

离散数学



西北工业大学

2023年5月15日 星期一

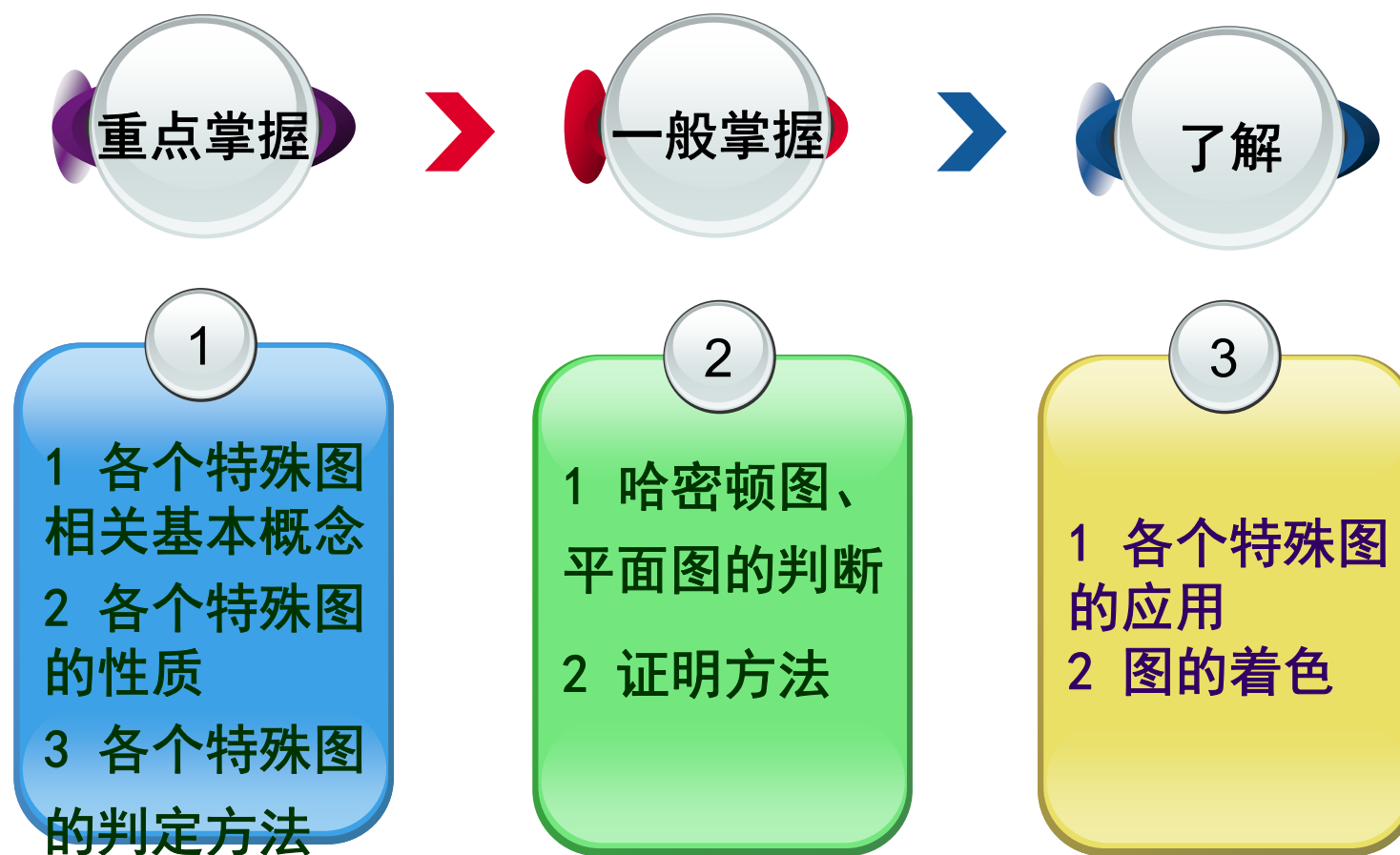
第10章 特殊图

- 1 欧拉图
- 2 哈密顿图
- 3 偶图
- 4 平面图

10.0 内容提要

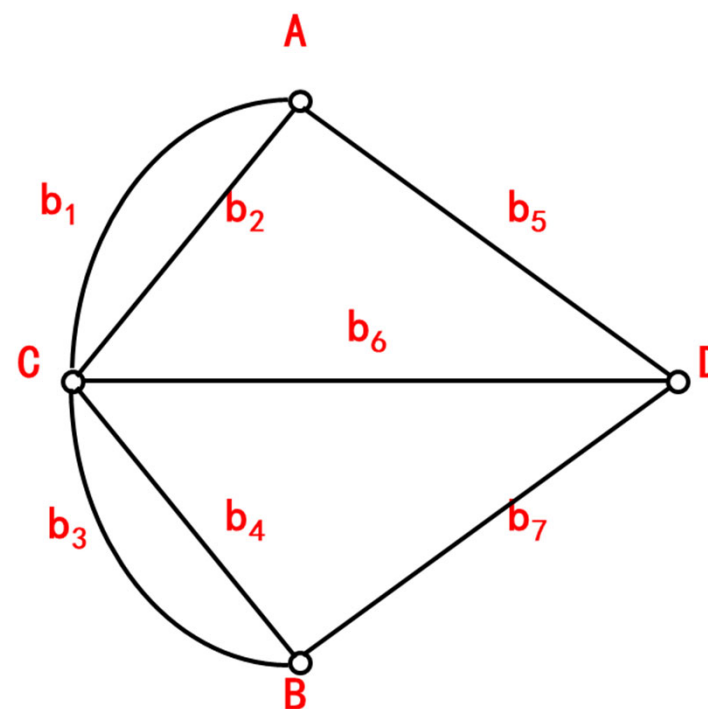
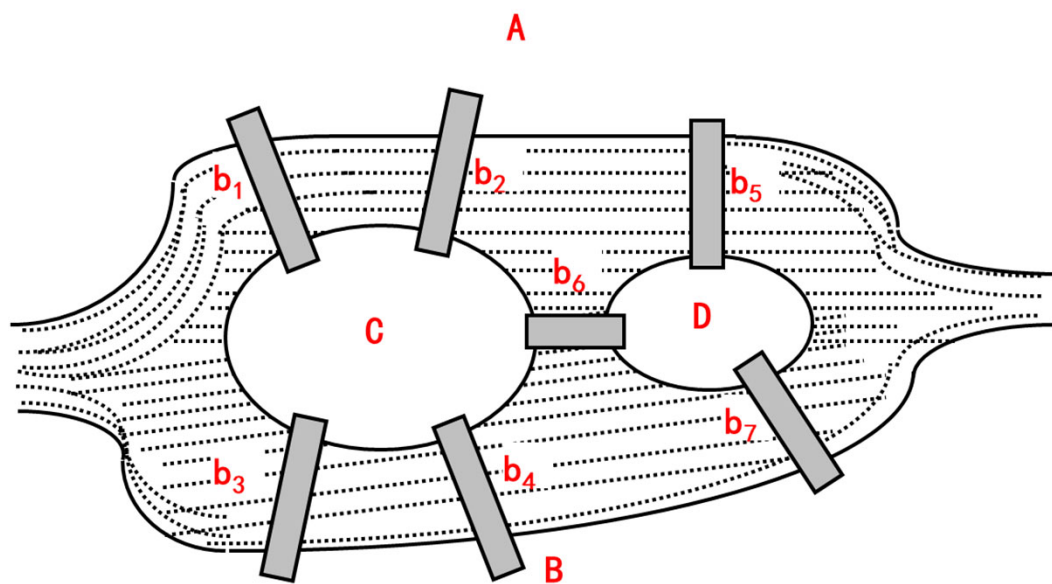
1. 几个特殊图的概念：欧拉图、哈密顿图、偶图、平面图；
2. 欧拉图、哈密顿图、偶图、平面图的判定；
3. 偶图的匹配、图的着色；
4. 欧拉图、哈密顿图、偶图、平面图的应用

10.1 本章学习要求



10.2 欧拉图

10.2.1 欧拉图的引入与定义



定义10.2.1

设 G 是无孤立结点的图，若存在一条通路(回路)，经过图中每边一次且仅一次，则称此通路(回路)为该图的一条欧拉通路(回路)(Eulerian Entry/Circuit)。具有欧拉回路的图称为欧拉图(Eulerian Graph)。

规定：平凡图为欧拉图。

以上定义既适合无向图，又适合有向图。

欧拉通路和欧拉回路的特征

欧拉通路是经过图中所有边的通路中**长度最短**的通路，即为**通过图中所有边的简单通路**；

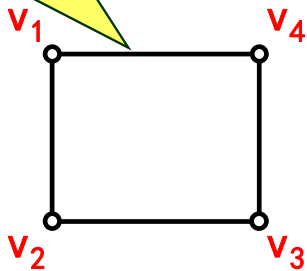
欧拉回路是经过图中所有边的回路中**长度最短**的回路，即为**通过图中所有边的简单回路**。

如果仅用边来描述，欧拉通路和欧拉回路就是图中所有边的一种全排列。

例10.2.1

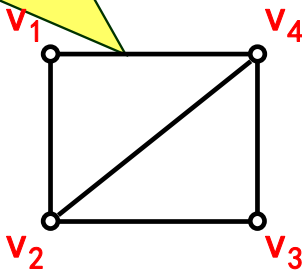
判断下面的6个图是不是欧拉图？

欧拉图



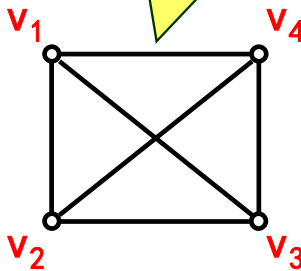
(a)

不是欧拉图，但存在欧拉通路



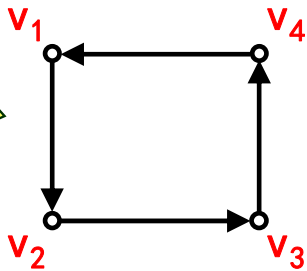
(b)

不存在欧拉通路



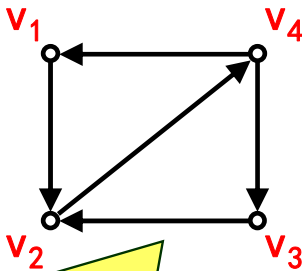
(c)

欧拉图



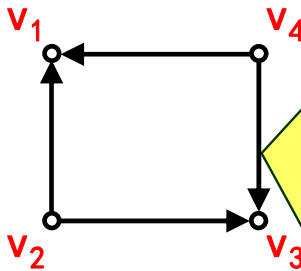
(d)

