

离散数学



西北工业大学

2023年3月29日 星期三

Relations

关系理论历史悠久。它与集合论、数理逻辑、组合学、图论和布尔代数都有密切的联系。

关系是日常生活以及数学中的一个基本概念，例如：兄弟关系，师生关系、位置关系、大小关系、等于关系、包含关系等。

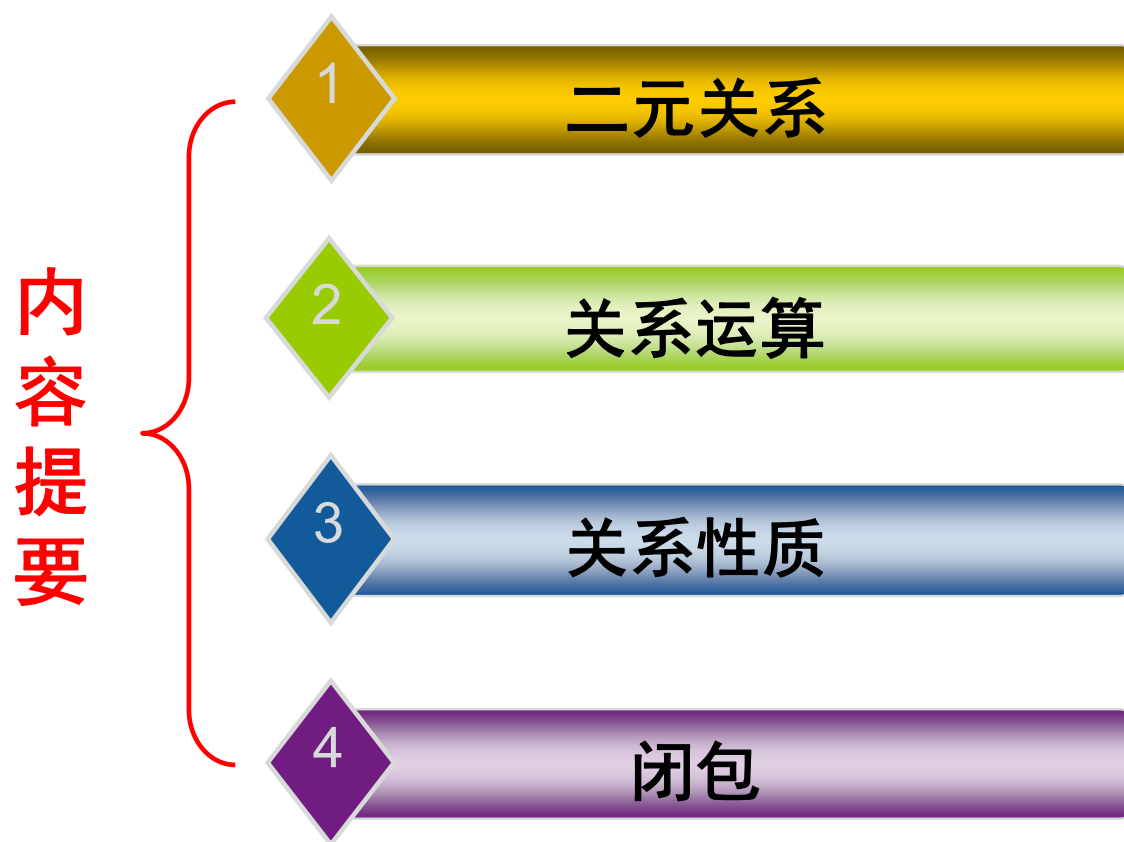
在某种意义下，关系可以理解为有联系的一些对象相互之间的比较行为。而根据比较结果来执行不同任务的能力是计算机最重要的属性之一，在执行一个典型的程序时，要多次用到这种性质。

关系理论在计算机科学技术中的应用

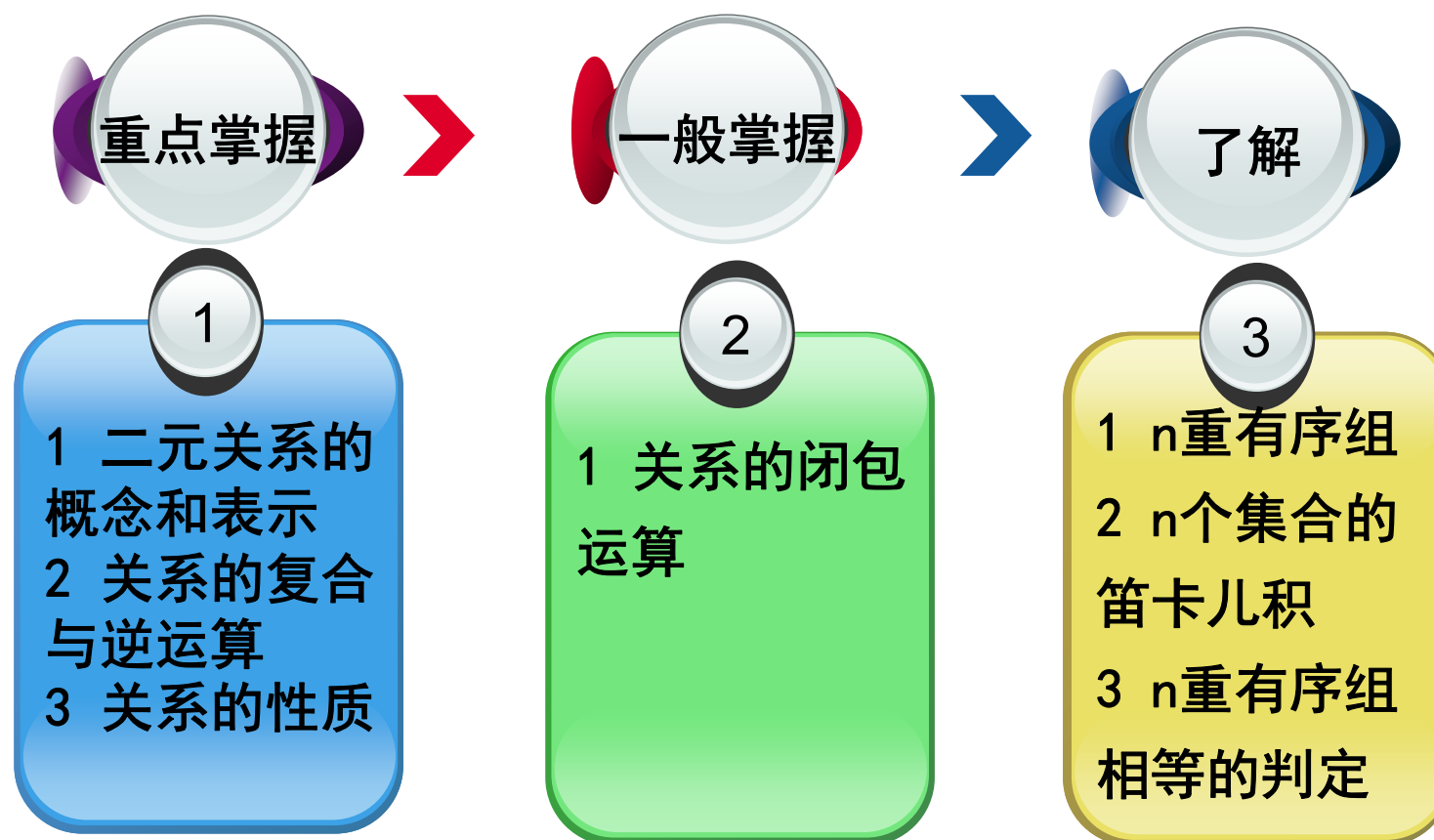
- 计算机程序的输入、输出关系；
- 数据库的数据特性关系；
- 数据结构本身就是一个关系等。
- 数据结构、情报检索、数据库、算法分析、计算机理论等计算机学科很好的数学工具。

