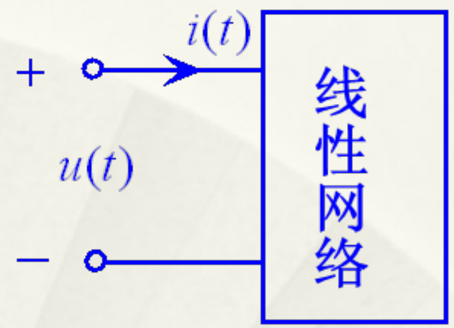
5.6 正弦稳态电路的功率

一、瞬时功率:



$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_u)$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_i)$$

$$p(t)=u(t)i(t)=UI\cos(\varphi_u-\varphi_i)+UI\cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i)$$

（恒定分量）　　（正弦分量：2ω）

二. 平均功率:

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt=UI\cos(\varphi_u-\varphi_i)=UI\cos\varphi\ (W)$$

$$\varphi=\varphi_u-\varphi_i$$

说明：（1）$P = UI\cos(\varphi_u - \varphi_i) \neq UI$

（2）$\cos\varphi$称为功率因数，φ为功率因数角。

（3）无源单口网络:$\varphi = \varphi_Z$

（4）电阻元件:$P = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}$，电感及电容元件$P = 0$

（5）反映了实际消耗的功率，有功功率

（6）$P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots$

（7）$P = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3 + \cdots$

三. 无功功率：

$$Q = UI\sin(\varphi_u - \varphi_i) = UI\sin\varphi$$ 单位为乏 （Var）

无功功率是用来表示电路中储能元件与电源进行能量交换的最大速率，即“吞吐”功率的最大值 .

说明： $Q = UI\sin(\varphi_u - \varphi_i) = UI\sin\varphi$

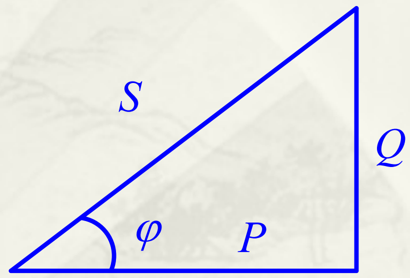
（1）电感元件：$Q_L = UI\sin 90^\circ = UI = \frac{U^2}{X_L} = I^2 X_L$

（2）电容元件：$Q_C = UI\sin(-90^\circ) = -UI = -\frac{U^2}{X_C} = -I^2 X_C$

（3）$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$

（4）$Q = I_1^2 X_1 + I_2^2 X_2 + I_3^2 X_3 + \cdots$

（5）反映网络与电源能量交换最大速率。



功率三角形

四. 视在功率

定义视在功率为网络电压有效值与电流有效值之乘积

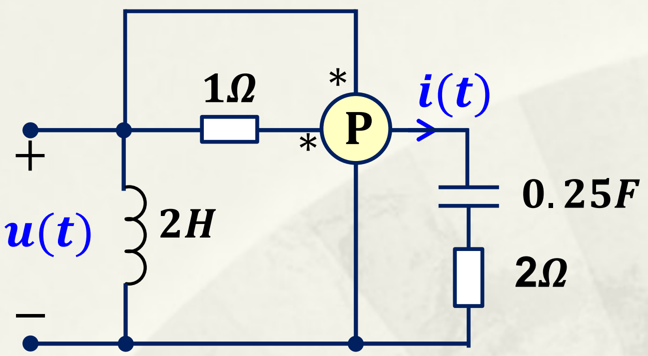
$S = UI$　　伏安（VA）

$$P^2 + Q^2 = (UI\cos\varphi)^2 + (UI\sin\varphi)^2 = S^2$$

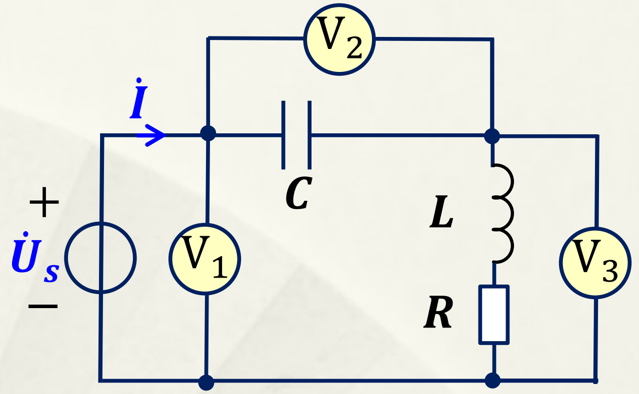
$$\frac{Q}{P} = \frac{UI\sin\varphi}{UIcon\varphi} = tan\varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

