第九章 非正弦周期电流电路

非正弦周期电流电路

- 非正弦周期电流、电压的定义
- 非正弦周期函数展开为傅立叶级数
- 非正弦周期电流、电压的有效值
- 非正弦周期电流电路稳态分析计算
- 非正弦周期电流电路的平均功率

9.1　非正弦周期电流及电压

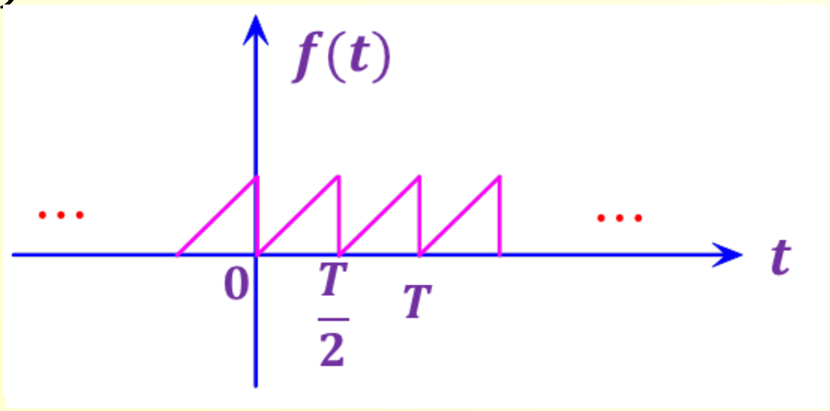
定义：随时间按非正弦规律周期变化的电流或电压。

分类：

1）偶函数：　$f(t)=f(-t)$　　2）奇函数：　$f(t)=-f(-t)$

3）奇谐函数：$f(t)=-f(t\pm\frac{T}{2})$

4）偶谐函数：$f(t)=f(t\pm\frac{T}{2})$



9.2　非正弦周期函数傅立叶级数展开式

非正弦周期函数$f(t)$，周期为T，若满足狄里赫利条件 ，可展开成傅立叶级数 ：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n cosn\omega_1 t+b_n sinn\omega_1 t]$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n cos(n\omega_1 t+\varphi_n)\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

其中：$\omega_1=\frac{2\pi}{T}$　基波角频率

$$\begin{cases} a_n = A_n cos\varphi_n \\ b_n = -A_n sin\varphi_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \\ a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cosn\omega_1 t dt \\ b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)sinn\omega_1 t dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0=a_0 \\ A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \\ \varphi_n=arctan\frac{-b_n}{a_n}=-arctan\frac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

讨论： $$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

（1）$a_0=A_0$——常量，与频率无关（直流分量、零频分量）

（2）$A_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$ ——正弦量，与n有关（谐波分量）

（3）谐波分类：

$A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ 基波分量 $\omega=\omega_1$

$A_2\cos(2\omega_1 t+\varphi_2)$ 二次谐波 $\omega=2\omega_1$

……

$A_k\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)$ k次谐波 $\omega=k\omega_1$

高次谐波：奇次谐波、偶次谐波

（4）函数对称性与谐波的成份

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n cosn\omega_1 t+b_n sinn\omega_1 t]$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n cos\,(n\omega_1 t+\varphi_n)\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

偶函数:无奇函数分量 $b_n=0 \quad a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)cosn\omega_1 tdt$

奇函数:无偶函数分量 $a_n=0 \quad b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)sinn\omega_1 tdt$

奇谐函数：无偶次谐波 $a_{2k}=b_{2k}=0 \quad A_{2k}=0$

偶谐函数：无奇次谐波 $a_{2k+1}=b_{2k+1}=0 \quad A_{2k+1}=0$

9.3 非正弦周期电量的有效值

非正弦周期电流、电压，则其有效值的定义是

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt} \qquad U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}$$

计算： （1）按定义计算；

（2）按傅立叶系数计算：

$$i(t)=I_0+\sum_{n=1}^{\infty} I_{mn}\cos(n\omega_1 t+\varphi_{in}) \qquad I=\sqrt{I_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} I_{mn}^2}=\sqrt{I_0^2+\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}$$

$$u(t)=U_0+\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}\cos(n\omega_1 t+\varphi_{un}) \qquad U=\sqrt{U_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}^2}=\sqrt{U_0^2+\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}$$

