一、置换群

置换的定义：

有限集A上的双射函数称为A上的置换或排列。

如A={1,2,3,4}, h: A→A, h(1)=3, h(2)=2, h(3)=4, h(4)=1 ,

此置换可表示为：

$$p=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，即$|A|=n$时，称为A上的置换为n次置换。A上的n次置换p可表示为：

$$p=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ p(a_1) & p(a_2) & \cdots & p(a_n)\end{pmatrix}$$

一、置换群

$|A|=n$时，A上有 $n!$个n次置换，如$A=\{1,2,3\}$时，

$$p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\qquad p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\qquad p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

$$p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\qquad p_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\qquad p_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

一般地，$|A|=n$时，记A上所有置换集合为S_n, $|S_n|=n!$

置换的合成运算：

左合成运算：$\circ$, $p_1\circ p_2$, 先进行p_2置换，再进行p_1置换。

右合成运算：$\diamond$, $p_1\diamond p_2$, 先进行p_1置换，再进行p_2置换。

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\diamond\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

一、置换群

不难验证：(右合成运算：◇, p_1◇p_2, 先p_1置换, 再p_2置换)

(1) $<S_n, \Diamond>$是一个代数;

(2) $<S_n, \Diamond>$是一个群。

给定集合A,

(1) S_n关于运算◇封闭

(2) A上所有置换对运算◇而言满足结合律

(3) S_n关于运算◇存在幺元—恒等置换，恒等函数，又称幺置换

(4)每一置换都有逆置换——逆函数

所以$<S_n, \Diamond>$是一个群。

一、置换群

给定n个元素组成的集合A:

A上的若干置换所构成的群称为**n**次置换群;

A上所有置换构成的群称为**n**次对称群,$<S_n,\Diamond>$。

n次对称群$<S_n,\Diamond>$的子群即为n次置换群。

例**1** 令A＝{1,2,3}，A上置换的全体$S_3=\{p_i \mid i=1,2,3,4,5,6\}$。

$$p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\quad p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\quad p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

$$p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\quad p_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\quad p_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

p_1为恒等置换，$p_2^{-1}=p_2$，$p_3^{-1}=p_3$，$p_4^{-1}=p_4$，$p_5^{-1}=p_6$

- $<S_3,\Diamond>$为三次对称群
- $<\{p_1,p_2\},\circ>$为2阶三次置换群
- $<\{p_1,p_5,p_6\},\circ>$为3阶三次置换群

一、置换群

$\langle S_3, \Diamond \rangle$为三次对称群,其运算表如下表所示:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

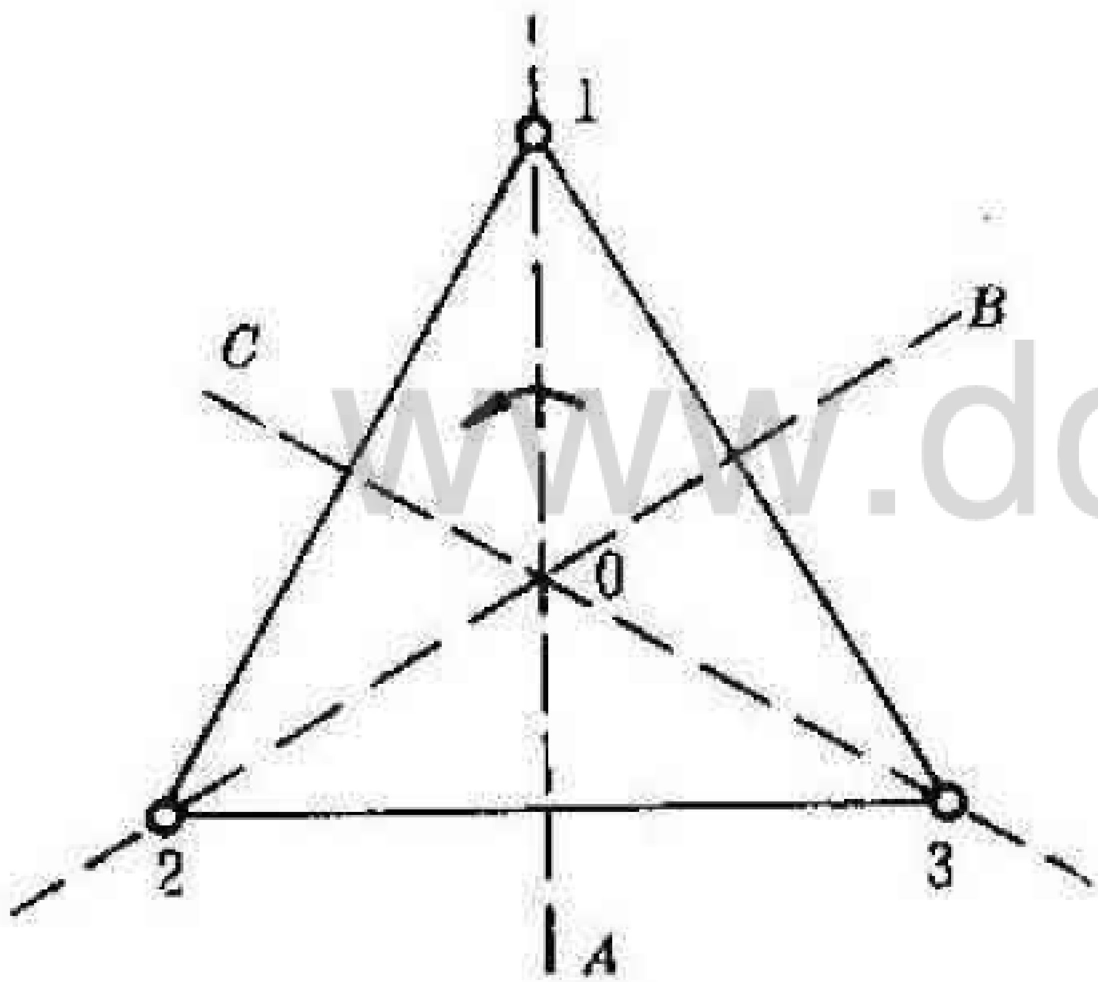
$$p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Diamond$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_2	p_2	p_1	p_5	p_6	p_3	p_4
p_3	p_3	p_6	p_1	p_5	p_4	p_2
p_4	p_4	p_5	p_6	p_1	p_2	p_3
p_5	p_5	p_4	p_2	p_3	p_6	p_1
p_6	p_6	p_3	p_4	p_2	p_1	p_5

