离 散 数 学

西北工业大学

2023年5月22日星期一

代数系统

由于数学和其他科学的发展，人们需要对若干不是数的事物，用类似普通计算的方法进行相似的计算。如矩阵、向量等。研究代数系统的学科称为“近世代数”或“抽象代数”。

代数主要研究的是运算规则。一门代数， 其实都是从某种具体的运算体系中抽象出一些基本规则，建立一个公理体系，然后在这基础上进行研究。一个集合再加上一套运算规则，就构成一个代数结构.

代数系统内容

1. 代数系统与性质
2. 半群与群
3. 环与域
4. 格与布尔代数

Lect 11 代数系统

1 代数系统与子代数

2 运算性质与特殊元

3 同态与同构

11.1 本章学习要求

重点掌握

1

1 代数系统与子代数
2 二元运算律
3 特殊元
4 同态与同构

一般掌握

2

同类型代数系统

了解

3

同态与同构的应用

代数运算

- 称自然数集合N上的加法“+”为运算，这是因为给定两个自然数a，b，由加法“+”，可以得到唯一的自然数c = a + b。
- 加法“+”是映射吗？
- N上的加法运算“+”本质上是一个N×N→N的映射

定义11.2.1：设A，B，C是非空集合，从A×B到C的一个映射（或函数）$\circ$：A×B→C称为一个A×B到C的二元代数运算，简称二元运算。

代数运算

一个二元运算就是一个特殊的映射，该映射能够对 $a \in A$ 和 $b \in B$ 进行运算，得到C中的一个元c，即 $\circ(a, b) = c$

中缀方法表示为

$$a \circ b = c$$

例11.2.1

判别下面的映射或表是否是二元运算：

（1）设A = {0, 1}, B = {1, 2}, C = {奇, 偶}，定义映射*：A×B→C，其中

*（0, 1）= 奇， *（0, 2）= 偶，

*（1, 1）= 偶， *（1, 2）= 奇。

分析 “*”是一个A×B到C的映射，因此，按定义11.2.1，则“*”是一个A×B到C的运算。

例11.2.1（续）

（2）一架自动售货机，能接受五角和一元硬币，而所对应的商品是纯净水、矿泉水、橘子水，当人们投入上述硬币中的任何两枚时，自动售货机供应出相应的商品(右表)。

表

*	五角	一元
五角	纯净水	矿泉水
一元	矿泉水	橘子水

分析：设集合A = {五角，一元}，集合C = {纯净水，矿泉水，橘子水}，则表11.2.1实质上是$A\times A \to C$的映射，也就是$A\times A$到C的一个运算“*”。

解 (1)、(2)中定义的映射是二元运算。

运算表

•当集合A和B有限时，一个A×B到C的代数运算，可以借用一个表，称为运算表（乘法表 ）来说明。

•设“*”是A×B→C的运算，$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$，$B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$，则运算“*”可用下表说明。

运算表

*	b_1	b_2	…	b_m
a_1	$a_1 * b_1$	$a_1 * b_2$	…	$a_1 * b_m$
a_2	$a_2 * b_1$	$a_2 * b_2$	…	$a_2 * b_m$
…	…	…	…	…
a_n	$a_n * b_1$	$a_n * b_2$	…	$a_n * b_m$

定义11.2.2

设A_1，A_2，…，A_n，A是非空集合，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$到A的一个映射(或函数)$*$：$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\to A$称为一个$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$到A的**n元代数运算**，简称**n元运算**。当$n=1$时，称为**一元运算**。

代数运算：封闭性

定义11.2.3　如果“*”是A×A到A的二元运算，则称运算“*”对集合A是封闭的，或者称“*”是A上的二元运算。

定义11.2.4：设“*”是一个$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$到A的n元代数运算，如果$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$，则称代数运算“*”对集合A是封闭的，或者称是A上的n元代数运算。

说 明

一般通常用大写的英文字母表示集合，用符号“+”、“−”、“*”、“/”、“∩”、“∪”、“∧”、“∨”、“┐”、“★”、“☆”、“。”、“⊕”、“+”、“×”、“÷”等抽象的符号来表示一个抽象的运算。

定义11.2.5

设A是非空集合，$*_1$，$*_2$，…，$*_m$分别是定义在A上k_1，k_2，…，k_m元封闭运算，k_i是正整数，$i = 1, 2, \cdots, m$。称集合A和$*_1$，$*_2$，…，$*_m$所组成的系统称为**代数系统**，简称**代数**，记为$\langle A, *_1, *_2, \cdots, *_m \rangle$。

