离 散 数 学

西 北 工 业 大 学

2023年3月6日星期一

第一篇 数理逻辑

先看著名物理学家爱因斯坦出过的一道题：

一个土耳其商人想找一个十分聪明的助手协助他经商，有两人前来应聘，这个商人为了试试哪个更聪明些，就把两个人带进一间漆黑的屋子里，他打开灯后说："这张桌子上有五顶帽子，两顶是红色的，三顶是黑色的，现在，我把灯关掉，而且把帽子摆的位置弄乱，然后我们三个人每人摸一顶帽子戴在自己头上，在我开灯后，请你们尽快说出自己头上戴帽子是什么颜色的。"说完后，商人将电灯关掉，然后三人都摸了一顶帽子戴在头上，同时商人将余下的两顶帽子藏了起来，接着把灯打开。这时，那两个应试者看到商人头上戴的是一顶红帽子，其中一个人便喊道："我戴的是黑帽子。"

请问这个人说得对吗？他是怎么推导出来的呢？

第一篇 数理逻辑

要回答这样的问题，实际上就是看由一些诸如“商人戴的是红帽子”这样的前提能否推出“猜出答案的应试者戴的是黑帽子”这样的结论来。这又需要经历如下过程：

(1) 什么是前提？有哪些前提？

(2) 结论是什么？

(3) 根据什么进行推理？

(4) 怎么进行推理？

第一篇 数理逻辑

➢数理逻辑（Mathematical Logic）

——是研究演绎推理的一门学科，用数学的方法来研究推理的规律统称为数理逻辑。

第一篇 数理逻辑

- 主要研究内容：推理

——着重于推理过程是否正确

——着重于语句之间的关系

- 主要研究方法：数学的方法

——就是引进一套符号体系的方法，所以数理逻辑又叫符号逻辑（Symbolic Logic）。

总结

什么是数理逻辑 ？

用数学的方法来研究推理的规律统称为数理逻辑。

为什么要研究数理逻辑？

程序＝算法＋数据

算法＝逻辑＋控制

第一篇 数理逻辑

主要研究内容

命题逻辑
- 命题的基本概念
- 命题联结词
- 命题公式
- 命题的范式

谓词逻辑
- 谓词的基本概念
- 谓词公式
- 公式的标准型

推理与证明技术
- 命题逻辑推理理论
- 谓词逻辑推理理论
- 数学归纳法
- 按定义证明法

第一章　命题逻辑

命题逻辑也称命题演算，或语句逻辑。

研究内容：

（1）研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系

（2）研究什么是命题？

（3）研究如何表示命题？

（4）研究如何由一组前提推导一些结论？

第一章　命题逻辑

命题逻辑的特征：

在研究逻辑的形式时，我们把一个命题只分析到其中所含的命题成份为止，不再分析下去。不把一个简单命题再分析为非命题的集合，不把谓词和量词等非命题成份分析出来。

第一章 命题逻辑

1 命题基本概念

2 命题联结词

3 命题公式

4 命题范式

1.1 本章学习要求

重点掌握

1

1、五种基本联结词
2、24个基本的等价公式
3 掌握求命题范式的方法

一般掌握

2

公式的代入规则和替换规则

了解

3

联结词完备集的理解和学习

1.2 命题与命题联结词

1.2.1 命题

定义1.2.1 具有确切真值的陈述句称为命题，该命题可以取一个“值”，称为真值。

真值只有“真”和“假”两种，

分别用“T”（或“1”）和“F”（或“0”）表示。

难点1：判定是不是命题

灵魂拷问

1、是不是陈述句

2、能不能判断真假

（真假不能同时存在，要么真要么假）

例1.2.1

（1）太阳是圆的；	T
（2）西安是一个旅游城市；	T
（3）北京是中国的首都；	T
（4）我正在说谎；	非命题
（5）1＋1＝10；	T/F
（6） x ＋y > 0；	非命题
（7）我喜欢踢足球；	T/F
（8）3能被2整除；	F
（9）地球外的星球上也有人；	T/F
（10）中国是世界上人口最多的国家；	T/F
（11）今天是晴天；	T/F

例1.2.1（续）

（12）把门关上； 非命题

（13）滚出去！ 非命题

（14）你要出去吗？ 非命题

（15）今天天气真好啊！ 非命题

注意：

一切没有判断内容的句子都不能作为命题，如命令句、感叹句、疑问句、祈使句、二义性的陈述句等。

Tips:

在数理逻辑中像小写字母“x”、“y”、“z”等字母一般表示变量，大写的字母通常表示命题。

结论:

- 命题一定是陈述句，但并非一切陈述句都是命题。
- 命题的真值有时可明确给出，有时还需要依靠环境、条件、实际情况时间才能确定其真值。

例1.2.2

下列语句是否是命题？并判断其真值结果？

（1）陕西不是一个国家；

（2）3既是素数又是奇数；

（3）高启强喜欢吃饺子或是喜欢吃鱼；

（4）如果周末天气晴朗，则我们去郊外旅游；

（5）2+2=4当且仅当雪是白的。

命题的分类

一般来说，命题可分两种类型：

1） 原子命题(简单命题)：不能再分解为更为简单命题的命题。

2） 复合命题：可以分解为更为简单命题的命题。而且这些简单命题之间是通过如“或者”、“并且”、“不”、“如果...则...”、“当且仅当”等这样的关联词和标点符号复合而构成一个复合命题。