说明：

1）对于$f(t)$各次谐波有： $I_n=\dfrac{I_{nm}}{\sqrt{2}}$ 或 $I_{nm}=\sqrt{2}I_n$

2）对于$f(t)$仅有有效值；

3）对于非正弦电量$i(t)$和$u(t)$：

I_0, U_0——直流分量，可用磁电式指针仪表测量；

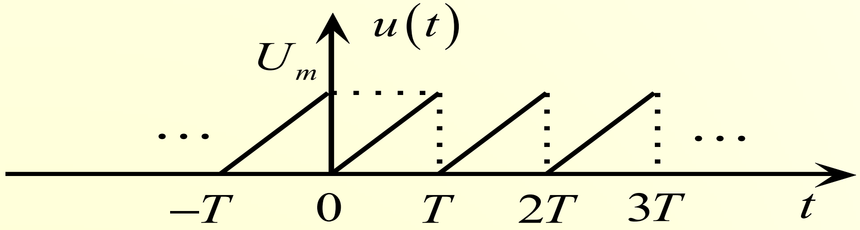
I, U —— 有效值，可用电磁或电动式指针仪表测量；

I_{av}, U_{av}——平均值，可用全波整流磁电式指针仪表测量。

例1　已知电 $i(t) = 5 + 14.14cost + 7.07cos2t, A$　。求其有效值I。

解： $$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{5^2 + (\frac{14.14}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{7.07}{\sqrt{2}})^2} = 12.25\ A$$

例2 求图示锯齿波电压的有效值。



解法1：先将展开成傅里叶级数，然后再求解。

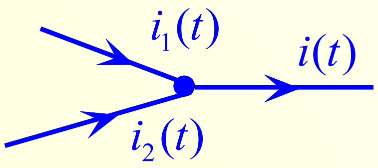
解法2：根据定义求解

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [u(t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [\frac{U_m}{T}t]^2 dt} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$$

例3 图示电路，已知$i_1(t)=2\sqrt{2}cos\omega tA$ 。求下列各情况下的$i(t)$及有效值I：

(1) $i_2(t)=1A$　　(2) $i_2(t)=2\sqrt{2}\cos\left(\omega t+60^{\circ}\right)A$

(3) $i_2(t)=2\sqrt{2}\cos\left(3\omega t+60^{\circ}\right)A$



解：

(1) $i(t)=i_1+i_2=1+2\sqrt{2}cos\omega t\ \ A$　　$I=\sqrt{1^2+2^2}=2.236\ A$

(2) $i(t)=i_1+i_2=2\sqrt{2}cos\omega t+2\sqrt{2}\cos(\omega t+60^{\circ})\ \ A$　用相量法。

$\dot{I}_1=2\angle 0^{\circ}=2\ A$　　$\dot{I}_2=2\angle 60^{\circ}=1+j\sqrt{3}\ A$　　$I=2\sqrt{3}\ A$

$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=3+j\sqrt{3}=2\sqrt{3}\angle 30^{\circ}A$　　$i(t)=2\sqrt{3}\sqrt{2}\cos\left(\omega t+30^{\circ}\right)\ A$

(3) $i(t)=i_1+i_2=2\sqrt{2}cos\omega t+2\sqrt{2}\cos(3\omega t+60^{\circ})\ \ A$

$I=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\ A$

9.4 非正弦周期电流电路稳态分析

一般步骤：

（1） 将激励为非正弦周期函数展开为傅立叶级数：

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm}\cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

