Du Big Bang à l'apocalypse:

Symétries et solitons dans la cosmologie

Éric Dupuis

Université de Montréal, département de physique

Conférences du vendredi des stagiaires

27-06-2014

Cosmologie 101

1. Cosmologie : Structure/origine/évolution de l'univers
   1. Big Bang
   2. Modèles inflationnistes
   3. Expansion de l'univers
2. Règles : Relativité générale, mécanique quantique, théorie des champs
3. Configurations : Constantes de couplage, paramètres libres

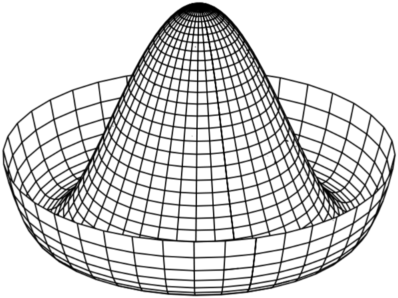
Questions fondamentales (style cosmo)

1. D'où venons-nous ? (État primordial de l'univers)
2. Qui sommes-nous ? (État actuel de l'univers)
3. Où allons-nous ? (Évolution de l'univers)

État d'origine → État actuel

Big Bang :
-Matière compressée
-Température très élevée
-**État instable**

Forme symétrique : Importance en cosmologie



La symétrie en physique

Définition (approximative)

Symétrie : Synonyme d'**invariance**. La symétrie d'un système physique définit un ensemble de transformations qui laissent certaines de ses propriétés inchangées (Théorème de Noether).

Symétrie de l'univers (postultats de la relativité restreinte

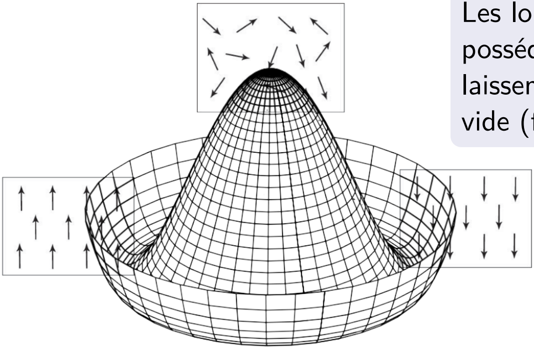
1. Homogénéitié : Invariance sous translation $\rightarrow \vec{p}$
2. Isotropie : Invariance sous rotation $\rightarrow \vec{L}$

Groupe : Opérations de base entre ses éléments.
Transformations $\leftrightarrow$ Générateurs du groupe.
Exemple : U(n), O(n), SU(n), SO(n)

Ferroaimant de Heisenberg : Dipôles magnétiques en 2D

$$H = -J \sum_{i} \sum_{voisins j} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

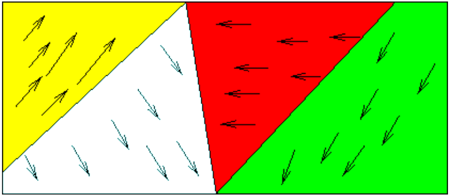
Invariance de H sous rotation dans le plan **SO(2)**

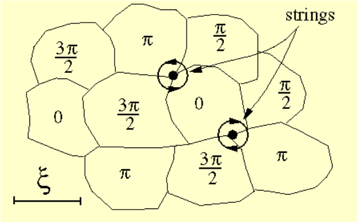


Brisure spontanée de symétrie

Les lois de la nature peuvent posséder des symétries qui ne laissent toutefois pas l'état de vide (fondamental) invariant.

1. Température critique (Curie)
2. Vides dégénérés, différant dans l'espace : défauts topologiques (solitons)





Symétries en physique des particules

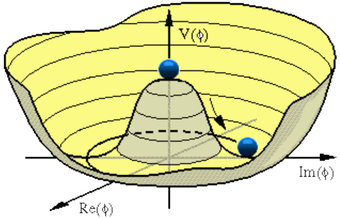
Modèle standard permet les associations suivantes :

Groupes de Lie, transformations continues

Force	Groupe de symétrie	Bosons - Générateurs
Nucléaire faible	SU(2)	$W^{\pm}$, Z^0
Nucléaire forte	SU(3)	g
Électromagnétique	U(1)	γ
	(symétries internes)	

