离 散 数 学

西北工业大学

2023年3月18日星期六

第3章 推理与证明技术

1 命题逻辑的推理理论

2 谓词逻辑的推理理论

3 数学归纳法的使用

4 CP规则相关证明

3.1 本章学习要求

核心知识点

1. 掌握各种不同类型的规则和公理，特别是命题逻辑和谓词逻辑的推理规则和公理
2. 熟练掌握不同证明方法的证明原理、不同的应用场景
3. 理解谓词逻辑的精髓，将其思想贯穿于所有的证明之中

3.2 命题逻辑的推理理论

概念

描述问题的句子

判断

对概念的肯定与否定的判断

推理

从一个或多个前提推出结论的思维过程

认识世界的渐进过程

推理的有效性和结论的真实性

有效的推理不一定产生真实的结论；而产生真实结论的推理过程未必是有效的。有效的推理中可能包含为"假"的前提，而无效的推理却可能得到为"真"的结论 。

所谓推理有效，指的是它的结论是它前提的合乎逻辑的结果。也即，如果它的前提都为真，那么所得的结论也必然为真，而并不是要求前提或结论一定为真或为假，如果推理是有效的话，那么不可能它的前提都为真时，而它的结论为假。

3.2.1 推理的基本概念和推理形式

定义3.2.0 设G,H是公式，对任意解释I，如果I满足G，那么I满足H，则称H是G的逻辑结果(或称G蕴涵H)，记为$G \Rightarrow H$，此时称G为前提，H为结论。

判定定理

定理3.2.0 设G,H是公式，H是G的逻辑结果当且仅当G→H为永真公式。

证明： “⇒”若G⇒H，但G→H不是永真公式。于是，必存在一个解释I，使得G→H为假，即在解释I下，G为真，而H为假，这与G⇒H矛盾，故G→H是永真公式。

“⇐”若G→H是永真式，但G⇒H不成立，故存在G,H的一个解释I，使得G为真，而H为假，从而在解释I下，G→H为假，这与G→H是永真公式矛盾，所以G⇒H。

推广

定义3.2.1 设$G_1, G_2, \cdots, G_n$, H是公式，称H是$G_1, G_2, \cdots, G_n$的逻辑结果($G_1, G_2, \cdots, G_n$共同蕴涵H)，当且仅当H是$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$的逻辑结果(logic conclusion)。记为$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$，此时称$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$为有效的(efficacious)，否则称为无效的(inefficacious)。$G_1, G_2, \cdots, G_n$称为一组前提(Premise)，有时用集合Γ来表示，记$\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$。H称为结论(conclusion)。又称H是前提集合Γ的逻辑结果。记为$\Gamma \Rightarrow H$。

判定定理

定理3.2.1 公式H是前提集合$\Gamma=\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$的逻辑结果当且仅当$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \rightarrow H$为永真公式。

证明： 略。

“⇒”与“→”的不同

1. “→”仅是一般的蕴涵联结词，G→H的结果仍是一个公式，而“⇒”却描述了两个公式G，H之间的一种逻辑蕴涵关系，G ⇒ H的“结果”，是非命题公式；

2. 用计算机来判断G ⇒ H是办不到的。然而计算机却可“计算”公式G→H是否为永真公式。

3.2.2 判断有效结论的常用方法

要求

$\Gamma = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$

$\Gamma \Rightarrow H$

也就是

$G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n \rightarrow H$ 为永真公式

因而

真值表技术、演绎法和间接证明方法

1、真值表技术

设$P_1, P_2, \cdots, P_n$是出现在前提$G_1, G_2, \cdots, G_n$和结论H中的一切命题变元，如果将$P_1, P_2, \cdots, P_n$中所有可能的解释及$G_1, G_2, \cdots, G_n$, H的对应真值结果都列在一个表中，根据“→”的定义，则有判断方法如下：

1. 对所有$G_1, G_2, \cdots, G_n$都具有真值T的行(表示前提为真的行),如果在每一个这样的行中，H也具有真值T，则H是$G_1, G_2, \cdots, G_n$的逻辑结果。
2. 对所有H具有真值为F的行(表示结论为假的行),如果在每一个这样的行中，$G_1, G_2, \cdots, G_n$中至少有一个公式的真值为F(前提也为假),则H是$G_1, G_2, \cdots, G_n$的逻辑结果。

例3.2.1

判断下列H是否是前提G_1, G_2的逻辑结果

(1) H：Q；　　G_1：P；G_2：P→Q；　是

(2) H：┐P；　　G_1：P→Q；G_2：┐Q；　是

(3) H：Q；　　G_1：┐P；G_2：P→Q。　否

解

(1)

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

(2)

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

(3)

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

2 推理定律

设G，H，I，J是任意的命题公式，则有：

1） I_1： $G\wedge H\Rightarrow G$ （简化规则）

I_2： $G\wedge H\Rightarrow H$

2） I_3： $G\Rightarrow G\vee H$ （添加规则）

I_4： $H\Rightarrow G\vee H$

3） I_5： $\neg G\Rightarrow G\rightarrow H$

I_6： $H\Rightarrow G\rightarrow H$

4） I_7： $\neg(G\rightarrow H)\Rightarrow G$

I_8： $\neg(G\rightarrow H)\Rightarrow\neg H$

5） I_9： $G,\ H\Rightarrow G\wedge H$

2 推理定律(续)