将激励分解为直流分量和无穷多个不同频率的正弦激励分量；

（2） 求各激励分量单独作用时的响应分量：

1）直流分量作用：直流分析（C开路，L短路）求Y_0；

2）基波分量作用:$\omega = \omega_1$（正弦稳态分析）求有y_1；

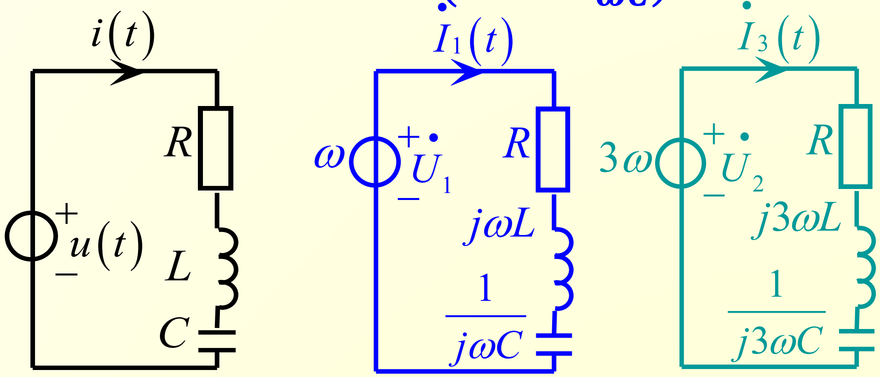
3）二次谐波分量作用:$\omega = 2\omega_1$（正弦稳态分析）求有y_2；

... ...

（3）时域叠加：$y(t) = Y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$

$$\dot{I} \neq I_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots + \dot{I}_n$$

例1 图中，已知 $u(t)=50cos\omega t+25cos\left(3\omega t+60^{\circ}\right)V$，电路对基波的阻抗$Z_1=R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)=8+j(2-8)\Omega$。求稳态电流$i(t)$。



解：对基波： $\dot{U}_1=\dfrac{50}{\sqrt{2}}\angle 0^{\circ}\ V$

$$Z_1=8-j6=10\angle -36.87^{\circ}\ \Omega$$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_1}{Z_1}=\frac{\frac{50}{\sqrt{2}}\angle 0^{\circ}}{10\angle -36.87^{\circ}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\angle 36.87^{\circ}\ A$$

$$i_1(t)=5\cos\left(\omega t+36.87^{\circ}\right)A$$

对三次谐波：

$$\dot{U}_3=\frac{25}{\sqrt{2}}\angle 60^{\circ}\ V$$

$$Z_3=8+j(3\times 2-\frac{8}{3})=8.67\angle 22.62^{\circ}\ \Omega$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{U}_3}{Z_3}=\frac{2.89}{\sqrt{2}}\angle 37.4^{\circ}\ A$$

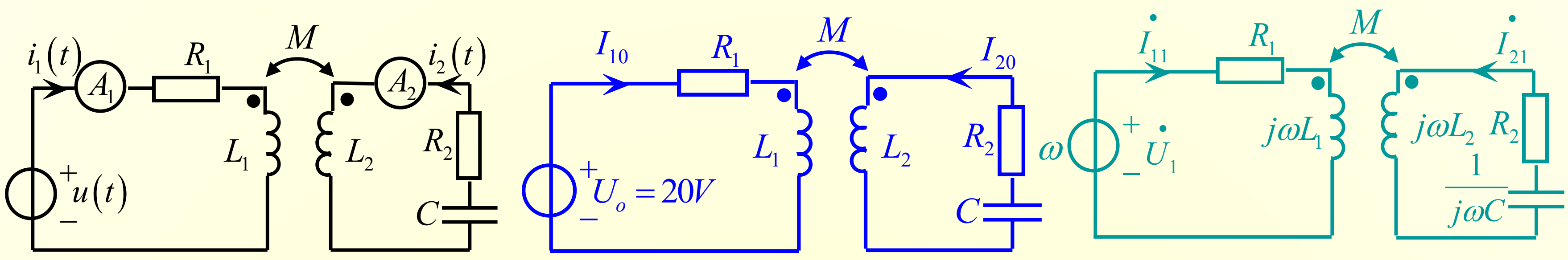
$$i_3(t)=2.89\cos\left(3\omega t+37.4^{\circ}\right)A$$

$$i(t)=i_1(t)+i_3(t)$$

$$=5\cos\left(\omega t+36.87^{\circ}\right)+2.89\cos\left(3\omega t+37.4^{\circ}\right)A$$

例2 图示，已知$R_1 = 2\Omega, R_2 = 3\Omega, \omega L_1 = \omega L_2 = 4\Omega, \omega M = 1\Omega, \frac{1}{\omega C} = 6\Omega$，