不是欧拉图，但存在欧拉通路



(e)

不存在欧拉通路



(f)

10.2.2 欧拉图的判定

定理10.2.1 无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 具有一条欧拉通路，当且仅当 G 是连通的，且仅有零个或两个奇度数结点。

推论10.2.1 无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 具有一条欧拉回路，当且仅当 G 是连通的，并且所有结点的度数均为偶数。

定理10.2.2 有向图 G 具有一条欧拉通路，当且仅当 G 是连通的，且除了两个结点以外，其余结点的入度等于出度，而这两个例外的结点中，一个结点的入度比出度大1，另一个结点的出度比入度大1。

推论10.2.2 有向图 G 具有一条欧拉回路，当且仅当 G 是连通的，且所有结点的入度等于出度。

欧拉通路与欧拉回路判别准则

对任意给定的无向连通图，只需通过对图中各结点度数的计算，就可知它是否存在欧拉通路及欧拉回路，从而知道它是否为欧拉图；对任意给定的有向连通图，只需通过对图中各结点出度与入度的计算，就可知它是否存在欧拉通路及欧拉回路，从而知道它是否为欧拉图。

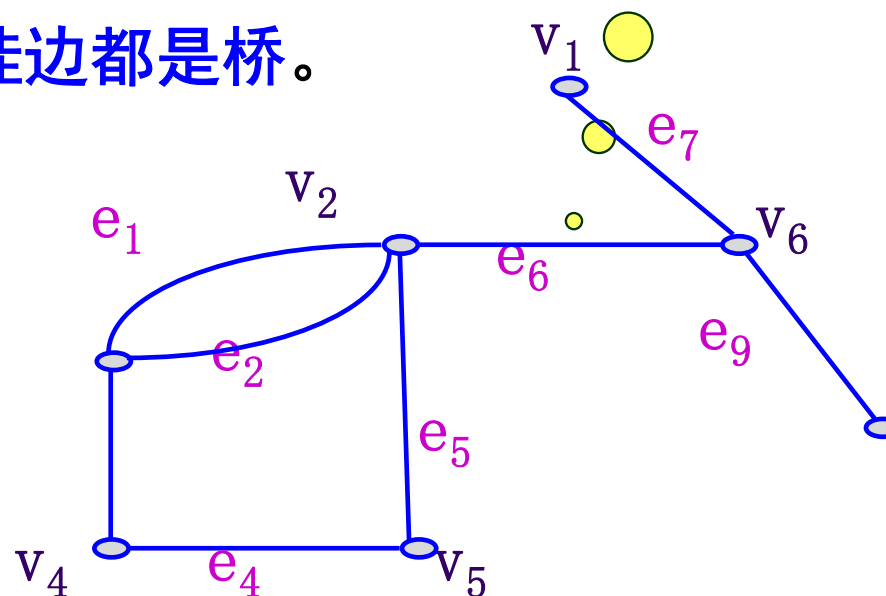
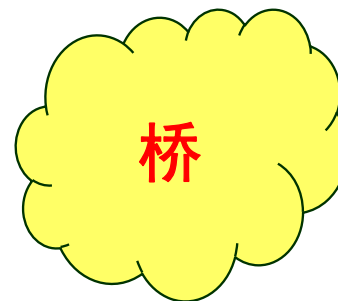
利用这项准则，很容易判断出哥尼斯堡七桥问题是无解的，因为它所对应的图中所有4个结点的度数均为奇数。

定义10.2.2

设 $G = \langle V, E \rangle$, $e \in E$, 如果
$$p(G-e) > p(G)$$

称 e 为 G 的 **桥** (Bridge) 或 **割边** (Cut edge)。

显然，**所有的悬挂边都是桥**。



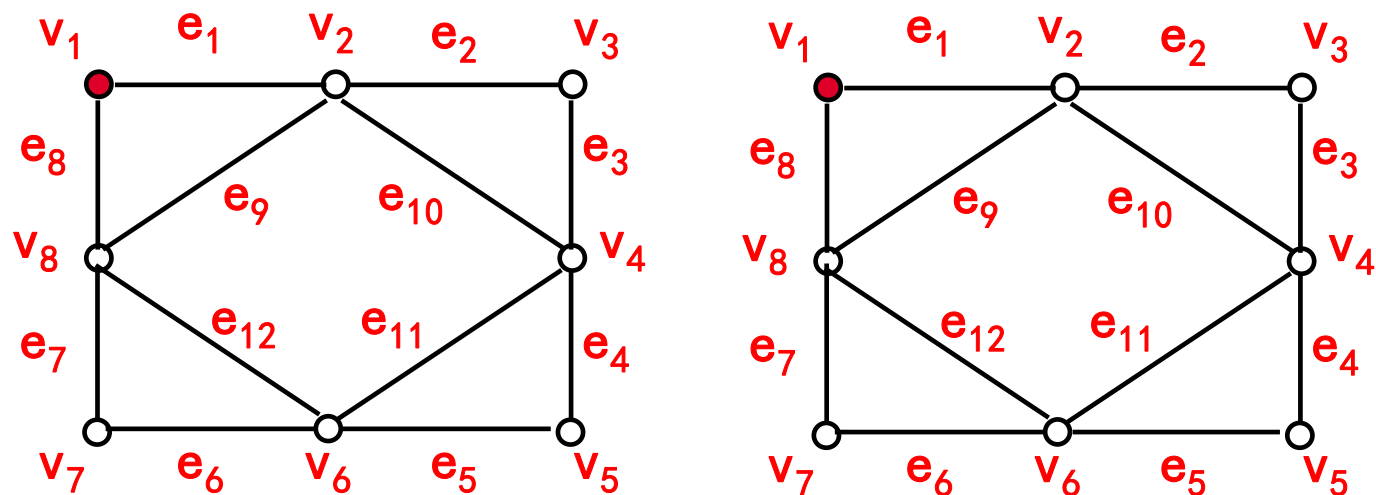
Fleury算法

算法 10.2.1 求欧拉图 $G = \langle V, E \rangle$ 的欧拉回路的 Fleury 算法:

- (1) 任取 $v_0 \in V$, 令 $P_0 = v_0$, $i = 0$;
- (2) 按下面的方法从 $E - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中选取 e_{i+1} :
 - a. e_{i+1} 与 v_i 相关联;
 - b. 除非无别的边可选取, 否则 e_{i+1} 不应该为 $G' = G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中的桥;
- (3) 将边 e_{i+1} 加入通路 P_0 中, 令 $P_0 = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_i v_i e_{i+1} v_{i+1}$, $i = i+1$;
- (4) 如果 $i = |E|$, 结束, 否则转 (2)。

例10.2.2

用Fleury算法求欧拉图的一条欧拉回路。



解 从 v_1 出发的一条欧拉回路为：

$$P_{12} = v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 e_4 v_5 e_5 v_6 e_6 v_7 e_7 v_8 e_8 v_2 e_{10} v_4 e_{11} v_6 e_{12} v_8 e_8 v_1$$

10.2.4 欧拉图的应用

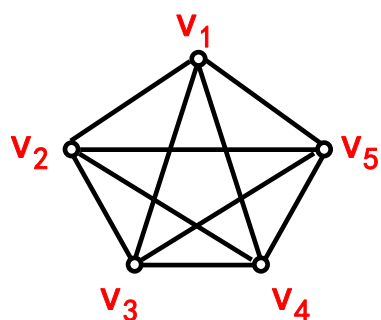
1、一笔画问题

所谓“一笔画问题”就是画一个图形，笔不离纸，每条边只画一次而不许重复，画完该图。

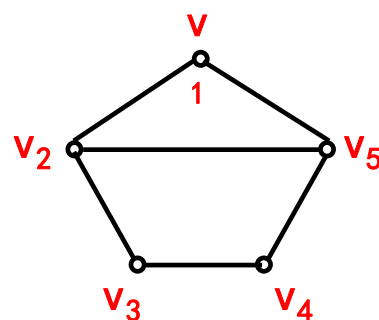
“一笔画问题”本质上就是一个无向图是否存在欧拉通路(回路)的问题。如果该图为欧拉图，则能够一笔画完该图，并且笔又回到出发点；如果该图只存在欧拉通路，则能够一笔画完该图，但笔回不到出发点；如果该图中不存在欧拉通路，则不能一笔画完该图。

例10.2.3

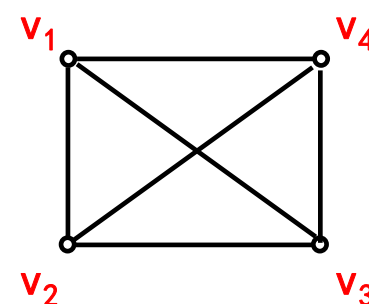
图中的三个图能否一笔画？为什么？



(a)



(b)

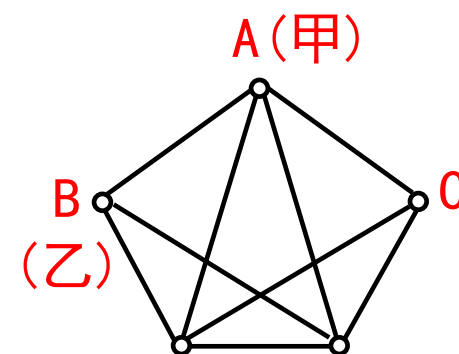


(c)

解 因为图(a)和(b)中分别有0个和2个奇度数结点，所以它们分别是欧拉图和存在欧拉通路，因此能够一笔画，并且在(a)中笔能回到出发点，而(b)中笔不能回到出发点。图c中有4个度数为3的结点，所以不存在欧拉通路，因此不能一笔画。