6) I_{10}: $\neg G,\ G \vee H \Rightarrow H$ （选言三段论）

I_{11}: $\neg G,\ G \,\overline{\vee}\, H \Rightarrow H$

7) I_{12}: $G,\ G \to H \Rightarrow H$ （分离规则）

8) I_{13}: $\neg H,\ G \to H \Rightarrow \neg G$ （否定后件式）

9) I_{14}: $G \to H,\ H \to I \Rightarrow G \to I$ （假言三段论）

10) I_{15}: $G \vee H,\ G \to I,\ H \to I \Rightarrow I$ （二难推论）

例子

1)、前提：

1. 如果明天天晴，我们准备外出旅游。 $P \to Q$
2. 明天的确天晴。 P

结论：我们外出旅游。 Q

可描述为：$P \to Q$，$P \Rightarrow Q$ （分离规则）

2)、前提：

1. 如果一个人是备胎，则他不幸福。 $P \to Q$
2. 如果一个人不幸福，则他死得早。 $Q \to R$

结论：备胎死得早。 $P \to R$

可描述为：$P \to Q$，$Q \to R \Rightarrow P \to R$ （假言三段论）

例子(续1)

3)、某女子在某日晚归家途中被杀害，据多方调查确证，凶手必为王某或陈某，但后又查证，作案之晚王某在工厂值夜班，没有外出，根据上述案情可得前提：

1. 凶手为王某或陈某 $P \vee Q$
2. 如果王某是凶手，则他在作案当晚必外出 $P \rightarrow R$
3. 王某案发之晚并未外出。 $\neg R$

结论：陈某是凶手。 Q

则可描述为：$P \rightarrow R, \neg R \Rightarrow \neg P$ （否定后件式）

$P \vee Q, \neg P \Rightarrow Q$ （选言三段论）

例子(续2)

4)、前提:

1. 如果某同学为省二级以上运动员，则他将被大学录取。 $P \to R$
2. 如果某同学高考总分在560分以上，则将被大学录取。 $Q \to R$
3. 某同学高考总分在560分以上或者是省二级运动员。 $P \vee Q$