一、置换群

例2 两面体群

(a) 给定正三角形123(如左下图所示)，将三角形围绕重心O旋转，分别旋转0°，120°，240°。可以把每一旋转看成是三角形的顶点集合{1, 2, 3}的置换，于是有



$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{旋转}0°)$$

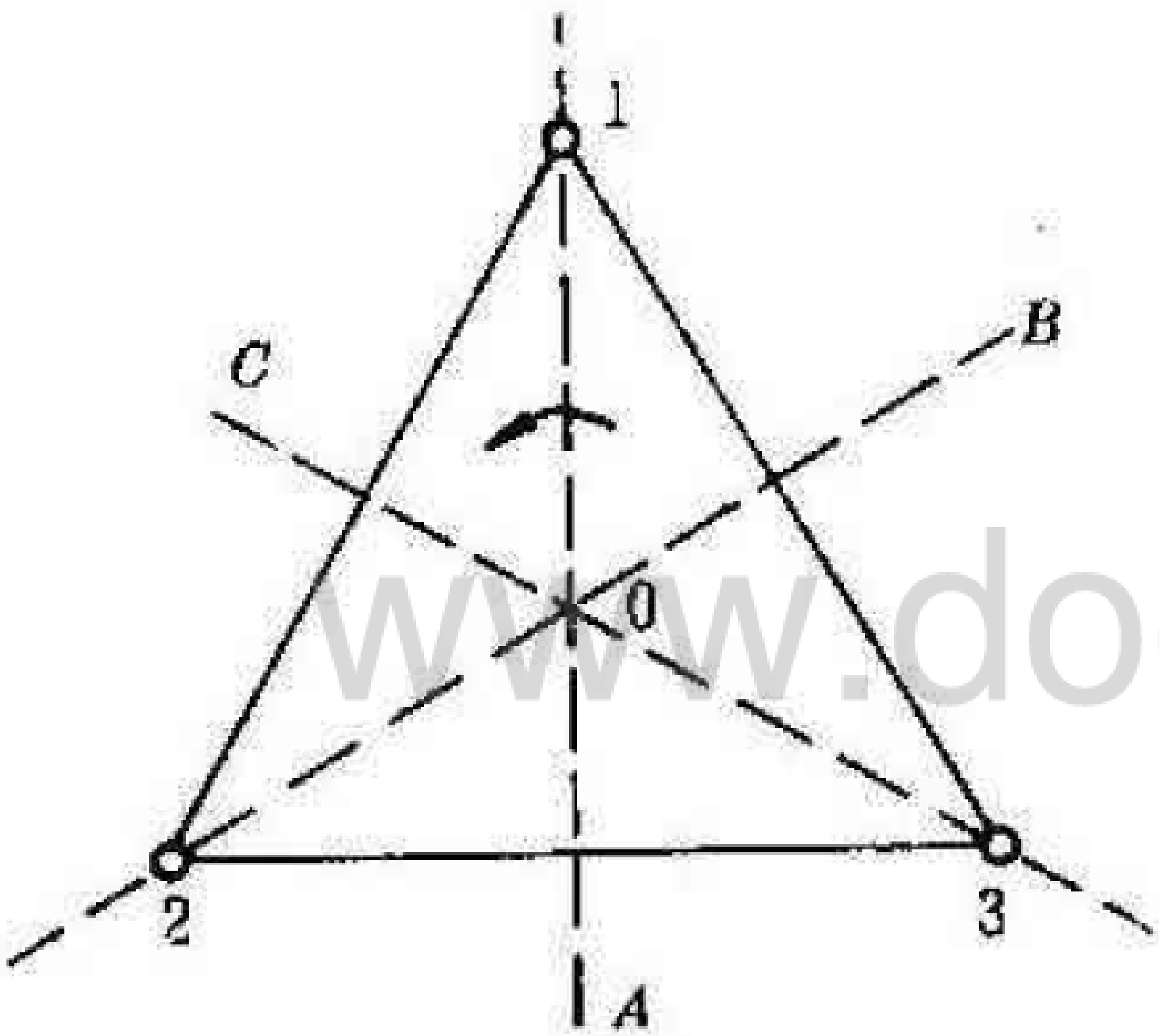
$$p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{旋转}120°)$$