Brisure de symétrie - Particules

Mécanisme de Higgs : Bosons de Goldstone et de jauge



Symétrie élecrofaible : Glashow, Salam et Weinberg

$$SU(2)xU(1)$$

Grande unification :

$$G \rightarrow H \rightarrow ... \rightarrow SU(3)xU(1)$$

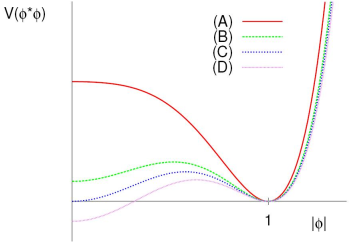
Fin de 1ère section

Supposition : Potentiel U

1) Origine $\rightarrow$ max(U), Big Bang

2) État actuel
$\rightarrow$ vide métastable ?
$\rightarrow$ symétrie brisée ?

3) Évolution future
$\rightarrow$ Vers un vrai vide ?



Solitons

Brisure de symétrie :

$\rightarrow$ Défauts topologiques : signature des solitons

Intérêt cosmologique :

$\rightarrow$ Défaut topologique : configurations stables de matières formées lors de la transition de phase

$\rightarrow$ influence sur le taux de transition vers un vrai vide

Équation d'ondes

Champ scalaire défini dans $\mathbb{R}^n$: $\phi(\vec{x}, t)$

Équation d'onde

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = \Box\phi = 0 \tag{1}$$

Deux propriétés étudiées dans les solutions ϕ

- Forme et vitesse de l'onde conservées
- Deux ondes retrouvent asymptotiquement leur forme et vitesse

Équation d'onde : V=0

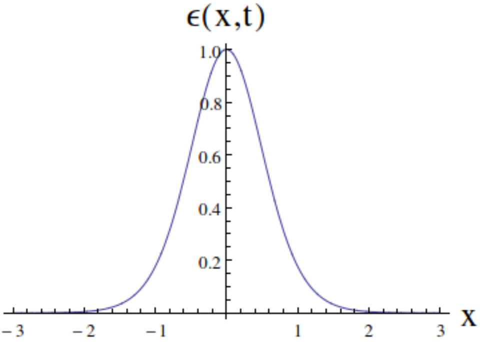
Potentiels différents - Équations du mouvements modifiées

1. terme dispersif : $\Box\phi + \boldsymbol{m^2\phi} = 0$ (Klein-Gordon)
    1. onde plane : $k^2 \rightarrow k^2 + m^2$
2. terme non-linéaire : ϕ^3

En s'éloignant de l'équation d'onde, les deux propriétés peuvent être conservées : ondes solitaires et solitons

Sur sa monture, John Russell poursuit sa destinée, vers l'onde solitaire !

En image



Description d'un soliton topologique

1. Densité d'énergie d'un soliton :
    1. Localisée dans l'espace (finitude)
    2. Conservée et non-nulle (solution non-dissipative, exigence topologique)

$$E[\phi] = \int dxdt(\mathcal{H}[\phi]) = \int dxdt[\frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + V(\phi)]$$

2. Énergie finie :
    1. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \partial_x \mathcal{H} = 0$
    2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \phi[x] = g^{(i)}$ où les $g^{(i)}$ sont les min. de V
3. Structure des vides non triviale

Formalisme Lagrangien

Notation covariante

1. $x_0 = ct \qquad x_{1,2,3} = x, y, z$
2. $x_\mu = (x_0, \vec{x}) \qquad x^\mu = (x_0, -\vec{x})$
3. Métrique : $x^\mu = g^{\nu\mu} x_\nu$
4. Minkowski : $\eta^{\nu\mu} \rightarrow diag(1, -1, -1, -1)$

$$\partial^\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, -\nabla)$$
$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2$$

1. *Action* : $S[\phi] = \int dt(L[\phi]) = \int dx_\mu(\mathcal{L}[\phi])$
   1. Principe d'Hamilton : $\phi_0 \mid$ action minimisée
   2. Premier ordre nul pour un minimum d'action
2. *Théorie des champs* :$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(\partial^\mu\phi)^* - V$
3. *Euler-Lagrange :* $\partial_\mu \left(\frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}$