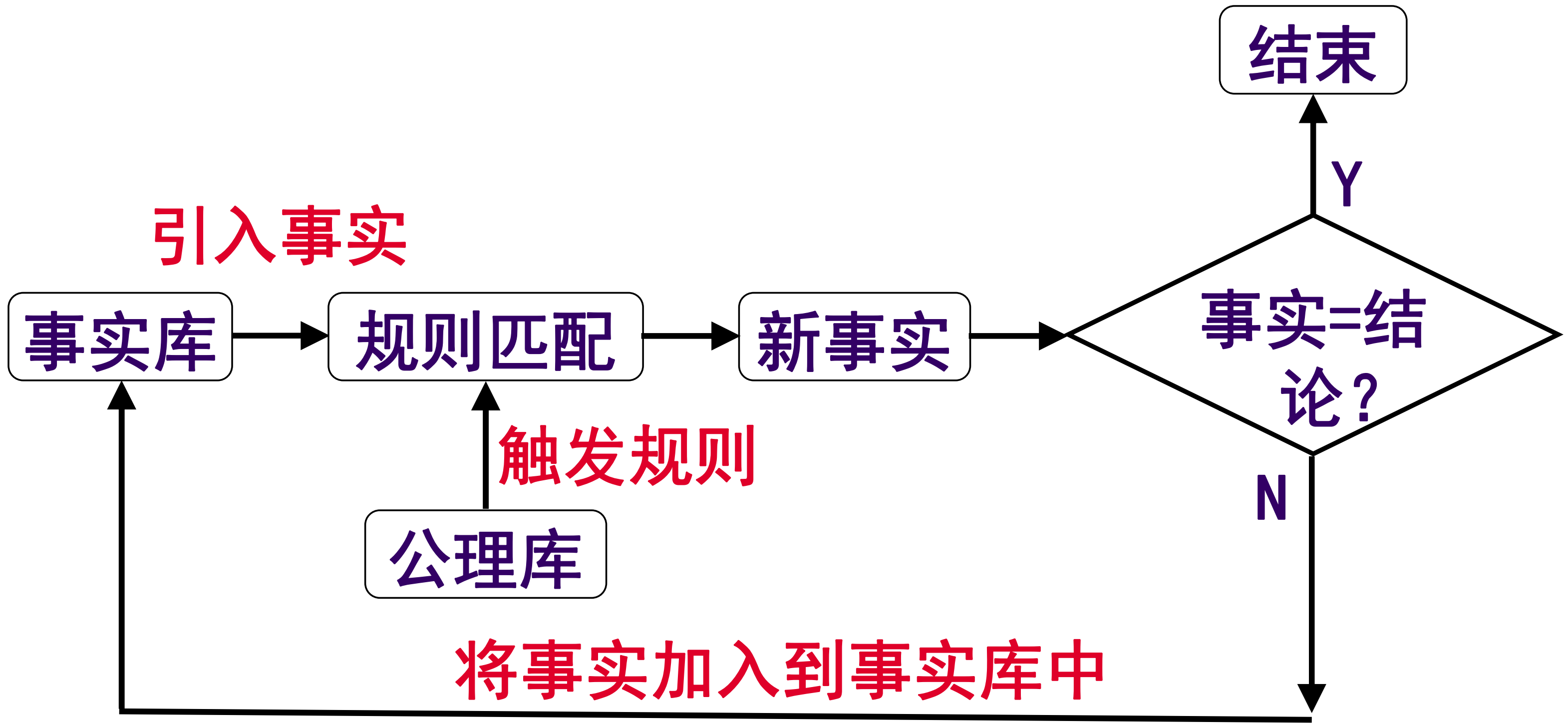
结论：该同学被大学录取。 R

则上述例子可描述为：

$P \vee Q,\ P \to R,\ Q \to R \Rightarrow R$ （二难推论）

3 演绎法

演绎法是从前提(假设)出发，依据公认的推理规则和推理定律，推导出一个结论来。



演绎的定义

定义3.2.2

从前提集合Γ推出结论H的一个演绎是构造命题公式的一个有限序列：

$$H_1，H_2，\cdots\cdots，H_n$$

其中，H_i或者是Γ中的某个前提，或者是前面的某些H_j（$j<i$）的有效结论，并且H_n就是H，则称公式H为该**演绎**的有效结论，或者称从前提Γ能够**演绎**出结论H来。

推理规则

① 规则P（称为前提引用规则）：在推导的过程中，可随时引入前提集合中的任意一个前提；

② 规则T（逻辑结果引用规则）：在推导的过程中，可以随时引入公式S，该公式S是由其前的一个或多个公式推导出来的逻辑结果。

③ 规则CP（附加前提规则）：如果能从给定的前提集合Γ与公式P推导出S，则能从此前提集合Γ推导出P→S。

$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$，

$P\Rightarrow(Q\rightarrow R)$等价于$(P\wedge Q)\Rightarrow R$

例3.2.2

设前提Γ={P∨Q, P↔R, Q→S}, G=S∨R。证明Γ⇒G。

证明：

(1)	$P\vee Q$	P
(2)	$\neg P\rightarrow Q$	T, (1), E
(3)	$Q\rightarrow S$	P
(4)	$\neg P\rightarrow S$	T, (2), (3), I
(5)	$\neg S\rightarrow P$	T, (4), E
(6)	$P\leftrightarrow R$	P
(7)	$(P\rightarrow R)\wedge(R\rightarrow P)$	T, (6), E
(8)	$P\rightarrow R$	T, (7), I
(9)	$\neg S\rightarrow R$	T, (5), (8), I
(10)	$S\vee R$	T, (9), E

4 间接证明法（反证法）

前面使用过的一些证明方法都是正向推理。但在数学领域中，经常会遇到一些问题，当采用正向推理时很难从前提为真推出结论为真。

$P \Rightarrow Q$等价于$\neg Q \Rightarrow \neg P$，因此，为了间接地证明$P \Rightarrow Q$，可以假设$Q$为假（$\neg Q$），然后证明$P$为假（$\neg P$）。

定义3.2.3

假设$G_1, G_2, \cdots, G_n$是一组命题公式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$是出现在中的一切命题变元，若有解释I使$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$取值为“真”，则称公式$G_1, G_2, \cdots, G_n$是一致的，或者说是相容的。

如对任意的解释I，都有$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$取值为“假”，则称公式$G_1, G_2, \cdots, G_n$是不一致的。或者说$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$是一个矛盾式。

定义3.2.3

假设$G_1, G_2, \cdots, G_n$是一组命题公式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$是出现在中的一切命题变元，若有解释I使$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$取值为“真”，则称公式$G_1, G_2, \cdots, G_n$是一致的，或者说是相容的

$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$是矛盾式当且仅当

$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \Rightarrow R \wedge \neg R$，

其中，R可为任意公式，$R \wedge \neg R$为一矛盾式。

间接证明方法

将结论的否定加入到前提集合中构成一组新的前提，然后证明这组新的前提集合是不相容的，即蕴涵一个矛盾式。

$$G_1, G_2, \cdots, G_n, \neg H \Rightarrow R \wedge \neg R$$

定理3.2.2 设命题公式集合$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$是一致的，于是从前提集合$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$出发可以逻辑地推出公式H的充要条件是从前提集合$\{G_1, G_2, \cdots, G_n, \neg H\}$出发，可以逻辑地推出一个矛盾（永假）式来。

例3.2.6

用反证法证明二难推论

$$P \lor Q,\quad P \to R,\quad Q \to R \Rightarrow R$$

证明：

(1)	$P \to R$	P
(2)	$\neg R$	P(附加)
(3)	$\neg P$	T, (1), (2), I
(4)	$Q \to R$	P
(5)	$\neg Q$	T, (2), (4), I
(6)	$P \lor Q$	P
(7)	P	T, (5), (6), I
(8)	$P \land \neg P$	T, (3), (7), I