例1 图示电路，$i(t)=\sqrt{2}cost,A$,求功率表的读数P。



$$P=I^2R=3W$$



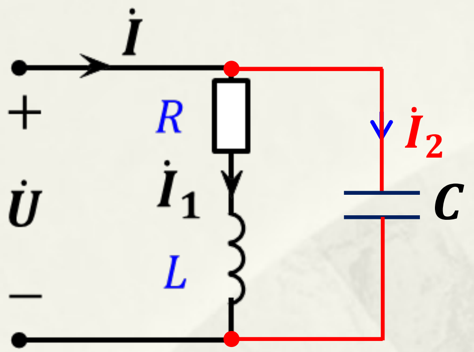
例2 图示电路，$f=50Hz$，负载RL吸收的功率$P=3630W$，三个电压表的读数均为$220V$，求R、L、C的值。

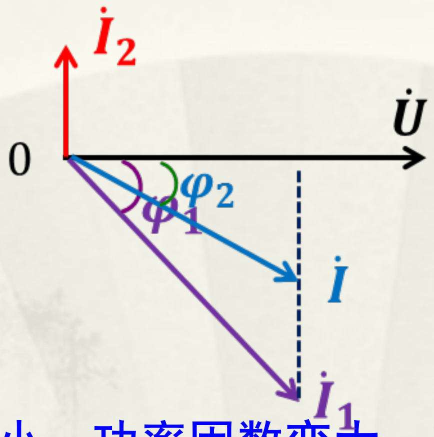
$$\left.\begin{aligned} &X_C I=220\\ &\sqrt{R^2+X_L^2}\cdot I=220\\ &\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}\cdot I=220\\ &R\cdot I^2=3630 \end{aligned}\right\}$$

$$R=10\Omega,X_L=\frac{10}{3}\sqrt{3}\Omega,X_C=\frac{20}{3}\sqrt{3}\Omega$$

$$L=18.38mH \qquad C=275.8\mu F$$

五. 功率因数的提高





如图示RL电路，$\dot{I} = \dot{I}_1$

功率因数 $cos\varphi_1$ ➡ $cos\varphi_2$

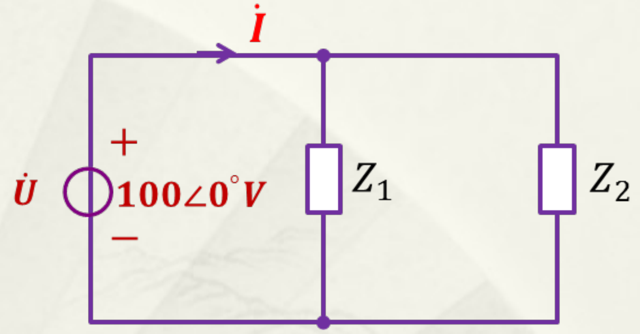
说明：电路的功率因数角变小，功率因数变大，电路总电流变小，$P = UIcos\varphi$ 不变，视在功率减小。

结果：

- ➢P不变条件下:对输电线要求降低，输电效率提高;电源容量要求降低。
- ➢S不变条件下:电路负载能力增大。

$$\left.\begin{aligned} Q_L &= Ptan\varphi_1 \\ Q_C &= I_2^2X_C = U^2\omega C \end{aligned}\right\} \quad Q = Q_L - Q_C = Ptan\varphi_2 \qquad C = \frac{P}{\omega U^2}(tan\varphi_1 - tan\varphi_2)$$

例1　图示电路，负载 Z_1为容性，其功率$P_1 = 10kW, cos\varphi_1 = 0.8$;负载 Z_2为感性，其功率$P_2 = 15kW, cos\varphi_2 = 0.6$.求输入电流$\dot{I}$ 。