1.2.2 命题联结词

设命题P,Q表示任意两个命题,则最常见的命题联结词有:

联接词	记号	复合命题	读法	记法	真值结果
1. 否定	$\neg$	非P	P的否定	$\neg P$	$\neg P=1 \Leftrightarrow P=0$
2. 合取	$\wedge$	P并且Q	P与Q的合取	$P\wedge Q$	$P\wedge Q=1 \Leftrightarrow P=1$ 且 $Q=1$
3. 析取	$\vee$	P或者Q	P与Q的析取	$P\vee Q$	$P\vee Q=1 \Leftrightarrow P=1$ 或 $Q=1$
4. 蕴涵	$\rightarrow$	若P,则Q	P蕴涵Q	$P\rightarrow Q$	$P\rightarrow Q=0 \Leftrightarrow P=1, Q=0$
5. 等价	$\leftrightarrow$	P当且仅当Q	P等价于Q	$P\leftrightarrow Q$	$P\leftrightarrow Q=1 \Leftrightarrow P=1, Q=1$ 或 $P=0, Q=0$

总结

P Q	$\neg$P	P∧Q	P∨Q	P→Q	P↔Q
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

难点2：“P->Q”真值的理解

“吕布行为合理性之分析”

P Q	(P→Q)
0 0	1
0 1	1
1 0	0
1 1	1

某个周五，吕布对貂蝉说：“蝉啊，如果这周六上午你来找我，那我就陪你打游戏。”

周六可能发生的情况：

1、貂蝉没来，吕布没打游戏
2、貂蝉没来，吕布打游戏了
3、貂蝉来了，吕布没打游戏
4、貂蝉来了，吕布打游戏了

说明

1、联结词是句子与句子之间的联结，而非单纯的名词、形容词、数词等地联结；

2、联结词是两个句子真值之间的联结，而非句子的具体含义的联结，两个句子之间可以无任何地内在联系；

说明

3、联结词与自然语言之间的对应并非一一对应；

联结词	自然语言
$\wedge$	既…又…、不仅…而且…、虽然…但是…、并且、和、与，等等；
$\rightarrow$	如P则Q、只要P就Q、P仅当Q、只有Q才P、除非Q否则$\neg$P，等等
$\leftrightarrow$	等价、当且仅当、充分必要、等等；
$\vee$	相容（可兼）的或
$\overline{\vee}$	不可兼容的或

在使用联结词→时，要特别注意以下几点：

(1) 在自然语言里，特别是在数学中，q 是 p 的必要条件（p 是 q 的充分条件）有许多不同的叙述方式，例如，“只要 p，就 q”，“因为 p，所以 q”，“p 仅当 q”，“只有 q 才 p”，“除非 q 才 p”，“除非 q，否则非 p”，等等. 以上各种叙述方式表面看来有所不同，但都表达的是 q 是 p 的必要条件，因而所用联结词均应符号化为→，各种叙述方式都应符号化为 $p\to q$.

(2) 在自然语言中，“如果 p，则 q”中的前件 p 与后件 q 往往具有某种内在联系，而在数理逻辑中，p 与 q 可以无任何内在联系.

(3) 在数学或其他自然科学中，“如果 p，则 q”往往表达的是前件 p 为真，后件 q 也为真的推理关系. 但在数理逻辑中，作为一种规定，当 p 为假时，无论 q 是真是假，$p\to q$ 均为真，也就是说，只有 p 为真 q 为假这一种情况，使得复合命题 $p\to q$ 为假.

引自屈婉玲 离散数学第3版26页

例1.2.4

符号化下列命题

（1）陕西不是人口最多的省份；

设P：陕西是人口最多的省份。

则命题（1）可表示为$\neg P$。

例1.2.4

符号化下列命题

（2）安欣是一个德智体全面发展的好警察；

设P：安欣是一个思想品德好的警察；

Q：安欣是一个学习成绩好的警察；

R：安欣是一个体育成绩好的警察。

则命题（2）可表示为$P \wedge Q \wedge R$。

例1.2.4

符号化下列命题

（3）教室的灯不亮可能是灯管坏了或者是停电了；

设Ｐ：教室的灯不亮可能是灯管坏了

Ｑ：教室的灯不亮可能是停电了

则命题（3）可表示为$P \vee Q$。

例1.2.4

符号化下列命题

（4）如果疫情得到有效控制，那么我们可以放假了；

设P：疫情得到有效控制；

Q：我们可以放假了。

则命题（4）可表示为$P \to Q$。

例1.2.4

符号化下列命题

（5）两个三角形全等当且仅当三角形的三条边全部相等。

设P：两个三角形全等；

Q：三角形的三条边全部相等。

则命题（5）可表示为$P \leftrightarrow Q$。

难点3：命题符号化中联结词选择

真值表法

逻辑联结词本质上是命题逻辑中的运算符号，其运算规则是由真值表唯一确定的。
这就意味着，如果一个命题的真值表与某个逻辑联结词的真值表完全相同，则命题符号化时选用该逻辑联结词。

