

离散数学



西北工业大学

2023年4月12日 星期三

6.0 Outline

- 1 Equivalence Relations
- 2 Quasi order 拟序关系
- 3 Partial order 偏序关系
- 4 Total order 全序关系
- 4 Well order 良序关系

6.1 本章学习要求



判定下列关系具有哪些性质

- 1、在全体中国人所组成的集合上定义的“同姓”关系；
- 2、对任何非空集合A，A上的全关系；
- 3、三角形的“相似关系”、“全等关系”；
- 4、直线的“平行关系”；
- 5、“朋友”关系；

等价
关系

解：1，2，3都具有自反性，对称性和传递性；
4 具有反自反，对称和传递性，不具有自反性；
5 具有自反和对称性，不具有传递性。

6.2 Equivalence Relations

定义6.2.1 设 R 是定义在非空集合 A 上的关系，如果 R 是**自反的、对称的、传递的**，则称 R 为 A 上的**等价关系**。

由定义6.2.1知：

- (1) **关系 R 是等价关系**当且仅当 R **同时具备自反性、对称性和传递性**；
- (2) **关系 R 不是等价关系**当且仅当 R **不具备自反性或对称性或传递性**。

例6. 2. 1

判定下列关系是否是等价关系？

1. 幂集上定义的“ \subseteq ”关系,不具有对称性
2. 整数集上定义的“ $<$ ”关系,不具有对称性, 自反性
3. 全体中国人所组成的集合上定义的“同性别”关系。 是等价关系

例6. 2. 2

在时钟集合 $A = \{1, \dots, 24\}$ 上定义整除关系： $R = \{ \langle x, y \rangle \mid \{x, y \in A\} \wedge ((x-y) \text{ 被 } 12 \text{ 所整除}) \}$ 。

- (1) 写出 R 中的所有元素；
- (2) 画出 R 的关系图；
- (3) 证明 R 是一个等价关系。

例6.2.2 解

(1) $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \dots, \langle 24, 24 \rangle, \langle 1, 13 \rangle, \langle 13, 1 \rangle, \langle 2, 14 \rangle, \langle 14, 2 \rangle, \dots, \langle 11, 23 \rangle, \langle 23, 11 \rangle, \langle 12, 24 \rangle, \langle 24, 12 \rangle \}$

(2) 此等价关系的关系图：

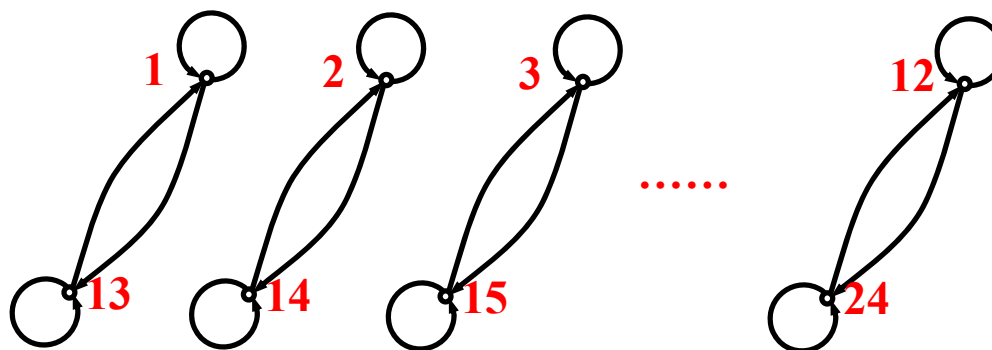


图6.2.1

例6.2.2 解 (续)

- 1、对 $\forall x \in A$, 有 $(x-x)$ 被12所整除, 所以 $\langle x, x \rangle \in R$, 即 R 是自反的。
- 2、对 $\forall x, y \in A$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 有 $(x-y)$ 被12整除, 则 $(y-x) = -(x-y)$ 被12整除, 所以, $\langle y, x \rangle \in R$, 即 R 是对称的。
- 3、对 $\forall x, y, z \in A$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, z \rangle \in R$, 有 $(x-y)$ 被12所整除且 $(y-z)$ 被12所整除, 所以 $(x-z) = (x-y) + (y-z)$ 被12所整除, 所以, $\langle x, z \rangle \in R$, 即 R 是传递的。

由1, 2, 3知 R 是等价关系。■

从例6.2.2可以看出

关系R将集合A分成了如下的12个子集：

$\{1, 13\}, \{2, 14\}, \{3, 15\}, \{4, 16\}, \{5, 17\},$
 $\{6, 18\}, \{7, 19\}, \{8, 20\}, \{9, 21\}, \{10, 22\},$
 $\{11, 23\}, \{12, 24\}。$

这12个A的子集具有如下特点：

- 1、在同一个子集中的元素之间都有关系R；
- 2、不同子集的元素之间无关系R。

例6.2.3 定义整数集合 Z 上的模 N 运算为 R , 证明 R 为 Z 上的等价关系

证明 (1) 对 $\forall x \in Z$, 有 $n \mid (x-x)$, 所以 $\langle x, x \rangle \in R$,
即 R 是自反的。

(2) 对 $\forall x, y \in Z$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 即 $n \mid (x-y)$, 所以
 $m \mid (y-x)$, 所以, $\langle y, x \rangle \in R$, 即 R 是对称的。

(3) 对 $\forall x, y, z \in Z$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, z \rangle \in R$, 有
 $n \mid (x-y)$ 且 $n \mid (y-z)$, 所以由 $(x-z) = (x-y) + (y-z)$
得 $n \mid (x-z)$,

所以, $\langle x, z \rangle \in R$, 即 R 是传递的。

由(1)、(2)、(3)知, R 是 Z 上的等价关系。 ■

以n为模的同余关系 (Congruence Relation)

上述R称为Z上**以n为模的同余关系**，记 xRy 为

$$x = y \pmod{n}$$

称为**同余式**。如用 $\text{res}_n(x)$ 表示x除以n的余数，则

$$x = y \pmod{n} \Leftrightarrow \text{res}_n(x) = \text{res}_n(y)。$$

此时，R将Z分成了如下n个子集：

$$\{ \dots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots \}$$

$$\{ \dots, -3n+1, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, \dots \}$$

$$\{ \dots, -3n+2, -2n+2, -n+2, 2, n+2, 2n+2, 3n+2, \dots \}$$

...

$$\{ \dots, -2n-1, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, 4n-1, \dots \}$$

说明

同样地，这 n 个 Z 的子集具有如下特点：

- 1、在同一个子集中的元素之间都有关系 R ；
- 2、不同子集的元素之间没有关系 R ；
- 3、不同子集的交集是空集；
- 4、所有这些子集的并集就构成集合 Z 。