当A是有限集合时，该代数系统称为**有限代数系统**，否则称为**无限代数系统**

注意：判断集合A和其上的代数运算是否是代数系统，关键是判断两点：一是集合**A非空**，二是这些运算关于A是否满足**封闭性**。

例子

（1） R上的“+”、“×”运算；

解：构成一个代数系统〈R，+，×〉；

（2） p（S）上的“∩”、“∪”、“—”运算；

解：构成代数系统〈p(S), ∩, ∪, —〉，称集合代数；

（3） 含有n个命题变元的命题集合A与A上的“∧”、“∨”、“¬”运算；

解：构成代数系统〈A，∧，∨，¬〉，称之为命题代数。

同类型代数系统

定义11.2.6 设$<A, *_1, *_2, \cdots, *_m>$和$<B, \circ_1, \circ_2, \cdots, \circ_m>$是两个代数系统，若“$\circ_i$”和“$*_i$”都是$k_i$元运算，$i = 1, 2, \cdots, m$，则称这**两个代数同类型**。

如：代数系统〈Z，+〉，〈Z，×〉，〈R，+〉，〈p（S），∩〉，〈p（S），∪〉都是同类型的代数系统。

代数系统〈I，+，×〉、〈R，+，×〉、〈p（S），∩，∪〉都是同类型的代数系统。

子代数

定义11.2.7 设 $\langle A, *_1, *_2, \cdots, *_m\rangle$ 是代数系统，如果：

（1）$B \subseteq A$ 并且 $B \neq \varnothing$；

（2）$*_1, *_2, \cdots, *_m$ 都是B上的封闭运算。

则 $\langle B, *_1, *_2, \cdots, *_m\rangle$ 也是一个代数系统，称之为 $\langle A, *_1, *_2, \cdots, *_m\rangle$ 的子代数系统，简称子代数。又若 $B \subset A$，则称 $\langle B, *_1, *_2, \cdots, *_m\rangle$ 是 $\langle A, *_1, *_2, \cdots, *_m\rangle$ 的真子代数。

子代数

子代数是抽象代数学中一个非常重要的概念，通过研究子代数的结构和性质，可以得到原代数系统的某些重要性质。

如在群论中，通过研究子群可得群的某些性质。

注意：在后面章节中，将会学习半群、群、格、布尔代数等典型的代数系统。将子代数的概念应用到这些典型的代数系统，就会得到子半群、子群、子格、子布尔代数。因此，若没有必要，后面不再赘述某些典型代数系统中子代数的定义。