1）虽然天正在下雨，但是老王仍然上街了。

令P：天正在下雨　　Q：老王上街

符号化为如下表达，哪个合理了？

（A）$P \rightarrow Q$　　(B)$P \wedge Q$　(C)$P \vee Q$

P	Q	命题
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2）老莫上午十点考科目一或者是考科目二。

令P：老莫上午十点考科目一

Q：老莫上午十点考科目二

符号化如下：（A）$P \vee Q$ (B) $P \bar{\vee} Q$

P	Q	命题
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

难点4：蕴涵式的翻译

终极奥义

汉译英

$$p \rightarrow q$$

if p then q

p only if q

难点4：蕴涵式的翻译

[zhǐ yǒu]

只有

只有，拼音zhǐ yǒu，连词，表示必需的条件，下文常用“才”、“方”呼应；唯有，仅有。[1]

[zhǐ yào]

只要 (汉语词汇)

只要，读音zhǐ yào，汉语词语，意思是表示具有充分的条件。

联结词	自然语言
P→Q	如P则Q、只要P就Q （充分条件） P仅当Q、只有Q才P、除非Q才P、除非Q否则¬P等等 （必要条件）

令P：天下雨　　　Q：我在家

（1）如果天下雨，我就在家

（2）只有天下雨，我才在家

（3）除非天下雨，否则我不在家

（4）只要天下雨，我就在家

符号化：（A）$P \to Q$　　(B) $Q \to P$

(1) If P then Q

(2) Only if P, Q

(3) Only if P, ¬(¬Q)

(4) If P then Q

约 定

为了不使句子产生混淆，作如下约定，命题联结词之优先级如下：

1. 否定→合取→析取→蕴涵→等价
2. 同级的联结词，按其出现的先后次序(从左到右)
3. 若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号；同级符号相邻时，也可使用括号。括号中的运算为最优先级。

例1.2.5

设命题 P：明天上午七点下雨；

Q：明天上午七点下雪；

R：我将去学校。

符号化下述语句：

1） 如果明天上午七点不是雨夹雪，则我将去学校

可符号化为：$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$。

3） 如果明天上午七点下雨或下雪，则我将不去学校

4） 明天上午我将雨雪无阻一定去学校

例1.2.5

设命题　　P：明天上午七点下雨；

　　　　　Q：明天上午七点下雪；

　　　　　R：我将去学校。

符号化下述语句：

1）如果明天上午七点不是雨夹雪，则我将去学校

2）如果明天上午七点不下雨并且不下雪，则我将去学校

可符号化为:$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$。

例1.2.5

设命题 P：明天上午七点下雨；

Q：明天上午七点下雪；

R：我将去学校。

符号化下述语句：

1）如果明天上午七点不是雨夹雪，则我将去学校

可符号化为:(P∨Q)→┐R。

3）如果明天上午七点下雨或下雪，则我将不去学校

4）明天上午我将雨雪无阻一定去学校

例1.2.5

设命题 P：明天上午七点下雨；

Q：明天上午七点下雪；

可符号化为：

$(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee$
$(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$。

或 $((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$
$\vee(\neg P\wedge\neg Q))\wedge R$。

4） 明天上午我将雨雪无阻一定去学校

例

试用符号形式写出下列命题：

除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去；

令P：你陪伴我； Q：你代我叫车子；R：我出去。

则有：$R \rightarrow P \vee Q$ 或

$\neg P \wedge \neg Q \rightarrow \neg R$；

1.2.4 命题联结词的应用

例 1.2.7 用复合命题表示如下图所示的开关电路：

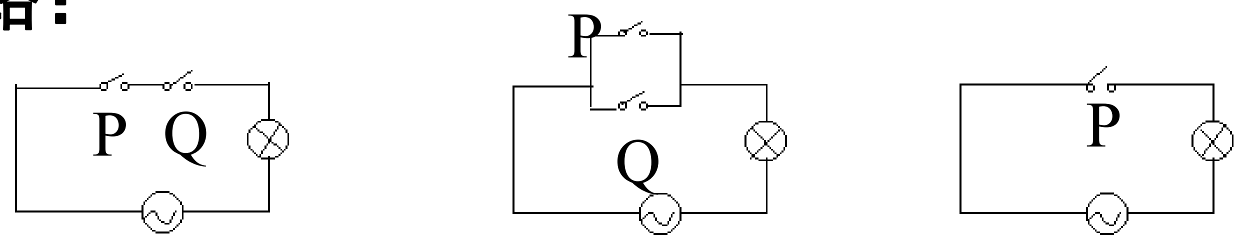


图1.2.1　　图1.2.2　　图1.2.3

设：A：开关P闭合；B：开关Q闭合。

$A \wedge B$　　$A \vee B$　　A

1.3 命题公式、解释与真值表

定义1.3.1 一个特定的命题是一个**常值命题**，它不是具有值“T”（“1”），就是具有值“F”（“0”）。

而一个任意的没有赋予具体内容的原子命题是一个变量命题，常称它为**命题变量**(或**命题变元**)，该命题变量无具体的真值，它 … F}(或{0, 1})

真值函数

注意

(1)复合命题为命题变元的“**函数**”，其函数值仍为"真"或“假”值。

(2)真值函数或命题公式，没有确切真值。

1.3.1 命题公式

定义1.3.2（命题公式）

1. 命题变元本身是一个公式；
2. 如G是公式，则(¬ G)也是公式；
3. 如G，H是公式，则(G∧H)、(G∨H)、(G→H)、(G↔H)也是公式；
4. 仅由有限步使用规则1-3后产生的结果。该公式常用符号G、H、…等表示。