称为集合
 Z 的一个
划分

6.2.2 集合的划分

定义6.2.2 给定非空集合A，设有集合

$S=\{S_1, S_2, S_3 \dots S_m\}$. 如果满足

- $S_i \subseteq A$ 且 $S_i \neq \Phi$, $i=1, 2, \dots, m$;
- $S_i \cap S_j = \Phi$, $i \neq j$, $i, j=1, 2, \dots, m$;
- $\bigcup_{i=1}^m S_i = A$ 。

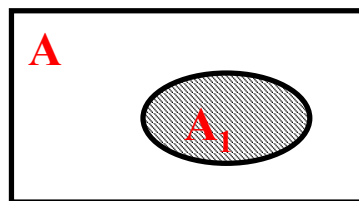
则集合S称作集合A的一个**划分** (Partition)，而 S_1, S_2, \dots, S_m 叫做这个划分的**块** (Block) 或**类** (Class)。

例6.2.4

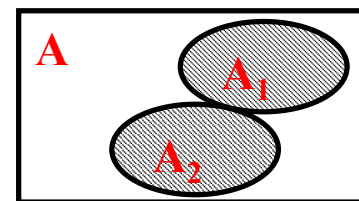
试给出非空集合A上2个不同的划分

解 (1) 在A中设定一个非空子集 A_1 ，令 $A_2 = A - A_1$ ，则根据集合划分的定义， $\{A_1, A_2\}$ 就构成了集合A的一个划分，见图 (a)；

(2) 在A中设定两个不相交非空子集 A_1 和 A_2 ，令 $A_3 = A - (A_1 \cup A_2)$ ，则根据集合划分的定义， $\{A_1, A_2, A_3\}$ 就构成了集合A的一个划分，见图 (b)。



(a)



(b)

例6.2.5

设 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$,

- 1、写出 R 是 A 上的以4为模的同余关系 R 的所有元素;
- 2、求分别与元素1, 2, 3, 4有关系 R 的所有元素所作成的集合。

解: 1、 $R = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \langle 9, 9 \rangle, \langle 0, 4 \rangle, \langle 4, 0 \rangle, \langle 4, 8 \rangle, \langle 8, 4 \rangle, \langle 0, 8 \rangle, \langle 8, 0 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 1, 9 \rangle, \langle 9, 1 \rangle, \langle 5, 9 \rangle, \langle 9, 5 \rangle \}$.

显然, R 是 A 的一个等价关系。

例6.2.5 解

2、与元素1有关系R的所有元素所作成的集合 $\{1, 5, 9\}$;

与元素2有关系R的所有元素所作成的集合 $\{2\}$;

与元素4有关系R的所有元素所作成的集合 $\{0, 4, 8\}$.

集合 $\{1, 5, 9\}$ 称为元素1关于等价关系R的等价类,
记为 $[1]_R$, 即 $[1]_R = \{1, 5, 9\}$;

$[2]_R = \{2\}$, $[4]_R = \{0, 4, 8\}$.

6.2.3 等价类与商集

定义6.2.3 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，对任意 $x \in A$ ，称集合

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R\}$$

为 x 关于 R 的**等价类** (equivalence class)，或叫作由 x 生成的一个 R 等价类，其中 x 称为 $[x]_R$ 的**生成元** (或叫**代表元**，或**典型元**) (generator)。

由定义6.2.3可以看出：

- (1) 等价类产生的前提是A上的关系R必须是等价关系；
- (2) A中所有与x有关系R的元素y构成了 $[x]_R$ ；
- (3) A中任意一个元素一定对应一个由它生成的等价类；
- (4) R具有自反性意味着对 $\forall x \in A$, $[x]_R \neq \Phi$ ；
- (5) R具有对称性意味着对任意x, $y \in A$, 若有 $y \in [x]_R$, 则一定有 $x \in [y]_R$ 。

例6.2.5(续)

设 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ ， R 是 A 上的以4为模的同余关系。求

(1) R 的所有等价类； (2) 画出 R 的关系图。

解：(1) $[1]_R = \{1, 5, 9\} = [5]_R = [9]_R$ ； $[2]_R = \{2\}$ ；
 $[4]_R = \{0, 4, 8\} = [0]_R = [8]_R$ 。

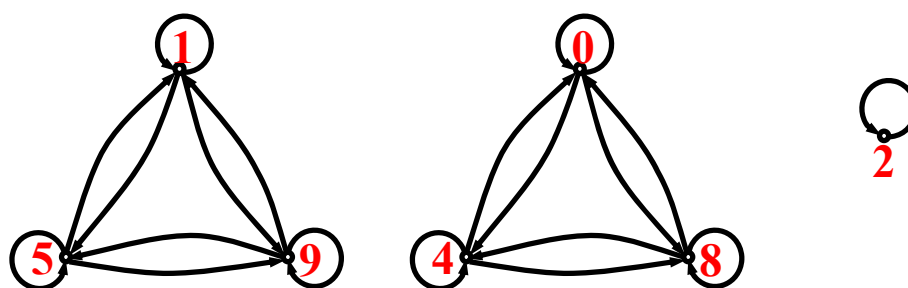


图6.2.3

定理6.2.1

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则有下面的结论成立：

1) 对 $\forall x \in A$, $[x]_R \neq \Phi$;

2) 对 $\forall x, y \in A$,

a) 如果 $y \in [x]_R$, 则有 $[x]_R = [y]_R$,

b) 如果 $y \notin [x]_R$, 则有 $[x]_R \cap [y]_R = \Phi$ 。

3) $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$;

定理6.2.1的证明

证明：1) 对任意 $x \in A$ ，因为 R 是等价关系，所以 R 是自反的，因此 $\langle x, x \rangle \in R$ ，即 $x \in [x]_R$ ，故 $[x]_R \neq \Phi$ 。

2) 对任意 $x, y \in A$ ，若 $y \in [x]_R$ ，则 $\langle x, y \rangle \in R$ 。

a) 对 $\forall z \in [x]_R$ ，则有： $\langle x, z \rangle \in R$ ，又 $\langle x, y \rangle \in R$ ，由 R 的对称性有： $\langle y, x \rangle \in R$ ，由 R 的传递性有： $\langle y, z \rangle \in R$ 。所以 $z \in [y]_R$ ，即： $[x]_R \subseteq [y]_R$ 。

定理6.2.1的证明

证明：1) 对任意 $x \in A$ ，因为 R 是等价关系，所以 R 是自反的，因此 $\langle x, x \rangle \in R$ ，即 $x \in [x]_R$ ，故 $[x]_R \neq \Phi$ 。