例11.2.4

在代数系统<Z, +>中，令

$$Q = \{5z \mid z \in Z\},$$

证明<Q, +>是<Z, +>的子代数。

分析 根据定义，只需证明两点：

（1）Q是非空子集；（2） “+”对集合Q封闭。

显然，集合Q非空。对任意的$5z_1$，$5z_2 \in Q$，有

$$5z_1 + 5z_2 = 5(z_1 + z_2) \in Q,$$

因此“+”对集合Q封闭。

证明 略。

11.3.1 二元运算律

例11.3.1 设“+”是定义在自然数集合N上的普通加法运算，试回忆N上的加法运算“+”满足哪些运算性质？

分析 对$\forall$ a，b，c$\in$N，有

(a + b) + c = a + (b + c)，即结合律成立；

a + b = b + a，即交换律成立；

$\forall$ a, x，y$\in$N，如果a + x = a + y，则x = y，即消去律成立；

0$\in$N，0 + 0 = 0，即0是幂等元，但其他自然数不是幂等元，即不满足幂等律。

结合律与交换律

定义11.3.1 设<A，*>是二元代数系统，如果对任意的a，b，c∈A，都有

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

则称“*”在A上是**可结合的**，或称满足**结合律**。

定义11.3.2 设<A，*>是二元代数系统，如果对任意的a，b∈A，都有

$$a*b=b*a$$

则称“*”在A上是**可交换**的，或称满足**交换律**。

消去律

定义11.3.3 设<A, *>是二元代数系统，元素$a \in A$，

（1）对任意$x, y \in A$，都有

如果$a * x = a * y$，那么$x = y$，

则称a在A中关于"*"是**左可消去元**；

（2）对任意$x, y \in A$，都有

如果$x * a = y * a$，那么$x = y$，

则称a在A中关于"*"是**右可消去元**；

消去律（续）

（3）如果a既是A左可消去元又是右可消去元，则称a是A的可消去元；

（4）若A中所有元素都是可消去元，则称“*”在A上可消去，或称“*”满足消去律。

幂等律

定义11.3.4 设<A, $*$>是二元代数系统，若元素$a\in A$，满足

$$a*a = a,$$

则称a是A中关于“$*$”的一个幂等元，简称a为幂等元。若A中的每一个元素都是幂等元，则称“$*$”在A中是幂等的，或称“$*$”满足幂等律。

幂等律

设“*”是集合A上的二元运算，$a \in A$，则$a*a \in A$，$a*a*a \in A$，…，由此，可以归纳定义a的正整数**幂方**：

$a^1 = a$，$a^2 = a*a$，$a^3 = a^2*a$，…$a^n = a^{n-1}*a$，…

对任意的正整数n，m，有以下等式：

$a^n * a^m = a^{n+m}$，　　$(a^n)^m = a^{nm}$。

分配律

定义11.3.5 ：设“*”、“∘”是集合S上的二元运算，<A，*，∘>是一个代数系统， 对$\forall a,b,c\in S$，有

（1）$a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c)$，

则称运算“∘”对“*”在S上满足左分配律(或第一分配律)；

（2）$(b*c)\circ a=(b\circ a)*(c\circ a)$，

则称运算“∘”对“*”在S 上满足右分配律(或第二分配律）；

（3）如果“∘”对“*”既满足左分配律又满足右分配律，则称∘”对“*”在S上满足分配律。

吸收律

定义11.3.6 设“*”、“∘”是集合A上的二元运算，<A，*，∘>是一个代数系统，如果对任意的x， y∈A，都有

$$x*(x\circ y)=x,$$

$$x\circ(x*y)=x,$$

则称“*”和“∘”满足吸收律

特殊元

在代数系统中，有些元素有特殊性质，叫特殊元 。

例如在代数系统<N，+>，其中N是自然数，“+”是普通加法，0∈ N ，并且对任意的自然数x∈ N ，有

$$x+0=x+0=x$$

幺元（单位元）

定义11.3.7 设<A, *>是二元代数系统，

（1）若存在$e \in A$，对任意$a \in A$，都有

$$a * e = e * a = a,$$

则称e是A中关于运算“*”的一个幺元（单位元）

（2）若存在$e_l \in A$，使得对任意$a \in A$，都有

$$e_l * a = a,$$

则称e_l是A中关于运算“*”的一个左幺元（左单位元）

（3）若存在$e_r \in A$，使得对任意$a \in A$，都有

$$a * e_r = a,$$

称e_r是A中关于运算“*”的一个右幺元（右单位元）

例11.3.5