解：对于负载Z_1，有　$S_1 = \dfrac{P_1}{cos\varphi_1} = 12.5\ kVA$

$$Q_C = S_1 sin\varphi_1 = 7.5\ kVar$$

对于负载Z_2，有　$S_2 = \dfrac{P_2}{cos\varphi_2} = 25\ kVA$

$$Q_L = S_2 sin\varphi_2 = 20\ kVar$$

电路负载的总有功功率为　$P = P_1 + P_2 = 25\ kW$

总无功功率为　$Q = Q_L - Q_C = 12.5\ kVar$

总视在功率为　$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 27.95\ kVA$

$$I = \frac{S}{U} = 27.95\ A$$

$$\varphi = arctan\frac{Q}{P} = 26.6^\circ$$

$$\dot{I} = 27.95\angle -26.6^\circ\ A$$

例2　有一电感性负载，功率 $10kW, cos\varphi_1 = 0.6$，接在$U = 220V, f = 50Hz$的电源上。今要将电路的功率因数提高到$cos\varphi = 0.95$，求应并联的电容C值及并联C前后的电路电流I_1, I。

$$cos\varphi_1 = 0.6 \Rightarrow \varphi_1 = 53.1^\circ$$

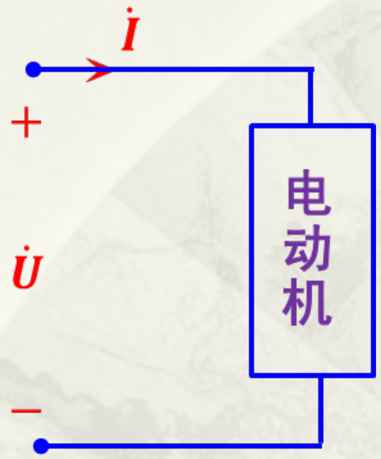
$$cos\varphi = 0.95 \Rightarrow \varphi = 18^\circ$$

$$C = \frac{P}{2\pi f U^2}(tan\varphi_1 - tan\varphi) = \frac{10000}{2\pi \times 50 \times 220^2}(tan53.1^\circ - tan18^\circ) = 656\mu F$$

未并联C时的电路电流　$I_1 = \frac{P}{Ucos\varphi_1} = 75.6\ A$

并联C后的电路电流　$I = \frac{P}{Ucos\varphi} = 47.8\ A < I_1$

例3 如图，已知电动机的功率$P=4kW, U=230V, I=27.2A, f=50Hz$。（1）求电动机的功率因数和吸收的无功功率；（2）若把其功率因数提高到0.9，求应并联的电容C的值。



解：（1）$\cos\varphi=\dfrac{P}{UI}=0.64$ $\qquad \varphi=50.2^\circ$

$$Q_L=P\tan\varphi=4000\tan 50.2^\circ=4800\,Var$$

（2）$\cos\varphi_1=0.9 \;\Longrightarrow\; \varphi_1=25.8^\circ$

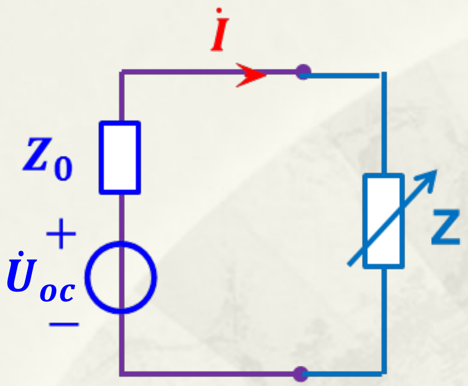
$$C=\frac{P}{2\pi f U^2}(\tan\varphi-\tan\varphi_1)$$

$$=\frac{4000}{2\pi\times 50\times 230^2}(\tan 50.2^\circ-\tan 25.8^\circ)=173\mu F$$

5.7 最大功率传输

一. 负载为阻抗

$Z_0 = R_0 + jX_0$电源内阻抗　$Z = R + jX$负载阻抗



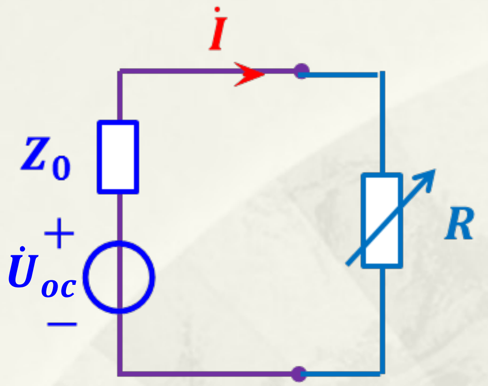
$$I = \frac{U_{oc}}{|Z_0 + Z|} = \frac{U_{oc}}{\sqrt{(R_0 + R)^2 + (X_0 + X)^2}}$$

$$P = I^2 R = \frac{U_{oc}^2}{(R_0 + R)^2 + (X_0 + X)^2} R$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial R} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial X} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} R &= R_0 \\ X &= -X_0 \end{aligned} \text{ 或 } Z = Z_0^* \qquad P_{max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_0}$$