Well-formed formula

例1.3.1

符号串：$((P\wedge(Q\vee R))\rightarrow(Q\wedge(\neg S\vee R)))$；

$(\neg P\wedge Q)$； $(P\rightarrow(\neg(P\wedge Q)))$；

$(((P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q))\leftrightarrow(P\rightarrow R))$。

等都是命题公式。

例1.3.2符号串：

$(P\rightarrow Q)\wedge\neg Q)$； $(P\rightarrow Q$；

$(\neg P\vee Q\vee(R$； $P\vee Q\vee$。

等都不是合法的命题公式。

1.3.2 公式的解释与真值表

定义1.3.3 设P_1、P_2、…、P_n是出现在公式G中的所有命题变元，指定P_1、P_2、…、P_n一组真值，则这组真值称为G的一个解释，记为I。

一般来说，若有n个命题变元，则应有2^n个不同的解释。

如果公式G在解释I下是真的，则称I满足G；如果G在解释I下是假的，则称I 弄假G。

定义1.3.4 将公式G在其所有可能解释下的真值情况列成的表，称为G的真值表。

例1.3.6

求下面这组公式的真值表：

$$G_1 = \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P;$$

$$G_2 = (P \rightarrow Q) \wedge P;$$

$$G_3 = \neg(P \wedge \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q)。$$

P Q	$\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow P$	$(P\rightarrow Q)\wedge P$	$\neg(P\wedge\neg Q)\leftrightarrow\neg(P\rightarrow Q)$
0 0			
0 1			
1 0			
1 1			

定义1.3.5

1. 公式G称为永真公式(重言式)，如果在它的所有解释之下都为“真”。
2. 公式G称为永假公式(矛盾式),如果在它的所有解释之下都为“假”。
3. 公式G称为可满足的，如果它不是永假的。

结论

从上述定义可知三种特殊公式之间的关系：

1） 永真式G的否定¬G是矛盾式；矛盾式G的否定¬G是永真式。

2） 永真式一定是可满足式，可满足式不一定是永真式

3） 可满足式的否定不一定为不可满足式（即为矛盾式）

例1.3.7

写出下列公式的真值表，并验证其公式是重言式、矛盾式、可满足公式。

（1）$G_1=(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$；

（2）$G_2=(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(\neg(P\rightarrow Q)\vee\neg(Q\rightarrow P))$；

（3）$G_3=(P\rightarrow\neg Q)\vee\neg Q$。

例1.3.7 解

三个公式的真值表如下：

P Q	$(P\to Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$	$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow\neg(P\to Q)\vee\neg(Q\to P)$	$(P\to\neg Q)\vee\neg Q$
0 0	1	0	1
0 1	1	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	0	0

永真公式

永假公式

可满足公式

分析永真公式 $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$

若将其看成两个公式，分别令：

$G=P\rightarrow Q$， $H=\neg P\vee Q$。

则$G\leftrightarrow H$是一个永真公式，即这两个公式对任何解释都必同为真假，此时，说G和H相等，记为$G=H$。为此可定义：

定义1.3.6 设G、H是公式，如果在任意解释I下，G与H的真值相同，则称公式G、H是**等价的**，记作$G=H$。

定理：公式G、H等价的充分必要条件是公式$G\leftrightarrow H$是永真公式

"＝" 与 "↔" 的区别

双条件词"↔"是一种逻辑联结词，公式G↔H是命题公式，其中"↔"是一种逻辑运算，G↔H的结果仍是一个命题公式。而逻辑等价"＝"则是描述了两个公式G与H之间的一种逻辑等价关系，G＝H表示"命题公式G等价于命题公式H"，G＝H的结果不是命题公式。

“=”的性质

由于“=”不是一个联结词，而是一种关系，为此，这种关系具有如下三个性质：

（1）自反性　G=G；

（2）对称性　若G=H，则H=G；

（3）传递性　若G=H，H=S，则G=S。

这三条性质体现了“=”的实质含义。

1.3.4 命题公式的基本等价关系

例1.3.8 证明公式G_1＝(P↔Q)与公式G_2＝(P→Q)∧(Q→P)之间是逻辑等价的。

解： 根据等价判定定理，只需判定公式G_3＝(P↔Q)↔((P→Q)∧(Q→P))为永真公式。

P	Q	G_3＝(P↔Q)↔((P→Q)∧(Q→P))
0	0	1 1 1 1 1
0	1	0 1 1 0 0
1	0	0 1 0 0 1
1	1	1 1 1 1 1

基本等价公式

设G，H，S是任何的公式，则：

1） E_1：$G \vee G = G$ （幂等律）

E_2：$G \wedge G = G$

2） E_3：$G \vee H = H \vee G$ （交换律）

E_4：$G \wedge H = H \wedge G$

3） E_5：$G \vee (H \vee S) = (G \vee H) \vee S$ （结合律）

E_6：$G \wedge (H \wedge S) = (G \wedge H) \wedge S$

4） E_7：$G \vee (G \wedge H) = G$ （吸收律）

E_8：$G \wedge (G \vee H) = G$

基本等价公式（续）

5） E_9： $G \lor (H \land S) = (G \lor H) \land (G \lor S)$ （分配律）

E_{10}： $G \land (H \lor S) = (G \land H) \lor (G \land S)$

6） E_{11}： $G \lor 0 = G$ （同一律）

E_{12}： $G \land 1 = G$

7） E_{13}： $G \lor 1 = 1$ （零律）

E_{14}： $G \land 0 = 0$

8） E_{15}： $G \lor \neg G = 1$ （排中律）

9） E_{16}： $G \land \neg G = 0$ （矛盾律）

基本等价公式（续）

10) E_{17}: $\neg(\neg G) = G$ （双重否定律）

11) E_{18}: $\neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H$ （De MoRGan定律）