2、蚂蚁比赛问题

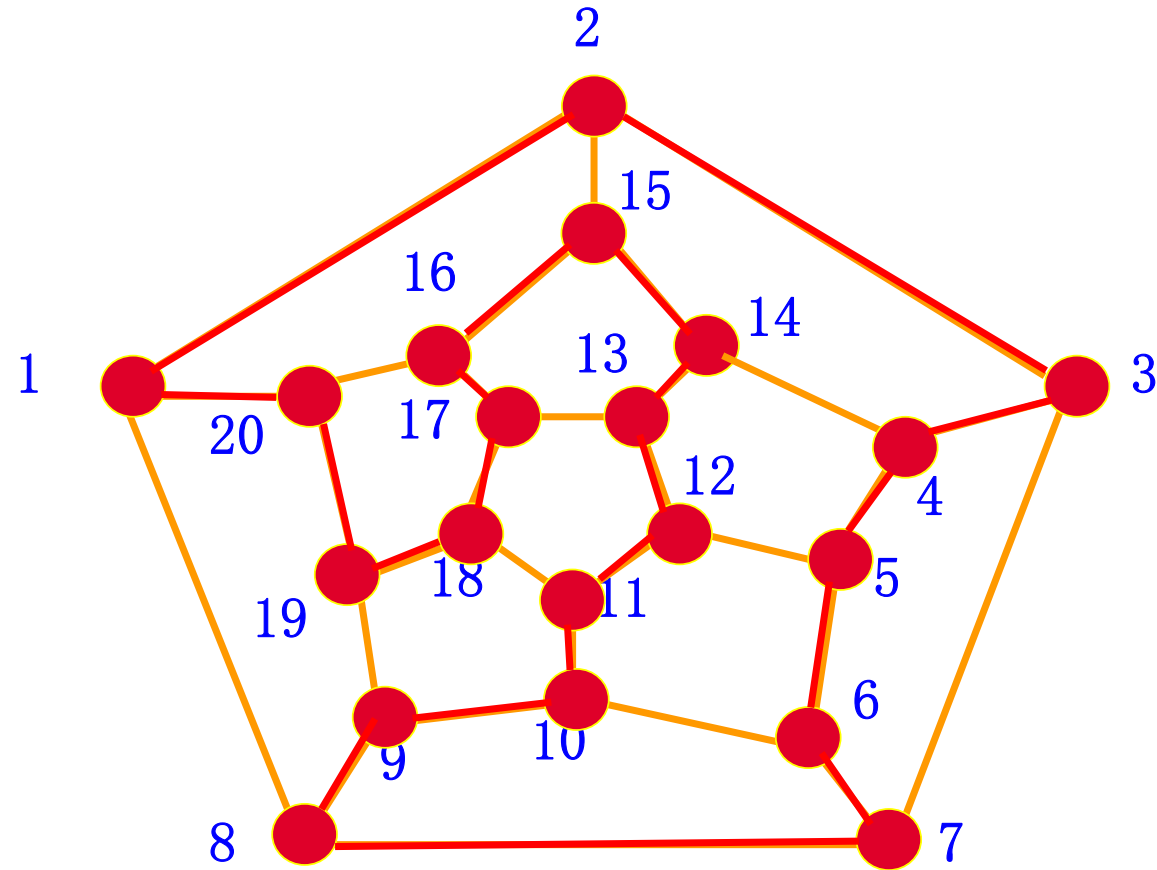
例10.2.4 甲、乙两只蚂蚁分别位于图的结点A、B处，并设图中的边长度相等。甲、乙进行比赛：从它们所在的结点出发，走过图中所有边最后到达结点C处。如果它们的速度相同，问谁先到达目的地？



解 图中仅有两个度数为奇数的结点B、C，因而存在从B到C的欧拉通路，蚂蚁乙走到C只要走一条欧拉通路，边数为9条，而蚂蚁甲要想走完所有的边到达C，至少要先走一条边到达B，再走一条欧拉通路，因而它至少要走10条边才能到达C，所以乙必胜。

10.3 哈密顿图

10.2.1 哈密顿的引入与定义



哈密顿图

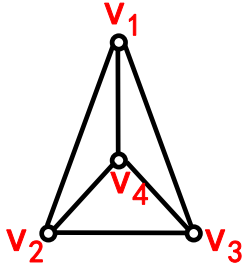
定义10.3.1 经过图中每个结点一次且仅一次的通路(回路)称为**哈密顿通路(回路)**(Hamiltonian Entry/circuit)。存在**哈密顿回路**的图称为**哈密顿图**(Hamiltonian Graph)。

规定：**平凡图**为哈密顿图。

以上定义既适合无向图，又适合有向图。

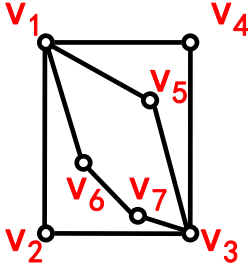
例10.3.1

判断下面的6个图中，是否是哈密顿图？是否存在哈密顿通路？



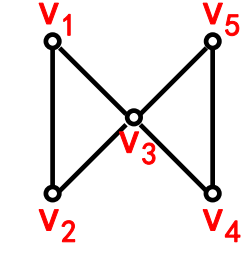
(a)

哈密顿图



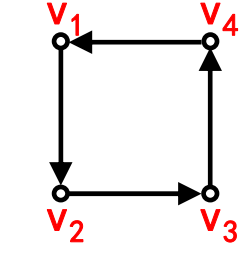
(b)

不存在哈密顿通路



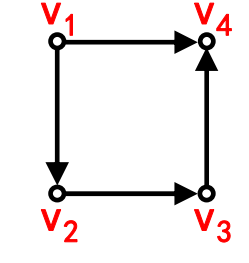
(c)

不是哈密顿图，但存在哈密顿通路



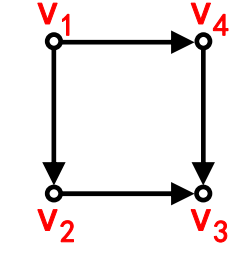
(d)

哈密顿图



(e)

不是哈密顿图，但存在哈密顿通路



(f)

不存在哈密顿通路

10.3.2 哈密顿图的判定

定理10.3.1 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密顿图, V_1 是 V 的任意非空子集, 则

$$p(G-V_1) \leq |V_1|$$

其中 $p(G-V_1)$ 是从 G 中删除 V_1 后所得到的图的连通分支数。

分析 考察 G 的一条哈密顿回路 C , 显然 C 是 G 的生成子图, 从而 $C-V_1$ 也是 $G-V_1$ 的生成子图, 且有 $p(G-V_1) \leq p(C-V_1)$, 故只需要证明 $p(C-V_1) \leq |V_1|$ 即可。

证明

设 C 是 G 中的一条哈密顿回路， V_1 是 V 的任意非空子集。下面分两种情况讨论：

(1) V_1 中结点在 C 中均相邻，删除 C 上 V_1 中各结点及关联的边后， $C-V_1$ 仍是连通的，但已非回路，因此 $p(C-V_1) = 1 \leq |V_1|$ 。

(2) V_1 中结点在 C 上存在 r ($2 \leq r \leq |V_1|$) 个互不相邻，删除 C 上 V_1 中各结点及关联的边后，将 C 分为互不相连的 r 段，即

$$p(C-V_1) = r \leq |V_1|。$$

一般情况下， V_1 中的结点在 C 中既有相邻的，又有不相邻的，因此总有 $p(C-V_1) \leq |V_1|$ 。

又因 C 是 G 的生成子图，从而 $C-V_1$ 也是 $G-V_1$ 的生成子图，故有

$$p(G-V_1) \leq p(C-V_1) \leq |V_1|$$

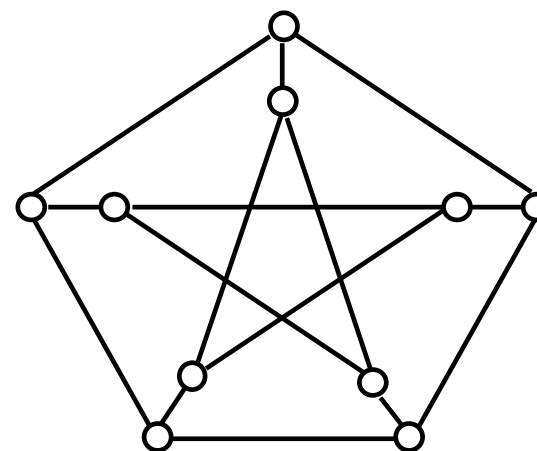
推论10.3.1

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中存在哈密顿通路，则对 V 的任意非空子集 V_1 ，都有

$$p(G - V_1) \leq |V_1| + 1$$

注意：

定理10.3.1给出的是哈密顿图的必要条件，而不是充分条件。

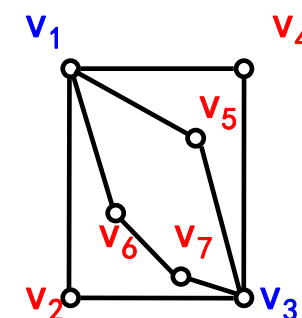
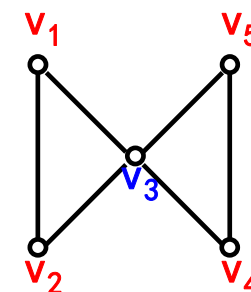


推论10.3.1

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中存在哈密顿通路，则对 V 的任意非空子集 V_1 ，都有

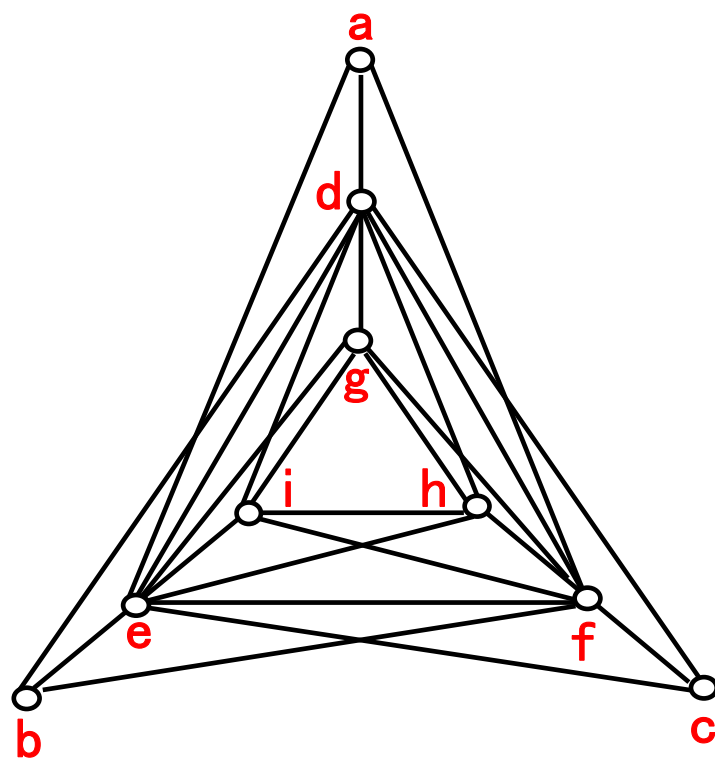
$$p(G-V_1) \leq |V_1| + 1$$

定理10.3.1在应用中它本身用处不大，但它的逆否命题却非常有用。我们经常利用定理10.3.1的逆否命题来判断某些图不是哈密顿图，即：若存在 V 的某个非空子集 V_1 使得 $p(G-V_1) > |V_1|$ ，则 G 不是哈密顿图。



