离 散 数 学

西北工业大学

2023年3月29日星期三

第4章 集合论

集合论是现代数学的基础，几乎与现代数学的各个分支都有着密切联系，并且渗透到所有科技领域，是不可缺少的数学工具和表达语言。

集合论的起源可以追溯到16世纪末期，为了追寻微积分的坚实基础，开始时，人们仅进行了有关数集的研究。1876～1883年，康托尔(Georg Cantor)发表了一系列有关集合论研究的文章，奠定了集合论的深厚基础，以后策墨罗(Zermelo)在1904～1908年列出了第一个集合论的公理系统，并逐步形成公理化集合论。

集合论

我们这里学习集合论，更是因为计算机科学及其应用的研究也和集合论有着极其密切的关系。集合不仅可以表示数、而且还可以象数一样进行运算，更可以用于非数值信息的表示和处理，如数据的增加、删除、排序以及数据间关系的描述；有些很难用传统的数值计算来处理，但可以用集合运算来处理。因此，集合论在程序语言、数据结构、编译原理、数据库与知识库、形式语言和人工智能等领域都得到了广泛的应用，并且还得到了发展。

本章对集合论本身及其公理化系统不作深入探讨，主要是介绍集合、子集的基本概念及相关性质；集合间的各种运算和它们满足的运算性质；有限集、无限集以及粗糙集的基本概念。

4.0 内容提要

1 集合的概念

2 集合的表示方法

3 集合间的关系

4 集合的运算

5 特殊集合

4.1 本章学习要求

重点掌握 › 一般掌握 › 了解

1（重点掌握）

1 集合的概念及集合间关系
2 集合的表示
3 集合运算及定律
4 幂集P(A)

2（一般掌握）

1 集合的归纳法表示
2 集合的对称差运算

3（了解）

1 集合的递归指定法表示
2 了解无限集的基本概念

4.2 集合

一、集合的概念

集合（SET）由指定范围内的某些特定对象聚集在一起构成。

特定对象

指定范围

中国*所有痛恨男足的人*的聚集

指定范围内的每一个对象称为这个**集合的元素**(element)

固定的符号

N 自然数集合 0, 1, 2, …

Z 整数集合 …, -2, -1, 0, 1, 2, …

Q 有理数集合 p/q,p,q是整数，且q≠0

R 实数集合

C 复数集合

4.2.1 集合的表示方法

集合是由它包含的元素完全确定的，为了表示一个集合，通常有：

- ✓ **Roster method（枚举法）**
- ✓ **Set builder（描述法）**
- ✓ **Venn Diagrams（文氏图）**

1、枚举法(Roster method)

--列出集合中全部元素或部分元素的方法叫枚举法

适用场景：

- ◆一个集合仅含有限个元素
- ◆一个集合的元素之间有明显关系

例4. 2. 1

（1）A＝{a，b，c，d}

（2）B = {0，1，4，9，16，…，n^2，…}

2、描述法(Set Builder)