$u(t) = 20 + 20cos\omega t\ V$.求两个电流表的读数和 $i_1(t), i_2(t)$。



解:直流分量作用 $I_{10} = \frac{U_0}{R_1} = 10\ A$ $I_{20} = 0$

一次谐波作用 $\dot{U}_1 = \frac{20}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\ V$

$$I_1 = \sqrt{I_{10}^2 + I_{11}^2} = \sqrt{10^2 + (\frac{4.24}{\sqrt{2}})^2} = 10.4A$$

$$\dot{I}_{11} = \frac{4.24}{\sqrt{2}}\angle -61.8^\circ\ A$$

$$I_2 = \sqrt{I_{20}^2 + I_{21}^2} = I_{21} = 0.832\ A$$

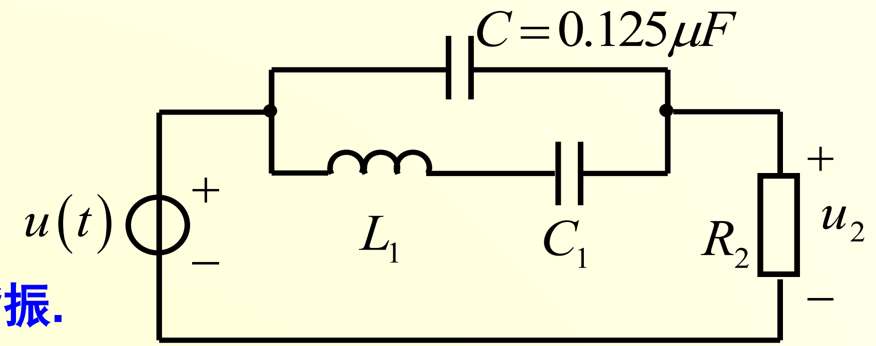
$$\dot{I}_{21} = \frac{1.18}{\sqrt{2}}\angle -118.1^\circ\ A$$

$$i_1(t) = I_{10} + i_{11}(t) = 10 + 4.24\cos(\omega t - 61.8^\circ)\ A$$

$$i_2(t) = I_{20} + i_{21}(t) = 1.18\cos(\omega t - 118.1^\circ)\ A$$

例3 图示已知 $u(t) = U_{1m}cos(10^3 t + \varphi_1) + U_{3m}cos(3\times 10^3 t + \varphi_3)\,V$ 。

今欲使$u_2(t) = U_{1m}cos(10^3 t + \varphi_1)$ V, ，求L_1, C_1值。



解:

应使L_1, C_1，对 $\omega = 10^3 rad/s$发生串联谐振.

使L_1, C_1, C 对$3\omega = 3\times 10^3 rad/s$ 发生并联谐振.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \omega \\ \dfrac{1}{\sqrt{L_1 \dfrac{CC_1}{C+C_1}}} = 3\omega \end{cases}$$

$$L_1 = \frac{1}{8\omega^2 C} = 1\,H$$

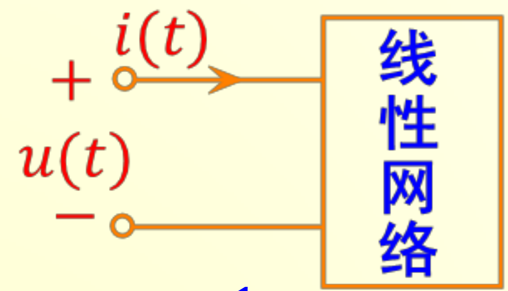
$$C_1 = \frac{1}{\omega^2 L_1} = 1\mu F$$

9.5 非正弦周期电流电路的平均功率

$$u(t) = U_0 + U_{1m}\cos(\omega t + \varphi_{u1}) + U_{2m}\cos(2\omega t + \varphi_{u2}) + \cdots + U_{nm}\cos(n\omega t + \varphi_{un})$$

$$i(t) = I_0 + I_{1m}\cos(\omega t + \varphi_{i1}) + I_{2m}\cos(2\omega t + \varphi_{i2}) + \cdots + I_{nm}\cos(n\omega t + \varphi_{in})$$