电路工作状态称为共轭匹配

二. 负载为电阻 R



$Z_0 = R_0 + jX_0$电源内阻抗

$$I = \frac{U_{oc}}{|Z_0 + R|} = \frac{U_{oc}}{\sqrt{(R_0 + R)^2 + X_0^2}}$$

$$P = I^2 R = \frac{U_{oc}^2}{(R_0 + R)^2 + X_0^2} R$$

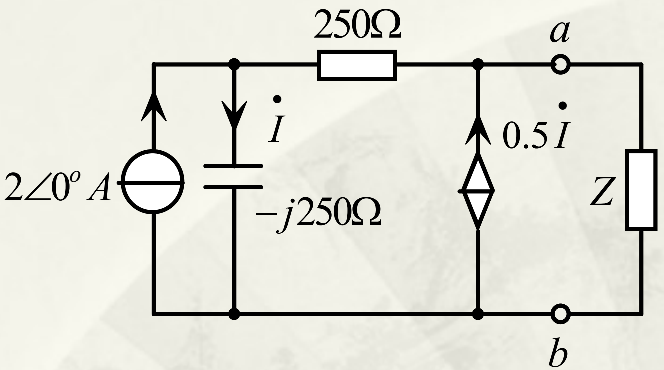
$$\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow R = |Z_0| = \sqrt{R_0^2 + X_0^2}$$

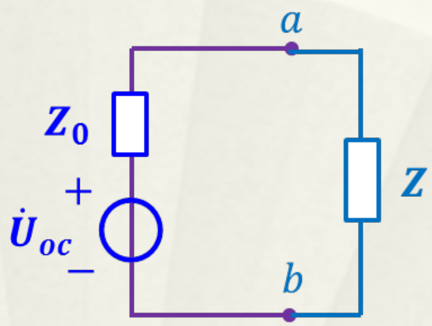
$$P_{max} = \frac{U_{oc}^2}{(R_0 + |Z_0|)^2 + X_0^2} |Z_0|$$

电路工作状态称为等模匹配

共轭匹配与等模匹配统称为最大功率匹配

例1 图示电路，求：（1）负载阻抗Z为何值时可获得最大功率，并求最大功率；（2）若负载Z为电阻，求获得的最大功率。





解：求a、b两点以左电路的等效电压源电路。

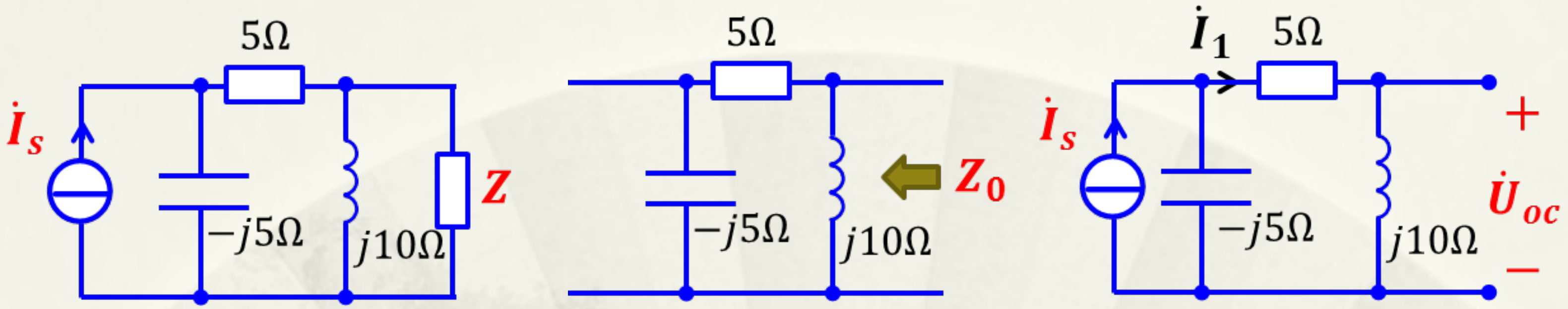
$$\dot{U}_{oc} = 500 - j1000 = 1118\angle -63.4^\circ \ V$$

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = 500 - j500 = 500\sqrt{2}\angle -45^\circ \ \Omega$$

（1）$Z = 500 + j500 = 500\sqrt{2}\angle 45^\circ \ \Omega$ $\quad P_{max} = \dfrac{U_{oc}^2}{4R_0} = 625\ W$

（2）$R = |Z_0| = 500\sqrt{2}\Omega$ $\quad P_{max} = \dfrac{U_{oc}^2}{(R_0 + |Z_0|)^2 + X_0^2}|Z_0| = 517.7\ W$