三种证明方法之间的关系

$G_1, G_2, \cdots, G_n, \neg H \Rightarrow R \wedge \neg R$ 反证法

$\overset{CP}{\Leftrightarrow} \quad G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow \neg H \rightarrow (R \wedge \neg R)$ CP规则证明法

$\Leftrightarrow \quad G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow \neg\neg H \vee (R \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow \quad G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$ 直接证明法

3.2.3 命题逻辑推理的难点

1. 弄清楚蕴涵式P→Q的逻辑关系及其真值，这里Q是P的必要条件。无论蕴涵关系如何表述，都要仔细地区分出蕴涵式的前件和后件。
2. 推理过程中推理规则、基本等值式和逻辑蕴涵式的引用要适当，逻辑思维要清晰。
3. 弄清楚几种推理方法的区别与联系，对于命题逻辑推理而言，任何一个问题的推理，都可以采取三种推理方法中的任何一种来证明，针对不同的问题选用不同的推理方法。一般而言，对于结论是蕴涵式或析取式的，大多可以采取带CP规则的直接证明方法。

3.2.4 命题逻辑推理的应用

例3.2.7 符号化下面的语句，并用演绎法证明结论是否有效。

或者明天下午是天晴，或者是下雨；如果明天下午是天晴，则我将去看电影；如果我去看电影，我就不看书。如果我看书，则天在下雨。

设 P：明天下午天晴；　　Q：明天下午下雨；

R：明天下午去看电影；S：明天下午看书。

则上述命题可符号化为：

$$P \overline{\vee} Q,\ P \rightarrow R,\ R \rightarrow \neg S \Rightarrow S \rightarrow Q。$$

证明

（1）	S	P（附加）
（2）	$R \rightarrow \neg S$	P
（3）	$\neg R$	T,(1),(2),I
（4）	$P \rightarrow R$	P
（5）	$\neg P$	T,(3),(4),I
（6）	$P \overline{\vee} Q$	P
（7）	Q	T,(4),(7),I

例3.2.8

一个公安人员审查一件盗窃案，已知的事实如下：

A或B盗窃了x；若A盗窃了x，则作案时间不能发生在午夜前；若B证词正确，则在午夜时屋里灯光未灭；若B证词不正确，则作案时间发生在午夜前；午夜时屋里灯光灭了。B盗窃了x。

设 P：A盗窃了x；Q：B盗窃了x； R：作案时间发生在午夜前；S：B证词正确； T：在午夜时屋里灯光未灭。 则上述命题可符号化为：

$$P \vee Q,\ P \rightarrow \neg R,\ S \rightarrow T,\ \neg S \rightarrow R,\ \neg T \Rightarrow Q$$

例3.2.8（续）

证明　采用直接证明方法

(1)	$\neg T$	P
(2)	$S\to T$	P
(3)	$\neg S$	T, (1), (2), I
(4)	$\neg S\to R$	P
(5)	R	T, (3), (4), I
(6)	$P\to\neg R$	P
(7)	$\neg P$	T, (5), (6), I
(8)	$P\vee Q$	P
(9)	Q	T, (7), (8), I

例3.2.8

如果马会飞或羊吃草，则母鸡就会是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子还会跑；烤熟的鸭子不会跑。所以羊不吃草。

分析：令P：马会飞； Q：羊吃草；

R：母鸡是飞鸟；

S：烤熟的鸭子还会跑。

符号化上述语句为：

$\Gamma=\{P\vee Q\rightarrow R, R\rightarrow S, \neg S\}$，$G=\neg Q$。

证明$\Gamma\Rightarrow G$。

例3.2.8 证明

(1)	$\neg S$	P
(2)	$R \to S$	P
(3)	$\neg R$	T, (1), (2), I
(4)	$P \vee Q \to R$	P
(5)	$\neg (P \vee Q)$	T, (3), (4), I
(6)	$\neg P \wedge \neg Q$	T, (5), E
(7)	$\neg Q$	T, (6), I

3.3 谓词逻辑的推理理论

3.3.1 谓词演算的演绎与推理

定义3.3.1 设G_1，G_2，…，G_n，H是公式，称H是G_1，G_2，…，G_n的逻辑结果($G_1, G_2, \cdots, G_n$共同蕴涵H)，当且仅当H是$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$的**逻辑结果**(logic conclusion)。记为$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$，此时称$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$为**有效的**(efficacious)，否则称为无效的（inefficacious）。$G_1, G_2, \cdots, G_n$称为一组**前提**(Premise)，有时用集合Γ来表示，记$\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$。H称为**结论**(conclusion)。又称H是前提集合的逻辑结果。记为$\Gamma \Rightarrow H$。

定理3.3.1

公式H是前提集合$\Gamma=\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$的逻辑结果当且仅当$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \rightarrow H$为**有效公式**。

一、推理规律

（1） I_{16}： $(\forall x)G(x) \Rightarrow (\exists x)G(x)$；

（2） I_{17}： $(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x)$

$\Rightarrow (\forall x)(G(x) \vee H(x))$；

I_{18}： $(\exists x)(G(x) \wedge H(x))$

$\Rightarrow (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x)$；

（3） I_{19}： $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$

$\Rightarrow (\forall x)G(x) \rightarrow (\forall x)H(x)$；

I_{20}： $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$

$\Rightarrow (\exists x)G(x) \rightarrow (\exists x)H(x)$。

推理规律（续）

（4） I_{21}： $(\exists x)(\forall y)G(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)G(x, y)$；