2) 对任意 $x, y \in A$ ，若 $y \in [x]_R$ ，则 $\langle x, y \rangle \in R$ 。

b) 对 $\forall z \in [y]_R$ ，则有： $\langle y, z \rangle \in R$ ，又 $\langle x, y \rangle \in R$ ，由 R 的传递性有： $\langle x, z \rangle \in R$ 。所以， $z \in [x]_R$ ，即： $[y]_R \subseteq [x]_R$ 。

所以，由a)和b)知： $[x]_R = [y]_R$ 。

定理6.2.1的证明（续）

(2) 若 $y \notin [x]_R$, 设 $[x]_R \cap [y]_R \neq \Phi$, 则存在 $z \in [x]_R \cap [y]_R$ 。
即 $z \in [x]_R$, $z \in [y]_R$, 则有: $\langle x, z \rangle \in R$, $\langle y, z \rangle \in R$, 由 R 的
对称性, $\langle z, y \rangle \in R$ 。由 R 的传递性有: $\langle x, y \rangle \in R$, 即
 $y \in [x]_R$, 矛盾。所以 $[x]_R \cap [y]_R = \Phi$ 。■

3) 因为对任意 $x \in A$, $[x]_R \subseteq A$, 所以 $\bigcup_{x \in A} [x]_R \subseteq A$ 。

对任意 $x \in A$, 因 R 是自反的, 所以 $\langle x, x \rangle \in R$, 即 $x \in [x]_R$ 。

所以 $x \in \bigcup_{x \in A} [x]_R$, 即 $A \subseteq \bigcup_{x \in A} [x]_R$ 。故 $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$ 。

商 集

定义6.2.4 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，由 R 确定的一切等价类的集合，称为集合 A 上关于 R 的商集(QuotientSet)，记为 A/R ，即

$$A/R = \{[x]_R \mid (x \in A)\}$$

例6.2.6 设集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ ， R 为 A 上以4为模的同余关系。求 A/R 。

解 根据例6.2.5，商集

$$A/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\} = \{\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}, \{2\}\}。$$

例6. 2. 7

设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ ， R 为 A 上以3为模的同余关系。求 A/R 。

解 根据例6. 2. 3知， A 上以3为模的同余关系 R 是等价关系。

因为 $[1]_R = \{1, 4\} = [4]_R$ ， $[2]_R = [5]_R = [8]_R = \{2, 5, 8\}$ ，

$[3]_R = \{3\}$ ，

所以根据商集的定义， $A/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\} = \{\{1, 4\}, \{2, 5, 8\}, \{3\}\}$ 。

计算商集 A/R 的通用过程：

- (1) 任选 A 中一个元素 a ，计算 $[a]_R$ ；
 - (2) 如果 $[a]_R \neq A$ ，任选一个元素 $b \in A - [a]_R$ ，计算 $[b]_R$ ；
 - (3) 如果 $[a]_R \cup [b]_R \neq A$ ，任选一个元素 $c \in A - [a]_R - [b]_R$ ，计算 $[c]_R$ ；
- 以此类推，直到 A 中所有元素都包含在计算出的等价类中。

6.2.4 等价关系与划分

定理6.2.2 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则 A 对 R 的商集 A/R 是 A 的一个划分，称之为由 R 所导出的等价划分。

定理6.2.3 给定集合 A 的一个划分

$\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ，则由该划分确定的关系

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \dots \cup (A_n \times A_n)$$

是 A 上的等价关系。我们称该关系 R 为由划分 Π 所导出的等价关系。

定理6. 2. 3的证明

证明 1) R 是自反的

对 $\forall x \in A$, 因为 $\Pi(A)$ 是 A 的一个划分, 所以存在一个划分块 $A_i \in \Pi(A)$, 使得 $x \in A_i$, 显然 x 和 x 同属于 $\Pi(A)$ 的一个划分块 A_i , 故 $\langle x, x \rangle \in R$, 所以 R 是自反的。

2) R 是对称的

对 $\forall x, y \in A$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 则 x 和 y 同属于 $\Pi(A)$ 的一个划分块 A_i , 因此 y 和 x 同属于 $\Pi(A)$ 的一个划分块 A_i , 故 $\langle y, x \rangle \in R$, 所以 R 是对称的。

定理6.2.3的证明(续)

3) R 是传递的

对 $\forall x, y, z \in A$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, z \rangle \in R$, 则 x 和 y 同属于 $\Pi(A)$ 的一个划分块 A_i , y 和 z 同属于 $\Pi(A)$ 的一个划分块 A_j , 因此 $y \in A_i \cap A_j$, 由于不同的划分块交为空, 所以 $A_i = A_j$, 因此 x 和 z 同属于 $\Pi(A)$ 的一个划分块 A_i , 即 $\langle x, z \rangle \in R$, 所以 R 是传递的。

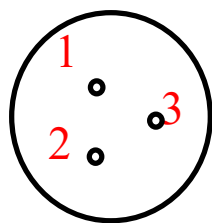
综上, 由1)、2)、3)知, R 是 A 上的等价关系。

说明: 集合 A 上的等价关系和 A 的划分是一一对应的。

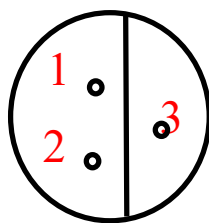
例6.2.8

设 $A = \{1, 2, 3\}$ ，求 A 上所有的等价关系及其对应的商集。

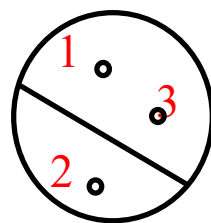
解 只有1个划分块的划分为 S_1 ，见图(a)；具有2个划分块的划分为 S_2 、 S_3 和 S_4 ，见图(b)、(c)和(d)，具有3个划分块的划分为 S_5 ，见图(e)。



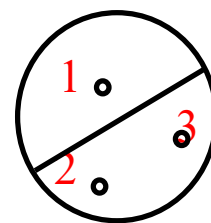
(a)



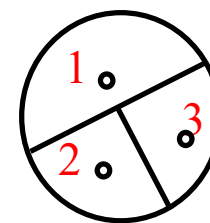
(b)



(c)



(d)



(e)

例6.2.8(续)

假设由 S_i 导出的对应等价关系为 R_i , $i=1, 2, 3, 4, 5$, 则有

$$R_1 = S_1 \times S_1 = A \times A, \quad A/R_1 = \{\{1, 2, 3\}\};$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \{1, 2\} \times \{1, 2\} \cup \{3\} \times \{3\} \\ &= \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}, \end{aligned}$$

$$A/R_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\};$$

$$\begin{aligned} R_3 &= \{1, 3\} \times \{1, 3\} \cup \{2\} \times \{2\} \\ &= \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}, \end{aligned}$$

$$A/R_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\};$$

例6. 2. 8 (续)

$$R_4 = \{2, 3\} \times \{2, 3\} \cup \{1\} \times \{1\}$$
$$= \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\},$$

$$A/R_4 = \{\{1\}, \{2, 3\}\};$$

$$R_5 = \{1\} \times \{1\} \cup \{2\} \times \{2\} \cup \{3\} \times \{3\}$$
$$= \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\} = I_A,$$

$$A/R_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

例6. 2. 9

设 R 是 A 上的自反和传递关系， S 也是 A 上的关系，且满足： $\langle x, y \rangle \in S \iff (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R)$