内容提要

- 1 关系的定义
- 2 关系运算
- 3 二元关系的性质
- 4 等价关系
- 5 次序关系
- 6 函数



5.1 本章学习要求



5.2 Binary Relation (二元关系)

5.2.1 序偶与笛卡尔积

- 上, 下; 左, 右; $3 < 4$; 中国地处亚洲; 平面上点的坐标 (x, y) 等。
- **特征:** 成对出现、具有一定的顺序。
- **定义5.2.1** 由两个元素 x, y 按照**一定的次序**组成的**二元组**称为**有序偶对 (序偶)**, 记作 $\langle x, y \rangle$, 其中称 x 为 $\langle x, y \rangle$ 的第一元素, y 为 $\langle x, y \rangle$ 的第二元素。

例5. 2. 1

用序偶表示下列语句中的次序关系

- (1) 平面上点A的横坐标是x,
纵坐标是y, $x, y \in \mathbb{R}$; $\langle x, y \rangle, x, y \in \mathbb{R};$
- (2) 西安是陕西的省会; $\langle \text{西安}, \text{陕西} \rangle;$
- (3) 英语课本在书桌上; $\langle \text{英语课本}, \text{书桌} \rangle;$
- (4) 左, 右关系。 $\langle \text{左}, \text{右} \rangle。$

序偶与集合的关系

1. 序偶可以看作是具有两个元素的集合,
2. 但是序偶中的两个元素具有**确定的次序**。即
 $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$, **但是** $\{a, b\} = \{b, a\}$ 。

定义5.2.2 给定序偶 $\langle a, b \rangle$ 和 $\langle c, d \rangle$,

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d。$$

N重有序组

定义5.2.3 由 n 个元素 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 按照一定次序组成的 n 元组称为 **n 重有序组** (**n -Type**) (**Vector**), 记作: $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$

例5.2.2 用 n 重有序组描述下列语句。

- (1) 中国陕西西安西北工业大学网络空间安全学院;
- (2) 2014年3月10日18点16分25秒;
- (3) 16减5再加3除以7等于2。

Cartesian Product(笛卡尔积)

- Let A and B be two sets

The **cartesian product** of A and B, denoted by $A \times B$, is the set of all ordered pairs

$$\{ (a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B \}$$

- $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K \}$ = all ranks

$$B = \{ \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit \} = \text{all suits}$$

→ $A \times B$ = all 52 cards in a deck

$$= \{ (1, \spadesuit), (2, \spadesuit), (3, \spadesuit), \dots, (J, \clubsuit), (Q, \clubsuit), (K, \clubsuit) \}$$

Cartesian Product(笛卡尔积)

- Let A_1, A_2, \dots, A_k be k sets

The **cartesian product** of A_1, A_2, \dots, A_k , denoted by $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$, is the set of all ordered pairs $\{ (a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_j \in A_j \text{ for all } j = 1, 2, \dots, k \}$

- Let $A_j = \mathbb{R}$ the set of real numbers, for all j
 $\rightarrow A_1 \times A_2 \times A_3 = \text{the 3-d Euclidean space } \mathbb{R}^3$

例5. 2. 3

设 $A = \{a\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \Phi$, $D = \{1, 2\}$, 请分别写出下列笛卡儿积中的元素。

(1) $A \times B$, $B \times A$; (2) $A \times C$, $C \times A$;

(3) $A \times (B \times D)$, $(A \times B) \times D$ 。

注意

由例5.2.3我们可以看出：

- (1) 笛卡儿积不满足交换律；
- (2) $A \times B = \Phi$ 当且仅当 $A = \Phi$ 或者 $B = \Phi$ ；
- (3) 笛卡儿积不满足结合律；
- (4) 对有限集 A, B ，有 $|A \times B| = |B \times A| = |A| \times |B|$ 。

推广

定义5.2.6 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个集合, 称集合

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$= \{ \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \mid (a_i \in A_i) \wedge i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \}$$

为集合 A_1, A_2, \dots, A_n 的笛卡儿积 (Descartes Product)

当 $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ 时, 有 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A^n$ 。

定理5.2.3 当集合 A_1, A_2, \dots, A_n 都是有限集时,

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_n|。$$

Binary Relation

定义5.2.7 设 A, B 为两个非空集合，称 $A \times B$ 的任何子集 R 为**从 A 到 B 的二元关系**，简称关系(Relation)。如 $A=B$ ，则称 R 为 **A 上的二元关系**。

这里， A 称为 R 的**前域**， B 称为 R 的**后域**。

令 $C = \{x \mid \langle x, y \rangle \in R\} \subseteq A,$

$D = \{y \mid \langle x, y \rangle \in R\} \subseteq B,$

称 C 为 R 的**定义域**，记为 $C = \text{dom}R$ ；称 D 为 R 的**值域**，记 $D = \text{ran}R$ ；并称 $\text{fld}R = D \cup C$ 为 R 的**域**。

特别

当 $R = \emptyset$ 时，称 R 为**空关系** (empty relation)；

当 $R = A \times B$ 时，则称 R 为**全关系** (Total Relation)。

设一有序对 $\langle x, y \rangle$ ：

若 $\langle x, y \rangle \in R$ ，则记为 xRy ，读作“ x 对 y 有关系 R ”；

若 $\langle x, y \rangle \notin R$ ，则记为 \cancel{xRy} ，读作“ x 对 y 没有关系 R ”。

例5. 2. 4

假设 $A = \{a, b\}$ ， $B = \{c, d\}$ ，试写出从A到B的所有不同关系。

解 因为 $A = \{a, b\}$ ， $B = \{c, d\}$ ，所以

$$A \times B = \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}。$$

于是 $A \times B$ 的所有不同子集为：

0 - 元子集： Φ ；

1 - 元子集： $\{\langle a, c \rangle\}$ ， $\{\langle a, d \rangle\}$ ， $\{\langle b, c \rangle\}$ ， $\{\langle b, d \rangle\}$ ；

2 - 元子集： $\{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle\}$ ， $\{\langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle\}$ ，
 $\{\langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$ ， $\{\langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle\}$ ，
 $\{\langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle\}$ ， $\{\langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$ ；

例5.2.4 解（续）

3 - 元子集:

$\{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle\}, \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle\},$
 $\{\langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}, \{\langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\};$

4 - 元子集: $\{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}。$

注意

当集合A, B都是有限集时, $A \times B$ 共有 $2^{|A| \cdot |B|}$ 个不同的子集, 即从A到B的不同关系共有 $2^{|A| \cdot |B|}$ 个。

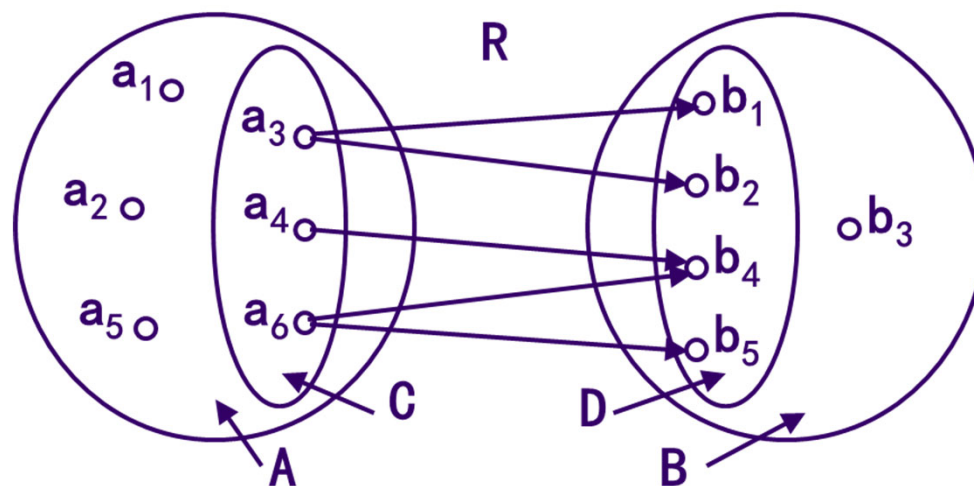
用图表示关系

假设 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$,

$C = \{a_3, a_4, a_6\}$, $D = \{b_1, b_2, b_4, b_5\}$,

$R = \{\langle a_3, b_1 \rangle, \langle a_3, b_2 \rangle, \langle a_4, b_4 \rangle, \langle a_6, b_4 \rangle, \langle a_6, b_5 \rangle\}$ 。