I_{22}： $(\forall x)(\forall y)G(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)G(x, y)$；

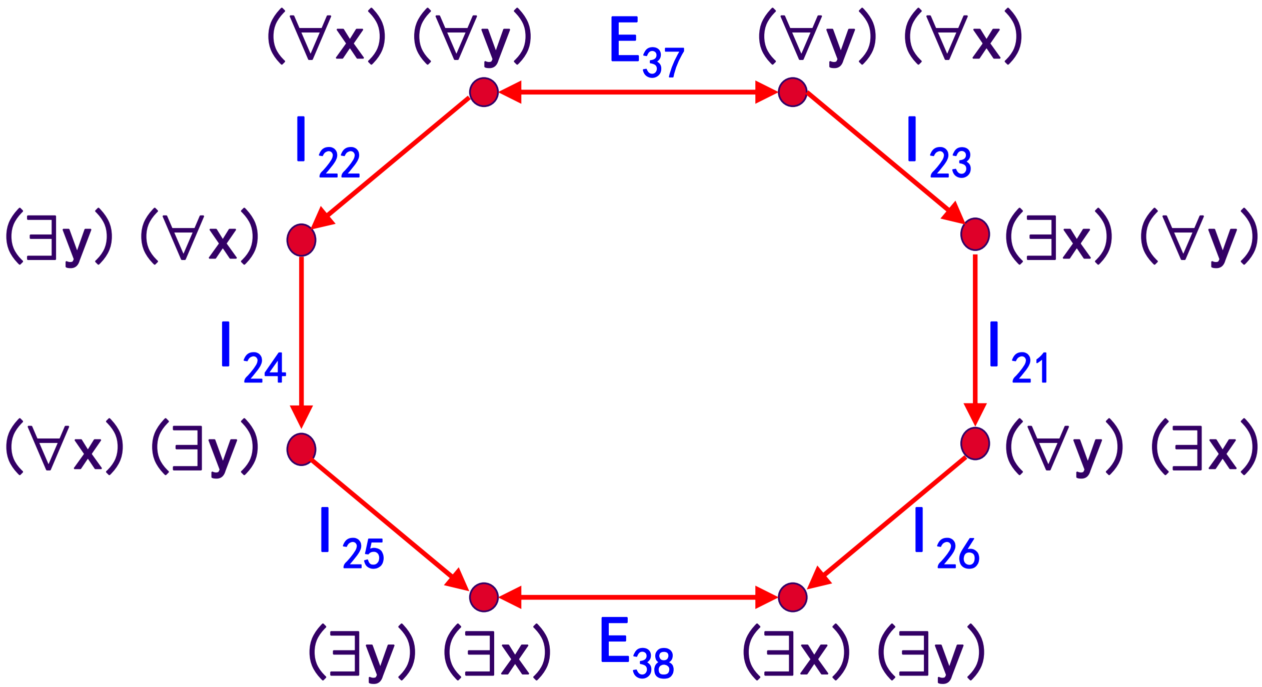
I_{23}： $(\forall y)(\forall x)G(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)G(x, y)$；

I_{24}： $(\exists y)(\forall x)G(x, y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)G(x, y)$；

I_{25}： $(\forall x)(\exists y)G(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)G(x, y)$；

I_{26}： $(\forall y)(\exists x)G(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)G(x, y)$；

量词关系图



二、推理规则

1、US（全称特指规则，Universal SPecify）：

$$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(y)$$

其中G(x)对y是自由的

推广：$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c)$

其中c为任 个体常量

2、ES（存在 则，Existential SPecify ）：

在G(x)中，x不出现在量词
$(\forall y)$或$(\exists y)$
的辖域之内。

其 ；若G(x)中
还有除x以外的自由变量时，则必须用这些变量
的函数符号来取代。

二、推理规则

1、US（全称特指规则，Universal SPecify）：

$$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(y)$$

其中G(x)对y是自由的

推广：

$$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c)$$

其中c为任意个体常量

2、ES（存在特指规则， Existential SPecify ）：

$$(\exists x)G(x) \Rightarrow G(c)$$

其中c为使G(c)为真的特定个体常量；若G(x)中还有除x以外的自由变量时，则必须用这些变量的函数符号来取代。

推理规则（续）

3、UG（全称推广规则， Universal Generalize ）：

$$G(y) \Rightarrow (\forall x)G(x)$$

其中G(y)对x是自由的且G(y)中无自由变量x

4、EG（存在推广规则，Existential Generalize）：

$$G(c) \Rightarrow (\exists x)G(x)$$

其中G(c)对x是自由的且G(c)中无自由变量x

推广： $G(y) \Rightarrow (\exists x)G(x)$

其中G(y)对x是自由的且G(y)中无自由变量x

推理规则的正确使用(1)