证明 S 是 A 上的等价关系。

证明 (1) S 是自反的：

对任意 $a \in A$ ，因 R 是自反的，所以 $\langle a, a \rangle \in R$ ，由 $\langle a, a \rangle \in R$ 并且 $\langle a, a \rangle \in R$ ，得 $\langle a, a \rangle \in S$ ，

即 S 是自反的。

例6.2.9 (续)

(2) S 是对称的:

对 $\forall a, b \in A$, 若 $\langle a, b \rangle \in S$, 则由题上定义可得
 $\langle a, b \rangle \in R$ 并且 $\langle b, a \rangle \in R$, 即有 $\langle b, a \rangle \in R$ 并且
 $\langle a, b \rangle \in R$, 所以有 $\langle b, a \rangle \in S$, 即 S 是对称的。

例6.2.9 (续)

(3) S 是传递的:

对 $\forall a, b, c \in A$, 若 $\langle a, b \rangle \in S$, $\langle b, c \rangle \in S$, 则由题上定义可知 $\langle a, b \rangle \in R$ 且 $\langle b, a \rangle \in R$ 和 $\langle b, c \rangle \in R$ 且 $\langle c, b \rangle \in R$ 。

因为 R 是传递的, 所以有 $\langle a, c \rangle \in R$ 和 $\langle c, a \rangle \in R$ 。从而,
 $\langle a, c \rangle \in S$, 即 S 是传递的。

由(1), (2)和(3)知, S 是 A 上的一个等价关系。

例6. 2. 10

设 R 是集合 A 上的一个关系.

对 $\forall a, b, c \in A$, 若 $\langle a, b \rangle \in R$ 并且 $\langle a, c \rangle \in R$, 则有 $\langle b, c \rangle \in R$, 则 R 称为 A 上的循环关系。

试证明 R 是 A 上的一个等价关系的充要条件是 R 是循环关系和自反关系。

6.2.6 等价关系的应用

例6.2.11 在下图中，点*i*和*j*之间有路当且仅当从结点*i*通过图中的边能够到达结点*j*。规定对任意结点*i*，*i*和*i*之间一定有路。定义*R*如下：

$$\langle i, j \rangle \in R \Leftrightarrow i \text{ 和 } j \text{ 之间有路。}$$

试说明该关系*R*是否可以
给定结点集 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 一个划分？如果能，
请给出具体的划分。

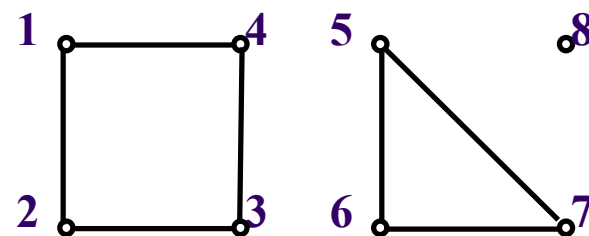


图6.2.5

例6.2.11 解

(1) 由于规定任意结点*i*与他自身之间一定有路，因此 $\langle i, i \rangle \in R$ ，即**R具有自反性**；

(2) 若 $\langle i, j \rangle \in R$ ，则两个结点*i*和*j*之间存在路，当然也存在*j*和*i*之间的路，所以 $\langle j, i \rangle \in R$ ，即**R具有对称性**；

(3) 若 $\langle i, j \rangle \in R, \langle j, k \rangle \in R$ ，则结点*i*和*j*之间有路，*j*和*k*之间也有路，从而*i*到*k*之间存在经过*j*的路，即有 $\langle i, k \rangle \in R$ ，因此得到**R具有传递性**。

由(1)、(2)和(3)知，**R是等价关系**。

例6. 2. 11 解(续)

于是所有不同的等价类为： $[1]_R = \{1, 2, 3, 4\}$ ，
 $[5]_R = \{5, 6, 7\}$ ， $[8]_R = \{8\}$ 。

根据定理6. 2. 2知，

$A/R = \{[1]_R, [5]_R, [8]_R\} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}, \{8\}\}$
就是A的一个划分。

例6. 2. 12

信息检索系统中的信息有{离散数学，高等数学，计算机操作系统，计算机网络，数据结构，编译原理，软件工程，计算机组成原理}。试给该信息检索系统指定三种不同的划分。

解 设 $A = \{\text{离散数学, 高等数学, 计算机操作系统, 计算机网络, 数据结构, 编译原理, 软件工程, 计算机组成原理}\}$ ，则

例6.2.12 解（续）

划分1：含关键词离散数学，则

$A = \{\{\text{离散数学}\}, \{\text{高等数学}, \text{计算机操作系统}, \text{计算机网络}, \text{数据结构}, \text{编译原理}, \text{软件工程}, \text{计算机组成原理}\}\}$;

划分2：含关键词数学，则

$A = \{\{\text{离散数学}, \text{高等数学}\}, \{\text{计算机操作系统}, \text{计算机网络}, \text{数据结构}, \text{编译原理}, \text{软件工程}, \text{计算机组成原理}\}\}$;

划分3：含关键词计算机，则

$A = \{\{\text{离散数学}, \text{数据结构}, \text{编译原理}, \text{软件工程}, \text{高等数学}\}, \{\text{计算机操作系统}, \text{计算机网络}, \text{计算机组成原理}\}\}$ 。

总结

- 1、熟记等价关系的定义；
- 2、利用等价关系的定义证明一个关系是等价关系；
- 3、给定 A 上的等价关系 R ，会求所有的等价类和商集 A/R ；并求出对应的集合的划分；
- 4、给定集合 A 上的划分，会求对应的等价类。

判定下列关系具有哪些性质

- 1、对任何非空集合 A ， A 上的恒等关系；
- 2、多边形的“相似关系”、“全等关系”；
- 3、集合 A 的幂集 $P(A)$ 上定义的“包含关系”；
- 4、集合 A 的幂集 $P(A)$ 上定义的“真包含关系”