显然, $R \subseteq C \times D \subseteq A \times B$ 。



例5.2.5

求定义在 Z 上关系的定义域、值域和域。

$$(1) R_1 = \{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in Z) \wedge \{y = x^2\} \};$$

$$(2) R_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in Z) \wedge \{ |x| = |y| = 7 \} \}.$$

解 略

推广

定义5.2.8 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个非空集合，称 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的任意子集 R 为以 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 为基的 **n 元关系** (n -Relation)。

5.2.3 Representing Binary Relations

1. 集合表示法（枚举法和叙述法）

例5.2.7 (1) 设 $A=\{a\}$, $B=\{b, c\}$, 用枚举法写出从A到B的不同关系;

(2) 用叙述法写出定义在R上的“相等”关系。

解 (1) A到B的不同关系有:

$$R_1 = \Phi, \quad R_2 = \{\langle a, b \rangle\},$$

$$R_3 = \{\langle a, c \rangle\}, \quad R_4 = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle\};$$

(2) 设R上的“相等”关系为S, 则

$$S = \{\langle x, y \rangle \mid (x, y \in R) \wedge (x=y)\}.$$

2. 关系图法

(1) $A \neq B$

设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, R 是从 A 到 B 的一个二元关系, 则规定 R 的关系图如下:

- ①. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_1, b_2, \dots, b_m 分别为图中的结点, 用 “。” 表示;
- ②. 如 $\langle a_i, b_j \rangle \in R$, 则从 a_i 到 b_j 可用有向边 $a_i \xrightarrow{\quad} b_j$ 相连。 $\langle a_i, b_j \rangle$ 为对应图中的有向边。

关系图法（续）

(2) $A=B$

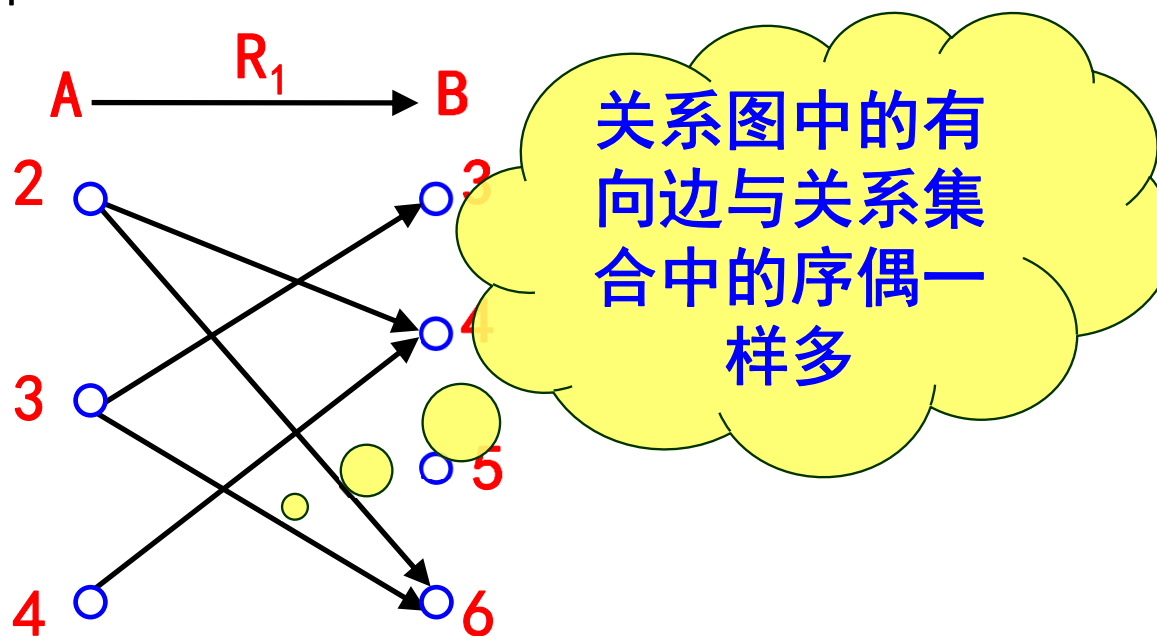
设 $A=B=\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, R 是 A 上的关系, 则 R 的关系图规定如下:

- ①. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为图中结点, 用 “ \circ ” 表示
- ②. 如 $\langle a_i, a_j \rangle \in R$, 则从 a_i 到 a_j 可用有向边 $a_i \circ \rightarrow \circ b_j$ 相连。 $\langle a_i, a_j \rangle$ 为对应图中的有向边。
- ③. 如 $\langle a_i, a_i \rangle \in R$, 则从 a_i 到 a_i 用一带箭头的小圆环表示, 即: $a_i \circ \curvearrowright$

例5. 2. 8

试用关系图表示下面的关系。

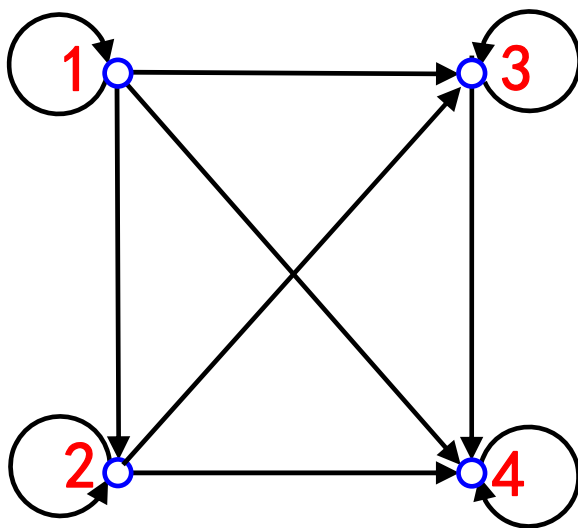
(1) 设 $A = \{2, 3, 4\}$ ， $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ，则A到B之间的一种整除关系 $R_1 = \{\langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$



例5.2.8 (续)

(2) 假设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ，则 A 上的 **小于等于关系**

$$R_2 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}。$$



3. Relation Matrix (关系矩阵)

设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, R 是从 A 到 B 的一个二元关系, 称矩阵 $M_R = (r_{ij})_{n \times m}$ 为关系 R 的 **关系矩阵** (Relation Matrix), 其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \langle a_i, b_j \rangle \in R \\ 0 & \langle a_i, b_j \rangle \notin R \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m)$$

又称 M_R 为 R 的 **邻接矩阵** (Adjacency Matrix)。

- 注意** {
1. 必须先对集合 A, B 中的元素排序
 2. A 中元素序号对应矩阵元素的行下标,
 3. B 中元素序号对应矩阵元素的列下标;
 4. 关系矩阵是 0-1 矩阵, 称为布尔矩阵。

例5. 2. 9

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ，考虑 A 上的整除关系 R 和等于关系 S 。

- (1) 试写出 R 和 S 中的所有元素；
- (2) 试写出 R 和 S 的关系矩阵。

例5.2.9 解

(1) 根据整除关系和等于关系的定义，有

$$R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}$$

$$S = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}.$$

(2) 设R和S的关系矩阵分别为 M_R 和 M_S ，则有

$$M_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad M_S = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