通过刻画集合中**元素所具备的某种特性**来表示集合的方法称为描述述法

X所具有的性质p

一般表示方法：$P=\{x \mid \underline{P(x)}\}$

代表元

适用场景：

一个集合含有很多或无穷多个元素；

一个集合的元素之间有容易刻画的共同特征

其**突出优点**是原则上不要求列出集合中全部元素，而只要给出该集合中元素的特性。

例

（1）$A = \{x|x$是“discrete mathematics”中的所有字母$\}$；

（2）$Z = \{x|x$是一个整数$\}$；

（3）$S = \{x|x$是整数，并且$x^2+1 = 0\}$；

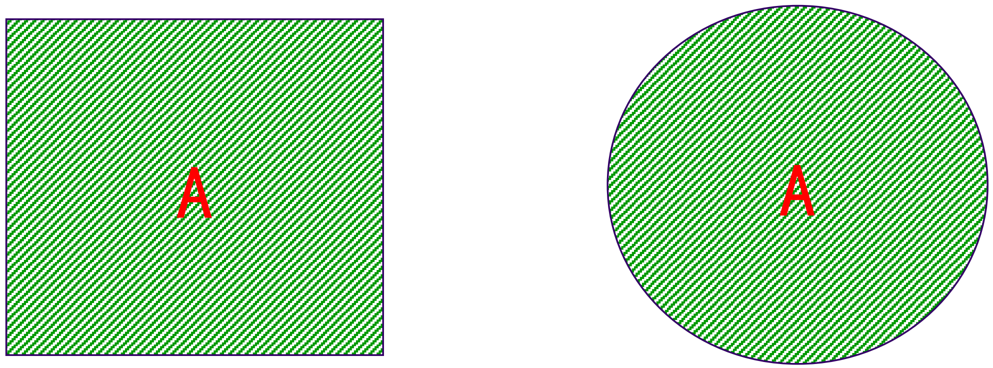
（4）$Q^+ = \{x|x$是一个正有理数$\}$。

（5）设 $a_0 = 1$，$a_{i+1} = 2a_i$ $(i \geq 0)$

定义$S = \{a_0, a_1, a_2, ...\} = \{a_k \mid k \geq 0\}$.

3、文氏图(Venn Diagrams)

文氏图是一种利用平面上点的集合作成的对集合的图解。一般用平面上的圆形或方形表示一个集合。



4.2.2 集合与元素的关系

元素与集合之间的“属于关系”是“明确”的。

对某个集合A和元素a来说，

- ✓a属于集合A，记为$a \in A$
- ✓或者
- ✓a不属于集合A，记为$a \notin A$

两者必居其一且仅居其一。

例如，对元素2和N，就有2属于N，即$2 \in N$，

对元素-2和N，就有-2不属于N，即$-2 \notin N$。

理发师难题(Barber’s Paradox)

例 在一个很僻静的孤岛上，住着一些人家，岛上只有一位理发师，该理发师专给那些并且只给那些不自己理发的人理发。那么，谁给这位理发师理发？

解： 设C＝{x|x是不给自己理发的人}

b是这位理发师

如 $b\in C$，则 $b\notin C$；

如 $b\notin C$，则 $b\in C$。

Zermelo的公理化集合论体系

正则公理（regularity axiom，RA）：

对所有非空集合A，存在A中的元素m，使得m和A的交集是空集

$$\forall A(\exists B(B \in A) \Rightarrow \exists B(B \in A \wedge \neg\exists C(C \in A \wedge C \in B))).$$

通过RA可以证明：**不存在这样的集合，它是其自身的元素。**

假設存在集合A使得$A \in A$,成立,致慮集合{A}，由RA知$\exists B \in \{A\}$,使得$B \cap \{A\} = \emptyset$.因為$B \in \{A\}$,所以B就是A，所以$A \in A = B$，因此$A \in B \cap \{A\} \neq \emptyset$，這和RA是矛盾的。

4.2.3 集合与集合的关系

一、集合的三大特征

1、**互异性**—集合中的元素都是不同的，凡是相同的元素，均视为同一个元素；

$$\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$$

2、**确定性**—能够明确加以“区分的”对象；

3、**无序性**—集合中的元素是没有顺序的。

$$\{2, 1\} = \{1, 2\}$$

二、集合相等

若集合A，B中的元素完全相同，我们称这样的两个集合相等

A＝B当且仅当A与B具有相同的元素，否则，A≠B。

三、包含和真包含关系

定义4.2.1 设A,B是任意两个集合，如果

B的每个元素都是A的元素，

则称B是A的子集合，简称子集(Subset)，

这时也称A包含B，或B被A包含，记作A⊇B 或B⊆A，

称“⊆”或“⊇”为包含关系(Inclusion Relation)。

上述包含定义的数学语言描述为：

B⊆A⇔对任意x，如x∈B，则x∈A。

显然，*对任意集合A，都有A⊆A。*

例

设A = {BASIC, PASCAL, ADA},

B = {ADA, BASIC, PASCAL},

请判断A和B之间的包含关系。

解 根据集合间包含关系的定义知，$A \supseteq B$ 且$A \subseteq B$ 。

又从例4.2.6知，集合A = B，于是我们有：

定理4.2.2 设A、B是任意两个集合，则

$$A \subseteq B,\ B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

真包含关系

定义4.2.2 设A, B是任意两个集合，如果

$$B \subseteq A 并且 A \neq B$$

则称B是A的真子集(Proper Subset)，记作$B \subset A$，称“$\subset$”为真包含关系(Properly Inclusion Relation)。