E_{19}: $\neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H$。

12) E_{20}: $(G \leftrightarrow H) = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$ （等价）

13) E_{21}: $(G \rightarrow H) = (\neg G \vee H)$ （蕴涵）

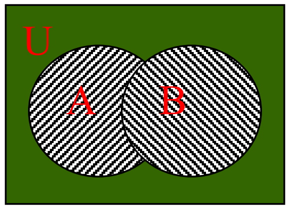
14) E_{22}: $G \rightarrow H = \neg H \rightarrow \neg G$。 （假言易位）

15) E_{23}: $G \leftrightarrow H = \neg G \leftrightarrow \neg H$。 （等价否定等式）

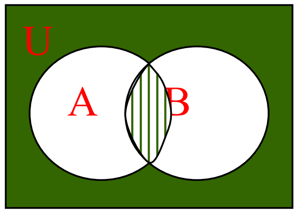
16) E_{24}: $(G \rightarrow H) \wedge (G \rightarrow \neg H) = \neg G$ （归谬论）

命题与集合之间的关系

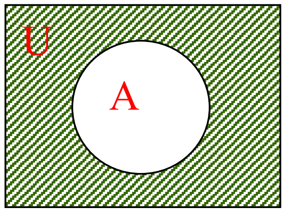
这种图是将G，H理解为某总体论域上的子集合，而规定G∧H为两集合的公共部分（交集合），G∨H为两集合的全部（并集合），┐G为总体论域（如矩形域）中G的补集，将命题中的真值“1”理解为集合中的总体论域（全集），将命题中的真值“0”理解为集合中的空集，则有：



G∨H



G∧H



┐G

“∪”对“∨”与“∩”对“∧”的对比

等幂律	$A\cup A=A$；$A\cap A=A$	$G\vee G=G$ $G\wedge G=G$
交换律	$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$	$G\vee H=H\vee G$ $G\wedge H=H\wedge G$
结合律	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	$G\vee(H\vee S)=(G\vee H)\vee S$ $G\wedge(H\wedge S)=(G\wedge H)\wedge S$
恒等律	$A\cup\Phi=A$；$A\cap U=A$；	$G\vee 0=G$ $G\wedge 1=G$
零　律	$A\cup U=U$；$A\cap\Phi=\Phi$	$G\vee 1=1$ $G\wedge 0=0$
吸收律	$A\cap(A\cup B)=A$ $A\cup(A\cap B)=A$	$G\vee(G\wedge H)=G$ $G\wedge(G\vee H)=G$
否定律	$\overline{\overline{A}}=A$	$\neg(\neg G)=G$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$G\vee(H\wedge S)=(G\vee H)\wedge(G\vee S)$ $G\wedge(H\vee S)=(G\wedge H)\vee(G\wedge S)$

定理1.3.2(代入规则)

对一永真式中某个命题变元出现的每一处均用相同的公式代入后，新的公式仍然是永真式。

$$P \vee \neg P = 1$$

P用$(M \to N)$代入

$$(M \to N) \vee \neg(M \to N) = 1$$

定理1.3.3(替换规则)

若公式A和B有恒等关系A=B，公式C中出现A的地方可以用B进行替换，替换后的新公式D，满足C=D。

A: $P \to Q$ B: $\neg P \vee Q$

C: $(P \to Q) \wedge R$

D: $(\neg P \vee Q) \wedge R$

则 C = D

利用24个基本等价公式及代入定理和替换定理，可完成公式的转化和等价判定。

举例

证明 $(P \to Q) \to (Q \vee R) = P \vee Q \vee R$

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \vee R) \\
&= (P \wedge \neg Q) \vee Q \vee R \\
&= (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q \vee R) \\
&= P \vee Q \vee R
\end{aligned}
$$

从而得证

对偶定理

定义： 设有公式A，其中仅有联结词∧、∨、¬ 。
在A中将∧、∨、1、0分别换以∨、∧、0、1得公式A^*，
则A^*称为A的**对偶公式**。

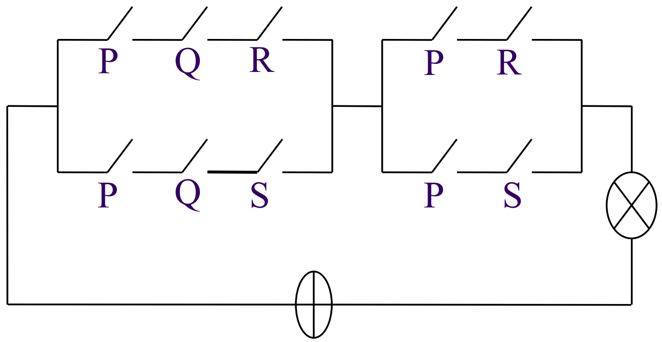
性质1： 设A和A^*是对偶式。P_1，P_2，…，P_n
是出现于A和A^*中的所有命题变元，于是

$$\neg(P_1, P_2, \ldots, P_n) = A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