5.2.4 二元关系的难点

1. 序偶有两层含义：一是“顺序”，二是“偶对”，即由两个元素形成的有顺序的一个偶对。当 $x \neq y$ 时，一定有 $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ 。注意与由两个元素构成的集合的区别；
2. 关系是一种特殊的集合，牢记其元素是以序偶的形式出现的，注意与一般集合的区别。在一个普通集合 A 中任取一个元素表示为“ $\forall x \in A$ ”，在一个关系 R 中任取一个元素表示为“ $\forall \langle x, y \rangle \in R$ ”；
3. 在关系图表示法中，注意 A 到 B 的关系与 A 上的关系相应关系图的区别；
4. 在关系矩阵表示法中，对集合 A 到 B 的关系 R ，对应 A 和 B 中不同的元素顺序，可以得到不同的关系矩阵，但是，经过一些初等变换后，这些不同的关系矩阵可以变为同一矩阵。因此，在通常情况下，如果集合以枚举法表示时，则默认枚举的次序为元素的顺序。

5.2.5 关系的应用举例

集合A到集合B上的关系可以看成是列出了集合A中的一些元素与集合B中的相关元素的表(table)。

例5.2.11 试用关系表示图5.2.5。

解 图5.2.5可以用关系表示如下：

$\{ \langle a, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle,$
 $\langle b, f \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle,$
 $\langle d, c \rangle, \langle d, b \rangle, \langle e, f \rangle,$
 $\langle f, d \rangle \}$ 。

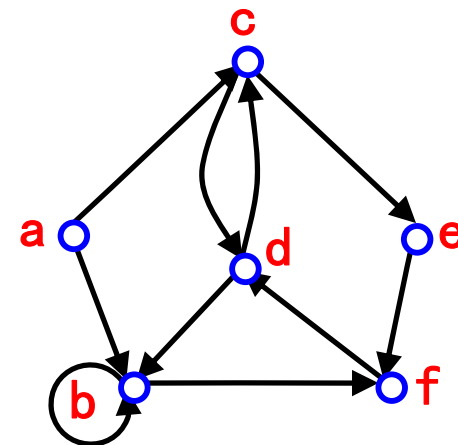


图5.2.5

5.3 关系的运算

设 R, S 都是从集合 A 到 B 的两个关系, 则:

$$R \cup S = \{ \langle x, y \rangle \mid (xRy) \vee (xSy) \}$$

$$R \cap S = \{ \langle x, y \rangle \mid (xRy) \wedge (xSy) \}$$

$$R - S = \{ \langle x, y \rangle \mid (xRy) \wedge (x \not S y) \}$$

$$\bar{R} = \{ \langle x, y \rangle \mid (x \not R y) \}$$

注意: $A \times B$ 是相对于 R 的全集, 所以有

$$\bar{R} = A \times B - R, \text{ 且 } \bar{R} \cup R = A \times B, \bar{R} \cap R = \Phi.$$

$$\bar{\bar{R}} = R, \quad S \subseteq R \Leftrightarrow \bar{R} \subseteq \bar{S}$$

例5.3.1

设 $A = \{a, b, c, d\}$ ， A 上关系 R 和 S 定义如下：

$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, c \rangle\},$$

$$S = \{\langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle d, b \rangle\}.$$

计算 $R \cup S$, $R \cap S$, $R - S$, $S - R$, \bar{R} .

5.3.1 关系的复合运算

定义5.3.1 设A, B, C是三个集合, R是从A到B的关系 ($R: A \rightarrow B$), S是从B到C的关系 ($S: B \rightarrow C$), 则R与S的**复合关系(合成关系)** (Composite) $R \circ S$ 是从A到C的关系, 并且:

$$R \circ S = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in A \wedge z \in C \wedge \\ (\exists y) (y \in B \wedge xRy \wedge ySz) \}$$

运算“ \circ ”称为**复合运算** (Composite Operation)。

5.3.1 关系的复合运算

定义5.3.1 设 A, B, C 是三个集合， R 是从 A 到 B 的关系 ($R: A \rightarrow B$)， S 是从 B 到 C 的关系 ($S: B \rightarrow C$)，则 R 与 S 的**复合关系(合成关系)** (Composite) $R \circ S$ 是从 A 到 C 的关系，并且：

1. R 和 S 是可复合的 $\Leftrightarrow R$ 的后域和 S 的前域完全相同；
2. $R \circ S$ 的前域是 R 的前域 A ，后域是 S 的后域 C ；
3. $R \circ S = \Phi \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$ 和 $z \in C$ ，**不存在** $y \in B$ ，使得 xRy 和 ySz **同时成立**；
4. $\Phi \circ R = R \circ \Phi = \Phi$ 。

例5.3.2

试判断下列关系是否是两个关系的复合，如果是，请指出对应的两个关系。

- (1) “祖孙” 关系； (2) “舅甥” 关系；
(3) “兄妹” 关系。

解 (1) “祖孙” 关系是 “父女” 关系和 “母子” 关系的复合； (“父子” “父子”)

(2) “舅甥” 关系是 “兄妹” 关系和 “母子” 关系的复合；

(3) 不是。

定理5.3.1

设A、B、C和D是任意四个集合，R、S和T分别是A到B，B到C和C到D的二元关系，则

(1) $R \circ S \circ T = R \circ (S \circ T)$;

(2) $R \circ I_B = I_A \circ R = R$ ，其中 I_A 和 I_B 分别是A和B上的恒等关系。

分析：二元关系是集合，二元关系的复合是关系，从而也是集合，因此上面两式就是证明两个集合相等。根据集合相等的定义，有 $A=B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq A$,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A, \text{ 有 } x \in B.$$

定理5.3.2

设A、B、C和D是任意四个集合，R是从A到B的关系， S_1 ， S_2 是从B到C的关系，T是从C到D的关系，则：

$$1) R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$$

$$2) R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$$

$$3) (S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$$

$$4) (S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T) \text{ 证明}$$

5.3.2 关系的逆运算

定义5.3.2 设A, B是两个集合, R是A到B的关系, 则从B到A的关系

$$\tilde{R} = \{ \langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \}$$

称为R的**逆关系** (InverseRelation),

运算 “ \sim ” 称为**逆运算** (InverseOperation)。

由定义:

$$\widetilde{\tilde{R}} = R;$$

$$\widetilde{\Phi} = \Phi。$$

注意: 关系是一种集合, 逆关系也是一种集合, 因此, 如果R是一个关系, 则 \tilde{R} 和 \bar{R} 都是关系, 但 \tilde{R} 和 \bar{R} 是完全不同的两种关系, 千万不要混淆。

若 $R \subseteq A \times B$, 则 $\bar{R} = A \times B - R \subseteq A \times B, \tilde{R} \subseteq B \times A$.

定理5.3.3

设A、B和C是任意三个集合，R, S分别是从A到B，
B到C的二元关系，则

$$\widetilde{R \circ S} = \tilde{S} \circ \tilde{R} \quad (\text{证明})$$

定理5.3.4

设 R, S 是从集合 A 到集合 B 的关系, 则有

$$\textcircled{1} \widetilde{R \cup S} = \tilde{R} \cup \tilde{S}; \quad (\text{分配性})$$

$$\textcircled{2} \widetilde{R \cap S} = \tilde{R} \cap \tilde{S};$$

$$\textcircled{3} \widetilde{R - S} = \tilde{R} - \tilde{S};$$

$$\textcircled{4} \tilde{\tilde{R}} = \bar{\bar{R}}; \quad (\text{可换性})$$

$$\textcircled{5} \widetilde{A \times B} = B \times A;$$

$$\textcircled{6} S \subseteq R \Leftrightarrow \tilde{S} \subseteq \tilde{R}; \quad (\text{单调性})$$

5.3.3 关系的幂运算

定义5.3.3 设 R 是集合 A 上的关系，则 R 的 n 次幂，记为 R^n ，定义如下：

1. $R^0 = I_A = \{ \langle a, a \rangle \mid a \in A \}$;
2. $R^1 = R$;
3. $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n$ 。