例10.3.2

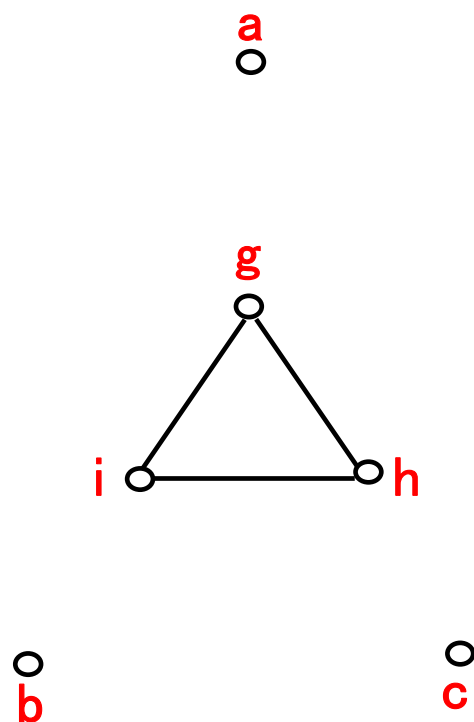
证明图中不存在哈密顿回路。



分析 利用定理10.3.1的逆否命题，寻找 V 的某个非空子集 V_1 使得 $p(G-V_1) > |V_1|$ ，则 G 不是哈密顿图。找到 $V_1 = \{d, e, f\}$ 满足要求。

例10.3.2

证明图中不存在哈密顿回路。



证明 在图中，删除结点子集 $\{d, e, f\}$ ，得新图，它的连通分支为4个，由定理10.3.1知，该图不是哈密顿图，因而不会存在哈密顿回路。

定理10.3.2

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是具有 n 个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点 $u, v \in V$, 均有

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n-1$$

则 G 中存在哈密顿通路。

推论

推论10.3.2 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是具有 n 个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点 $u, v \in V$, 均有

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n$$

则 G 中存在哈密顿回路。

需要注意，定理10.3.2给出的是哈密顿图的充分条件，而不是必要条件。在六边形中，任两个不相邻的结点的度数之和都是 $4 < 6$ ，但六边形是哈密顿图。

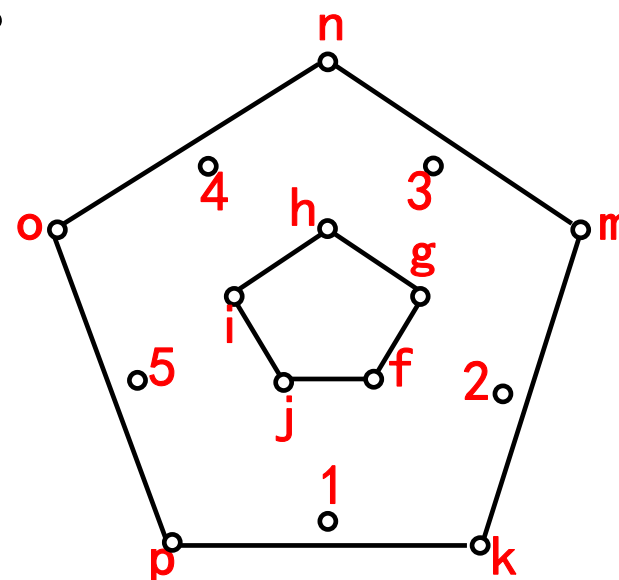
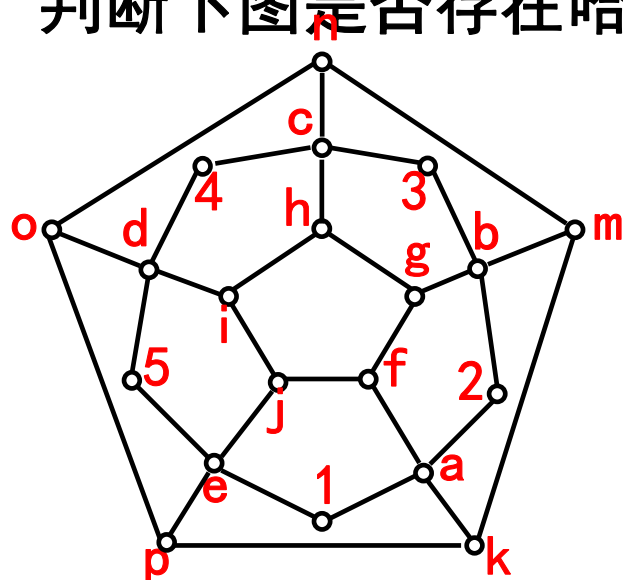
例10.3.3

某地有5个风景点，若每个风景点均有2条道路与其他点相通。问游人可否经过每个风景点恰好一次而游完这5处？

解 将5个风景点看成是有5个结点的无向图，两风景点间的道路看成是无向图的边，因为每处均有两条道路与其他结点相通，故每个结点的度数均为2，从而任意两个不相邻的结点的度数之和等于4，正好为总结点数减1。故此图中存在一条哈密顿通路，因此游人可以经过每个风景点恰好一次而游完这5处。

例10.3.4

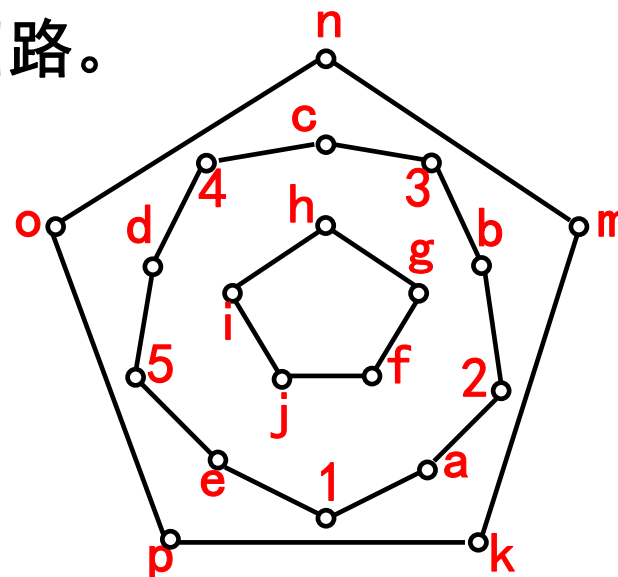
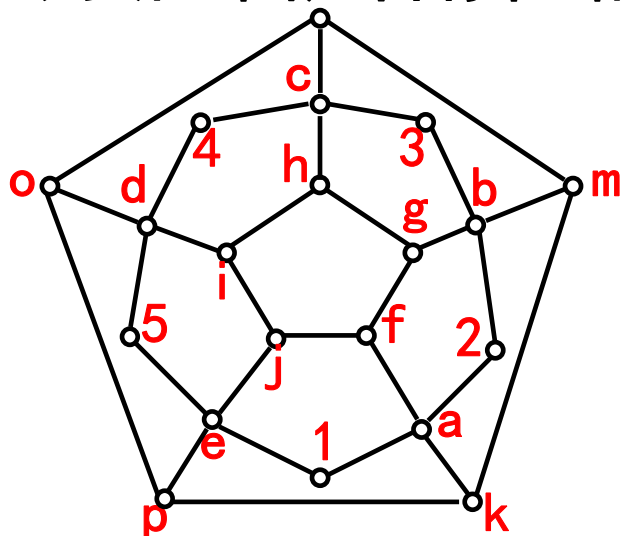
判断下图是否存在哈密顿回路。



解 方法一：在图中，删除结点子集 $\{a, b, c, d, e\}$ ，得到的图有7个连通分支，由定理10.2.1知，该图不是哈密顿图，因而不会存在哈密顿回路。

例10.3.4

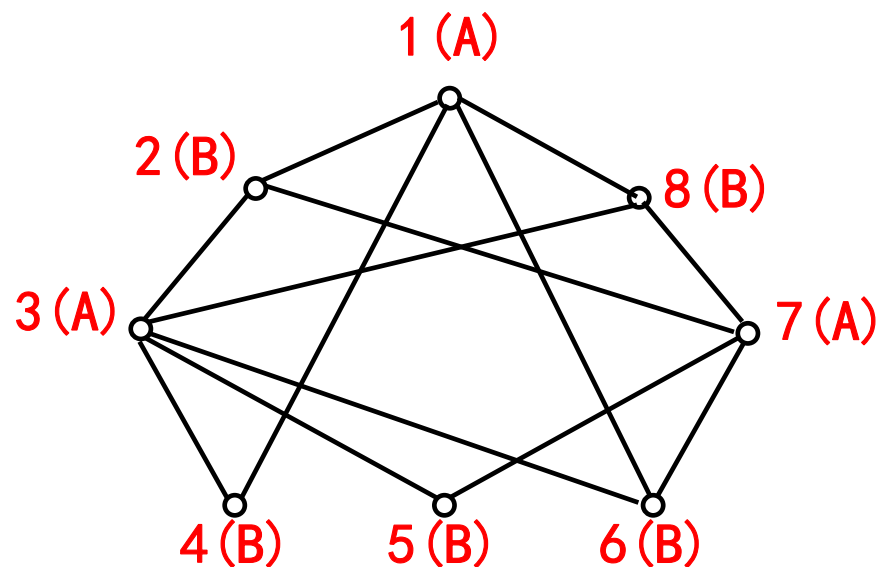
判断下图是否存在哈密顿回路。



方法二：若图中存在哈密顿回路，则该回路组成的图中任何结点的度数均为2。因而结点1、2、3、4、5所关联的边均在回路中，于是在结点a、b、c、d、e处均应将不与1、2、3、4、5关联的边删除，而要删除与结点a、b、c、d、e关联的其它边，得到右上图，它不是连通图，因而图中不存在哈密顿回路。

例10.3.5

证明下图没有哈密顿通路。



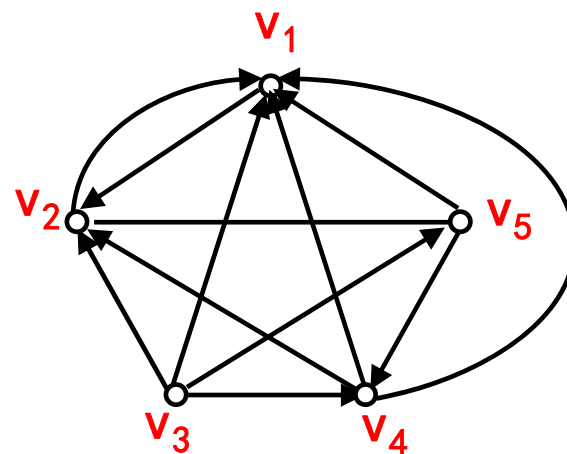
证明 任取一结点如1用A标记，所有与它邻接的结点用B标记。继续不断地用A标记所有邻接于B的结点，用B标记所有邻接于A的结点，直到所有结点都标记完毕。