Équation d'ondes - V=0

Par Euler-Lagrange :

$$\partial_\mu(\frac{\partial_a\phi(\partial^a\phi)^*}{\partial_\mu\phi}) = 0$$

$$\partial_\mu(\partial^\mu\phi)^* = 0$$

$$\Box\phi = 0$$

Kink : cas de figure typique

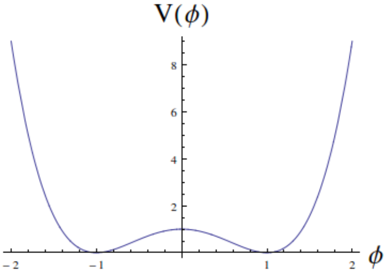
Sous : $\phi \to -\phi$ (Z_2)

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}$$

$$\phi_0 \to -\phi_0$$

Théorie des champs :
$\to$ Champ scalaire ϕ
$\to$ 1+1 dimensions
$\to$ solutions statiques

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \frac{m^2}{\lambda})^2$$



Analogie mécanique classique

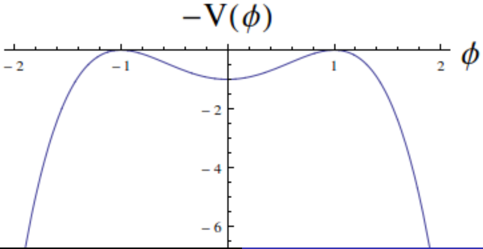
$$\mathcal{H}[\phi] = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(\partial_\mu\phi)^* + V$$

Champ

1. $\mathcal{H} = \cancel{\frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2} + \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + V(\phi)$
2. $E_\phi = \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + V(\phi)\right]$

Particule

1. $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - U(q)$
2. $S_q = \int dt[\frac{1}{2}\dot{q}^2 - U(q)]$



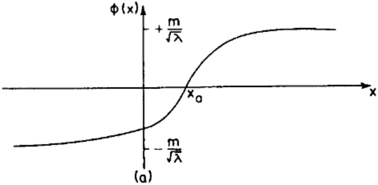
Kink

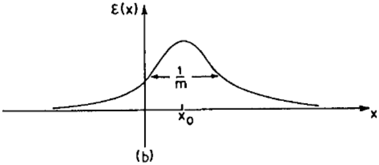
Par Euler-Lagrange : $\phi'' = \lambda\phi^3 - m^2\phi$

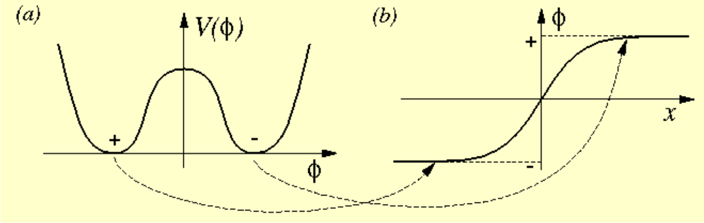
$$\phi(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0)\right]$$

(de E-L) : $\frac{1}{2}\phi'^2 = U(\phi)$ dans $\mathcal{H}(\phi) = \epsilon(x)$

$$\epsilon(x) = \frac{m^4}{\sqrt{2\lambda}} sech^4 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0)\right]$$







Charge topologique Q conservée (Q$= \int k_0 dx$)
$\rightarrow Q \sim \phi(x=\infty) - \phi(x=-\infty)$
$\rightarrow$ Déformations continues impossibles (dont le temps)
$\rightarrow$ (Secteurs topologiques non connectés)

Configuration non triviale de vides $\rightarrow$ Solution non dissipative
Continuité de la solution en x :

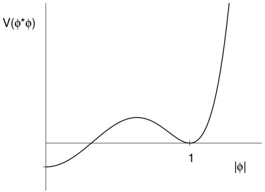
$$\forall\, t\ \exists\, x \mid \epsilon(x,t) \geq U(\phi = 0)$$
$$\rightarrow max|_x \epsilon(x,t) > 0$$

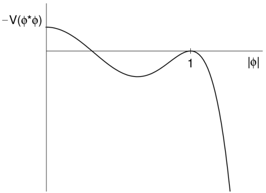
Retour - Cosmologie et solitons

1. Symétries brisées dans la nature (**MS**, ferroaimant)

1. Symétrie brisées : structure non triviale des vides dans l'univers
$\rightarrow$ défauts topologiques $\rightarrow$ solitons
2. Évolution de l'univers ?