例3.3.1 设实数集中，语句“不存在最大的实数”可符号化为：

$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$。 其中：$G(x, y)$：$y>x$。

推导1：

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ P

（2）$(\exists y)G(y, y)$ US,(1)

分析：推导1是错误的。正确的推导如下：

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ P

（2）$(\exists y)G(z, y)$ US,(1)

推理规则的正确使用(1)

例3.3.1 设实数集中，语句"不存在最大的实数"可符号化为：

$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$。 其中：$G(x, y)$：$y>x$。

推导1：

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ P

注意：使用US规则来消去量词时，若选用变元y取代x，则要求在原公式中x不能出现在量词$(\forall y)$或$(\exists y)$的辖域之内。

（2）$(\exists y)G(z, y)$ US,(1)

推理规则的正确使用（2）

推导2：

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ P

（2）$(\exists y)G(z, y)$ US,(1)

（3）$G(z, c)$ ES,(2)

分析：推导2是错误的。正确的推导如下：

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ P

（2）$(\exists y)G(z, y)$ US,(1)

（3）$G(z, f(z))$ ES,(2)

推理规则的正确使用（2）

推导2：

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ P

（2）$(\exists y)G(z, y)$ US,(1)

（3）$G(z, c)$ ES,(2)

注意：使用ES规则来消去量词时， 若还有其它自由变元时，则必须用关于自由变元的函数符号来取代常量符号.

推理规则的正确使用（3）

推导3：

（1）$(\exists y)G(z, y)$ P

（2）$(\forall y)(\exists y)G(y, y)$ UG,(1)

分析：推导3是错误的。正确的推导如下：

（1）$(\exists y)G(z, y)$ P

（2）$(\forall z)(\exists y)G(z, y)$ UG,(1)

推理规则的正确使用（3）

推导3：

（1）$(\exists y)G(z, y)$　　P

（2）$(\forall y)(\exists y)G(y, y)$　　UG,(1)

分析：推导3是错误的。正确的推导如下：

注意：使用UG规则来添加量词时，若选用变元x取代y，则要求在原公式中y不能出现在量词$(\forall x)$或$(\exists x)$的辖域之内。

推理规则的正确使用（4）

推导4：

（1）$G(x, c)$ P

（2）$(\exists x)G(x, x)$ EG,(2)

分析：推导4是错误的。正确的推导如下：

（1）$G(x, c)$ P

（2）$(\exists y)G(x, y)$ EG,(2)

推理规则的正确使用（4）

推导4：

（1）G(x, c)　　　　　　P

（2）(∃x)G(x, x)　　　　EG,(2)

分析：推导4是错误的。正确的推导如下：

注意：使用EG规则来添加量词时，若选用变元x取代c，则要求在原公式中c不能出现在量词(∀x)或(∃x)的辖域之内且原公式中中无自由变量x。

3.3.2 谓词演算的综合推理方法

1. 推导过程中可以引用命题演算中的规则P 和规则T 。
2. 如果结论是以蕴涵形式(或析取形式)给出，我们还可以使用规则CP。
3. 若需消去量词，可以引用规则US和规则ES。
4. 当所要求的结论可能被定量时，此时可引用规则UG和规则EG将其量词加入。

谓词演算的综合推理方法（续1）

5. 证明时可采用如命题演算中的直接证明方法和间接证明方法。

6. 在推导过程中，对消去量词的公式或公式中不含量词的子公式，完全可以引用命题演算中的基本等价公式和基本蕴涵公式。

7. 在推导过程中，对含有量词的公式可以引用谓词中的基本等价公式和基本蕴涵公式。

例3.3.1

证明苏格拉底三段论：“所有的人都是要死的；苏格拉底是人。所以苏格拉底是要死的。”

解：设H(x)：x是人；M(x)：x是要死的；

s：苏格拉底。 则符号化为

$(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))$，H(s)

(4)错了！

证明：

(1)	$(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))$	P
(2)	$H(x)\rightarrow M(x)$	US,(1)
(3)	$H(s)$	P
(4)	$M(s)$	T,(2),(3),I

例3.3.1

证明苏格拉底三段论：“所有的人都是要死的；苏格拉底是人。所以苏格拉底是要死的。”

解：设H(x)：x是人；M(x)：x是要死的；

s：苏格拉底。 则符号化为：

$$(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x)),\ H(s) \Rightarrow M(s)$$

证明：(1)	$(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))$	P
(2)	$H(s)\rightarrow M(s)$	US,(1)
(3)	$H(s)$	P
(4)	$M(s)$	T,(2),(3),I

例3.3.2（找茬）

证明：

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)),\ (\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$$

有下面的推导：

(1)	$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(2)	$P(x)\rightarrow Q(x)$	US, (1)
(3)	$(\exists x)P(x)$	P
(4)	$P(c)$	ES, (3)
(5)	$Q(c)$	T, (2), (4), I
(6)	$(\exists x)Q(x)$	EG, (5)

例3.3.2（2）

推导可修改为：

(1)	$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(2)	$P(c)\rightarrow Q(c)$	US, (1)
(3)	$(\exists x)P(x)$	P
(4)	$P(c)$	ES, (3)
(5)	$Q(c)$	T, (2), (4), I
(6)	$(\exists x)Q(x)$	EG, (5)