如果图中有一条哈密顿通路，那么它必交替通过结点A和B，故而标记A的结点与标记B的结点数目或者相同，或者相差1个。然而图中有3个结点标记为A，5个结点标记为B，它们相差两个，所以该图不存在哈密顿通路。

定理10.3.3

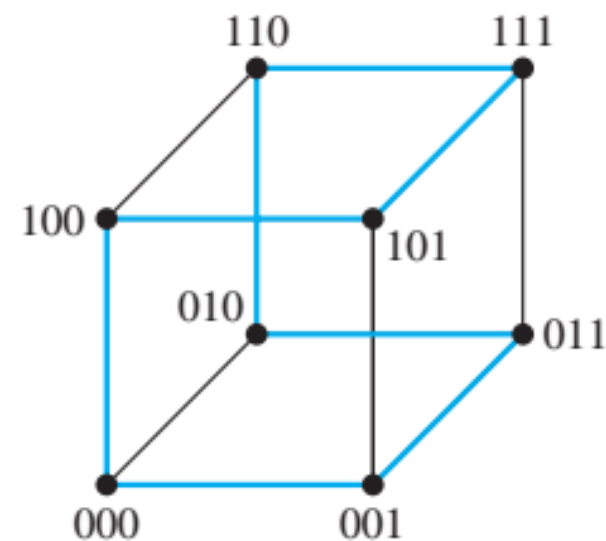
设 $G = \langle V, E \rangle$ 是有 n ($n \geq 2$) 个结点的一些简单有向图。如果忽略 G 中边的方向所得的无向图中含生成子图 K_n ，则有向图 G 中存在哈密顿通路。

在右图中，它所对应的无向图中含完全图 K_5 ，由定理10.3.3知，图中含有哈密顿通路。事实上，通路 $v_3v_5v_4v_2v_1$ 为一条哈密顿通路。



Grey Codes 格雷码

Decimal	Binary	Gray	Gray as decimal
0	000	000	0
1	001	001	1
2	010	011	3
3	011	010	2
4	100	110	6
5	101	111	7
6	110	101	5
7	111	100	4



10.4 偶图

婚姻问题

现有若干大龄男女青年，要安排相亲，每位女青年只能和一位男青年结为对象，为了使得每位女青年都有对象，可供选择的男青年至少要和女青年一样多，可女青年不会草率地处理终生大事，她们都有一个自己认为可以接受的配偶的名单。那么：

- 1.每个女青年是否都可以和自己名单里的男青年结为对象？
- 2.什么条件下可以满足所有女青年的心愿？如果不能满足，那么最多有几位女青年可以找到心仪的对象？
- 3.如何匹配，才能使结为对象后的家庭最为美满？

10.4 偶图

10.4.1 偶图的定义

定义10.4.1 若无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 的结点集 V 能够划分为两个子集 V_1, V_2 , 满足 $V_1 \cap V_2 = \Phi$, 且 $V_1 \cup V_2 = V$, 使得 G 中任意一条边的两个端点, 一个属于 V_1 , 另一个属于 V_2 , 则称 G 为 **偶图** (Bipartite Graph) 或 **二分图** (Bigraph)。 V_1 和 V_2 称为 **互补结点子集**, 偶图通常记为 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 。

偶图没有自回路。

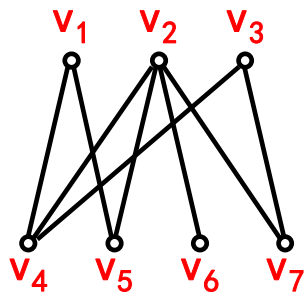
平凡图和零图可看成特殊的偶图。

定义10.4.2

在偶图 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 中，若 V_1 中的每个结点与 V_2 中的每个结点都有且仅有一条边相关联，则称偶图 G 为**完全偶图** (Complete Bipartite Graph) 或**完全二分图** (Complete Bigraph)，记为 $K_{i,j}$ ，其中， $i = |V_1|$ ， $j = |V_2|$ 。

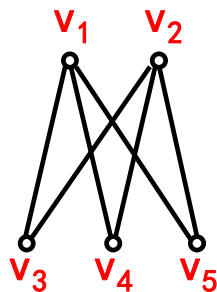
例10.4.1

判断图中的几个图，那些是偶图？那些是完全偶图？



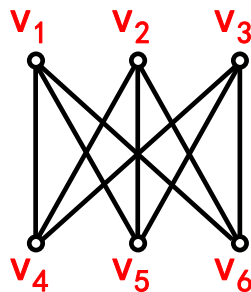
(a)

偶图



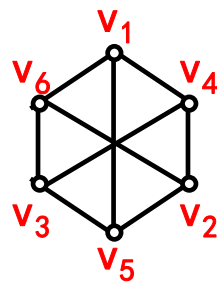
(b)

完全偶图
 $K_{2,3}$



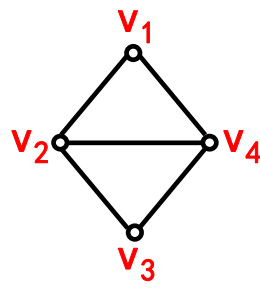
(c)

完全偶图
 $K_{3,3}$



(d)

完全偶图
 $K_{3,3}$



(e)

不是偶图

10.4.2 偶图的判定

定理10.4.1 无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 为偶图的充分必要条件是 G 的所有回路的长度均为偶数。

证明 必要性： 设图 G 是偶图 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ ，令 $C = v_0 v_1 v_2 \cdots v_k v_0$ 是 G 的一条回路，其长度为 $k+1$ 。

不失一般性，假设 $v_0 \in V_1$ ，由偶图的定义知， $v_1 \in V_2$ ， $v_2 \in V_1$ 。由此可知， $v_{2i} \in V_1$ 且 $v_{2i+1} \in V_2$ 。

又因为 $v_0 \in V_1$ ，所以 $v_k \in V_2$ ，因而 k 为奇数，故 C 的长度为偶数。

充分性:

设 G 中每条回路的长度均为偶数，若 G 是连通图，任选 $v_0 \in V$ ，定义 V 的两个子集如下：

$$V_1 = \{v_i \mid d(v_0, v_i) \text{ 为偶数} \},$$

$$V_2 = V - V_1。$$

现证明 V_1 中任两结点间无边存在。

假若存在一条边 $(v_i, v_j) \in E$ ，其中 $v_i, v_j \in V_1$ ，则由 v_0 到 v_i 间的短程线（长度为偶数）以及边 (v_i, v_j) ，再加上 v_j 到 v_0 间的短程线（长度为偶数）所组成的回路的长度为奇数，与假设矛盾。

充分性：

同理可证 V_2 中任两结点间无边存在。

故 G 中每条边 (v_i, v_j) ，必有 $v_i \in V_1, v_j \in V_2$ 或 $v_i \in V_2, v_j \in V_1$ ，因此 G 是具有互补结点子集 V_1 和 V_2 的偶图。

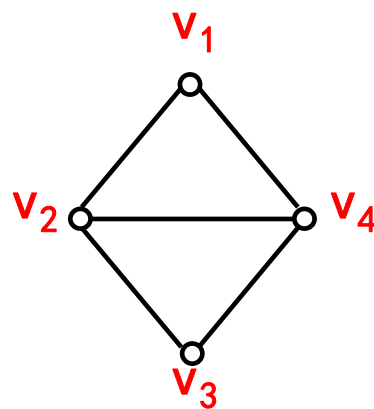
若 G 中每条回路的长度均为偶数，但 G 不是连通图，则可对 G 的每个连通分支重复上述论证，并可得到同样的结论。

定理10.4.1的用途

在实际应用中，定理10.4.1本身使用不多，我们常使用它的逆否命题来判断一个图不是偶图：

无向图 G 不是偶图的充分必要条件是 G 中存在长度为奇数的回路。

例如下图中存在长度为3的回路 $v_1v_2v_4v_1$ ，所以它不是偶图。

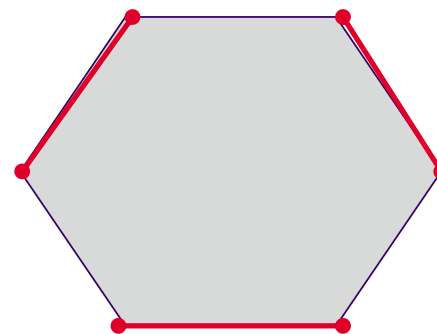
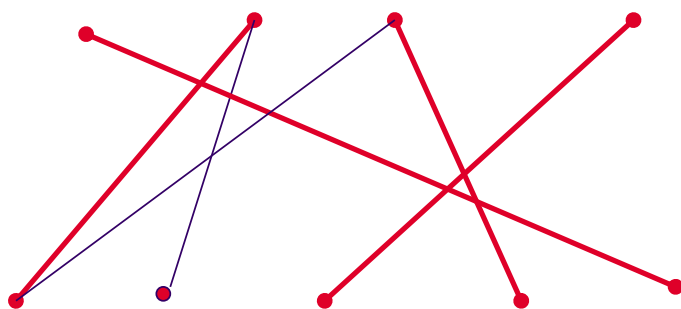


10.4.3 匹配

定义10.4.2 在偶图 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 中, $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$, 若存在 E 的子集 $E' = \{(v_1, v_1'), (v_2, v_2'), \dots, (v_q, v_q')\}$, 其中 v_1', v_2', \dots, v_q' 是 V_2 中的 q 个不同的结点, 则称 G 的子图 $G' = \langle V_1, E', V_2 \rangle$ 为从 V_1 到 V_2 的一个完全匹配 (Complete Matching), 简称匹配。

10.4.3 匹配

定义10.4.2 在偶图 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 中, $|V_1| \leq |V_2|$, M 为 E 一个子集, 若 M 中的任意两条边都没有公共节点, 则称 M 是一个**匹配**, **极大匹配**是指在当前已完成的匹配下, 无法再通过增加未完成匹配的边的方式来增加匹配的边数。**最大匹配**是所有极大匹配当中边数最大的一个匹配。**最大匹配** (不唯一), 含有 G 中所有顶点的匹配称为**完全匹配** (Complete Matching)。