Taux de désintégration du faux vide





Effet tunnel quantique
$\rightarrow$ Fluctuations quantiques $\leftrightarrow$ Fluctuations thermodynamiques (Bulles de vrai vide)

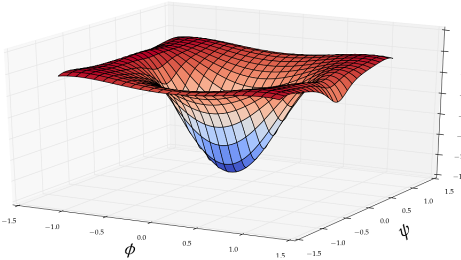
Espace Euclidien : Comportements quantiques dans Minkowski $\leftarrow$ Solutions classiques dans Euclide
$\rightarrow \min(S_E) \rightarrow$ Bounce, Instanton
$\rightarrow$ Intégrale de chemin :

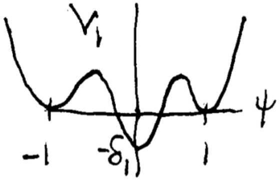
Fluctuation d'un soliton : autre source de désintégration ! ! !

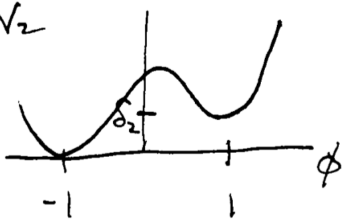
Potentiel à deux champs $\phi(x,t)$ et $\psi(x,t)$

$$V(\phi,\psi) = (\psi^2 - \delta_1)(\psi^2 - 1)^2 + \frac{\alpha}{\psi^2 + \gamma}\left[(\phi^2 - 1)^2 - \frac{\delta_2}{4}(\phi - 2)(\phi + 1)^2\right]$$

1. 1+1 dimensions, on cherche une solution statique
2. Paramètres : $\alpha, \gamma, \delta_1, \delta_2$
3. γ : couplage
4. α : Importance du 2ème terme





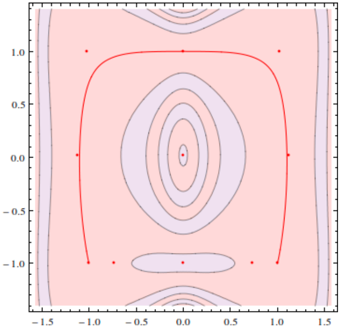


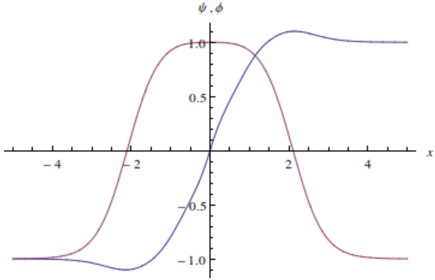
1. $\delta_1 \rightarrow$ contrôle du minimum central
2. Ordre 6, CLASSIQUE !

1. $\delta_2 \rightarrow$ Contrôle de la séparation entre minimum sur l'axe ϕ

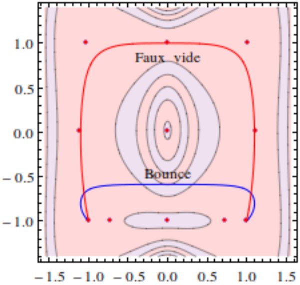
À venir...

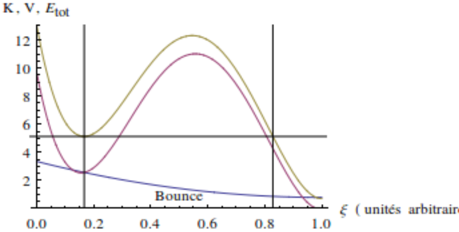
Solutions aux équations de mouvements (contraintes à $\lim_{x \to \pm\infty}$)





Tester la stabilité de la solution





Trouver une borne maximale sur l'action $\rightarrow$ borne minimale sur τ