下列代数系统是否存在幺元(左幺元或右幺元)，如果存在计算之。

（1）<R, + >，R是实数集，“+”是加法运算；

（2）$\langle R^+, +\rangle$，R^+是正实数集，“+”是加法运算；

（3）<P(A×A), o>，其中P (A×A)表示集合A上的所有二元关系集合，运算“o”表示关系的复合；

例11.3.5（续）

（4）< A, ∗, o, ∧>，其中A = {a, b, c}，二元运算“∗”，“o”，“∧”如表所示

表 12.3.2

∗	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	c	b	c

表 12.3.3

o	a	b	c
a	b	a	a
b	b	b	b
c	a	c	c

表 12.3.4

∧	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	a	c

结论

（1）计算幺元可根据定义直接进行，即首先假设幺元存在，并根据定义计算，然后进行验证。

（2）可以直接从运算表中看出运算是否有左幺元或右幺元。具体方法是：

① 如果元素x所在的行上的元素与行表头完全相同，则x是一个左幺元；

② 如果元素x所在的列上的元素与列表头完全相同，则x是一个右幺元；

③同时满足①和②。

零元

定义11.3.8 设<A, *>是一个二元代数系统，

（1）若存在$\theta \in A$，使得对任意$a \in A$，都有

$$a * \theta = \theta * a = \theta,$$

则称θ是A中关于运算“*”的一个零元；

（2）若存在$\theta_l \in A$，使得对任意$a \in A$，都有

$$\theta_l * a = \theta_l,$$

则称θ_l是A中关于运算“*”的一个左零元；

（3）若存在$\theta_r \in A$，使得对任意$a \in A$，都有

$$a * \theta_r = \theta_r,$$

则称θ_r是A中关于运算“*”的一个右零元。

逆元

定义11.3.9 设<A, $*$>是二元代数系统，e是幺元，$a \in A$，若存在一个元素$b \in A$，

（1）使得：$a * b = b * a = e$，

则称a可逆，并称b是a的一个逆元，记为a^{-1}；

（2）使得：$b*a = e$，

则称a左可逆，并称b是a的一个左逆元，记为a_l^{-1}；

（3）使得：$a * b = e$，

则称a右可逆，并称b是a的一个右逆元，记为a_r^{-1}。

定理11.3.1

设<A, *>是一个代数系统，“*” 满足结合律，$a \in A$，a可逆，则a是可消去元。

证明 记幺元为e，a的逆元为a^{-1}，设x、y是A中的任意元素，假设

$$a * x = a * y。$$

由$a * x = a * y$，有

$$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * (a * y),$$

又结合律成立，所以有

$$(a^{-1} * a) * x = (a^{-1} * a) * y,$$

即$e * x = e * y$，可得

$$x = y$$

定理11.3.2

设<A, *>是二元代数系统，

（1）如果<A, *>存在幺元，则幺元唯一；

（2）如果<A, *>存在幺元，则该幺元一定是左、右幺元；

（3）如果<A, *>存在左、右幺元，则左、右幺元相等，即是幺元。

定理11.3.3

设<A,∗ >是二元代数系统,

（1）如果<A, ∗>存在零元，则零元唯一；

（2）如果<A, ∗>存在零元，则该零元一定是左、右零元；

（3）如果<A, ∗>存在左、右零元，且该左、右零元相等，则是零元。

分析　该定理的证明方法与定理11.3.2证明相似。

证明　略。

定理11.3.4

设<A, *>是二元代数系统，“*”满足结合律且设e是幺元，则对任意的$a \in A$，

（1）如果a存在逆元，则逆元唯一；

（2）如果a存在逆元，则该逆元一定是左、右逆元；

（3）如果a存在左、右逆元，且该左、右逆元相等，则是逆元。

分析　该定理的证明方法与定理11.3.2证明相似

推论11.3.1

设<A, *>是二元代数系统，“*”满足结合律，a, b∈A,

（1）如果a，b分别有逆元a^{-1}，b^{-1}，则$(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$；

（2）如果a是左（右）可逆的元素，则a是左（右）可消去的元素；

（3）如果a是可逆的元素，则a是可消去的元素。

例11.3.7

设$G = \{f_{a,b}(x) = ax+b \mid a \neq 0, a, b \in R\}$，其中R是实数，“$\circ$”是G上关于函数的复合运算 。