必要条件

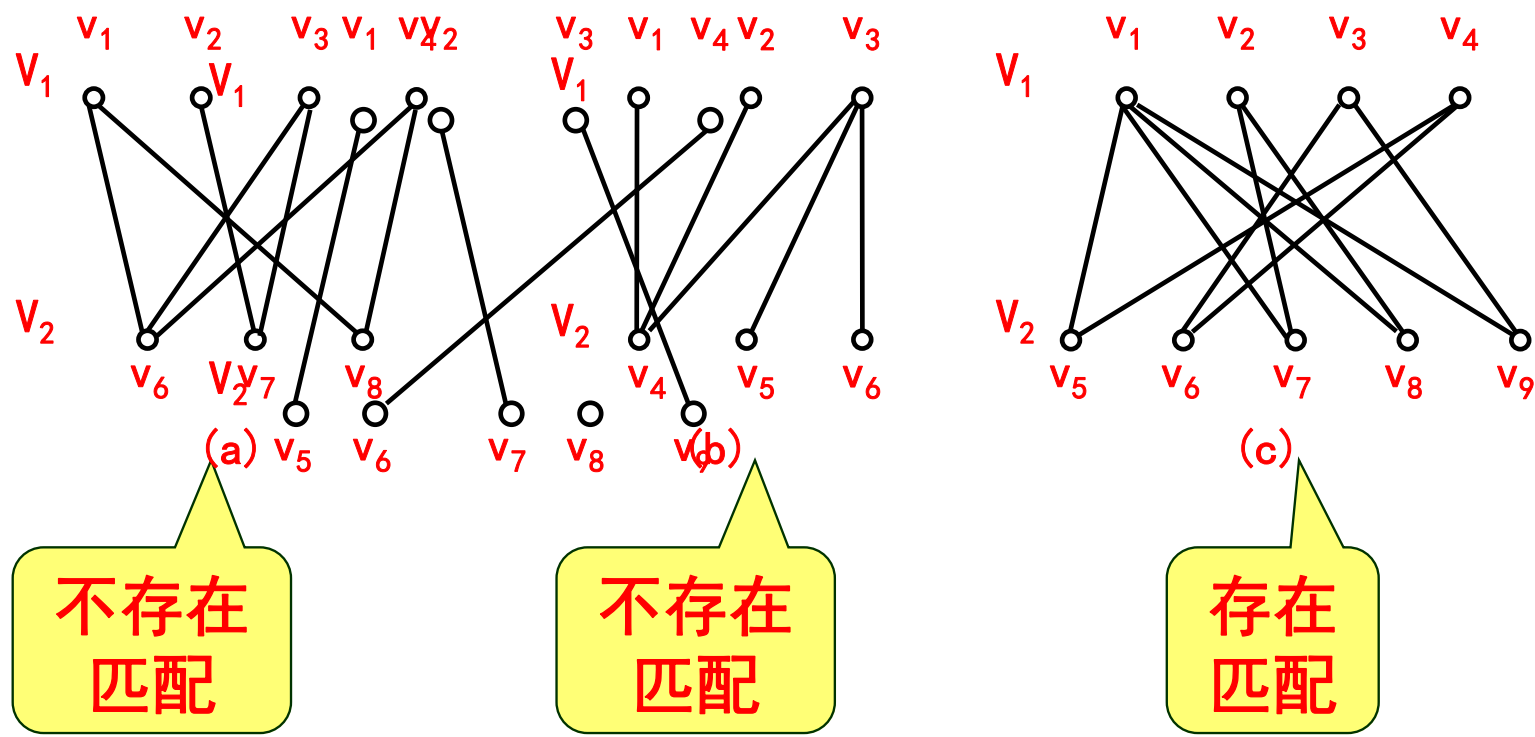
在偶图 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 中, 若存在 V_1 到 V_2 的单射 f , 使得对任意 $v \in V_1$, 都有 $(v, f(v)) \in E$, 则存在 V_1 到 V_2 的匹配。

由单射的性质知, 不是所有的偶图都有匹配, 存在匹配的必要条件是 $|V_1| \leq |V_2|$ 。

然而, 这个条件并不是充分条件。

例10.4.2

下面的3个偶图哪些存在 V_1 到 V_2 匹配？对存在匹配的偶图给出一个匹配。

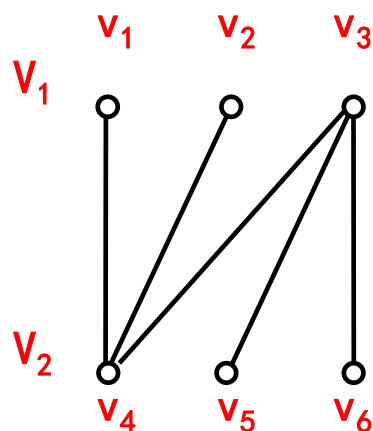


霍尔定理

定理10.4.2 (霍尔定理) 偶图 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配的充分必要条件是 V_1 中任意 k 个结点至少与 V_2 中的 k 个结点相邻, $k = 1, 2, \dots, |V_1|$ 。

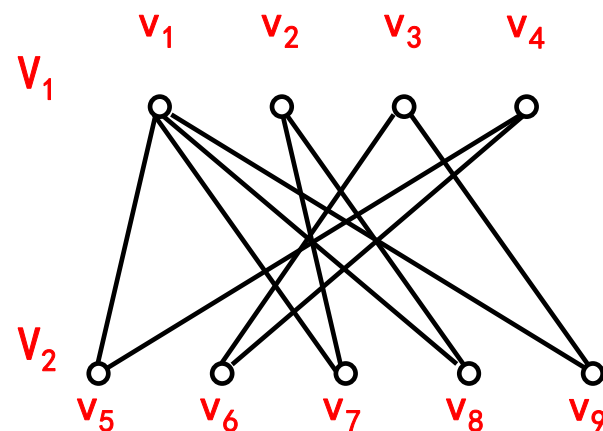
定理10.4.2中的条件通常称为**相异性条件** (Diversity Condition)。

例



(b)

不满足相异性条件，
故没有匹配。



(c)

满足相异性条件，
故存在匹配

定理10.4.3

设 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 是一个偶图。如果满足条件

- (1) V_1 中每个结点至少关联 t 条边;
- (2) V_2 中每个结点至多关联 t 条边;

则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配。其中 t 为正整数。

证明 由条件(1)知, V_1 中 k 个结点至少关联 t_k 条边 ($1 \leq k \leq |V_1|$), 由条件(2)知, 这 t_k 条边至少与 V_2 中 k 个结点相关联, 于是 V_1 中的 k 个结点至少与 V_2 中的 k 个结点相邻接, 因而满足相异性条件, 所以 G 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配。

定理10.4.3

设 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 是一个偶图。如果满足条件

- (1) V_1 中每个结点至少关联 t 条边；
- (2) V_2 中每个结点至多关联 t 条边；

则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配。其中 t 为正整数。

证明 由条件(1)知, V_1 中 k 个结点至少关联 t_k 条边 ($1 \leq k \leq |V_1|$), 由条件(2)知, 这 t_k 条边至少与 V_2 中

定理10.4.3中的条件通常称为 t 条件 (t -Condition)。

定理10.4.3

设 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 是一个偶图。如果满足条件

- (1) V_1 中每个结点至少关联 t 条边；
- (2) V_2 中每个结点至多关联 t 条边；

则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配。其中 t 为正整数。

证明 由条件 (1) 知, V_1 中 k 个结点至少关联 t_k 条边

判断 t 条件非常简单, 只需要计算 V_1 中结点的最小度数和 V_2 中结点的最大度数即可。

在从 V_1 到 V_2 的匹配。

10.4.5 偶图的应用

稳定婚姻问题： 假设我们要促成 n 位男士和 n 位女士之间的 n 对婚姻(所有人都是异性恋)。为了使这些婚姻稳定，我们要求所有人都把 n 个异性按照自己的喜欢程度排列出来，然后根据每个人名单里的排列顺序来安排婚姻。所谓一个稳定婚姻方案 (Stable Matching) 就是在已安排好的 n 对夫妻当中不存在不是夫妻的一男一女使得他们却对彼此的好感度都大于各自的配偶。

	1号人选	2号人选
吕布	貂蝉	孙尚香
刘备	孙尚香	貂蝉
貂蝉	吕布	刘备
孙尚香	吕布	刘备

- 1、(吕布, 孙尚香), (刘备, 貂蝉)
- 2、(吕布, 貂蝉), (刘备, 孙尚香)

1962年，美国数学家David Gale和Lloyd Shapley发明了一种寻找稳定婚姻的策略，人们称之为延迟认可算法（Gale-Shapley算法）。

先对所有男士进行落选标记，称其为自由男。当存在自由男时，进行以下操作：

- ①每一位自由男在所有尚未拒绝她的女士中选择一位被他排名最优先的女士；
- ②每一位女士将正在追求她的自由男与其当前男友进行比较，选择其中排名优先的男士作为其男友，即若自由男优于当前男友，则抛弃前男友；否则保留其男友，拒绝自由男。
- ③若某男士被其女友抛弃，重新变成自由男。

10.4.5 偶图的应用

例10.4.3 有 n 台计算机和 n 个磁盘驱动器。每台计算机与 $m > 0$ 个磁盘驱动器兼容，每个磁盘驱动器与 m 台计算机兼容。能否为每台计算机配置一台与它兼容的磁盘驱动器？

解 用 V_1 表示 n 台计算机的集合， V_2 表示 n 台磁盘驱动器的集合。以 V_1, V_2 为互补结点子集，以 $E = \{(v_i, v_j) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2 \text{ 且 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 兼容}\}$ 为边集，构造偶图。它显然满足 t 条件($t = m$)，所以存在匹配，故能够为每台计算机配置一台与它兼容的磁盘驱动器。

例10.4.4

现有三个课外小组：物理组，化学组和生物组，有五个学生 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 。

(1) 已知 s_1, s_2 为物理组成员； s_1, s_3, s_4 为化学组成员； s_3, s_4, s_5 为生物组成员。

(2) 已知 s_1 为物理组成员； s_2, s_3, s_4 为化学组成员； s_2, s_3, s_4, s_5 为生物组成员。

(3) 已知 s_1 即为物理组成员，又为化学组成员； s_2, s_3, s_4, s_5 为生物组成员。

在以上三种情况的每一种情况下，在 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 中选三位组长，不兼职，问能否办到？