性质2： 若$A = B$，且A、B为由命题变元P_1，P_2，…，P_n及联结词∧、∨、¬构成的公式，则$A^* = B^*$。

1.3.6 命题公式的应用

例1.3.11 利用基本的等价关系，化简下列电路图



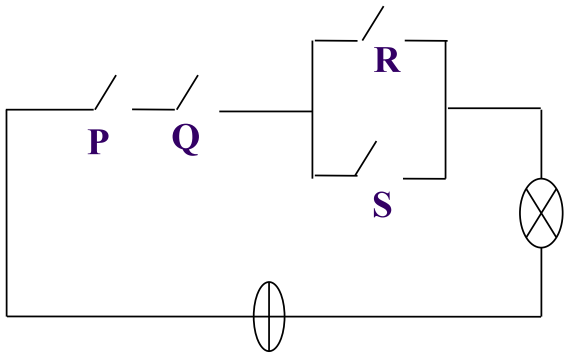
解：上述电路图可描述为：

$((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge S))\wedge((P\wedge R)\vee(P\wedge S))$

例1.3.11（续）

利用24个基本等价关系，化简公式可得：

$$((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge S))\wedge((P\wedge R)\vee(P\wedge S))$$
$$=((P\wedge Q\wedge(R\vee S))\wedge(P\wedge(R\vee S))$$
$$=P\wedge Q\wedge(R\vee S);$$



例1.3.13

有一逻辑学家误入某部落，被拘于牢狱，酋长意欲放行，他对逻辑学家说：

“今有两门，一为自由，一为死亡，你可任意开启一门。现有两名战士负责解答你所提的问题（仅能选择一人问一个问题）。这俩战士一个天性诚实，一个说谎成性，今后生死由你自己选择。”

逻辑学家该如何脱困？


1、哪个门是自由门
2、谈话对象是老实人还是骗子
3、谈话回答是“是”还是“不是”

构造命题：
P：左边门是自由门
Q: 交谈对象是老实人
R: 另一人对命题P的回答是“是”
S: 交谈对象对学者的回复是“对”


Bob


Eve

P：左边门是自由门

Q: 交谈对象是老实人

R: 另一人对命题P的回答是“是”

S: 交谈对象对学者的回复是“对”

P	Q	R	S
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

Bob

Eve

例1.3.13 解

逻辑学家手指一门问身旁的一名战士说:“这扇门是自由之门，他(指另一名战士)将回答‘是’，对吗？”

当被问战士回答“对”，则逻辑学家开启另一扇门

当被问的战士回答“否”，则逻辑学家开启所指之门。

1.5 公式的标准型——范式

1.5.1 析取范式和合取范式

定义1.5.1

（1）命题变元或命题变元的否定称为**文字**

（2）有限个文字的析取称为**析取式**(也称为**子句**)

（3）有限个文字的合取称为**合取式**(也称为**短语**)

（4）P与$\neg$ P称为**互补对**。

例子

（1） P、$\neg$P 是文字；

（2） P$\vee$Q$\vee$R 是子句；

（3） P$\wedge$Q$\wedge$R 是短语。

$\neg$ P是一个子句，这种说法正确么？

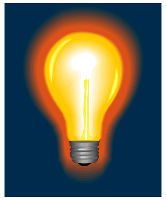
一个命题变元或者其否定既可以是简单的子句，也可以是简单的短语。

因此，P，$\neg$P 不但是文字，也是子句、短语

定义1.5.2

（1）有限个短语的析取式称为**析取范式**

（2）有限个子句的合取式称为**合取范式**



一个不含最外层括号的短语（子句）也可以是合取范式（析取范式）。

例子

（1） P、$\neg$P是析取范式、合取范式；

（2） $P \vee Q \vee \neg R$是子句、析取范式、合取范式，

$(P \vee Q \vee \neg R)$仅是子句、合取范式；

（3） $\neg P \wedge Q \wedge R$是短语、析取范式、合取范式，

$(\neg P \wedge Q \wedge R)$仅是短语、析取范式；

（4） $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$是析取范式；

（5） $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$是合取范式；

（6） 句子$P \vee (Q \vee \neg R)$、$\neg (Q \vee R)$既不是析取范式也不是合取范式

总结

（1）单个的文字是子句、短语、析取范式，合取范式

（2）单个的子句是析取范式；

（3）单个的短语是合取范式；

（4）若单个的子句（短语）有最外层括号，则仅能是合取范式（析取范式）；

（5）析取范式、合取范式仅含联结词集{¬，∧，∨}

（6）“¬”联结词仅出现在命题变元前。

范式的求解方法

定理1.5.1 对于任意命题公式，都存在与其等价的析取范式和合取范式。

转换方法：

（1）利用等价公式中的等价式和蕴涵式将公式中的→、↔用联结词¬、∧、∨来取代，这可利用如下等价关系：

$(G \rightarrow H) = (\neg G \vee H)$；

$(G \leftrightarrow H) = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$

$= (\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G)$。

范式的求解方法(续)