例2　图示电路，已知阻抗Z吸收的最大功率为$5W$，　求电流I_s。



（1）端口的等效电阻

$$Z_0 = \frac{(5-j5)\times j10}{5-j5+j10} = 10\angle 0^\circ\ \Omega$$

$$Z = Z_0^* = 10\angle 0^\circ\ \Omega$$

（2）因为$P_m = \dfrac{U_{oc}^2}{4R_0} = 5\,W$

$$U_{oc} = 10\sqrt{2}\,V$$

设 $\dot{U}_{oc} = 10\sqrt{2}\angle 0^\circ\ V$

画出相量模型

$$\dot{I}_1 = \frac{-j5}{5+j10-j5}\dot{I}_s = \frac{-j}{1+j}\dot{I}_s$$

$$\dot{U}_{oc} = j10\dot{I}_1 = \frac{10}{\sqrt{2}\angle 45^\circ}\dot{I}_s$$

$\dot{I}_s = 2\angle 0^\circ\ A$　　$I_s = 2\,A$

主要内容

1. 正弦量的时域与频域表示；相位差、有效值

$$u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi_u)\rightarrow \dot{U}_m=U_m\angle\varphi_u$$

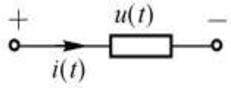
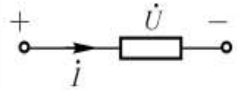
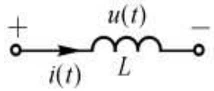
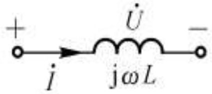
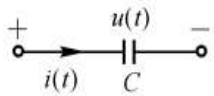
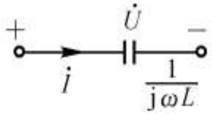
$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_u)\rightarrow \dot{U}=U\angle\varphi_u$$

$$\dot{U}_m=U_m\angle\varphi_u\rightarrow u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi_u)$$

2. 相量形式KCL和KVL

KCL	时域形式：$\sum_{K=1}^{n} i_K=0$	相量形式：$\sum_{K=1}^{n}\dot{I}_K=0$
KVL	时域形式：$\sum_{K=1}^{n} u_K=0$	相量形式：$\sum_{K=1}^{n}\dot{U}_K=0$

3. 电路元件的伏安关系

元件	时域模型及伏安关系		频域模型及伏安关系	
R		$u(t)=Ri(t)$ $i(t)=\frac{u(t)}{R}$		$\dot{U}=R\dot{I}$ $\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R}$
L		$u(t)=L\frac{di(t)}{dt}$ $i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(t)dt$		$\dot{U}=j\omega L\dot{I}$ $\dot{I}=\frac{\dot{U}}{j\omega L}$
C		$i(t)=C\frac{du(t)}{dt}$ $u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(t)dt$		$\dot{U}=\frac{1}{j\omega C}\dot{I}$ $\dot{I}=j\omega C\dot{U}$

4. 阻抗、导纳及等效变换：

$$Y=\frac{1}{Z}$$

电阻元件：$Z=R,Y=\frac{1}{R}=G$。

电感元件：$Z=\mathrm{j}\omega L=\mathrm{j}X_L,Y=\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}=-\mathrm{j}\frac{1}{X_C}=-\mathrm{j}B_L$。

电容元件：$Z=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}=-\mathrm{j}X_C,Y=\mathrm{j}\omega C=\mathrm{j}\frac{1}{X_C}=\mathrm{j}B_C$。

5. 正弦稳态电路分析：

（1）从时域到频域的变换，即先将已知的时间正弦激励函数变换为相量，将时域电路变换为频域电路，将待求的正弦电量用相量表示。

（2）频域运算，即应用复数代数理论在频域中进行分析计算，以求得待求量的频域解 —— 相量。

（3）从频域到时域的变换，即将所求得的各电量的相量变换为时域解 —— 正弦量的时间函数表示式。

6. 正弦稳态电路功率：

(1) p(t)、P、Q、S、cosφ； 功率因数提高；

(2)最大功率传输：共轭匹配；等模匹配。

重点与难点

1. 正弦量的相位差及有效值的求法、相量表示方法。

2. 电阻、电感、电容等单一元件的时域、频域伏安关系。

3. 掌握复阻抗、复导纳及其等效变换。

4. 掌握电路频域形式的伏安关系。

5. 用相量法分析计算正弦稳态电路。

6. 电路平均功率的计算方法。