解：1，2都**具有**自反性，对称性和传递性
是等价关系；

3 **具有**自反性，反对称性和传递性；

4 **具有**反自反性，反对称性。
传递性。

偏序
关系

拟序关
系

6.3 Order Relation 次序关系

拍摄一张室内闪光灯照片，需要完成如下任务：

- 1、打开镜头盖；
- 2、照相机调焦；
- 3、打开闪光灯；
- 4、按下快门按钮。

这些任务中有的必须在其他任务之前完成。例如，任务1必须在任务2之前完成，任务2，3必须在任务4之前完成，即任务之间存在“先后”关系，即次序关系。

6.3.1 Quasi order 拟序关系

定义6.3.1 设 R 是非空集合 A 上的关系，如果 R 是反自反和传递的，则称 R 是 A 上的拟序关系 (Quasi-Order Relation)，简称拟序，记为“ $<$ ”，读作“小于”，并将“ $\langle a, b \rangle \in <$ ”记为“ $a < b$ ”。序偶 $\langle A, < \rangle$ 称为拟序集 (Quasi-Order Set)。

由定义6.3.1知：

- (1) R 是拟序关系 $\Leftrightarrow R$ 同时具有反自反性和传递性；
- (2) R 不是拟序关系 $\Leftrightarrow R$ 不具有反自反性或者传递性；
- (3) 拟序“ $<$ ”的逆关系“ $<^T$ ”也是拟序，用“ $>$ ”表示，读作“大于”。

例6.3.1

设 R 是集合 A 上的拟序关系，则 R 是反对称的。

证明 假设 R 不是反对称的关系，则必存在 $x, y \in A$ ，且 $x \neq y$ ，满足 $\langle x, y \rangle \in R$ 并且 $\langle y, x \rangle \in R$ 。因为 R 是 A 上的拟序关系，所以 R 具有传递性，从而有 $\langle x, x \rangle \in R$ 。这与 R 是反自反的矛盾，从而假设错误，即 R 一定是反对称的。

例6.3.2

判断下列关系是否为拟序关系

- (1) 集合A的幂集 $P(A)$ 上定义的“ \subset ”；
- (2) 实数集 R 上定义的“小于”关系($<$)；

解 (1) 集合A的幂集 $P(A)$ 上定义的“ \subset ”具有反自反性和传递性，所以 $\langle P(A), \subset \rangle$ 是拟序集。

(2) 实数集合 R 上定义的“小于”关系($<$)具有反自反性和传递性，所以 $\langle R, < \rangle$ 是拟序集。

6.3.2 Partial Order 偏序关系

定义6.3.2 设 R 是非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 是 A 上的偏序关系 (PartialOrderRelation)，简称偏序，记为“ \leq ”，读作“小于等于”，并将“ $\langle a, b \rangle \in \leq$ ”记为 $a \leq b$ 。序偶 $\langle A, \leq \rangle$ 称为偏序集 (PartialOrderSet)。

由定义6.3.2知

- (1) R 是偏序关系 $\Leftrightarrow R$ 同时具有自反性、反对称性和传递性；
- (2) R 不是偏序关系 $\Leftrightarrow R$ 不具备自反性或反对称性或传递性；
- (3) 偏序“ \leq ”的逆关系“ \leq^T ”也是一个偏序，我们用“ \geq ”表示，读作“大于等于”；
- (4) (“ \leq ” $-I_A$)为 A 上的拟序关系， (“ $<$ ” $\cup I_A$)为 A 上的偏序关系。

例6.3.3

试判断下列关系是否为偏序关系

- (1) 集合A的幂集 $P(A)$ 上的包含关系“ \subseteq ”；
- (2) 实数集合 R 上的小于等于关系“ \leq ”；
- (3) 自然数集合 N 上的模 m 同余关系；
- (4) 正整数集合 N 上的整除关系“ $|$ ”；
- (5) ALGOL或PL/I等都是块结构语言，设
 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 是这种语言的一个程序中的
块的集合。对所有 i 和 j ，定义关系“ \leq ”如
下： $b_i \leq b_j$ 当且仅当 b_i 被 b_j 所包含。

例6.3.3 解

根据偏序关系的定义知，(1)，(2)，(4)，(5)所对应的关系同时具有自反性，反对称性和传递性，所以都是偏序集；

(3)所对应的关系不具有反对称性，所以它不是偏序关系。

例6.3.4

设 X 是所有4位二进制串的集合，在 X 上定义关系 R ：
如果 s_1 的某个长度为2的子串等于 s_2 的某个长度为2的子串，则 $\langle s_1, s_2 \rangle \in R$ ，例如因为0111和1010中都含有子串01，所以 $\langle 0111, 1010 \rangle \in R$ 。试判断 R 是否是一个偏序关系。

例6.3.4 解

对任意的 $s, t \in X$ ，如果 $\langle s, t \rangle \in R$ ，则 s 的某个长度为2的子串等于 t 的某个长度为2的子串，也可以说 t 的某个长度为2的子串等于 s 的某个长度为2的子串，即有 $\langle t, s \rangle \in R$ ，从而 R 是对称的。根据对称性，存在 $0111, 1010 \in X$ ，有 $\langle 0111, 1010 \rangle \in R$ 且 $\langle 0111, 1010 \rangle \in R$ ，但是 $0111 \neq 1010$ ，从而 R 不是反对称的，从而 R 不是偏序关系。