由于关系的复合运算满足结合律， R^n 即为 n 个 R 的复合，也是 A 上的二元关系。

显然， $R^n \circ R^m = R^{m+n}$ ， $(R^m)^n = R^{mn}$ 。

例5.3.7

设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，定义在 A 上的关系

$R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 6\rangle\}$ ，

$S=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 6\rangle\}$ ，

计算：

$$(1) R^n (n=1, 2, 3, 4, \dots), \quad \bigcup_{i=1}^6 R^i \text{ 和 } \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

$$(2) S^n (n=1, 2, 3, 4, \dots), \quad \bigcup_{i=1}^6 S^i \text{ 和 } \bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$$

解

$$\begin{aligned} (1) \quad & R^1 = R, \\ & R^2 = R \circ R \\ & \quad = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 6 \rangle \}, \\ & R^3 = R \circ R \circ R = R^2 \circ R \\ & \quad = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 6 \rangle \}, \\ & R^4 = R^3 \circ R \\ & \quad = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 6 \rangle \}, \\ & R^5 = R^4 \circ R \\ & \quad = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle \}, \\ & R^6 = R^5 \circ R \\ & \quad = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle \} = R^5, \\ & R^7 = R^6 \circ R = R^5, \quad \dots, \quad R^n = R^5 \quad (n > 5). \end{aligned}$$

解（续1）

$$\bigcup_{i=1}^6 R^i = R^1 \cup R^2 \cup \dots \cup R^6 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \\ \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \\ \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 4, 6 \rangle, \langle 5, 6 \rangle \};$$

$$\begin{aligned} \therefore \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i &= R^1 \cup R^2 \cup L \cup R^6 \cup R^7 \cup \dots \\ &= R^1 \cup R^2 \cup L \cup R^5 \cup R^5 \cup \dots \\ &= \bigcup_{i=1}^6 R^i \end{aligned}$$

解 (续2)

$$(2) S^1 = S,$$

$$S^2 = S \circ S = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 6 \rangle \},$$

$$S^3 = S \circ S \circ S = S^2 \circ S = \{ \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 6 \rangle \},$$

$$S^4 = S^3 \circ S = \{ \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 6 \rangle \},$$

$$S^5 = S^4 \circ S = \{ \langle 1, 6 \rangle \},$$

$$S^6 = S^5 \circ S = \Phi,$$

$$S^7 = \Phi,$$

...

$$S^n = \Phi \quad (n > 5).$$

解（续3）

$$\bigcup_{i=1}^6 S^i = S^1 \cup S^2 \cup \dots \cup S^6 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \\ \langle 1, 6 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \\ \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 4, 6 \rangle, \langle 5, 6 \rangle \};$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i = S^1 \cup S^2 \cup \dots \cup S^6 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^6 S^i$$

由例5.3.7可以看出：

（1）幂集 R^n 的基数 $|R^n|$ 并非随着 n 的增加而增加，而是呈递减趋势；

（2）当 $n \geq |A|$ 时，则 $R^n \subseteq \bigcup_{i=1}^6 R^i$

定理5.3.5

设A是有限集合，且 $|A|=n$ ，R是A上的二元关系，则：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{R}^i = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{R}^i$$

5.3.5 关系运算的应用

例5.3.8 设有关系R和S分别如表5.3.1和表5.3.2所示，现在在R中增加关系S中的所有元组，试求增加后的关系。

表5.3.1

A	B	C
1	2	5
2	1	3
5	6	2

表5.3.2

A	B	C
4	6	2
2	1	3
6	1	5

分析

在关系R中增加S中的所有元组，在关系数据库中称为对关系表的**插入操作**，该操作可以通过关系的**并运算**完成。

即求在R中增加关系S的所有元组等价于求 $R \cup S$

解 关系R增加S的元组后所构成的关系 $R \cup S$ ，见右表。

A	B	C	A	B	C
1	2	5	4	6	2
2	1	3	2	1	3
5	6	2	6	1	5

A	B	C
1	2	5
2	1	3
5	6	2
4	6	2
6	1	5

例5.3.9

设有关系R和S如表5.3.4和表5.3.5所示，现在在R中**去掉关系S中所出现的元组**，试求去掉S后的关系。

解 关系R中除去S中所出现的元组后所得的关系R-S如表5.3.6所示。

表5.3.4

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

表5.3.5

A	B	C
1	2	3
7	8	9

表5.3.6

A	B	C
4	5	6

5.4 关系的性质(重点掌握)

本节涉及到的关系，如无特别声明，都是**假定其前域和后域相同**。即都为定义在集合 A 上的关系，且 A 是**非空集合**。对于前后域不相同的关系，其性质无法加以定义。

5.4.1 关系性质的定义

1、自反性和反自反性

定义5.4.1 设 R 是集合 A 上的关系,

1. 如果对任意 $x \in A$, 都有 $\langle x, x \rangle \in R$, 那么称 R 在 A 上是**自反的** (Reflexive), 或称 R 具有**自反性** (Reflexivity);

例如: **朋友关系**。

2. 如果对任意 $x \in A$, 都有 $\langle x, x \rangle \notin R$, 那么称 R 在 A 上是**反自反的** (Antireflexive), 或称 R 具有**反自反性** (Antireflexivity)。

例如: **父子关系**。

例5.4.1

设 $A = \{1, 2, 3\}$

(1) $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$

(2) $S = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}$;

(3) $T = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$ 。

(1) 因为A中任意 x ，都有 $\langle x, x \rangle \in R$ ，
所以R是自反的；

(2) 因为A中任意 x ，都有 $\langle x, x \rangle \notin S$ ，
所以S是反自反的；

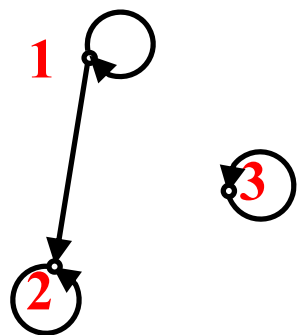
(2) 因为存在 $2 \in A$ ，使 $\langle 2, 2 \rangle \notin T$ ，
所以T不是自反的；
又因为存在 $1 \in A$ ，使 $\langle 1, 1 \rangle \in T$ ，
所以T不是反自反的，
即T既不是自反的，也不是反自反的。

例5.4.1 解 (续)

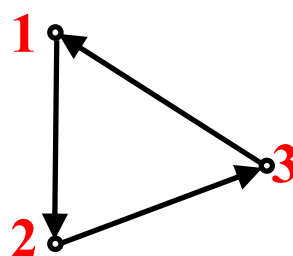
(2) 设R, S和T的关系矩阵分别为 M_R , M_S 和 M_T , 则:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

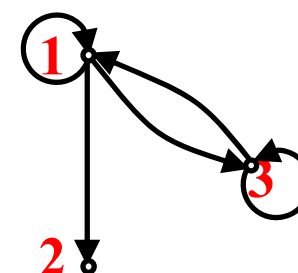
(3) R, S和T的关系图分别是下图的(a), (b)和(c)。



(a)



(b)



(c)

结论

1. 关系R是自反的 \Rightarrow R不是反自反的
2. 存在既不是自反的也不是反自反的关系
3. 关系R是自反的 \Leftrightarrow
关系图中每个结点都有环
4. 关系R是反自反的 \Leftrightarrow
关系图中每个结点都无环
5. 关系R是自反的 \Leftrightarrow
关系矩阵的主对角线上全为1
6. 关系R是反自反的 \Leftrightarrow 关系矩阵的主对角线上全为0