$$p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{旋转}240°)$$

一、置换群

例2 两面体群(续)

再将三角形围绕直线1A、2B、3C翻转。又得到顶点集合的置换:



$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{绕}3C\text{翻转})$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{绕}2B\text{翻转})$$

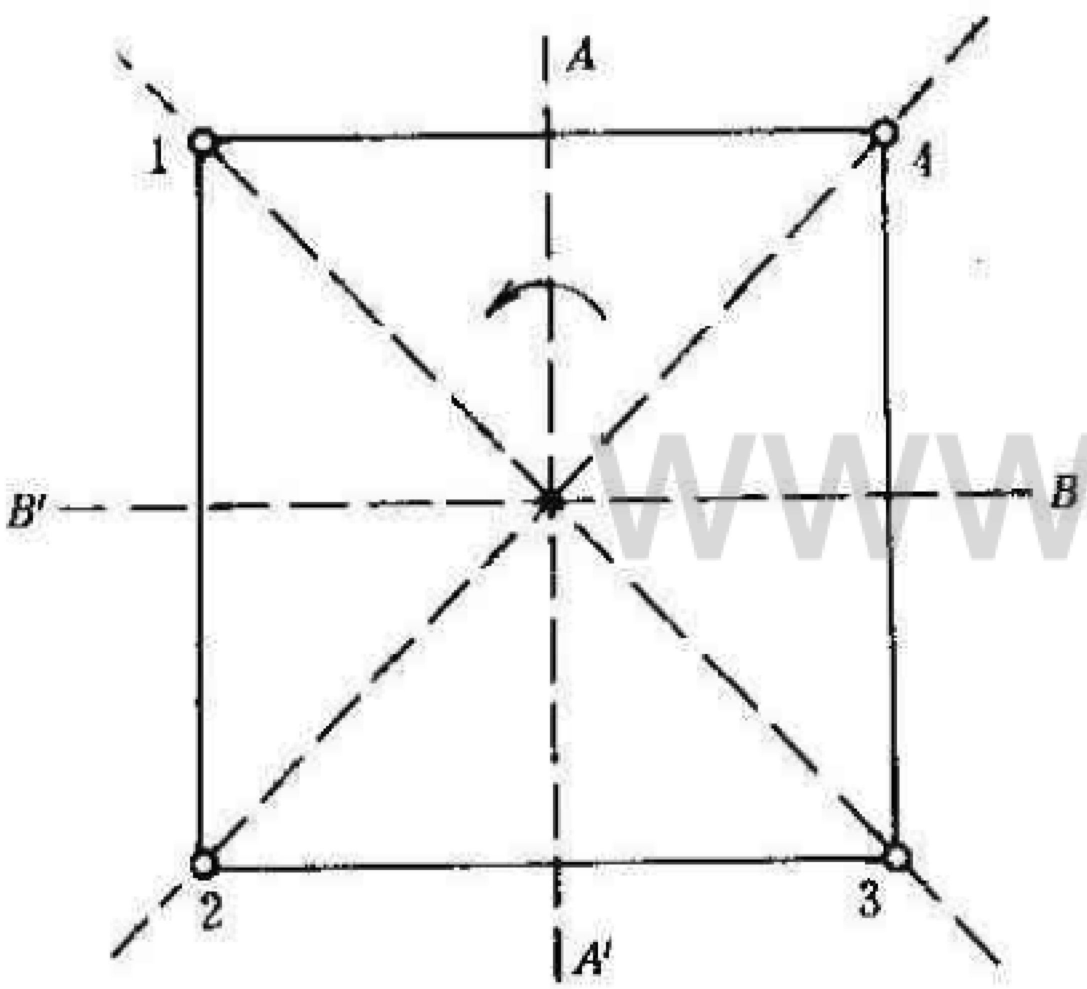
$$p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{绕}1A\text{翻转})$$

