

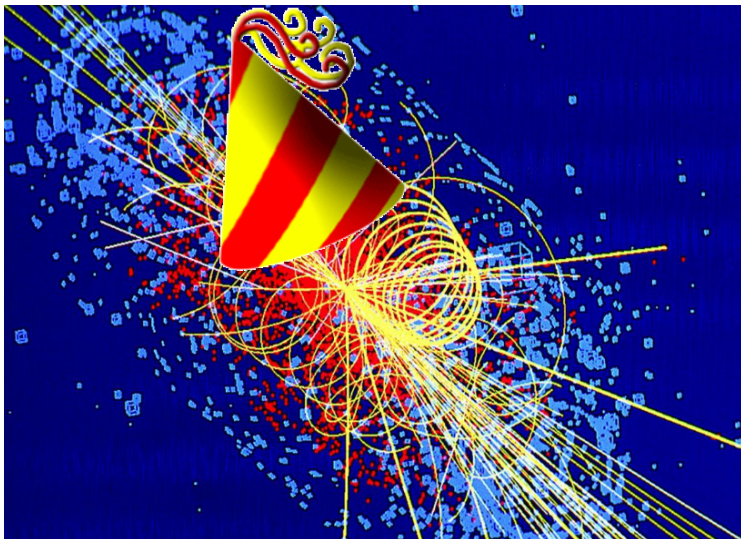
Du Big Bang à l'apocalypse: Symétries et solitons dans la cosmologie

Éric Dupuis

Université de Montréal, département de physique
Conférences du vendredi des stagiaires

04-07-2014

Bonne fête Boson de Higgs ! : 4 juillet 2012 - ...



- 1 Cosmologie
 - Cosmologie 101
 - Notions de symétrie
 - Symétrie et cosmologie

- 2 Solitons - Appareillage mathématique
 - Équation d'ondes et soliton
 - Formalisme Lagrangien
 - Kink

- 3 Quotidien en cosmologie théorique des particules

Cosmologie 101

① Cosmologie : Structure/origine/évolution de l'univers

- ① Big Bang
- ② Modèles inflationnistes
- ③ Expansion de l'univers

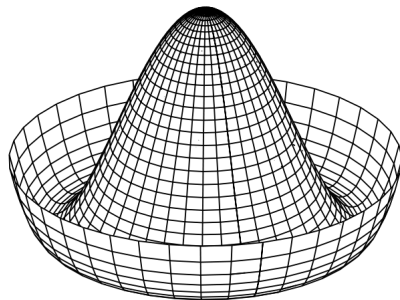


État d'origine \rightarrow État actuel

Big Bang :

- Matière compressée
- Température très élevée
- **État instable**

Forme symétrique : Importance
en cosmologie



La symétrie en physique

Définition (approximative)

La **symétrie** d'un système physique définit une transformation qui le laisse invariant.

Théorème de Noether : Symétries \leftrightarrow Lois de conservations.

Symétrie de l'univers (postulats de la relativité restreinte)

- ① Homogénéité : Invariance sous translation $\rightarrow \vec{p}$
- ② Isotropie : Invariance sous rotation $\rightarrow \vec{L}$

Groupe : Fermeture, Identité, Inverse, Associativité.

Symétries \leftrightarrow Générateurs du groupe.

Exemple : $U(n)$, $O(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$

Ferroaimant de Heisenberg : Dipôles magnétiques en 2D

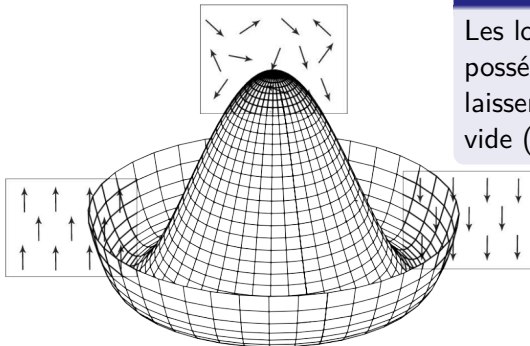
$$H = -J \sum_i \sum_{\text{voisins } j} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