例5. 4. 2

设 $A = \{a, b\}$ ，试计算 A 上所有具有自反性的关系 R 的个数。

解 因为 $A^2 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$ ，所以 A 上具有自反性的关系 R 的个数为：

$$C(2, 0) + C(2, 1) + C(2, 2) = 4。$$

2、对称性和反对称性

定义5.4.2 设 R 是集合 A 上的关系。

1. 对任意 $x, y \in A$ ，如果 $\langle x, y \rangle \in R$ ，那么 $\langle y, x \rangle \in R$ ，则称关系 R 是**对称的** (Symmetric)，或称 R 具有**对称性** (Symmetry)；
2. 对任意 $x, y \in A$ ，如果 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, x \rangle \in R$ ，那么 $x = y$ （或者如果 $x \neq y$ 且 $\langle x, y \rangle \in R$ ，那么 $\langle y, x \rangle \notin R$ ），则称关系 R 是**反对称的** (Antisymmetric)，或称 R 具有**反对称性** (Antisymmetry)。

例5.4.2

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

定义 A 上的关系 R, S, T 和 V 如下:

$$(1) R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\};$$

$$(2) S = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\};$$

$$(3) T = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle\};$$

$$(4) V = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}.$$

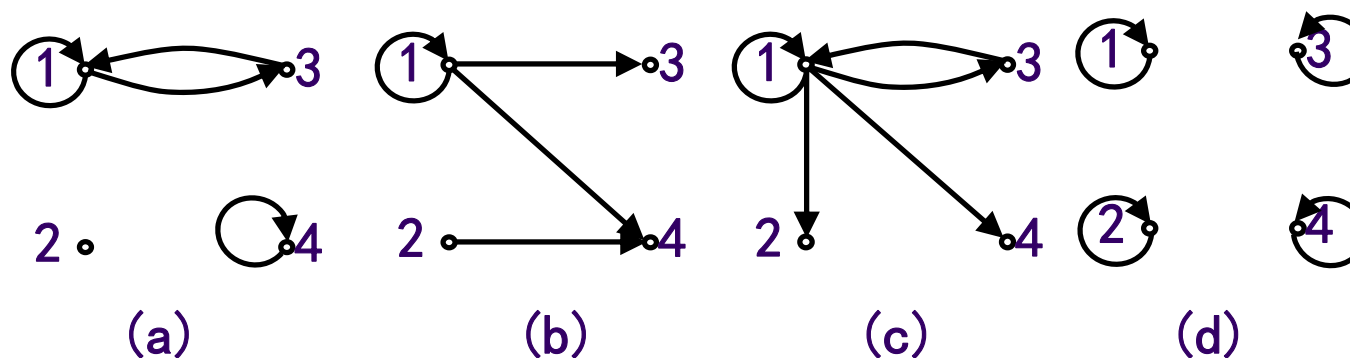
试判定它们是否具有对称性和反对称性, 并写出 R, S, T 和 V 的关系矩阵和画出相应的关系图。

解 (2)

设R, S, T和V的关系矩阵分别为 M_R , M_S , M_T 和 M_V , 则

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) R, S, T和V的关系图分别是图(a), (b), (c)和(d)。



注意

1. 存在既不是对称也不是反对称的关系；
2. 存在既是对称也是反对称的关系；
3. 关系R是对称的 \Leftrightarrow 关系图中任何一对结点之间，要么有方向相反的两条边，要么无任何边；
4. 关系R是反对称的 \Leftrightarrow 关系图中任何一对结点之间，至多有一条边；
5. 关系R是对称的 \Leftrightarrow R的关系矩阵为对称矩阵；
6. 关系R是反对称的 \Leftrightarrow R的关系系矩阵满足

$$r_{ij} \cdot r_{ji} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j。$$

3、传递性

定义5.4.3 设 R 是集合 A 上的关系。对任意 $x, y, z \in A$, 如果 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, z \rangle \in R$, 那么 $\langle x, z \rangle \in R$, 则称关系 R 是**传递的** (Transitive), 或称 R 具有**传递性** (Transitivity)。

例5.4.3

设 $A = \{1, 2, 3\}$ ，定义 A 上的关系 R, S, T 和 V 如下：

(1) $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$ ；

(2) $S = \{\langle 1, 2 \rangle\}$ ；

(3) $T = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ ；

(4) $V = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ 。

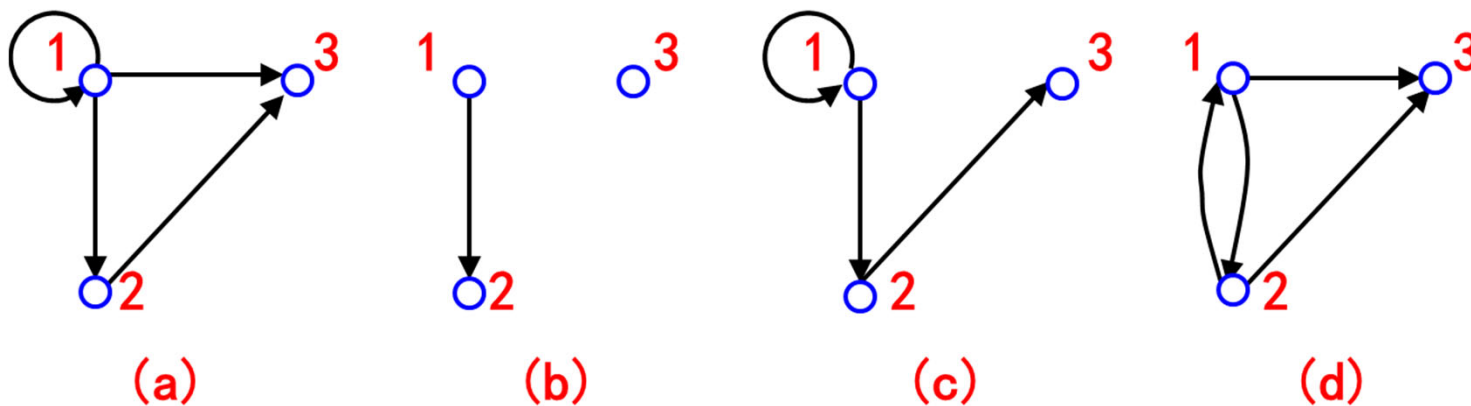
试判定它们是否具有传递性，并写出 R, S, T 和 V 的关系矩阵和画出相应的关系图。

例5. 4. 3

(2) 设R, S, T和V的关系矩阵分别为 M_R , M_S , M_T 和 M_V , 则

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) R, S, T和V的关系图分别是图(a), (b), (c)和(d)。



总结

	自反	反自反	对称	反对称	传递
定义	$\langle x, x \rangle \in R$	$\langle x, x \rangle \notin R$	$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$	$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow x = y$	$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$
关系图	每个结点都有环	每个结点都无环	每对结点间或有方向相反的两条边，或无任何边	每对结点间至多有一条边存在	任三个结点x, y, z，若从x到y有边，从y到z有边，则从x到z一定有边
关系矩阵	对角线上全为1	对角线上全为0	对称矩阵	$r_{ij} \cdot r_{ji} = 0,$ $i, j = 1, 2, \dots, n,$ $i \neq j$	如 $r_{ij} = 1$ 且 $r_{jk} = 1$ 则 $r_{ik} = 1$