（1）验证<G, $\circ$>是代数系统；

（2）如有幺元计算之；

（3）如有零元计算之；

（4）如有幂等元，计算出这些幂等元；

（5）说明G中的那些元有逆元，并计算这些元的逆元。

例11.3.7（续）：封闭性

分析 （1）要说明<G，o>是代数系统，只需要说明“o”对G封闭，即说明对任意$f_{a,b}$，$f_{c,d}\in G$，

$$f_{a,b}\circ f_{c,d}\in G,$$

又 $(f_{a,b}\circ f_{c,d})(x) = f_{c,d}(f_{a,b}(x))$

$= f_{c,d}(ax+b) = c(ax+b)+d$

$= cax+bc+d = f_{ca,bc+d}(x)$，即

$$f_{a,b}\circ f_{c,d} = f_{ca,bc+d},$$

显然$ca \neq 0$，故

$$f_{ca,bc+d}\in G,$$

所以“o”对G是封闭的，即〈G，o〉是代数系统。

例11.3.7（续）：幺元

（2）不妨假设幺元是$f_{c,d}\in G$，则对$\forall f_{a,b}\in G$，有

$$f_{a,b}\circ f_{c,d} = f_{a,b}，又$$

$$f_{a,b}\circ f_{c,d} = f_{ca,bc+d}，则$$

$$f_{a,b} = f_{ca,bc+d}，$$

因此，$\forall x\in R$，有

$$f_{a,b}(x) = ax+b = f_{ca,bc+d}(x) = cax+bc+d，$$

特别取$x = 0$，$x = 1$，可得

$$bc+d = b，ca = a。$$

由于$f_{a,b}$是G中的任意元，取$a = 1$，$b = 2$，可得

$$c = 1，d = 0。$$

例11.3.7（续）：幺元

上面的分析说明，如果<G，o>有幺元，则此幺元必是$f_{1,0}$，所以需进一步验证$f_{1,0}$就是幺元。

即对任意的$f_{a,b}\in G$，验证等式

$$f_{a,b} \circ f_{1,0} = f_{1,0} \circ f_{a,b} = f_{a,b}$$

显然此等式成立，所以$f_{1,0}$是幺元。

例11.3.7（续）：零元

（3）按同样的思路，不妨假设零元是$f_{c,d}\in G$，由零元的定义，$\forall f_{a,b}\in G$，有

$$f_{a,b}\circ f_{c,d} = f_{c,d},$$

$f_{a,b}\circ f_{c,d}(x) = cax+bc+d = f_{c,d}(x) = cx+d$，

取$x = 0$，有 $bc = 0$，

又$f_{a,b}$是任意的，取$b = 1$，可得

$$c = 0,$$

又$f_{c,d}\in G$，则$c \neq 0$，矛盾，故$f_{c,d}$是零元不成立，故代数系统$\langle G, \circ\rangle$没有零元。

例11.3.7（续）：幂等元

（4）不妨假设幂等元是$f_{c,d} \in G$，有

$$f_{c,d} \circ f_{c,d} = f_{c,d},$$

$$f_{c,d} \circ f_{c,d}(x) = c^2x+cd+d = f_{c,d}(x) = cx+d,$$

取$x = 0$，有$cd = 0$，又$c \neq 0$，则

$$d = 0,$$

取$x = 1$，有$c^2+cd+d = c+d$，又$d = 0$，$c \neq 0$，则

$$c = 1。因此，$$

$$f_{c,d} = f_{1,0}，又$$

$f_{1,0} \circ f_{1,0} = f_{1,0}$，所以$f_{1,0}$是唯一幂等元。

例11.3.7（续）：逆元

（5）对$\forall f_{a,b}\in G$，不妨假设它的逆元为$f_{c,d}$，当然$f_{c,d}\in G$，有

$$f_{a,b}\circ f_{c,d} = f_{1,0},$$

$$f_{a,b}\circ f_{c,d}(x) = cax+bc+d = f_{1,0}(x) = x,$$

特别取$x = 0$，$x = 1$，可得

$$bc+d = 0,\ ca = 1,$$

因为$a\neq 0$，显然$c = 1/a$，$d = -b/a$，故

$$f_{c,d} = f_{1/a,\,-b/a},$$

例11.3.7（续）：逆元

同理，上面分析说明，如果$f_{a, b}$有逆元，则此逆元是$f_{1/a, -b/a}$，因此还需验证$f_{1/a, -b/a}$是$f_{a, b}$逆元，即验证等式

$$f_{a, b} \circ f_{1/a, -b/a} = f_{1/a, -b/a} \circ f_{a, b} = f_{1,0},$$

显然此等式成立，所以$f_{1/a, -b/a}$是$f_{a, b}$的逆元。

由$f_{a, b}$的任意性，可得G中的任何一个元都有逆元。

结论

（1）<G, o>是代数系统；

（2）幺元是$f_{1,0}$；

（3）<G, o>中没有零元；

（4）<G, o>中唯一幂等元是$f_{1,0}$；

（5）<

计算幺元、零元、幂等元、逆元等特殊元时，首先可以假设这些元存在，然后根据定义直接得到方程，解这个方程就可以计算出这些元，如果方程无解，则特殊元不存在，如果方程存在解，则根据特殊元的定义还需要进一步验证所求解是否是对应的特殊元。

11.4 同态与同构

在现实社会中，存在着很多代数系统，但仔细分析这些众多的代数系统发现，有些代数系统，他们之间表面上似乎不相同，但他们实际上 “相同” 。

如有两个代数系统<{奇，偶}，*>和<{正，负}，∘>，其运算“*”和“∘”分别定义如下表

表 12.4.1

*	奇	偶
奇	奇	偶
偶	偶	偶

表 12.4.2

∘	正	负
正	正	负
负	负	负

定义11.4.1

设<A, ∗>和<B, o>为两个二元代数系统，ψ是A到B的映射。对任意x, y∈A，都有

$$\psi(x*y) = \psi(x) \circ \psi(y), \qquad (1)$$

则称ψ是从<A, ∗>到<B, o>的**同态映射**，称ψ(A)为**同态象**，其中ψ(A) = {ψ(x) | x∈A}。

如果存在一个从<A, ∗>到<B, o >的同态映射，则称<A, ∗>与<B, o >**同态**，记为<A, ∗>∽<B, o >。

当A = B时，称其同态为**自同态**。

定义11.4.1（续）

当同态映射ψ分别是单射、满射、双射时，分别称ψ是**单一同态映射**、**满同态映射**、**同构映射**。

如果存在一个从<A, ∗>到<B, ο >的同构映射（单一同态映射、满同态映射），则称代数系统<A, ∗>与<B, ο >**同构**（**单一同态**、**满同态**）。