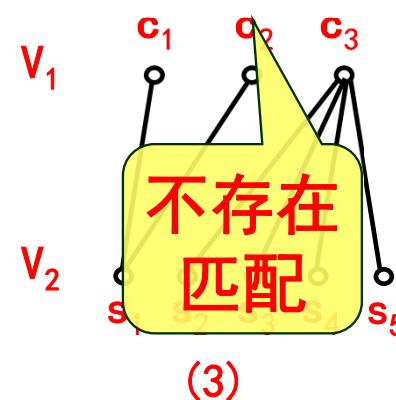
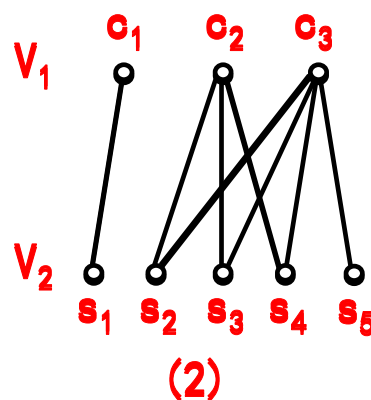
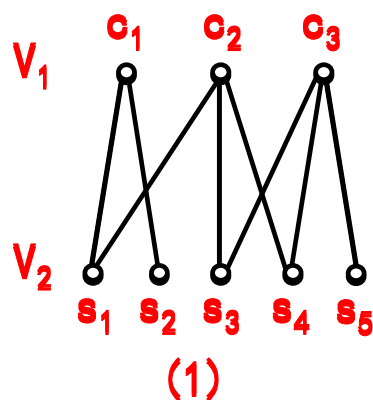
解

用 c_1, c_2, c_3 分别表示物理组、化学组和生物组。

$$V_1 = \{c_1, c_2, c_3\},$$

$$V_2 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$$

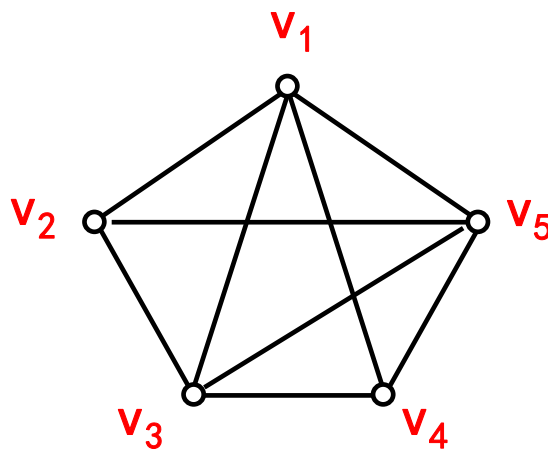
以 V_1, V_2 为互补结点子集，以 $E = \{(c_i, s_j) \mid c_i \in V_1, s_j \in V_2 \text{ 且 } c_i \text{ 中有成员 } s_j\}$ 为边集，构造偶图。



10.5 平面图

10.5.1 平面图的定义

在一张纸上画几何模型时常常会发现，不仅需要允许各边在结点处相交，而且还应该允许各边在某些非结点处相交，这样的点称为**交叉点** (Cross Point)；而相交的边，称为**交叉边** (Cross Edge)。



定义10.5.1

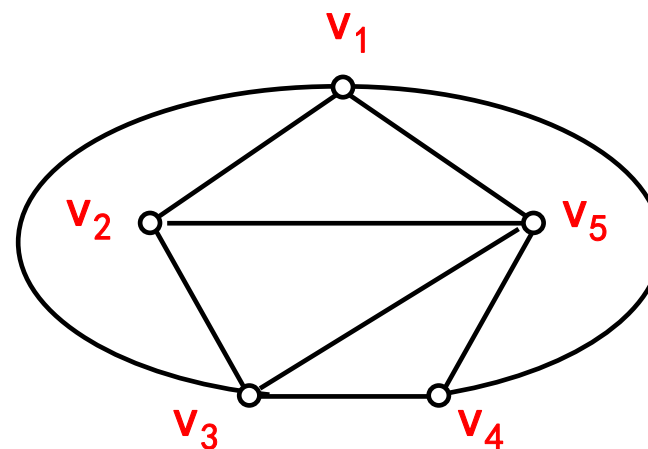
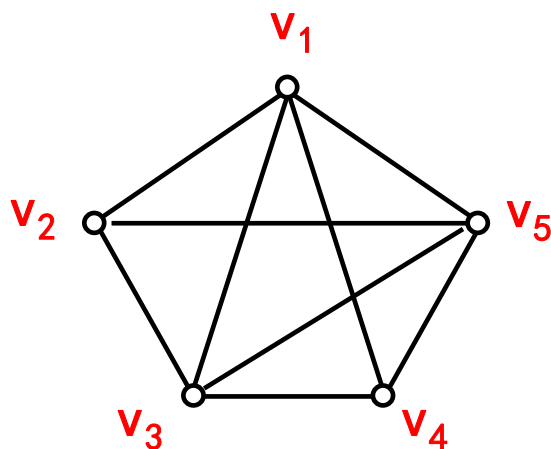
如果能把一个无向图 G 的所有结点和边画在平面上，使得任何两边除公共结点外没有其他交叉点，则称 G 为平面图 (Plane Graph)，否则称 G 为非平面图 (Nonplanar Graph)。

当且仅当一个图的每个连通分支都是平面图时，这个图是平面图。

平面图的平面表示

应当注意，有些图从表面上看它的某些边是相交叉的，但是不能就此肯定它不是平面图。

定义10.5.1



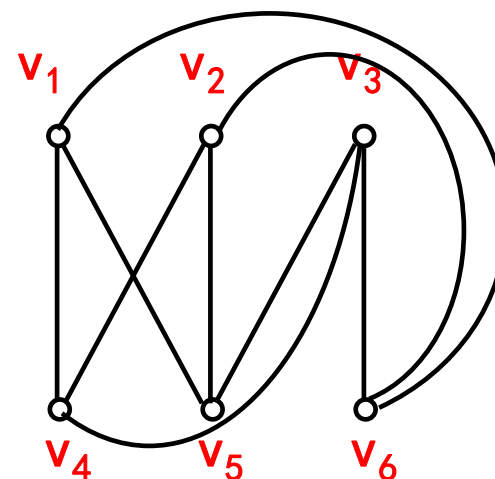
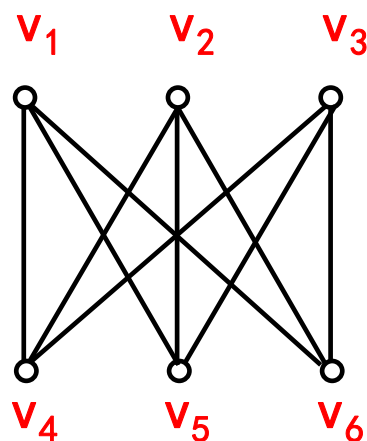
平面图的平面表示

应当注意，有些图从表面上看它的某些边是相交叉的，但是不能就此肯定它不是平面图。

非平面图

有些图形不论如何改画，除去结点外，总有边相交叉。

即不管怎样改画，至少有一条边与其他边交叉，故它是非平面图。

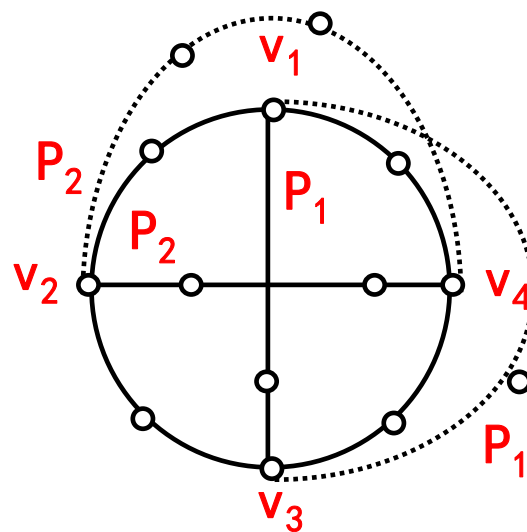


10.5.2 观察法

设 G 是画于平面上的图，并设

$$C = v_1 \cdots v_2 \cdots v_3 \cdots v_4 \cdots v_1$$

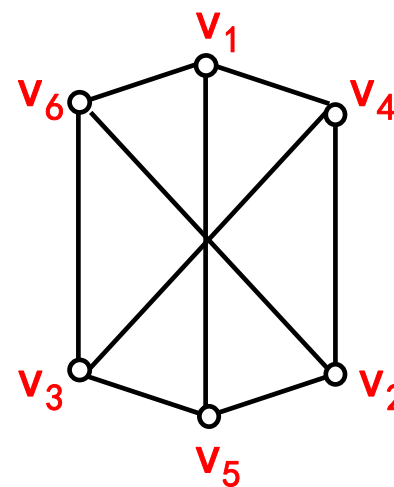
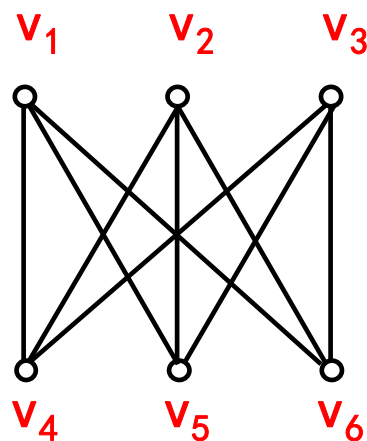
是 G 中的任何基本回路。此外，设 $P_1 = v_1 \cdots v_3$ 和 $P_2 = v_2 \cdots v_4$ 是 G 中的任意两条无公共结点的基本通路。



观察法

例10.5.1

用观察法来判定图 $K_{3,3}$ 为非平面图。



10.5.3 欧拉公式

定义10.5.2 在平面图G的一个平面表示中,

- ◆ 由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域, 称为G的一个面 (Surface),
- ◆ 包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的边界 (Bound),
- ◆ 面r的边界的长度称为该面的次数 (Degree), 记为 $D(r)$ 。
- ◆ 区域面积有限的面称为有限面 (Finite Surface), 区域面积无限的面称为无限面 (Infinite Surface)。
- ◆ 平面图有且仅有一个无限面。