例6.3.5

考虑任务集T，它包含了拍摄一张室内闪光照片必须按顺序完成的任务：

- 1、打开镜头盖；
- 2、照相机调焦；
- 3、打开闪光灯；
- 4、按下快门按钮。

在T上定义关系R如下：

$\langle i, j \rangle \in R \Leftrightarrow$ 如果 $i=j$ 或者任务 i 必须在任务 j 之前完成。

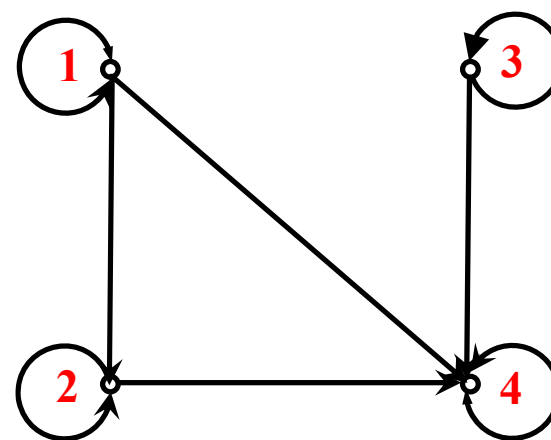
试判断R是T上的偏序关系并画出它的关系图。

例6.3.5 解

根据R的定义，有

$R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$ 。

根据自反、反对称和传递的定义知，关系R具有自反性，对称性和传递性。从而R是偏序关系，其关系图如右图所示。



2 哈斯图

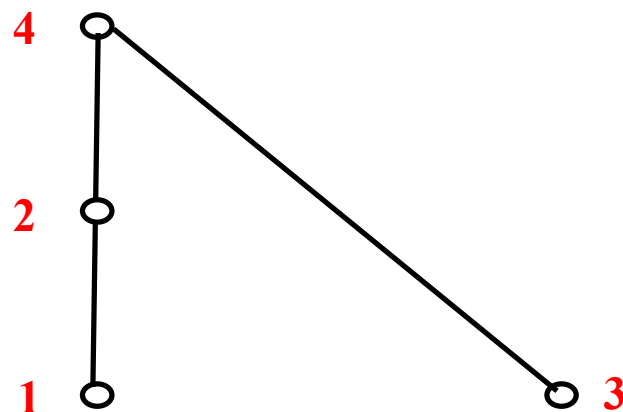
- (1) 用小圆圈或点表示 A 中的元素，省掉关系图中所有的环；
(因自反性)
- (2) 对任意 $x, y \in A$ ，若 $x < y$ ，则将 x 画在 y 的下方，可省掉关系图中所有边的箭头；（因反对称性）
- (3) 对任意 $x, y \in A (x \neq y)$ ，若 $x \leq y$ ，且 x 与 y 之间不存在 $z \in A$ ，使得 $x \leq z, z \leq y$ ，则 x 与 y 之间用一条线相连，否则无线相连。（因传递性）

例6.3.6

画出例6.3.5中关系R的哈斯图。

$$R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$$

解 例6.3.5中关系R的哈斯图如下图所示。



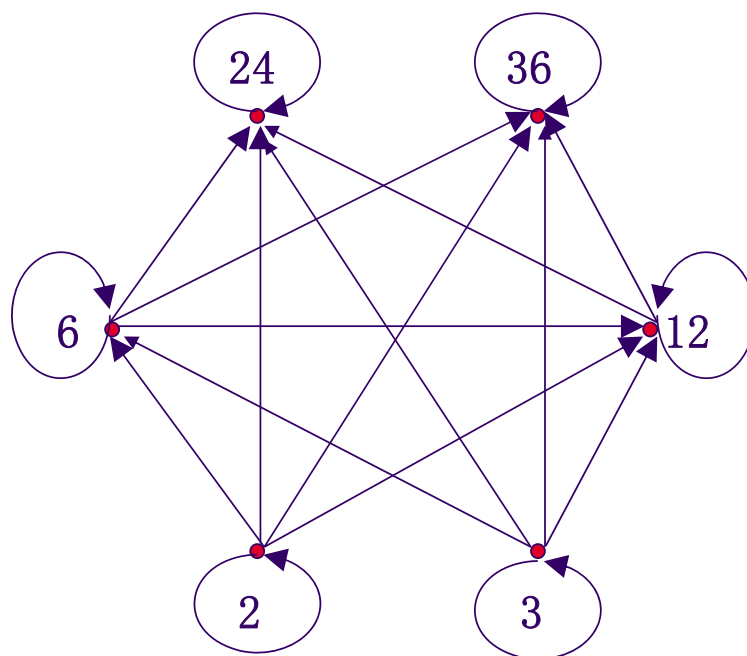
例6.3.7

设 $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$ ，“ \leq ”是 A 上的整除关系 R ，
画出其一般的关系图和哈斯图。

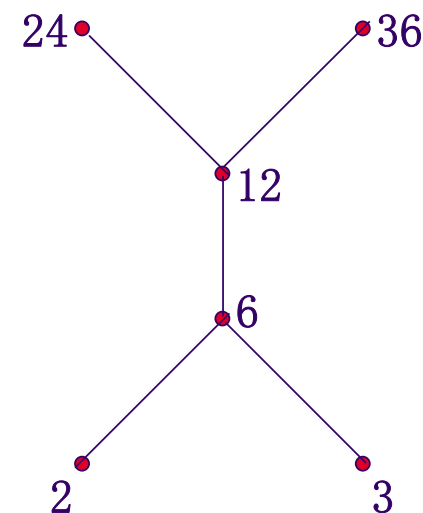
解 由题意可得

$R = \{ \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 12 \rangle, \langle 2, 24 \rangle, \langle 2, 36 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 3, 12 \rangle, \langle 3, 24 \rangle, \langle 3, 36 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 6, 12 \rangle, \langle 6, 24 \rangle, \langle 6, 36 \rangle, \langle 12, 12 \rangle, \langle 12, 24 \rangle, \langle 12, 36 \rangle, \langle 24, 24 \rangle, \langle 36, 36 \rangle \}$ ，从而得出该偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 的一般关系图和哈斯图如下：

例6.3.7 (续)



关系图



哈斯图

3 特殊元素

定义6.3.3 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得对 $\forall x \in B$,

(1) 都有 $x \leq b$, 则称 b 为 B 的最大元素, 简称**最大元**
the greatest element

(2) 都有 $b \leq x$, 则称 b 为 B 的最小元素, 简称**最小元**
the least element

(3) 满足 $b \leq x \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的极大元素, 简称**极大元 (maximal)**

(4) 满足 $x \leq b \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的极小元素, 简称**极小元 (minimal)**

定义6.3.3可以符号化为：

b 是 B 的最大元 $\Leftrightarrow (\forall x)((x \in B) \rightarrow (x \leq b)) = 1$

b 是 B 的最小元 $\Leftrightarrow (\forall x)((x \in B) \rightarrow (b \leq x)) = 1$

b 是 B 的极大元 $\Leftrightarrow (\forall x \in B)((b \leq x) \rightarrow (b = x)) = 1$

b 是 B 的极小元 $\Leftrightarrow (\forall x \in B)((x \leq b) \rightarrow (b = x)) = 1$

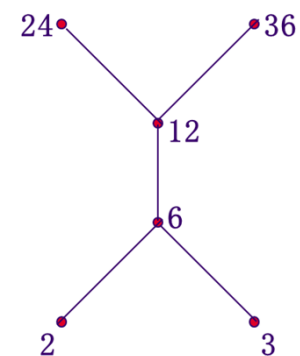
注意

- (1) **B的最大元、最小元、极大元和极小元如果存在，一定在B中；**
- (2) **b是B的最大元** \Leftrightarrow **B中所有的元素都比b小；**
b是B的最小元 \Leftrightarrow **B中所有的元素都比b大；**
b是B的极大元 \Leftrightarrow **B中没有比b大的元素；**
b是B的极小元 \Leftrightarrow **B中没有比b小的元素。**

例6.3.8

在例6.3.7中，设 $B_1 = \{6, 12\}$ ， $B_2 = \{2, 3\}$ ， $B_3 = \{24, 36\}$ ， $B_4 = \{2, 3, 6, 12\}$ 是集合A的子集，试求出 B_1, B_2, B_3 和 B_4 的最大元，最小元，极大元和极小元。