正三角形的旋转和翻转在合成运算下可构成群, $\langle S_3, \diamond \rangle$就代表这个群。

一、置换群

例**2** 两面体群(续)

(b)正四边形通过旋转和翻转也可以形成四个顶点集合{1, 2, 3, 4}的置换(见下图):



$$p_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\ (\text{旋转}90^\circ)\qquad p_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\ (\text{绕}AA'\text{翻转})$$

$$p_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\ (\text{旋转}180^\circ)\qquad p_6=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\ (\text{绕}BB'\text{翻转})$$

$$p_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\ (\text{旋转}270^\circ)\qquad p_7=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\ (\text{绕}13\text{翻转})$$

$$p_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\ (\text{旋转}360^\circ)\qquad p_8=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\ (\text{绕}24\text{翻转})$$

一、置换群

例2 两面体群(续)

正方形的翻转和旋转在合成运

这不是对称群，元素没有4!个，是一置换群。一般地说，在合成运算◇作用下，n边正多边形的所有旋转和翻转的集合构成一个n次的2n阶的置换群，这类群通称两面体群。

◇	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
p_1	p_2	p_3	p_4	p_1	p_8	p_7	p_5	p_6
p_2	p_3	p_4	p_1	p_2	p_6	p_5	p_8	p_7
p_3	p_4	p_1	p_2	p_3	p_7	p_8	p_6	p_5
p_4	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
p_5	p_7	p_6	p_8	p_5	p_4	p_2	p_1	p_3
p_6	p_8	p_5	p_7	p_6	p_2	p_4	p_3	p_1
p_7	p_6	p_8	p_5	p_7	p_3	p_1	p_4	p_2
p_8	p_5	p_7	p_6	p_8	p_1	p_3	p_2	p_4

$<\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7,p_8\},\Diamond>$构成一个四次8阶置换群。

三、凯莱表示定理

定理12：每一个n阶有限群，同构于n次置换群。

证明：

设$k=mq+r, 0\leq r<m$，设$\langle G,*\rangle$是一个n阶群，由定理6.7-4知道，$\langle G,*\rangle$的合成表中每一行和列都是G的一个置换。对应于元素$a\in G$的列的置换是

$$p_a(x)=x*a$$

记对应于G的所有元素的列的置换集合为P。

下面首先证明$\langle P,\blacklozenge\rangle$是一个群，再证明G与P同构。

(a) 封闭性 对任意元素a、$b\in G$，有

$$(p_a\lozenge p_b)(x)=(x*a)*b=x*(a*b)=p_{a*b}(x)\in P \qquad (1)$$

(b) 存在幺元 设e是$\langle G,*\rangle$的幺元，$a\in G$是任一元素，则有

$p_e\blacklozenge p_a=p_a\lozenge p_e=p_a$，所以，$p_e$是幺元。

(c) 存在逆元 对任意元素$a\in G$，存在元素$a^{-1}\in G$，有

$P_{a^{-1}}\blacklozenge p_a=p_a\lozenge P_{a^{-1}}=p_e$，所以，对任一$p_a$存在逆元$P_{a^{-1}}$。

(d) 满足结合律 置换的合成满足结合律。

三、凯莱表示定理

定理12证明(续):

下面证明G与P同构。

作映射$h: G \to P$

$$h(a) = p_a$$

h显然是双射函数。再将已证明的等式(1)改写为

$$h(a * b) = h(a) \Diamond h(b)$$

根据群同态的定义以及h为双射函数，可得G与P同构。

本定理是1854年由凯莱(Arthur Cayley)得出，叫凯莱表示定理。凯莱表示定理说明抽象群的研究可归结于置换群的研究，如果一切置换群研究清楚了，那么一切有限群都清楚了，可见置换群的重要。但经验告诉我们，研究置换群并不比研究抽象群容易，所以，通常又不得不直接地研究抽象群。