该单口网络吸收的平均功率（有功功率）为



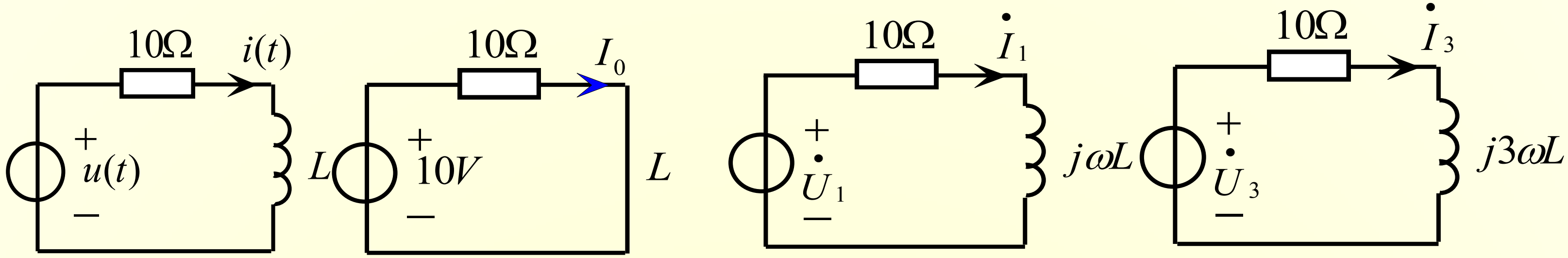
$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)i(t)dt$$

$$= U_0I_0 + \frac{1}{2}U_{1m}I_{1m}\cos(\varphi_{u1} - \varphi_{i1}) + \frac{1}{2}U_{2m}I_{2m}\cos(\varphi_{u2} - \varphi_{i2}) + \cdots + \frac{1}{2}U_{nm}I_{nm}\cos(\varphi_{un} - \varphi_{in})$$

或

$$P = U_0I_0 + U_1I_1\cos(\varphi_{u1} - \varphi_{i1}) + U_2I_2\cos(\varphi_{u2} - \varphi_{i2}) + \cdots + U_nI_n\cos(\varphi_{un} - \varphi_{in})$$

例1 图示电路，电压$u(t)=10+10\sqrt{2}cos\omega t+5\sqrt{2}cos\left(3\omega t+30^{\circ}\right)V$，已知$\omega L=10\Omega$，求电流$i(t)$及其有效值，并求电路吸收的平均功率$P$的值。



解：（1）当10V直流电压单独作用时

$$I_0=1\ A$$

（2）当一次谐波作用时

$$\dot{U}_1=10\angle 0^{\circ}\ V \quad j\omega L=j10\Omega$$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_1}{10+j\omega L}=\frac{1}{\sqrt{2}}\angle -45^{\circ}\ A$$

$$i_1(t)=cos\left(\omega t-45^{\circ}\right)A$$

（3）当三次谐波作用时 $\dot{U}_3=5\angle 30^{\circ}\ V$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{U}_3}{10+j3\omega L}=0.05\sqrt{10}\angle -41.6^{\circ}\ A$$

$$i_3(t)=0.05\sqrt{20}cos\left(3\omega t-41.6^{\circ}\right)A$$

（4）根据叠加定理

$$i(t)=I_0+i_1+i_3$$

$$=1+\cos\left(\omega t-45^{\circ}\right)+0.05\sqrt{20}\cos\left(3\omega t-41.6^{\circ}\right)A$$

$$I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_3^2}=1.23\ A$$

$$P=I^2R=15.1\ W$$

例2　有效值为100V 的正弦电压加在电感L两端，得电流的有效值为10A。当电压中含有三次谐波时，其有效值仍为100V，得电流的有效值为8A。求此电压中的基波和三次谐波电压的有效值各为多大?