总结

对任意给定的 A 上的关系 R ，可以采用下面的四种方法判定它所具有的性质：

- (1) 定义判定法；
- (2) 关系矩阵判定法；
- (3) 关系图判定法；

例5.4.6

判定下列关系所具有的特殊性质。

- (1) 集合A上的全关系；
- (2) 集合A上的空关系；
- (3) 集合A上的恒等关系。

解 (1) 集合A上的全关系具有自反性、对称性和传递性

(2) 集合A上的空关系具有反自反性、对称性、反对称性和传递性；

(3) 集合A上的恒等关系具有自反性、对称性、反对称性和传递性。

例5.4.7

判定下列关系所具有的特殊性质。

- (1) 在实数集 \mathbb{R} 上定义的“等于”关系；
- (2) 幂集上的“真包含”关系。

解 (1) \mathbb{R} 上的“等于”关系具有自反性、对称性、反对称性和传递性；

(2) 幂集上的“真包含”关系具有反自反性，反对称性和传递性。

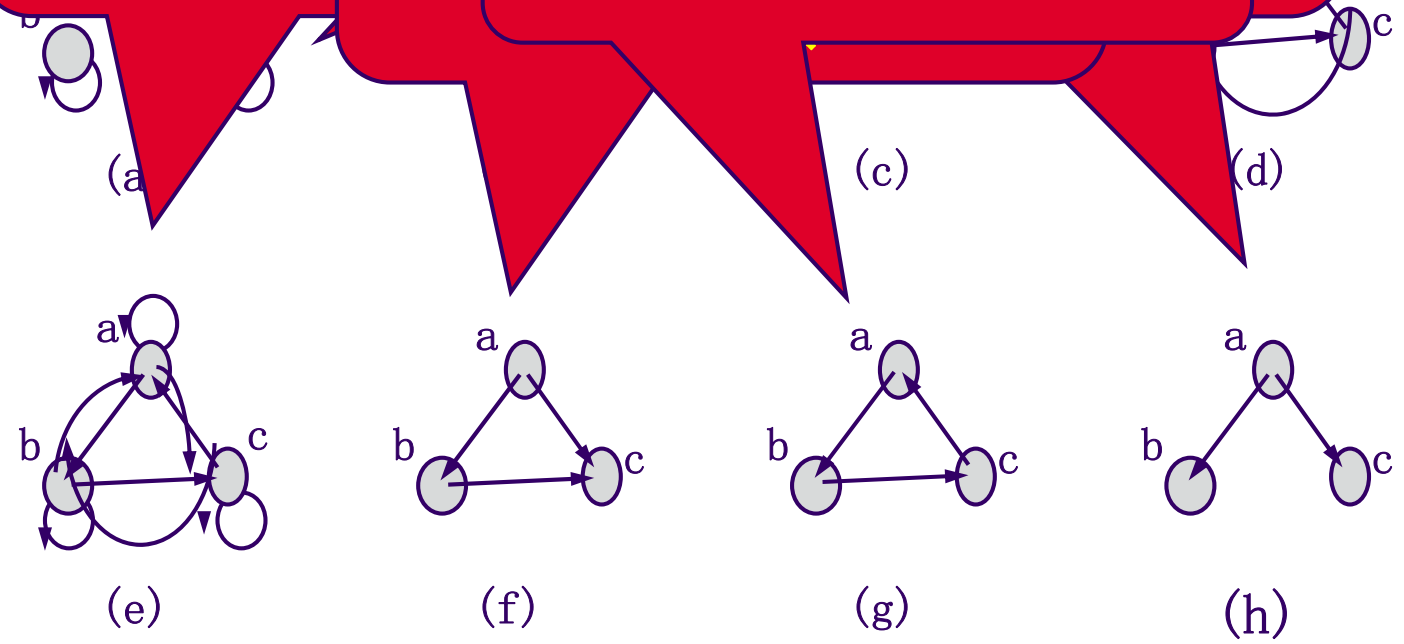
例5. 4. 8

假设 $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, d \rangle\}$ 是定义在 A 上的关系。试判定 R 所具有的特殊性质。

解 由前面的分析可知, R 既不是自反的, 也不是反自反的; 既不是对称的, 也不是反对称的; 而且也不是传递的。即 R 不具备关系的任何性质。

例

图(c)的关系是具备反自反的、反对称的性质：
图(d)的关系是具备反自反的、反对称的性质：
图(b)的关系是具备反自反的、反对称的性质：
图(e)的关系是具备反自反的、反对称的性质：
图(f)的关系是具备反自反的、反对称的性质：
图(g)的关系是具备反自反的、反对称的性质：
图(h)的关系是具备反自反的、反对称的性质：



例5.4.9

设 $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$ ，试判断 R 在集合 A 和 B 上具备的特殊性质，其中 $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{1, 2, 3\}$ 。

解 当 R 是定义在集合 A 上的关系时， R 是自反、对称、反对称和传递的；

当 R 是定义在集合 B 上的关系时， R 是对称、反对称和传递的。

注意：绝对不能脱离基集（即定义关系的集合）来谈论关系的性质。

关系性质的证明

在二元关系中，由于关系的性质的定义全部都是按“如……则……”来描述的，因此，在证明关系的性质时，一般都采用按定义证明方法，即：将“如……”部分作为附加的已知条件，证得“则……”部分，就证明了关系具有该性质。

关系性质的证明方法

1. 自反

任取 $x \in A$,

中间过程

$\langle x, x \rangle \in R。$

2. 反自反

任取 $x \in A$,

中间过程

$\langle x, x \rangle \notin R。$

3. 对称

任取 $x, y \in A$,
假设 $\langle x, y \rangle \in R$,

中间过程

$\langle y, x \rangle \in R。$

关系性质的证明方法(续)

4. 反对称

任取 $x, y \in A$, 假设
 $\langle x, y \rangle \in R, \langle y, x \rangle \in R,$

中间过程

$x = y。$

或者

任取 $x, y \in A, x \neq y,$
 假设 $\langle x, y \rangle \in R,$

中间过程

$\langle y, x \rangle \notin R。$

5. 传递

任取 $x, y, z \in A$, 假设
 $\langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in R,$

中间过程

$\langle x, z \rangle \in R。$

5.4.2 关系性质的判断定理

定理5.4.1 设 R 是集合 A 上的二元关系，则：

- (1) R 是自反的 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$;
- (2) R 是反自反的 $\Leftrightarrow R \cap I_A = \Phi$;
- (3) R 是对称的 $\Leftrightarrow R = \tilde{R}$;
- (4) R 是反对称的 $\Leftrightarrow R \cap \tilde{R} \subseteq I_A$;
- (5) R 是传递的 $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$ 。

证明 (5)

“ \Rightarrow ” 设 R 是传递的。

对任意 $\langle a, c \rangle \in R \circ R$ ，根据“ \circ ”的定义，
必存在 $b \in A$ ，使得 $\langle a, b \rangle \in R$ 且 $\langle b, c \rangle \in R$ ，
由 R 的传递性，有： $\langle a, c \rangle \in R$ 。所以， $R \circ R \subseteq R$ 。

“ \Leftarrow ” 设 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意 $a, b, c \in A$ ，若 $\langle a, b \rangle \in R$ 并且 $\langle b, c \rangle \in R$ ，
则有： $\langle a, c \rangle \in R \circ R$ ，
因 $R \circ R \subseteq R$ ，所以， $\langle a, c \rangle \in R$ ，
即 R 是传递的。

5.4.3 关系性质的保守性

定理5.4.2 设 R, S 是定义在 A 上的二元关系，则：

- (1) 若 R, S 是自反的，则 $\tilde{R}, R \cup S, R \cap S, R \circ S$ 也是自反的；
- (2) 若 R, S 是反自反的，则 $\tilde{R}, R \cup S, R \cap S$ 也是反自反的。
- (3) 若 R, S 是对称的，则 $\tilde{R}, R \cup S, R \cap S$ 也是对称的。

注意：

- (1) 逆运算与交运算具有较好的保守性；
- (2) 并运算、差运算和复合运算的保守性较差。

5.5 关系的闭包运算

对于一个给定的关系，可能不具有某一个特殊性质。但是，如果我们希望它具有该特定的性质，那么应该怎么做呢？

例如，对给定集合 $A=\{1, 2, 3\}$ 上的关系 $R=\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ ，它不具有自反性。根据自反性的定义，在关系 R 中添加 $\langle 2, 2 \rangle$ ， $\langle 3, 3 \rangle$ 这两个元素后，所得到的新关系就具有自反性。另外，还可以添加 $\langle 2, 2 \rangle$ ， $\langle 3, 3 \rangle$ ， $\langle 1, 3 \rangle$ ，得到的新关系仍然具有自反性。

