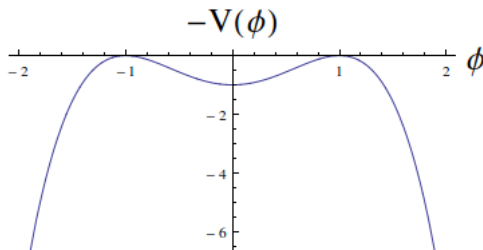
$$\textcircled{1} \mathcal{H} = \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi)$$

$$\textcircled{2} E_\phi = \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right]$$

Particule

$$\textcircled{1} L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - U(q)$$

$$\textcircled{2} S_q = \int dt \left[\frac{1}{2} \dot{q}^2 - U(q) \right]$$



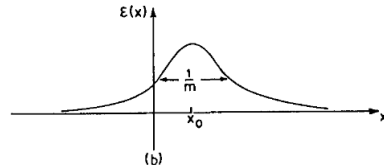
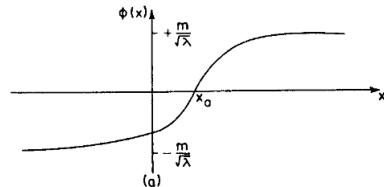
Kink

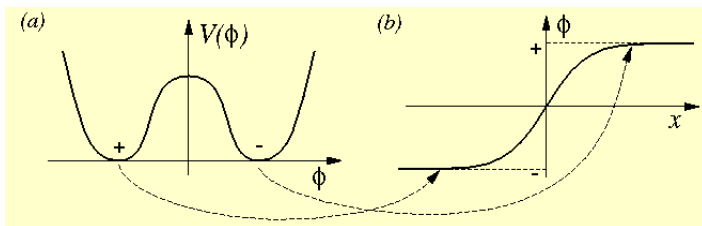
Par Euler-Lagrange : $\phi'' = \lambda\phi^3 - m^2\phi$

$$\phi(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]$$

(de E-L) : $\frac{1}{2}\phi'^2 = U(\phi)$ dans
 $\mathcal{H}(\phi) = \epsilon(x)$

$$\epsilon(x) = \frac{m^4}{\sqrt{2\lambda}} \operatorname{sech}^4 \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]$$





Charge topologique Q conservée ($Q = \int k_0 dx$)

→ $Q \sim \phi(x = \infty) - \phi(x = -\infty)$

→ Déformations continues impossibles (dont le temps)

→ (Secteurs topologiques non connectés)

Configuration non triviale de vides → Solution non dissipative

Continuité de la solution en x :

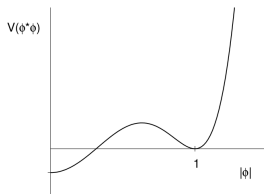
$$\forall t \exists x \mid \epsilon(x, t) \geq U(\phi = 0)$$

$$\rightarrow \max_x \epsilon(x, t) > 0$$

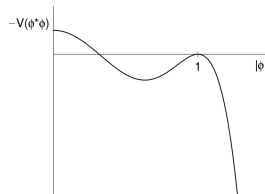
Retour - Cosmologie et solitons

- ① Symétries brisées dans la nature (**MS**, ferroaimant)
- ① Symétrie brisées : structure non triviale des vides dans l'univers
→ défauts topologiques → solitons
- ② Évolution de l'univers ?

Taux de désintégration du faux vide



Effet tunnel quantique
 → Fluctuations quantiques ↔
 Fluctuations
 thermodynamiques (Bulles de
 vrai vide)



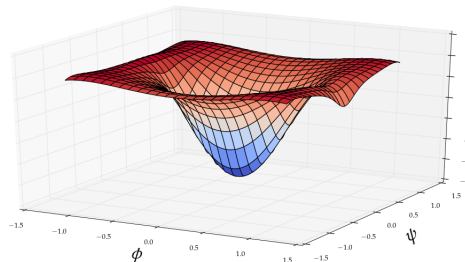
Espace Euclidien :
 Comportements quantiques
 dans Minkowski ← Solutions
 classiques dans Euclide
 → $\min(S_E)$ → Bounce,
 Instanton
 → Intégrale de chemin :

Fluctuation d'un soliton : autre source de désintégration !!!

Potentiel à deux champs $\phi(x, t)$ et $\psi(x, t)$

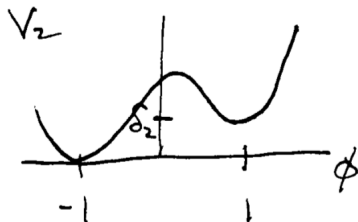
$$V(\phi, \psi) = (\psi^2 - \delta_1)(\psi^2 - 1)^2 + \frac{\alpha}{\psi^2 + \gamma} [(\phi^2 - 1)^2 - \frac{\delta_2}{4}(\phi - 2)(\phi + 1)^2]$$

- ① 1+1 dimensions, on cherche une solution statique
- ② Paramètres : $\alpha, \gamma, \delta_1, \delta_2$
- ③ γ : couplage
- ④ α : Importance du 2ème terme





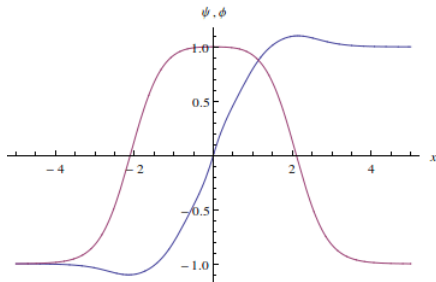
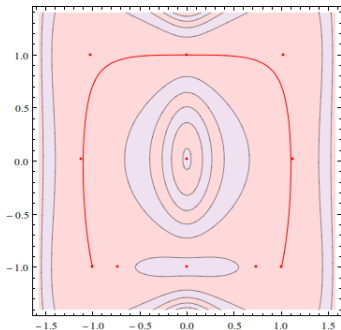
- ① $\delta_1 \rightarrow$ contrôle du minimum central
- ② Ordre 6, CLASSIQUE !



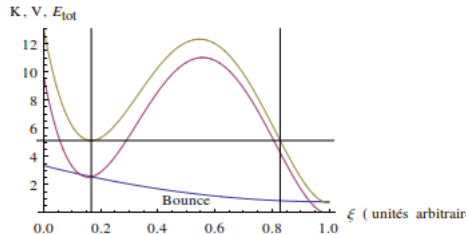
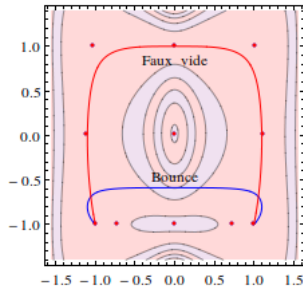
- ① $\delta_2 \rightarrow$ Contrôle de la séparation entre minimum sur l'axe ϕ

À venir...

Solutions aux équations de mouvements (contraintes à $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$)



Tester la stabilité de la solution



Trouver une borne maximale sur l'action \rightarrow borne minimale sur τ