Invariance de H sous rotation
dans le plan **SO(2)**

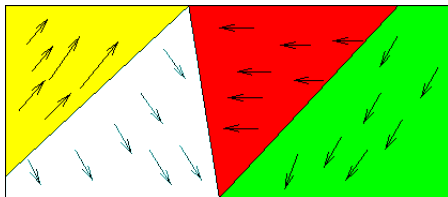
Vide : Température de Curie

Brisure spontanée de symétrie

Les lois de la nature peuvent
posséder des symétries qui ne
laissent toutefois pas l'état de
vide (fondamental) invariant.



Mécanisme de Kibble



Vides dégénérés, différant dans l'espace : défauts topologiques (solitons)

Brisure de symétrie - Particules

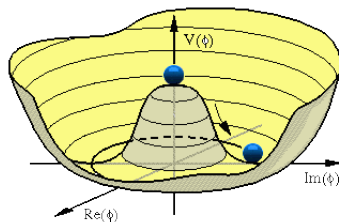
Grande unification :

$$G \rightarrow H \rightarrow \dots \rightarrow SU(3) \times U(1)$$

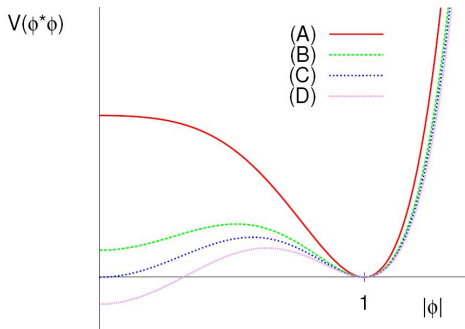
Symétrie électrofaible : Glashow, Salam et Weinberg

$$SU(2) \times U(1)$$

Mécanisme de Higgs : Bosons de Goldstone



Supposition : Univers est dans un potentiel V



1) Origine $\rightarrow \max(U)$, Big Bang

2) État actuel

\rightarrow symétrie brisée ?

\rightarrow **défauts topologiques, solitons ?**

3) Évolution future

\rightarrow vide métastable ?

\rightarrow Vers un vrai vide ? **solitons ?**

Solitons

Brisure de symétrie :

→ Défauts topologiques : signature des solitons
(Ils sont parmi nous ?)

Intérêt cosmologique :

→ Influence sur le taux de transition vers un vrai vide

Équation d'ondes et solitons

Champ scalaire défini dans \mathbb{R}^d : $\phi(\vec{x}, t)$ (champ ???)

$$V = 0$$

Équation d'onde : $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \square \phi = 0$

- 1) Forme et vitesse de l'onde conservées
- 2) Deux ondes retrouvent asymptotiquement leur forme/vitesse

$$V \neq 0$$

Terme dispersif : $+m^2 \phi$ (Klein-Gordon)

$$\Rightarrow k^2 \rightarrow k^2 + m^2$$

Terme non-linéaire : $+\phi^3$

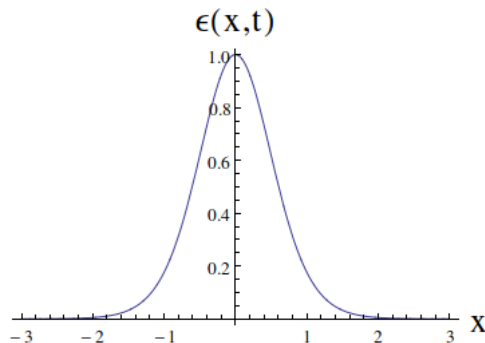
Ondes solitaires **1)**

Solitons **1)+2)**

Sur sa monture, John Russell poursuit sa destinée, vers l'onde solitaire !



En image



Description d'un soliton topologique

1) Densité d'énergie $\epsilon(x, t)$ d'un soliton (1+1 dim.)