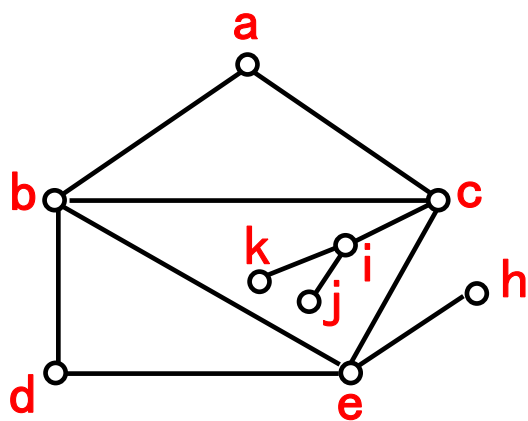
面的形象描述：

假设我们把一个平面图的平面表示画在平面上，然后用一把**小刀**，沿着图的**边**切开，那么平面就被切成许多**块**，每一块就是图的一个面。

更确切地说，平面图的一个面就是平面的一块，它用**边作边界线**，且**不能再分成子块**。

例10.5.2

考察下图所示平面图的面、边界和次数。



解 平面图把平面分成4个面：

r_0 , 边界为 $abdeheca$, $D(r_0)=7$

r_1 , 边界为 $abca$, $D(r_1)=3$

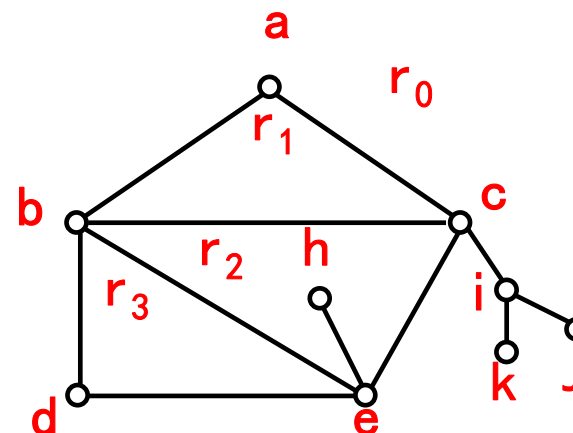
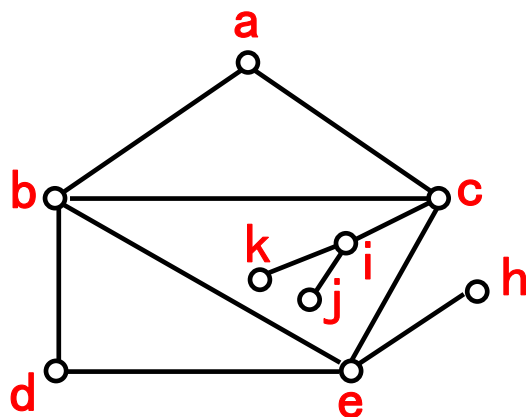
r_2 , 边界为 $becijikicb$, $D(r_2)=9$

r_3 , 边界为 $bdeb$, $D(r_3)=3$

r_1 、 r_2 和 r_3 是有限面， r_0 是无限面。

例10.5.2

考察下图所示平面图的面、边界和次数。



注意：对于平面图的不同平面表示，虽然面的数目相同，但各面的边界和次数会不同。

定理10.5.1

平面图中所有面的次数之和等于边数的二倍。

证明 因任何一条边，或者是两个面边界的公共边，或者是在一个面中作为边界被重复计算两次，故平面图所有面的次数之和等于其边数的二倍。

1750年，**欧拉**发现，任何一个**凸多面体**，若有 **n 个顶点**、 **m 条棱**和 **r 个面**，则有 **$n-m+r = 2$** 。这个公式可以推广到平面图上来，称之为**欧拉公式**。

欧拉公式

定理10.5.2 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是连通平面图，
若它有 n 个结点、 m 条边和 r 个面，则有

$$n - m + r = 2$$

证明 数学归纳法证明

$$m=1$$

假设少于 m 条边成立，证明 m 条边成立（树或非树）

推论10.5.1

设 G 是一个 (n, m) 简单连通平面图，若 $m > 1$ ，则有
$$m \leq 3n - 6$$

证明 设 G 有 k 个面，因为 G 是简单图，所以 G 的每个面至少由3条边围成，所以 G 所有面的次数之和

$$\sum_{i=1}^k \deg(r_i) \geq 3k$$

由定理10.5.1知， $2m \geq 3k$ ，即 $k \leq 2m/3$ ，代入欧拉公式有

$$2 = n - m + k \leq n - m + 2m/3$$

即

$$2 \leq n - m/3$$

整理得

$$m \leq 3n - 6$$

说明

推论10.5.1本身可能用处不大，但它的逆否命题却非常有用，可以用它来判定某些图是非平面图。
即

一个简单连通图，若不满足 $m \leq 3n - 6$ ，则一定是非平面图。

但需要注意，满足不等式 $m \leq 3n - 6$ 的简单连通图未必是平面图。

例10.5.3

证明5个结点的完全图 K_5 是非平面图。

分析 因为 K_5 是简单连通图，我们可以验证 $m \leq 3n-6$ 不成立，因此它不是平面图。

证明 因为 K_5 是简单连通图， $n=5$ ， $m=10$ ，因此 $m > 3n-6=3 \times 5-6=9$ ，故不满足 $m \leq 3n-6$ ，因此它不是平面图。

再看图 $K_{3,3}$ ， $n=6$ ， $m=9$ ，满足不等式 $m \leq 3n-6$ ，但是我们已用观察法证明了它是一个非平面图。

推论10.5.2

设 G 是一个 (n, m) 简单连通平面图，若每个面的次数至少为 k ($k \geq 3$)，则有

$$m \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$$

证明 设 G 共有 r 个面，各面的次数之和为 T ，

由条件可知

$$T \geq k \times r$$

又由定理10.5.1知

$$T = 2 \times m$$

利用欧拉公式解出面数

$$r = 2 - n + m$$

由此得出下式成立

$$2 \times m \geq k \times (2 - n + m)$$

从而有

$$(k-2) \times m \leq k \times (n-2)$$

由于 $k \geq 3$ ，因而结论成立

说明

推论10.5.2本身可能用处不大，但它的逆否命题却非常有用，可以用它来判定某些图是非平面图。
即

一个简单连通图，若每个面的次数至少为 k ($k \geq 3$)，若不满足 $m \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$ ，则一定是非平面图。

10.5.4 库拉托夫斯基定理

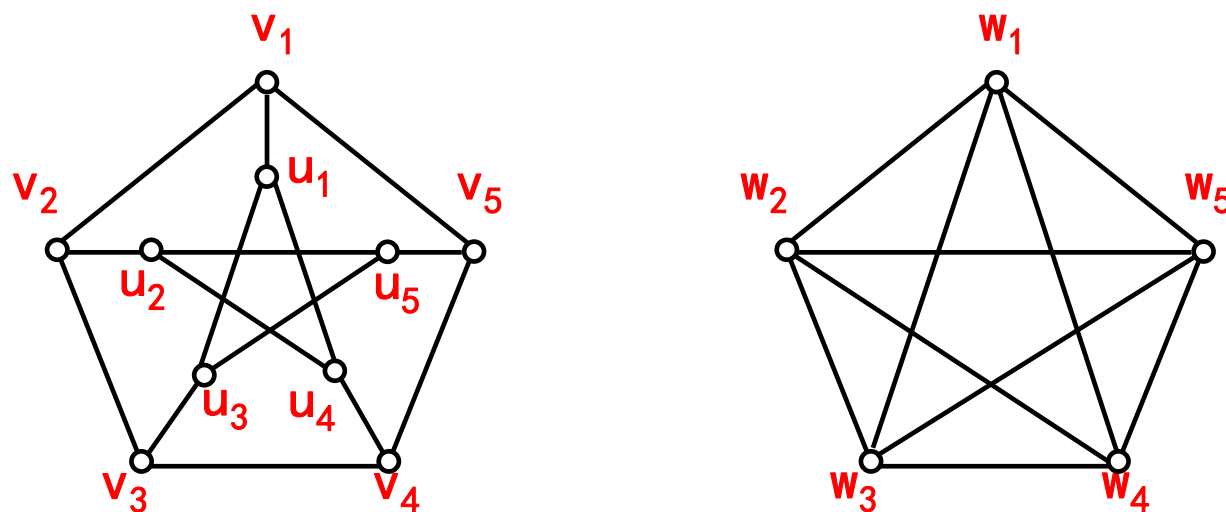
定理10.5.3 (库拉托夫斯基定理) 一个图是平面图
的充分必要条件是它的任何子图都不可能收缩为 K_5
或 $K_{3,3}$ 。

推论10.5.3 一个图是非平面图的充分必要条件是
它存在一个能收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。

我们将 K_5 和 $K_{3,3}$ 称为 库拉托夫斯基图
(Kuratowski Graph)。

例10.5.5

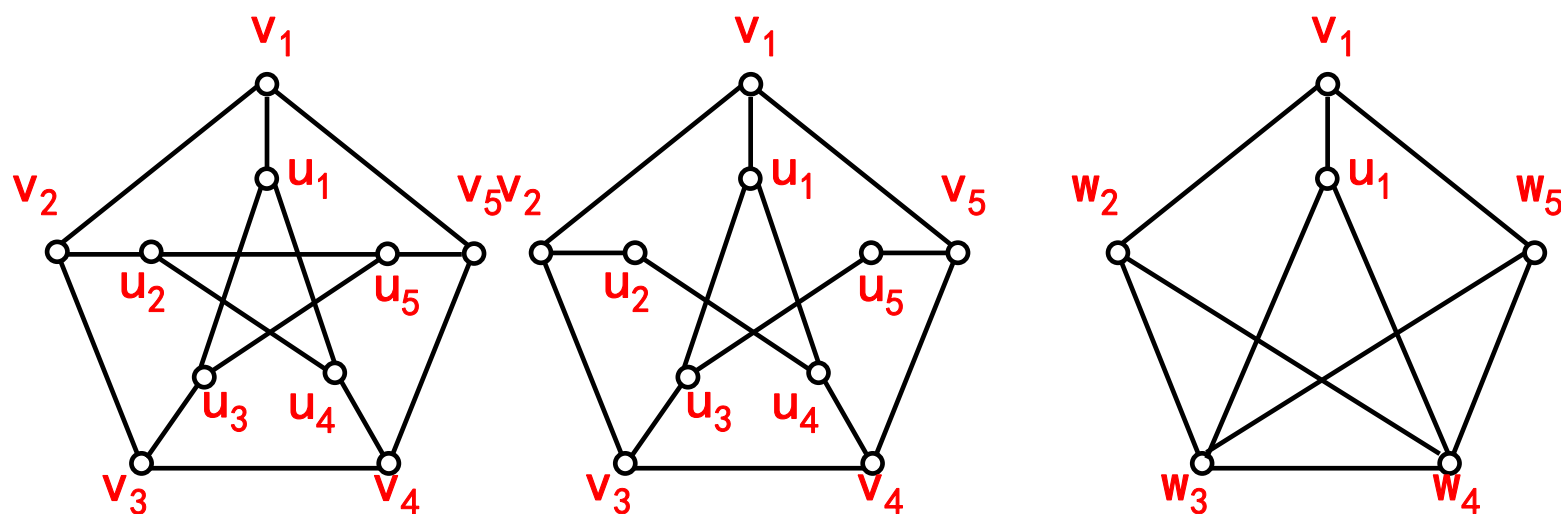
下图所示的彼得森图是一个非平面图。



证明 方法一：收缩边 (v_i, u_i) ，用 w_i 代替， $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ，得到图即为 K_5 。

例10.5.5

下图所示的彼得森图是一个非平面图。



方法二：找到子图，

收缩边 (v_i, u_i) ，用 w_i 代替， $i=2, 3, 4, 5$ ，得到图即为 $K_{3,3}$ 。

Thank You !