解 A的子集合 B_1, B_2, B_3 和 B_4 的最大元，最小元，极大元和极小元见下表。



集合	最大元	最小元	极大元	极小元
B_1	12	6	12	6
B_2	无	无	2,3	2,3
B_3	无	无	24,36	24,36
B_4	12	无	12	2,3

定义6.3.4

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集， B 是 A 的任何一个子集。若存在元素 $a \in A$ ，使得

- (1) 对任意 $x \in B$ ，都有 $x \leq a$ ，则称 a 为 B 的上界；
- (2) 对任意 $x \in B$ ，都有 $a \leq x$ ，则称 a 为 B 的下界；
- (3) 若元素 $a' \in A$ 是 B 的上界，元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个上界，若均有 $a' \leq a$ ，则称 a' 为 B 的最小上界或上确界。记 $a' = \text{Sup}B$ ；
- (4) 若元素 $a' \in A$ 是 B 的下界，元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个下界，若均有 $a \leq a'$ ，则称 a' 为 B 的最大下界或下确界。记 $a' = \text{Inf}B$ 。

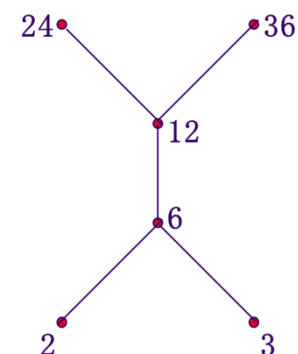
由定义6.3.4知

- (1) 子集合B的上、下界和上、下确界可在集合A中寻找；
- (2) 一个子集合B的上、下界不一定存在，如果存在，可以不唯一的；
- (3) 一个子集合B的上、下确界不一定存在，如果存在，一定唯一；
- (4) 一个子集合B有上(下)确界，一定有上(下)界，反之不然。

例6.3.9

在例6.3.7中，设 $B_1 = \{6, 12\}$ ， $B_2 = \{2, 3\}$ 是集合A的子集，试求出 B_1 ， B_2 的上界、下界、上确界和下确界。

解 集合 B_1 、 B_2 的各种特殊元素见下表。



集合	上界	下界	上确界	下确界
B_1	12, 24, 36	2, 3, 6	12	6
B_2	6, 12, 24, 36	无	6	无

例6. 3. 10

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ， A 上定义偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 的哈斯图如图6. 3. 4所示。求 $B = \{x_1, x_2\}$ 和 $C = \{x_3, x_4\}$ 上界、下界、上确界和下确界。

解 B 、 C 的各种特殊元见下表。

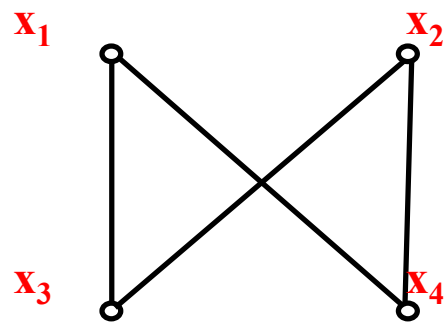


图6.3.4

集合	上界	下界	上确界	下确界
B	无	x_3, x_4	无	无
C	x_1, x_2	无	无	无

定理6.3.1

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一偏序集， B 是 A 的子集。则：

- (1) 若 b 是 B 的最大元 $\Rightarrow b$ 是 B 的极大元、上界、上确界；
- (2) 若 b 是 B 的最小元 $\Rightarrow b$ 是 B 的极小元、下界、下确界；
- (3) 若 a 是 B 的上确界，且 $a \in B \Rightarrow a$ 是 B 的最大元；
- (4) 若 a 是 B 的下确界，且 $a \in B \Rightarrow a$ 是 B 的最小元。

定理6.3.2

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一偏序集， B 是 A 的子集。则：

- (1) 若 B 存在最大元，则 B 的最大元是惟一的；
- (2) 若 B 存在最小元，则 B 的最小元是惟一的；
- (3) b 是 B 的最大元 $\Leftrightarrow b$ 是 B 的惟一极大元；
- (4) b 是 B 的最小元 $\Leftrightarrow b$ 是 B 的惟一极小元；
- (5) 若 B 存在上确界，则 B 的上确界是惟一的；
- (6) 若 B 存在下确界，则 B 的下确界是惟一的。

6.3.3 Total order 全序关系

定义6.3.5 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一个偏序关系，若对任意 $x, y \in A$ ，总有 $x \leq y$ 或 $y \leq x$ ，二者必居其一，则称关系“ \leq ”为**全序关系**

(TotalOrderRelation)，简称**全序**，或者**线序关系**，简称**线序**。称 $\langle A, \leq \rangle$ 为**全序集**(TotalOrderSet)，或者**线序集**，或者**链**(Chain)。

从定义6.3.5可以看出：

全序关系是偏序关系，反之则不然。

例6.3.13

试判断下列关系是否为全序关系，如果是，请画出其哈斯图。

- (1) 设集合 $A = \{a, b, c\}$ ，其上的关系
“ \leq ” = $\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$
- (2) 实数集 R 上定义的小于等于关系 “ \leq ”；
- (3) 实数集 R 上定义的小于关系 “ $<$ ”；
- (4) 集合 A 的幂集 $P(A)$ 上定义的包含关系 “ \subseteq ”。

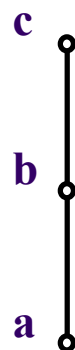
例6. 3. 13

(1) 设集合 $A = \{a, b, c\}$ ，其上的关系

“ \leq ” = $\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$

解：

$\langle A, \leq \rangle$ 是全序集，其哈斯图见下图：



例6. 3. 13

(2) 实数集 R 上定义的小于等于关系“ \leq ”；

解：

$\langle R, \leq \rangle$ 是全序集，其哈斯图是数轴，见下图，其中 $x, y, z \in R$ ；

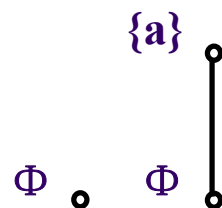


例6.3.13

(4) 集合 A 的幂集 $P(A)$ 上定义的包含关系“ \subseteq ”

解：

当 $|A| < 2$ 时， $P(A)$ 上定义的“ \subseteq ”是全序关系， $\langle P(A), \subseteq \rangle$ 是全序集，其哈斯图见下图



当 $|A| \geq 2$ ，则 $\langle P(A), \subseteq \rangle$ 不是全序集。

6.3.4 Well order 良序关系

定义6.3.6 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一偏序集，若 A 的任何一个非空子集都有最小元素，则称“ \leq ”为良序关系，简称良序，此时 $\langle A, \leq \rangle$ 称为良序集。