→ Localisée dans l'espace (finitude)

→ Conservée et non-nulle

$$\epsilon(x, t) = \mathcal{H}[\phi] = \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + V(\phi)$$

Énergie finie : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathcal{H} = 0$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \partial_x \phi = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi[x] = g^{(i)} \text{ où les } g^{(i)} \text{ sont les min. de } V$$

2) Structure des vides non triviale

Invariant de Lorentz : $x_\mu x^\mu$

$$x^\mu = (x_0, \vec{x}) \quad x_\mu = (x_0, -\vec{x})$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\nabla \right)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2$$

(Indices répétés : Notation d'Einstein)

Principe d'Hamilton : chemin classique \leftrightarrow minimum d'action

① *Action* : $S[\phi] = \int dt(L[\phi]) = \int d^\mu x(\mathcal{L}[\phi])$

② $\min(S) \xRightarrow{\text{Exp. Taylor}}$ Premier ordre nul

$$\Rightarrow \text{Euler-Lagrange} : \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

③ *Théorie des champs* : $\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi (\partial^\mu \phi)^* - V$

Kink : cas de figure typique

Sous : $\phi \rightarrow -\phi$ (Z_2)

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

$$\phi_0 \rightarrow -\phi_0$$

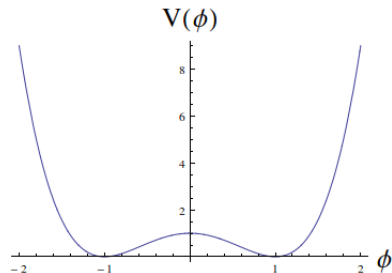
Théorie des champs :

→ Champ scalaire $\phi \in \mathbb{R}$

→ 1+1 dimensions

→ solutions statiques

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \frac{m^2}{\lambda})^2$$



Analogie mécanique classique

$$\mathcal{H}[\phi] = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi (\partial_\mu \phi)^* + V$$

Champ

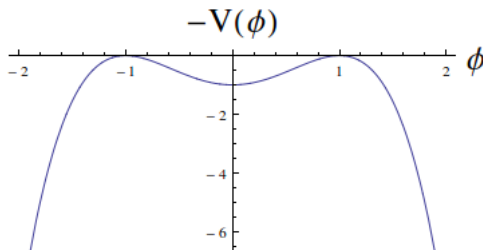
① $\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi)$

② $E_\phi = \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right]$

Particule

① $L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - U(q)$

② $S_q = \int dt \left[\frac{1}{2} \dot{q}^2 - U(q) \right]$



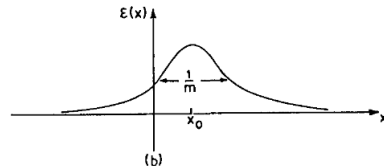
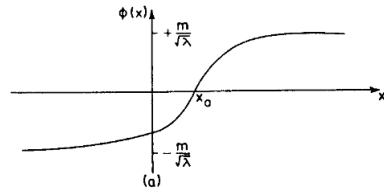
Kink

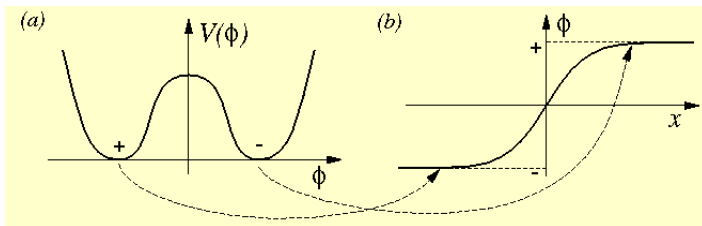
éq. du mouv. : non-linéaire + dispersif

$$\xRightarrow{\text{Euler-Lagrange}} \phi'' = \lambda \phi^3 - m^2 \phi$$

$$\phi(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]$$

$$\epsilon(x) = \frac{m^4}{\sqrt{2\lambda}} \operatorname{sech}^4 \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]$$





$\phi(x = \infty) - \phi(x = -\infty)$ conservé (charge topologique $Q = \int k_0 dx$)
→ Déformations continues impossibles
→ Secteurs topologiques non connectés