（2）重复使用德•摩根定律将否定号移到各个命题变元的前端，并消去多余的否定号，这可利用如下等价关系：$\neg(\neg G) = G$；

$$\neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H;$$

$$\neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H。$$

（3）重复利用分配律，可将公式化成一些合取式的析取，或化成一些析取式的合取，这可利用如下等价关系：$G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S)$；

$$G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S)。$$

例1.5.1

求公式：$(P\rightarrow\neg Q)\vee(P\leftrightarrow R)$的析取范式和合取范式

解 $(P\rightarrow\neg Q)\vee(P\leftrightarrow R)$

$= (\neg P\vee\neg Q)\vee((\neg P\vee R)\wedge(\neg R\vee P))$

$= (\neg P\vee\neg Q)\vee(\neg P\vee R))$

$\wedge((\neg P\vee\neg Q)\vee(\neg R\vee P))$

$= (\neg P\vee\neg Q\vee\neg P\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R\vee P)$

$= (\neg P\vee\neg Q\vee R)$——合取范式

$= \neg P\vee\neg Q\vee R$——析取范式

范式的不惟一性

考虑公式：

$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$，

其与之等价的析取范式：

$P \vee (Q \wedge R)$；

$(P \wedge P) \vee (Q \wedge R)$；

$P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)$；

$P \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$。

这种不惟一的表达形式给研究问题带来了不便。

1.5.2 主析取范式和主合取范式

1 极小项和极大项

定义 1.5.3 在含有n个命题变元P_1、P_2、P_3、…、P_n的短语或子句中，若每个命题变元与其否定不同时存在，但二者之一恰好出现一次且仅一次，则称此短语或子句为关于P_1、P_2、P_3、…、P_n的一个极小项或极大项。

对于n个命题变元，可构成2^n个极小项和2^n个极大项

例子

（1）一个命题变元P，

对应的极小项有两项：P、$\neg P$；

对应的极大项有两项：P、$\neg P$。

（2）两个命题变元P、Q，

对应的极小项有四项：

$P \wedge Q$、$\neg P \wedge Q$、$P \wedge \neg Q$、$\neg P \wedge \neg Q$；

对应的极大项有四项：

$P \vee Q$、$\neg P \vee Q$、$P \vee \neg Q$、$\neg P \vee \neg Q$。

例子（续）

（3）三个命题变元P、Q、R，

对应的极小项有八项：

$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$、$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$

$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$、$\neg P\wedge Q\wedge R$、$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$

$P\wedge\neg Q\wedge R$、$P\wedge Q\wedge\neg R$、$P\wedge Q\wedge R$；

对应的极大项有八项：

$\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$、$\neg P\vee\neg Q\vee R$

$\neg P\vee Q\vee\neg R$、$\neg P\vee Q\vee R$、$P\vee\neg Q\vee\neg R$

$P\vee\neg Q\vee R$、$P\vee Q\vee\neg R$、$P\vee Q\vee R$。

两个命题变元的所对应极小项真值表

P Q	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$P \wedge Q$
0 0	1	0	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	0	1

注意：（1）没有等价的两个极小项；

（2）使该极小项的真值为真的指派是唯一的；

（3）使极小项为真的那组指派为对应极小项的编码；

（4）命题变元与1对应，命题变元的否定与0对应。

两个命题变元的所对应极小项真值表

P Q	$\neg P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$P\wedge Q$
0 0	1	0	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	0	1

$\neg P\wedge\neg Q$ → {0、0}为真 → {0 0} → m_{00} (m_0)

$\neg P\wedge Q$ → {0 1}为真 → {0 1} → m_{01} (m_1)

$P\wedge\neg Q$ → {1 0}为真 → {1 0} → m_{10} (m_2)

$P\wedge Q$ → {1 1}为真 → {1 1} → m_{11} (m_3)

两个命题变元的所对应极大项真值表

P　Q	┐P∨┐Q	┐P∨Q	P∨┐Q	P∨Q
0　0	1	1	1	0
0　1	1	1	0	1
1　0	1	0	1	1
1　1	0	1	1	1

注意：（1）没有等价的两个极大项；

（2）使该极大项的真值为假的指派是唯一的；

（3）使极大项为假的那组指派为对应极大项的编码；

（4）命题变元与0对应，命题变元的否定与1对应。

两个命题变元的所对应极大项真值表

P Q	$\neg P\vee\neg Q$	$\neg P\vee Q$	$P\vee\neg Q$	$P\vee Q$
0 0	1	1	1	0
0 1	1	1	0	1
1 0	1	0	1	1
1 1	0	1	1	1

$P\vee Q$ → {0、0}为假 → {0 0} → M_{00} (M_0)

$P\vee\neg Q$ → {0 1}为假 → {0 1} → M_{01} (M_1)

$\neg P\vee Q$ → {1 0}为假 → {1 0} → M_{10} (M_2)

$\neg P\vee\neg Q$ → {1 1}为假 → {1 1} → M_{11} (M_3)

三个命题变元的极小项和极大项

P	Q	R	极小项	极大项
0	0	0	$m_0=\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	$M_0=P\vee Q\vee R$
0	0	1	$m_1=\neg P\wedge\neg Q\wedge R$	$M_1=P\vee Q\vee\neg R$
0	1	0	$m_2=\neg P\wedge Q\wedge\neg R$	$M_2=P\vee\neg Q\vee R$
0	1	1	$m_3=\neg P\wedge Q\wedge R$	$M_3=P\vee\neg Q\vee\neg R$
1	0	0	$m_4=P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	$M_4=\neg P\vee Q\vee R$
1	0	1	$m_5=P\wedge\neg Q\wedge R$	$M_5=\neg P\vee Q\vee\neg R$
1	1	0	$m_6=P\wedge Q\wedge\neg R$	$M_6=\neg P\vee\neg Q\vee R$
1	1	1	$m_7=P\wedge Q\wedge R$	$M_7=\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$