解：

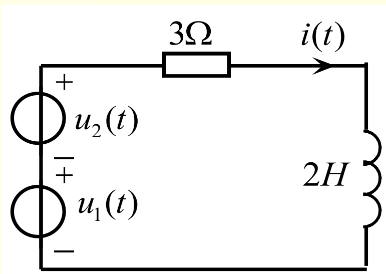
一次谐波阻抗的模为 $|Z_1| = \omega L = \dfrac{100}{10} = 10\ \Omega$

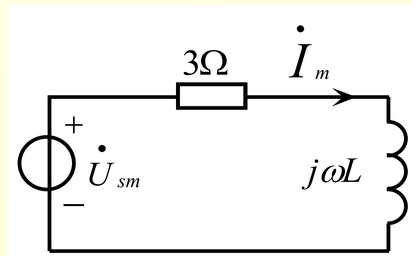
三次谐波阻抗的模为 $|Z_3| = 3\omega L = 3 \times 10 = 30\ \Omega$

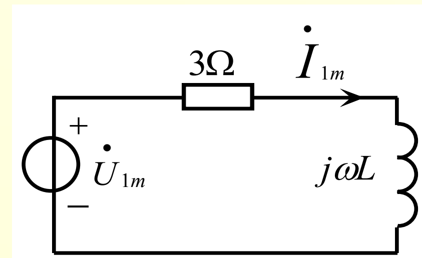
据题意有

$$\begin{cases} U_1^2 + U_3^2 = 100^2 \\ I_1^2 + I_3^2 = 8^2 \\ U_1 = 10I_1 \\ U_3 = 30I_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 7.714\ A \\ I_2 = 2.212\ A \\ U_1 = 77.14\ V \\ U_3 = 63.6\ V \end{cases}$$

例3　已知 $u_1(t)=u_2(t)=\cos t\ V$ 。（1）求$i(t)$及其有效值；（2）求电阻R吸收的平均功率P；（3）求$u_1(t)$单独作用时R 吸收的平均功率；（4）求$u_2(t)$单独作用时 R 吸收的平均功率；（5）由（2）、（3）、（4）计算的结果能得出什么结论？







解：(1) 由于两个电压源的频率相同，故不能用叠加定理求解。

$$u_s(t)=u_1+u_2=2\cos t\ V \qquad \dot U_{sm}=2\angle 0^\circ\ V \qquad j\omega L=j2\ \Omega$$

$$\dot I_m=\frac{2\angle 0^\circ}{3+j2}=0.555\angle -33.7^\circ\ A \qquad I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0.392\ A$$

（2）$P=I^2R=0.462\ W$

$$i(t)=0.555\cos\left(t-33.7^\circ\right)\ A$$

(3) $u_1(t)$ 单独作用时

$$\dot I_{1m}=\frac{1\angle 0^\circ}{3+j2}=0.2772\angle -33.7^\circ\ A \qquad P_1=I_1^2R=0.1154\ W$$

(4)　$u_2(t)$ 单独作用时同（2）

（5）可见　$P\neq P_1+P_2$

当电路中的独立源为同一频率时，不能把平均功率进行叠加。

主要内容

1. 非正弦周期信号的有效值

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}=\sqrt{I_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}I_n^2}$$

2. 非正弦周期电流电路的平均功率

$$P=U_0I_0+U_1I_1\cos(\varphi_{u1}-\varphi_{i1})+U_2I_2\cos(\varphi_{u2}-\varphi_{i2})+\cdots+U_nI_n\cos(\varphi_{un}-\varphi_{in})$$

3. 非正弦周期电流电路的稳态分析

1）将非正弦周期电流电压分解成直流分量及各次谐波分量，相当于在电路的输入端施加多个等效激励源。

2）分别计算各等效激励源单独作用时电路的响应分量。

3）根据叠加定律，各个响应分量的代数和就是非正弦周期电流电路的稳态响应。

注意：

1、当直流分量作用时，电感相当于短路；电容相当于开路。

2、当谐波分量作用时，由于激励都是正弦电源，因此用相量法求解各响应分量。

（注意：各正弦电源的频率不同，因此电抗元件对各次谐波的阻抗不同。）

3、由于不同频率的正弦量不能用相量法相加，故求出各响应分量后应写出瞬时表达式，在时域中进行叠加。

重点与难点

1、非正弦周期电流和电压的有效值、平均值及平均功率的概念及求法。

2、用叠加定理分析求解非正弦周期电流电路稳态响应的求解方法。