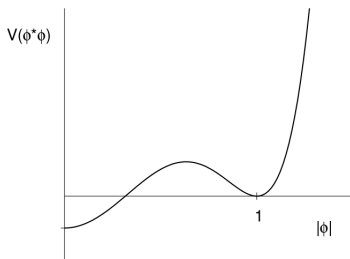
Configuration non triviale de vides → Solution non dissipative
(Continuité de la solution en x)

Retour - Cosmologie et solitons

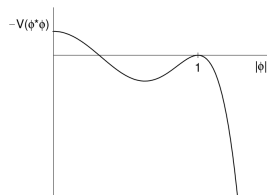
- ① Symétries brisées dans la nature (**MS**, ferroaimant)
- ① Structure non triviale des vides dans l'univers
→ défauts topologiques → solitons
- ② \Rightarrow Mur de domaine (sym. discrète 1 dim.)
 \Rightarrow Corde Cosmique (cylindrique)
 \Rightarrow Monopôle (sphérique)
- ③ Évolution de l'univers ?

Taux de désintégration du faux vide

Effet tunnel quantique



Espace Euclidien : $t \rightarrow i\tau$
Quantique Min. \rightarrow Classique
Euc.



$\rightarrow \min(S_E) \rightarrow$ Bounce,
Instanton

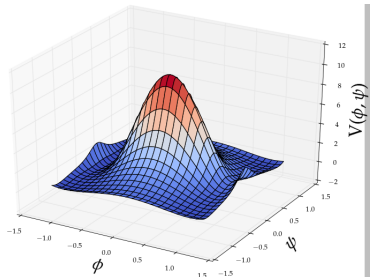
\rightarrow Intégrale de chemin :
 $T/V \approx e^{-S_0/\hbar}$

Fluctuation d'un soliton : autre source de désintégration !!!

Potentiel à deux champs $\phi(x, t)$ et $\psi(x, t)$

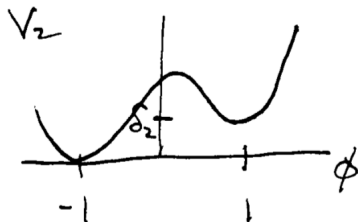
$$V(\phi, \psi) = (\psi^2 - \delta_1)(\psi^2 - 1)^2 + \frac{\alpha}{\psi^2 + \gamma} [(\phi^2 - 1)^2 - \frac{\delta_2}{4}(\phi - 2)(\phi + 1)^2]$$

- 1 1+1 dimensions, on cherche une solution statique
- 2 Paramètres : $\alpha, \gamma, \delta_1, \delta_2$
- 3 γ : couplage
- 4 α : Importance du 2ème terme





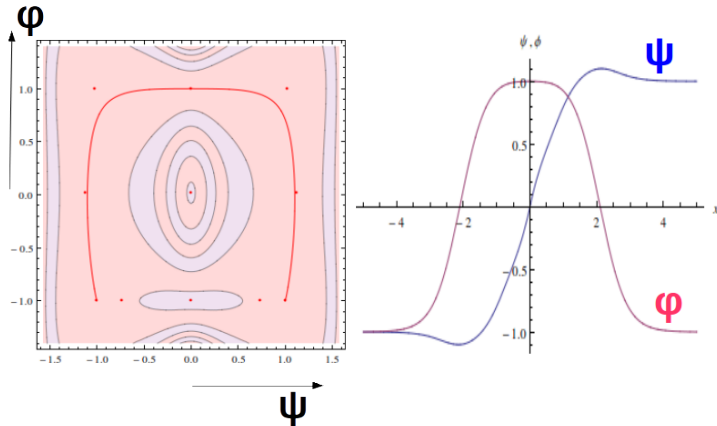
- ① $\delta_1 \rightarrow$ contrôle du minimum central
- ② Ordre 6, CLASSIQUE !



- ① $\delta_2 \rightarrow$ Contrôle de la séparation entre minimum sur l'axe ϕ

À venir...

Solutions aux équations de mouvements (contraintes à $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$)



Tester la stabilité de la solution

Trouver une borne maximale sur l'action \rightarrow borne minimale sur T