用<A, ∗>≌<B, ο >表示<A, ∗>与<B, ο >**同构**。

同态与同构

同态与同构是代数系统中一个非常重要的概念，它体现了两个代数系统之间的某种联系，后面章节将会学习半群、群、格、布尔代数等典型的代数系统，那么将同态与同构的概念应用到这些典型的代数系

■注意，后面章节中半群、群、格、布尔代数的同态与同态本质上就是把半群、群、格、布尔代数看作一般代数系统的同态与同构，即定义11.4.1。因此，后面不再赘述半群、群、格、布尔代数中同态与同构的定义。

例11.4.1

设代数系统<Z, +>和<E, +>中，Z、E分别是整数集和偶数集，“+”是加法，证明<Z, +>$\cong$<E, +>。

分析 证明两个代数系统同构，关键是找出同构映射。假设f是<Z, +>到<E, +>的同构映射，根据同构映射的定义，有

$\forall x, y \in Z$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

特别取$x = 0, y = 0$，有

$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$，可得$f(0) = 0$。

例11.4.1（续）

$\forall n \in Z$，$f(n) = f(n-1+1) = f(n-1) + f(1)$，

可得递推公式如下：

$$f(n) = f(n-1) + f(1),$$

如果$f(1) > 0$，则$f(n)$是递增函数，

$$0 = f(0) < f(1) < f(2),$$

而f又是Z到E的双射，因此此时必有

$$f(1) = 2,$$

同理，如果$f(1) < 0$，可得 $f(1) = -2$。

根据以上分析可知，

$$\forall n \in Z,\ f(n) = 2n \text{或} f(n) = -2n,$$

例11.4.1（续）

以上说明，如果f是同构映射，则

$$f(n) = 2n \text{或} f(n) = -2n,$$

因此需进一步验证$f(n) = 2n$或$f(n) = -2n$是否是同构映射。

证明 $\forall n \in Z$，令$f(n) = 2n$，则显然f是Z到E的双射，又对$\forall x, y \in Z$，有

■结论 证明两个代数系统的同态与同构关键是构造出同态与同构映射，构造同态与同构映射没有一个通用的方法，但一般思路如下：首先可以假设f就是同态或同构映射，然后利用同态与同构的定义，导出f的一些性质，并利用这些性质来构造同态与同构映射。

定理11.4.1

设ψ是<A, ∗>到<B, ο >的同态映射，那么<ψ(A), ο >是<B，ο>的子代数。

分析 需证ψ(A) 非空，且运算“ο”对ψ(A)封闭。

证明 由于A非空，所以显然ψ(A)为B的非空子集。

对任意x, y∈ψ(A)，存在a, b∈A，使得

$$\psi(a) = x,\ \psi(b) = y,\ 有$$

$$x \circ y = \psi(a) \circ \psi(b) = \psi(a * b),$$

因为a ∗ b∈A，所以ψ(a ∗ b) ∈ψ(A)，即

$$x \circ y \in \psi(A),$$

故“ο” ψ(A)对封闭，得证。

定理11.4.2

设ψ是二元代数系统<A, ∗>到<B, o>的满同态，则：

（1）若“∗”可交换，则“o”也可交换；

（2）若“∗”可结合，则“o”也可结合；

（3）若e是<A, ∗>的幺元，则ψ(e)是<B, o>的幺元；

（4）若θ是<A, ∗>的零元，则ψ(θ)是<B, o>的零元；

定理11.4.2（续）

（5）若a是<A，*>的幂等元，则ψ(a)是<B，o>的幂等元；

（6）若x^{-1}是x在<A，*>中的逆元，则ψ(x^{-1})是ψ(x)在<B，o>中的逆元；

（7）若a是<A，*>的（左、右）可消去元，则ψ(a)是<B，o>的（左、右）可消去元。

同构关系

令P = {x| x是代数系统}，≌ = {<x, y> | x, y∈P,且x与y同构}，则很容易证明≌是P上等价关系，由该等价关系可以得到等价类，在同一个等价类的两个代数系统同构，它们在同构的意义下可以看作是相同的代数系统，具有完成相同的代数性质。称“≌”为同构关系。