极小项和极大项的性质

任意两个极小项的合取必为假；

$m_i \wedge m_j = F$

任意两个极大项的析取必为真；

$M_i \vee M_j = T$

极大项的否定是极小项；

$\neg M_i = m_i$

极小项的否定是极大项；

$M_i = \neg m_i$

所有极小项的析取为永真公式；

所有极大项的合取是永假公式。

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1;$$

$$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0。$$

2 主析取范式和主合取范式

定义1.5.4

（1）在给定的析取范式中，每一个短语都是极小项，则称该范式为主析取范式

（2）在给定的合取范式中，每一个子句都是极大项，则称该范式为主合取范式

（3）如果一个主析取范式不包含任何极小项，则称该主析取范式为“空”；如果一个主合取范式不包含任何极大项，则称主合取范式为“空”。

3 求主析取范式和主合取范式的方法

主范式

公式转换法

利用基本等价公式进行变换（证明见定理1.5.2)

真值表技术

对公式的真值结果进行分解，分解成等价的极小项的析取或者极大项的合取

例1.5.2

利用等价公式转换法求公式$(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\wedge R)$的主析取范式和主合取范式 。

解： 第一种方法 真值表法

P	Q	R	$(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\wedge R)$	
0	0	0	0	极大项
0	0	1	0	极大项
0	1	0	0	极大项
0	1	1	1	极小项
1	0	0	1	极小项
1	0	1	1	极小项
1	1	0	0	极大项
1	1	1	1	极小项

例1.5.2

P	Q	R	(P→Q)→(Q∧R)	
0	0	0	0	极大项M_0
0	0	1	0	极大项M_1
0	1	0	0	极大项M_2
0	1	1	1	极小项m_3
1	0	0	1	极小项m_4
1	0	1	1	极小项m_5
1	1	0	0	极大项M_6
1	1	1	1	极小项m_7

主析取范式为$\boldsymbol{m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7}$，即

$$(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

同理，主合取范式为$\boldsymbol{M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_6}$，即

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

例1.5.2

第二种解法 公式转换法

解：（1）求主析取范式

$(P \to Q) \to (Q \land R) = \neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \land R)$

$= (P \land \neg Q) \lor (Q \land R)$ ——析取范式

$= (P \land \neg Q \land (R \lor \neg R)) \lor ((P \lor \neg P) \land Q \land R)$

$= (P \land \neg Q \land R) \lor (P \land \neg Q \land \neg R) \lor (P \land Q \land R)$

$\lor (\neg P \land Q \land R)$ ——主析取范式

即 $m_5 \lor m_4 \lor m_7 \lor m_3$

例1.5.2（续）

（2）求主合取范式

$(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\wedge R)=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge R)$

$=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R)$

$=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$——合取范式

$=(P\vee Q\vee(R\wedge\neg R))\wedge(P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)\wedge$

$((P\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R)$

$=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee R)$

$\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge((P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

例1.5.2（续）

$= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)$

$\wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$ —主合取范式

即 $M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_6$

两种方法结果一致

需要说明

注!意

求任何一个公式的主析取范式和主合取范式不仅要取决于该公式，而且取决于该公式所包含的命题变元。

如公式：

$G_1 = (P \rightarrow Q) \wedge Q$，

$G_2(P, Q, R) = (P \rightarrow Q) \wedge Q$。

前者是依赖于两个命题变元的，后者应依赖于三个命题变元。

1.5.3 范式中的难点

1、如何正确的理解范式定义中的“有限个文字”、“有限个短语”、“有限个子句”的概念是很关键的，“有限个”∈N={0，1，2，…，n，…}；

2、使用真值表技术求主范式时注意正确地建立真值表，正确地掌握真值解释还原成子句和短语的方法；

1.5.3 范式中的难点

3、使用公式转换法求主范式时，需要增加某一个命题变元，此时注意关于该变元的永真公式和永假公式的正确加入，同时注意公式的正确化简；

4、利用主析取求主合取或者利用主合取求主析取时，注意是“G”的主析取范式的否定或“G”的主合取范式的否定，而非直接是G的否定。

1.5.4 联结词扩充与规约

命题联结词的扩充

(1) 异或联结词: $A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B)$

(2) 谢佛联结词: $A \uparrow B = \neg(A \wedge B)$

(3) 魏泊联结词: $A \downarrow B = \neg(A \vee B)$

(4) 蕴涵否定联结词: $A \not\rightarrow B = \neg(A \rightarrow B)$

与之前学习的五种联结词一起，穷尽了一切命题间的联结词

112

联结词完备集

- 设S是一个联结词集合，如果任何公式都可以由仅含S中的联结词表示，则称S是联结词完备集

- 定理 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集
- 证明 由范式存在定理可证

113

联结词完备集

推论 以下都是联结词完备集

(1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ (2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$ (4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$

(5) $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

证明

(1),(2) 在联结词完备集中加入新的联结词后仍为完备集

(3) $A\vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A\wedge\neg B)$

(4) $A\wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A\vee\neg B)$

(5) $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$

$\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$不是联结词完备集, 0不能用它表示

它的子集$\{\wedge\},\{\vee\},\{\rightarrow\},\{\leftrightarrow\},\{\wedge,\vee\},\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$等都不是

114

Thank You！