如果B不是A的真子集，则记作$B \not\subset A$。

上述真子集的数学语言描述为：

$B \subset A \Leftrightarrow$ 对任意x，如$x \in B$，则$x \in A$，并且，$\exists\ y \in A$，但是$y \notin B$

例4.2.9

设A = {a}是一个集合，B = {{a}, {{a}}}，试问

$\{A\} \in B$和$\{A\} \subseteq B$

同时成立吗？

解 $\{A\} \in B$和$\{A\} \subseteq B$同时成立。

4.2.4 几个特殊集合

1、空集 Empty Set

定义4.2.3 不含任何元素的集合叫做空集(Empty Set)，记作Φ。

空集可以符号化为

$$\Phi = \{x \mid x \neq x\}$$

空集是客观存在的。

定理4.2.3

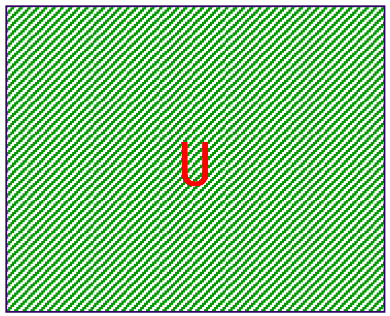
（1）空集是一切集合的子集；

（2）空集是绝对唯一的。

2、全集 Universal Set

定义4.2.4 在一个相对固定的范围内，包含此范围内所有元素的集合，称为全集或论集(Universal Set)，用U或E表示。

用文氏图描述如下:



例4.2.12

（1）在立体几何中，全集是由空间的全体点组成；

（2）在我国的人口普查中，全集是由我国所有人组成。

定理4.2.5 全集是相对唯一的.

有限集和无限集(Finite Set and Infinite Set)

- 集合A中元素的数目称为集合A的基数或势（*cardinality*），记为|A|。
- 如|A|是有限的，则称集合A为有限集，
- 如|A|是无限的，则称集合A为无限集。

例4.2.13 求下列集合的基数。

（1）$A=\Phi$； （2）$B=\{\Phi\}$；

（3）$C=\{a, b, c\}$； （4）$D=\{a, \{b, c\}\}$。

解 $|A|=0$，$|B|=1$，$|C|=3$，$|D|=2$。

m元子集

定义4.2.6 如果一个集合A含有n个元素，则称集合A为n元集，称A的含有m个($0 \leqslant m \leqslant n$)元素的子集为A的m元子集。