例3.3.2（3）

请看推导：

正确！

(1)	$(\exists x)P(x)$	P
(2)	$P(c)$	ES, (1)
(3)	$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(4)	$P(c)\rightarrow Q(c)$	US, (3)
(5)	$Q(c)$	T, (2), (4), I
(6)	$(\exists x)Q(x)$	EG, (5)

3.3.3 谓词逻辑推理的难点

1. 在推导过程中，如既要使用规则US又要使用规则ES消去公式中的量词，而且选用的个体是同一个符号，则必须先先使用规则ES，再使用规则US。然后再使用命题演算中的推理规则，最后使用规则UG或规则EG引入量词，得到所要的结论。
2. 如一个变量是用规则ES消去量词，对该变量在添加量词时，则只能使用规则EG，而不能使用规则UG；如使用规则US消去量词，对该变量在添加量词时，则可使用规则EG和规则UG。

谓词逻辑推理的难点（续）

3. 如有两个含有存在量词的公式，当用规则ES消去量词时，不能选用同样的一个常量符号来取代两个公式中的变元，而应用不同的常量符号来取代它们。
4. 在用规则US和规则ES消去量词、用规则UG和规则EG添加量词时，此量词必须位于整个公式的最前端，并且它的辖域为其后的整个公式。

谓词逻辑推理的难点（续）

5. 在添加量词$(\forall x)$、$(\exists x)$时，所选用的x不能在公式G(y)或G(c)中自由出现且G(y)或G(c)对x是自由的。
6. 在使用规则EG引入存在量词$(\exists x)$时，此x不得仅为G(c)或G(y)中的函数变元。在使用规则UG引入全称量词$(\forall x)$时，此x不得为G(y)中的函数变元(因该函数变元不得作为自由变元)。
7. 在使用规则UG引入全称量词$(\forall x)$时，G(y)中不得出现在使用规则US引入y之后由规则ES引入的常量或函数。

3.3.4 谓词逻辑推理的应用

例3.3.5 每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车；每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车；有的人不喜欢骑自行车。因而有的人不喜欢步行。

设：H(x)：x是人； P(x)：x喜欢坐汽车；

Q(x)：x喜欢骑自行车； R(x)：x喜欢步行。

则上述语句可符号化为：

$(\forall x)(H(x)\wedge R(x)\rightarrow\neg P(x))$,

$(\forall x)(H(x)\rightarrow P(x)\vee Q(x))$,

$(\exists x)(H(x)\wedge\neg Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(H(x)\wedge\neg R(x))$

例3.3.5证明

(1)	$(\exists x)(H(x)\land\neg Q(x))$	P
(2)	$H(c)\land\neg Q(c)$	ES,(1)
(3)	$H(c)$	T,(2),I
(4)	$\neg Q(c)$	T,(2),I
(5)	$(\forall x)(H(x)\rightarrow P(x)\lor Q(x))$	P
(6)	$H(c)\rightarrow P(c)\lor Q(c)$	US,(5)
(7)	$P(c)\lor Q(c)$	T,(3),(6),I
(8)	$P(c)$	T,(4),(7),I

例3.3.5（续）

(9)	$(\forall x)(H(x)\wedge R(x)\rightarrow\neg P(x))$	P
(10)	$H(c)\wedge R(c)\rightarrow\neg P(c)$	US,(9)
(11)	$\neg(H(c)\wedge R(c))$	T,(8),(10),I
(12)	$\neg H(c)\vee\neg R(c)$	T,(11),E
(13)	$\neg R(c)$	T,(3),(12),I
(14)	$H(c)\wedge\neg R(c)$	T,(3),(13),I
(15)	$(\exists x)(H(x)\wedge\neg R(x))$	EG,(14)

例3.3.6 ：

证明下述论断的正确性：

所有的哺乳动物都是脊椎动物；并非所有的哺乳动物都是胎生动物；故有些脊椎动物不是胎生的。

解：设谓词如下：

$P(x)$：x是哺乳动物；

$Q(x)$：x是脊椎动物；

$R(x)$：x是胎生动物。

则有：

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)),\ \neg(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$$

$$\Rightarrow (\exists x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$$

证明：

1)	$\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$	P
2)	$(\exists x)\neg(\neg P(x)\vee R(x))$	T,1),E
3)	$\neg(\neg P(c)\vee R(c))$	ES,2)
4)	$(P(c)\wedge\neg R(c))$	T,3),E
5)	$P(c)$	T,4),I
6)	$\neg R(c)$	T,4),I
7)	$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
8)	$P(c)\rightarrow Q(c)$	US,7)
9)	$Q(c)$	T,5),8),I
10)	$Q(c)\wedge\neg R(c)$	T,6),9),I
11)	$(\exists x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$	EG,10)