从定义6.3.6可以看出：

- (1) R 是良序关系 $\Leftrightarrow R$ 是偏序关系和 A 的任何非空子集都有最小元；
- (2) 良序关系一定是偏序关系，反之则不然；
- (3) 良序关系一定是全序关系，反之则不然。

例6. 3. 14

试判断例6. 3. 13的(1)和(2)是否为良序关系。

(1) 设集合 $A = \{a, b, c\}$ ，其上的关系

“ \leq ” = $\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$

(2) 实数集 R 上定义的小于等于关系 “ \leq ”

解 (1) $\langle A, \leq \rangle$ 是良序集；

(2) $\langle R, \leq \rangle$ 不是良序集。

注：

1、“ \leq ”是良序关系 “ \leq ”是全序关系 “ \leq ”是偏序关系；

2、有限全序集一定是良序集。

6.3.6 次序关系的应用

例6.3.15 计算机科学中常用的字典排序如下：

设 Σ 是一有限的字母表。 Σ 上的字母组成的字母串叫 Σ 上的字； Σ^* 是包含空字 “ ε ” 的所有字组成的集合，建立 Σ^* 上的字典次序关系 L ：

设 $x = x_1x_2 \cdots x_n$, $y = y_1y_2 \cdots y_m$ ，其中

$x_i, y_j \in \Sigma$ ($i=1, 2, \cdots, n$; $j=1, 2, \cdots, m$)，则 $x, y \in \Sigma^*$ 。

例6.3.15 (续)

(1) 当 $x_1 \neq y_1$ 时, 若 $x_1 \leq y_1$, 则 xLy ; 若 $y_1 \leq x_1$, 则 yLx 。

(2) 若存在最大的 k 且 $k < \min(n, m)$, 使 $x_i = y_i$ ($i=1, 2, \dots, k$), 而 $x_{k+1} \neq y_{k+1}$, 若 $x_{k+1} \leq y_{k+1}$, 则 xLy ; 若 $y_{k+1} \leq x_{k+1}$, 则 yLx 。

(3) 若存在最大的 k 且 $k = \min(n, m)$, 使 $x_i = y_i$ ($i=1, 2, 3, \dots, k$), 此时, 若 $n \leq m$, 则 xLy ; 若 $m \leq n$, 则 yLx 。

证明 L 是 Σ^* 上的一个偏序关系且是一个全序关系。

例6.3.15 证明

首先证明 L 是偏序关系。

(1) L 是自反的。

对任意 $x \in \Sigma^*$ ，令 $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ ，其中 $x_i \in \Sigma$ ，显然有 $x_i \leq x_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n$)，从而有 $x L x$ ；

(2) L 是反对称的。

对任意 $x, y \in \Sigma^*$ ，令 $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ ， $y = y_1 y_2 \cdots y_m$ ，其中 $x_i, y_j \in \Sigma$ ($i = 1, 2, \cdots, n$; $j = 1, 2, \cdots, m$)。若 $x L y$ 且 $y L x$ ，根据 L 的定义有 $x = y$ ；

例6.3.15 证明（续）

(3) L 是传递的。

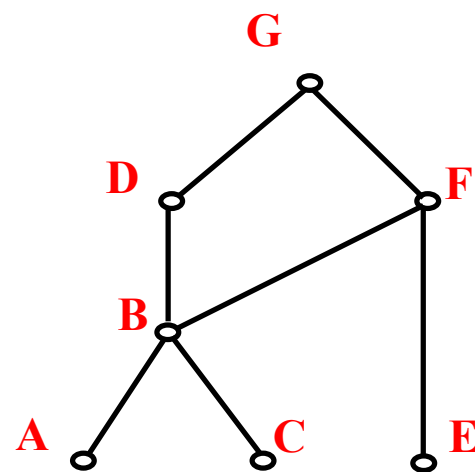
对任意 $x, y, z \in \Sigma^*$ ，令 $x = x_1x_2 \cdots x_n$ ， $y = y_1y_2 \cdots y_m$ ， $z = z_1z_2 \cdots z_p$ ，其中 $x_i, y_j, z_k \in \Sigma$ ($i=1, 2, \cdots, n$;
 $j=1, 2, \cdots, m$; $k=1, 2, \cdots, p$)。若 xLy 且 yLz ，根据 L 的定义和“ \leq ”的传递性，有 xLz 。

综上所述， L 是 Σ^* 上的一个偏序关系。

对任意的 $x, y \in \Sigma^*$ ，由 x 和 y 的表示形式知， x_i 和 y_i ($i=1, 2, \cdots, n$) 总能进行比较，所以一定有 xLy 和 yLx 之一成立，从而 L 是 Σ^* 上的一个全序关系。

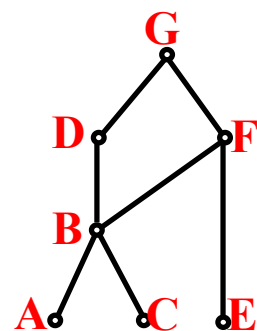
例6.3.16

一个计算机公司开发的项目需要**完成7个任务**，其中的**某些任务只能在其他任务结束之后才能开始**。考虑如下建立任务上的偏序，**如果任务Y在任务X结束之后才能开始，则 $X \leq Y$** 。这7个任务的关于偏序的哈斯图如右图，求一个全序执行这些任务以完成这个项目。

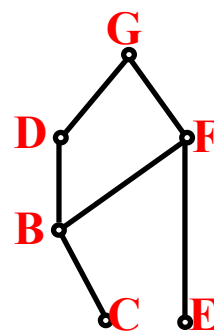


例6.3.16 解

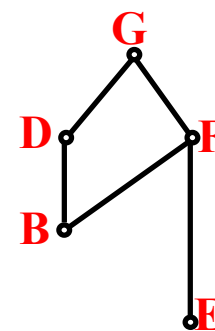
可以通过执行一个排序得到7个任务的一种排序，
排序的步骤见下图(a)到(g)



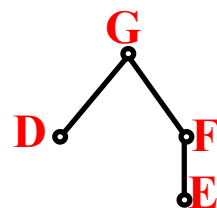
(a)



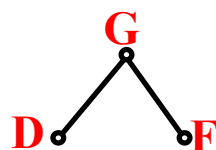
(b)



(c)



(d)



(e)



(f)



(g)

6.4 本章总结

- (1) 等价关系的概念及证明、等价类和商集的计算；
- (2) 集合划分的定义、求给定集合的划分；
- (3) 等价关系与集合划分的关系；
- (4) 偏序关系、拟序关系、全序关系和良序关系的定义，它们之间的异同；
- (5) 哈斯图的画法；
- (6) 八个特殊元的定义和基本性质。

Thank You !