任给一个n元集，怎样求出它的全部m元子集？

例4.2.14 设A={1,2}，求出A的全部m元子集。

分析 $\because n=|A| = 2$，$m \leqslant n$

$\therefore$ m=0,1,2。

$\therefore$当 m=0 时，得到0元子集：Φ；

当 m=1 时，得到1元子集：{1}，{2}；

当 m=2 时，得到2元子集：{1，2}。

解 A的全部m元子集是Φ、{1}、{2}和{1，2}。

子集总数

一般来说，对于n元集A，它的m（0≤m≤n）元子集有C_n^m个，

所以不同的子集总数有：

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

所以，n元集共有2^n个子集。

幂集 Power Sets

定义4.2.7 设A为任意集合，把A的所有不同子集构成的集合叫做A的幂集(power set)，记为P(A)或2^A。其符号化表示为

$$P(A)=\{x \mid 一切 x \subseteq A\}$$

该集合又称为集族(family of set)。

对集族的研究在数学方面、知识库和表处理语言以及人工智能等方面都有十分重要的意义。

例4.2.15 计算下列幂集

（1）P(Φ)； （2）P({Φ})； （3）P({a, {b, c}})。

解

（1）P(Φ) = {Φ}；

（2）P({Φ}) = {Φ, {Φ}}；

（3）P({a, {b, c}})={Φ, {a}, {{b, c}}, {a, {b, c}}}。

显然，若集合 A 有 n 个元素，则集合 A 共有$2^{|A|}$个子集，即：

$$|P(A)| = 2^{|A|}。$$

4.2.5 集合的运算

定义4.2.8 设A、B是两个集合，

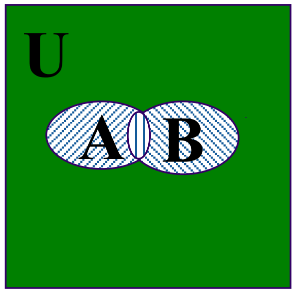
(1) 并集 $A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$

(2) 交集 $A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$

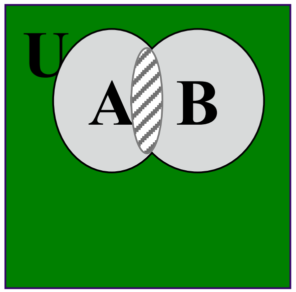
(3) 差集 $A-B=\{x|x\in A且x\notin B\}$

(4) 补集 $\overline{A}=U-A=\{x|x\in U且x\notin A\}$(A′,∼A,$AC$)

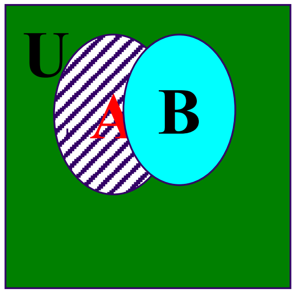
(5) 对称差集$A\oplus B=\{x|(x\in A)且(x\notin B)或(x\in B)且(x\notin A)\}$



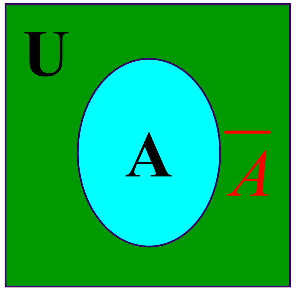
union



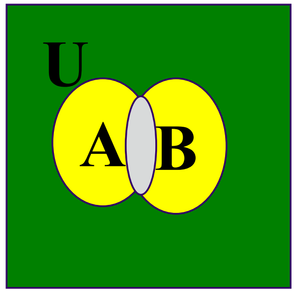
intersection



difference



Complement



symmetric difference

推广

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots\cdots \cup A_n$$

$$= \{x \mid (x \in A_1) \text{ 或 } (x \in A_2) \text{ 或} \ldots\ldots \text{或 } (x \in A_n)\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots\ldots \cap A_n$$

$$= \{x \mid (x \in A_1) \text{ 且 } (x \in A_2) \text{ 且} \ldots\ldots \text{且 } (x \in A_n)\}$$

当n无限增大时，可以记为：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i \in Z^+} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i \in Z^+} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$$

定理4.2.5

1. **等幂律**: $A \cup A = A$； $A \cap A = A$；
2. **交换律**: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
3. **结合律**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；
4. **恒等律**: $A \cup \Phi = A$； $A \cap U = A$；
5. **零　律**: $A \cup U = U$； $A \cap \Phi = \Phi$；
6. **分配律**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. **吸收律**: $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$；

定理4.2.5(续)

8. $A - A = \Phi$； 9. $A - B = A - (A \cap B)$；

10. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$；

11. $A \cup (B - A) = A \cup B$； 12. $A - B = A \cap \overline{B}$；

13. **否定律：** $\overline{\overline{A}} = A$；

14. **DeMorgan律：** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$；

15. **矛盾律：** $A \cap \overline{A} = \Phi$；

16. **排中律：** $A \cup \overline{A} = U$。

证明：

DeMorgan律：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

分析

定理4.2.2 设A、B是任意两个集合，则

A⊆B，B⊆A ⇔ A=B

$$(1) \quad \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$(2) \quad \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

4.3 无限集Infinite Set

有限集 ⟶ 无限集

量 变 ⟶ 质 变

无限集合无法用确切的个数来描述，因此，无限集合有许多有限集合所没有的一些特征，而有限集合的一些特征也不能任意推广到无限集合中去，即使有的能推广，也要做某些意义上的修改。

4.3.1 可数集 Countable Set

问题 {1, 2, 3, …} 与 {1^2, 2^2, 3^2, …} 哪个集合的元素更多?