例3.3.7

证明下列论断的正确性：

有些学生相信所有的教师；任何一个学生都不相信骗子；所以，教师都不是骗子。

解：设谓词如下：

S(x)：x是学生　　T(x)：x是教师

P(x)：x是骗子　　L(x,y)：x相信y

则可符号化为：

$$(\exists x)(S(x)\land(\forall y)(T(y)\to L(x,y))),$$

$$(\forall x)(\forall y)((S(x)\land P(y))\to\neg L(x,y))$$

$$\Rightarrow\quad(\forall x)(T(x)\to\neg P(x))$$

证明：

1) $(\exists x)(S(x)\wedge(\forall y)(T(y)\rightarrow L(x,y)))$	P
2) $S(c)\wedge(\forall y)(T(y)\rightarrow L(c,y))$	ES,1)
3) $S(c)$	T,2),I
4) $(\forall y)(T(y)\rightarrow L(c,y))$	T,2),I
5) $T(x)\rightarrow L(c,x)$	US,4)
6) $(\forall x)(\forall y)((S(x)\wedge P(y))\rightarrow\neg L(x,y))$ P	
7) $(\forall y)((S(c)\wedge P(y))\rightarrow\neg L(c,y))$	US,6)
8) $(S(c)\wedge P(x))\rightarrow\neg L(c,x)$	US,7)

证明:

9)	$S(c)\rightarrow(P(x)\rightarrow\neg L(c,x))$	T,8),E
10)	$P(x)\rightarrow\neg L(c,x)$	T,3),8),E
11)	$L(c,x)\rightarrow\neg P(x)$	T,10),E
12)	$T(x)\rightarrow\neg P(x)$	T,5),11),E
13)	$(\forall x)(T(x)\rightarrow\neg P(x))$	US,12)

3.4 数学归纳法

3.4.1 数学归纳法原理

假设要证明的命题能写成形式:

$\forall n \geq n_0$，有$P(n)$

其中n_0是某个固定的整数,

即：希望证明对所有的整数$n \geq n_0$都有$P(n)$为真。

数学归纳法原理

假设

1）验证$n=n_0$，有$P(n_0)$为真；　　　　(归纳基础)

2）假设对于$n=k(k\geq n_0)$，有$P(k)$为真；(归纳假设)

3）证明$n=k+1$，有$P(k+1)$为真。　　　　(归纳结论)

结论　对所有的整数$n\geq n_0$，都有$P(n)$为真。

谓词表示：

$$(\exists n_0)(P(n_0)\wedge(\forall n)((n=k)\wedge P(k)\rightarrow P(k+1))=1$$

强形式数学归纳法原理

假设

1） 验证$n=n_0$、n_0+1，有$P(n_0)$、 $P(n_0+1)$为真；
(归纳基础)

2）假设对于$n\leq k(k\geq n_0)$，有$P(n)$为真； (归纳假设)

3）证明$n=k+1$，有$P(k+1)$为真。 (归纳结论)

结论 对所有的整数$n\geq n_0$，都有$P(n)$为真。

谓词表示：

$$(\exists n_0)(P(n_0)\wedge P(n_0+1)\wedge(\forall n)((n\leq k)\wedge P(n)\to P(k+1))$$

$$=1$$

例3.4.1

用数学归纳法证明：

对所有n≥1，有$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

证明 归纳基础验证

$1=\dfrac{1(1+1)}{2}$显然P(1)真值为1；

归纳假设假定 对于n=k(k≥1)，有P(k)为真，即有

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2};$$

例3.4.1证明

归纳结论证明　对于n＝k＋1，有P(k+1)为真

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=(k+1)(\frac{k}{2}+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

由数学归纳法原理得到，P(n)对所有n≥1为真。

例3.4.2

对每个正整数n≥1，能惟一地写成 $p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_s^{a_s}$，其中$P_i$是素数且满足$P_1<P_2<\cdots<P_s$。

分析 设P(n)：$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_s^{a_s}$； 由于素数一定是大于等于2的正整数，因此，$n_0=2$。

例3.4.2

证明 **归纳基础验证**

因为$2=2^1$，$3=3^1$，所以P(2)、P(3)为真；

归纳假设假定

对$n \le k$的所有正整数，都有P(n)为真，即

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s}$$

例3.4.2(续)

归纳结论证明 对n＝k＋1，需分两种情况讨论：

（1） 如果n本身就是一个素数，则$k+1=(k+1)^1$，即P(k+1)为真；

（2） 如果n不是一个素数，则$k+1=lm$，其中$2\le l\le k$，$2\le m\le k$，此时由归纳假设有

$$l=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\ldots p_s^{b_s},$$

$$m=p_1^{c_1}p_2^{c_2}\ldots p_s^{c_s}$$

其中，$P_1, P_2, \cdots, P_s$是素数，且是包含l、m中全部分解因子，b_i、$c_i\ge 0$的自然数，

例3.4.2(续)

为此有

$$k+1=lm=p_1^{b_1}p_2^{b_2}...p_s^{b_s}\ p_1^{c_1}p_2^{c_2}...p_s^{c_s}$$

$$=p_1^{b_1+c_1}p_2^{b_2+c_2}...p_s^{b_s+c_s}=\ p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_s^{a_s}$$

由于$P_1, P_2, \cdots, P_s$是素数，所以k+1能分解成素数的积，又因为l和m的因子分解是惟一的，所以k＋1的因子分解也是惟一的，所以P(k+1)是真的。由数学归纳法原理得到，P(n)对所有n≥1为真。

Thank You !