5.5.1 关系的闭包

定义5.5.1 设 R 是定义在 A 上的关系，若存在 A 上的另一个关系 R' ，满足：

- (1) R' 是自反的(对称的、或传递的)；
- (2) 对任何自反的(对称的、或传递的)关系 R'' ，如果 $R \subseteq R''$ ，就有 $R' \subseteq R''$ ，则 R' 称为 R 的自反闭包(ReflexiveClosure)(对称闭包(SymmetricClosure)、或传递闭包(TransitiveClosure))，分别记为 $r(R)$ ($s(R)$ 或 $t(R)$)。

从定义5.5.1可以看出，关系的闭包是增加最少元素，使其具备所需性质的扩充。

例5.5.1

设 $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$ 是 A 上的关系。试求 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

解 由关系的自反性定义知， R 是自反的当且仅当对 $a \in A$ ，都有 $\langle a, a \rangle \in R$ ，因此，在 R 中添上 $\langle 2, 2 \rangle$ 和 $\langle 3, 3 \rangle$ 后得到的新关系就具有自反性，且满足自反闭包的定义，即

$$r(R) = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\};$$

例5.5.2

求下列关系的 $r(R)$, $s(R)$ 和 $t(R)$ 。

- (1) 定义在整数集 \mathbb{Z} 上的“ $<$ ”关系；
- (2) 定义在整数集 \mathbb{Z} 上的“ $=$ ”关系。

解

(1) 定义在 \mathbb{Z} 上的“ $<$ ”关系的

$r(R)$ 为 “ \leq ” ,

$s(R)$ 为 “ \neq ” ,

$t(R)$ 为 “ $<$ ” ;

(2) 定义在 \mathbb{Z} 上的“ $=$ ”关系的

$r(R)$ 为 “ $=$ ” ,

$s(R)$ 为 “ $=$ ” ,

$t(R)$ 为 “ $=$ ” 。

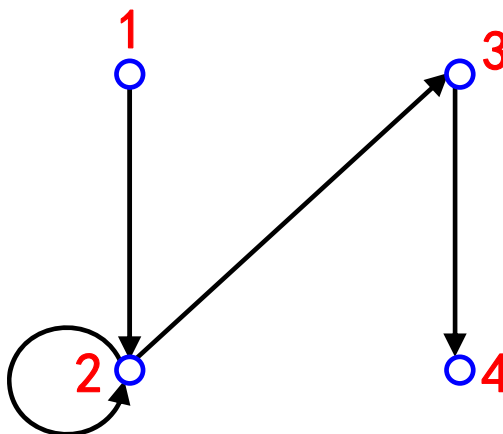
例5.5.3

设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$ 是定义在 A 上的二元关系。

(1) 画出 R 的关系图；

(2) 求出 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ ，并画出其相应的关系图。

解 (1) R 的关系图见下图；



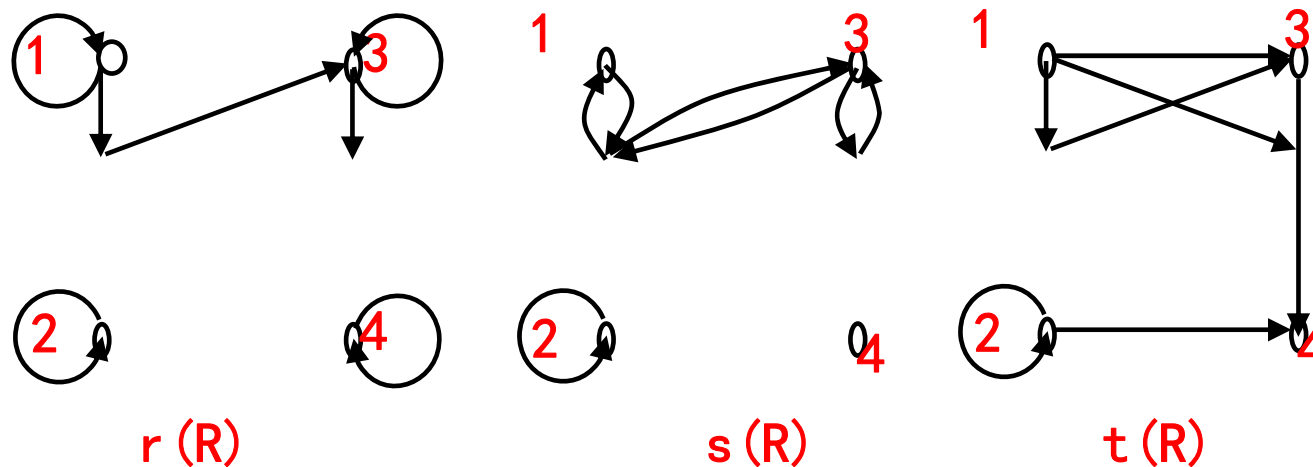
例5.5.3 (续) (2)

$r(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}$;

$s(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \}$;

$t(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}$ 。

$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图分别如下:



总结

利用关系图求关系 R 闭包的方法：

1. 检查 R 的关系图，**在没有环的结点处加上环**，可得 $r(R)$ 的关系图；
2. 检查 R 的关系图，**将每条单向边全部改成双向边**，可得 $s(R)$ 的关系图；
3. 检查 R 的关系图，**从每个结点出发，找到其终点，如果该结点到其终点没有边相连，就加上此边**，可得 $t(R)$ 的关系图。

定理5.5.1

设 R 是集合 A 上的二元关系，则：

$$(1) \ r(R) = R \cup I_A。$$

$$(2) \ s(R) = R \cup \tilde{R}。$$

$$(3) \ t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i, \text{ 若 } |A|=n, \text{ 则 } t(R) = \bigcup_{i=1}^n R^i。$$

例

设 $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 是四个程序， $R = \{\langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_3 \rangle, \langle P_2, P_4 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle\}$ 是定义在 P 上的调用关系。计算 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 。

解： $r(R) = R \cup I_A$

$$= \{\langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_3 \rangle, \langle P_2, P_4 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle\} \cup \\ \{\langle P_1, P_1 \rangle, \langle P_2, P_2 \rangle, \langle P_3, P_3 \rangle, \langle P_4, P_4 \rangle\}$$

$$= \{\langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_3 \rangle, \langle P_2, P_4 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_1 \rangle, \\ \langle P_2, P_2 \rangle, \langle P_3, P_3 \rangle, \langle P_4, P_4 \rangle\}。$$

例5. 5. 4(续)

$$s(R) = R \cup \tilde{R}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{ \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_3 \rangle, \langle P_2, P_4 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle \} \\
 &\quad \cup \{ \langle P_2, P_1 \rangle, \langle P_3, P_1 \rangle, \langle P_4, P_2 \rangle, \langle P_4, P_3 \rangle \} \\
 &= \{ \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_3 \rangle, \langle P_2, P_4 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle, \\
 &\quad \langle P_2, P_1 \rangle, \langle P_3, P_1 \rangle, \langle P_4, P_2 \rangle, \langle P_4, P_3 \rangle \}。
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t(R) &= R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{ \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_3 \rangle, \langle P_2, P_4 \rangle, \\
 &\quad \langle P_3, P_4 \rangle \} \cup \{ \langle P_1, P_4 \rangle \} \cup \Phi \cup \Phi \\
 &= \{ \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_3 \rangle, \langle P_2, P_4 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_4 \rangle \}。
 \end{aligned}$$

5.6 本章总结

1. 序偶和笛卡儿积的概念
2. 二元关系的概念和表示
3. 关系的交、并、补、差运算、复合运算和逆运算
4. 关系性质的定义、关系性质的判定、关系性质的证明和关系性质的保守性；
5. 关系的自反、对称、和传递闭包的概念及计算。

Thank You !