引入：自然数集合

二十世纪初，集合成为数学的基本概念之后，由冯•诺依曼（Von Neumann，J.）用集合的方式来定义自然数取得了成功，提出了用序列Φ，{Φ}，{Φ,{Φ}}，{Φ,{Φ},{Φ,{Φ}}}，・・・・・・来定义自然数。

自然数集合N的定义

① $\Phi \in N$，

② 若$n \in N$，则$n' := n \cup \{n\} \in N$。

也即：$0 := \Phi$，

$1 := \{\Phi\} = \{0\}$，

$2 := \{\Phi, \{\Phi\}\} = \{0, 1\}$

...

$n := \{0, 1, 2, 3, ... n-1\}$

...

故 $N = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$

等势的概念

定义4.3.1 设A，B是两个集合，若在A，B之间存在1-1对应的关系：

$$\psi : A \rightarrow B$$

则称A与B是等势的(equipotential)，记为：A~B。

也称集合A与B等势(equipotent)。

注意：若A＝B，则 A~B。 （√）

若A~B，则 A＝B （×）

可数集合(可列集）

定义4.3.2 凡是与自然数集合等势的集合，统称为可数集合(可列集)(Countable Set)。

记为：$\aleph_0$（读作阿列夫零）。

例4.3.1 下列集合都是可数集合：

1) $O^+=\{x|x\in N$，x是奇数$\}$；

2) $P=\{x|x\in N$，x是素数$\}$；

解：1）$O^+=\{x \mid x\in N, x是奇数\}$

在O^+与N之间建立1-1对应的关系 $f: N\rightarrow O^+$ 如下：

N	0	1	2	3	4	...	n	...
f	↓	↓	↓	↓	↓	...	↓	...
O^+	1	3	5	7	9	...	2n+1	...

所以，O^+是可数集合。

2）P＝{x|x∈N，x是素数}

在P与N之间建立1-1对应的关系

f：N→P如下：

N	0	1	2	3	4	...
f	↓	↓	↓	↓	↓	...
P	2	3	5	7	11	...

所以，P是可数集合。

定理4.3.1

两个有限集合等势当且仅当它们有相同的元素个数；

有限集合不和其任何真子集等势；

可数集合可以和其可数的真子集等势。

不可数集合

定义4.3.3

开区间(0,1)称为**不可数集合**，其基数设为ℵ(读作阿列夫)；

凡是与开区间(0,1)等势的集合都是不可数集合。

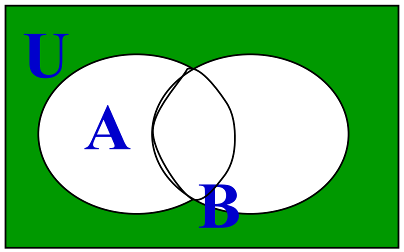
例4.3.2 (1)闭区间[0,1] 是不可数集合；

(2)实数集合R是不可数集合。

4.4 集合的应用

在20个大学生中，有10人爱好音乐，有8人爱好美术，有6人既爱好音乐又爱好美术。问不爱好音乐又不爱好美术的学生有多少个？

解 设所有的大学生的集合为U，爱好音乐的学生集合为A，爱好美术的学生集合为B，既爱好音乐和又爱好美术的学生组成的集合为$A\cap B$，则既不爱好音乐又不爱好美术的学生组成的集合为$\overline{A}\cap\overline{B}$。如右图：



4.5 本章总结

1、**与集合相关的概念和特殊集合：**集合的定义、集合的表示、属于和不属于、子集、真子集、包含和真包含、幂集、空集、全集、基数、有限集、无限集等；

2、**与集合运算相关的概念和定理：**集合的交、并、差、补和对称差等五种运算的定义及相关定理。

Thank You！