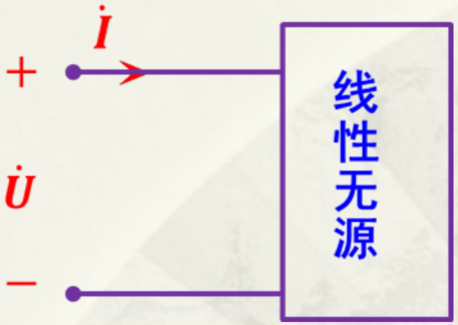
5. 4 阻抗与导纳

一. 阻抗

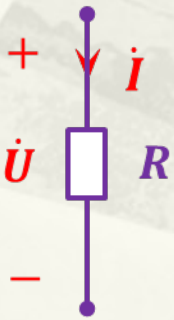


定义：

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

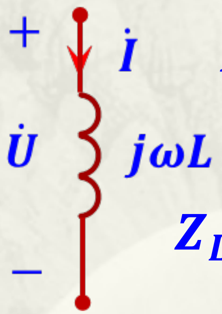
单一元件的阻抗

元件	R	L	C
阻抗	R	$j\omega L = jX_L$	$\frac{1}{j\omega C} = -jX_C$



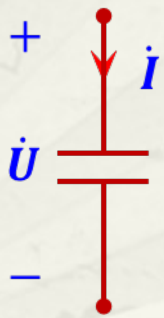
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R}$$

$$Z_R = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R$$



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{j\omega L}$$

$$Z_L = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = j\omega L$$

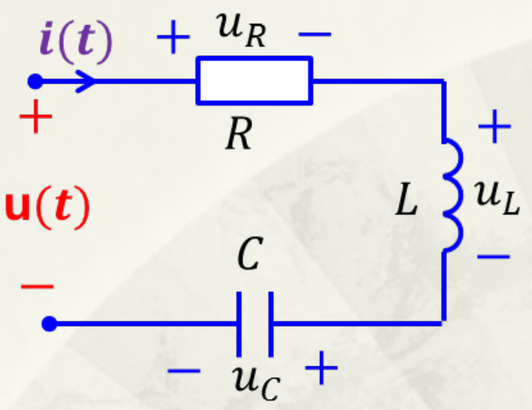


$$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

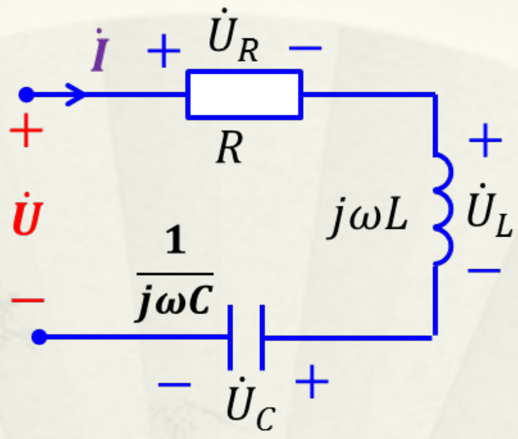
$$\frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_C = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{1}{j\omega C}$$

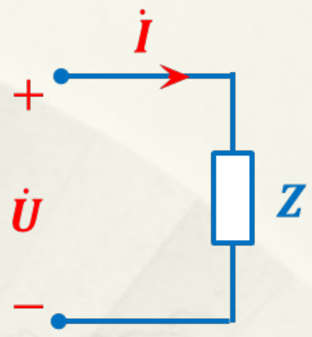
RLC串联电路



相量模型



等效电路



$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = [R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)]\dot{I}$$

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX$$

$X = X_L - X_C$称为电抗

讨论：

1、复阻抗Z取决于电路结构、元件参数和电路工作频率；

2、Z反映电路的固有特性： $Z = R + jX$

$X = 0,\ Z = R,\ \varphi_Z = 0$ 电阻性

$X > 0,\ X_L > X_C, \varphi_Z > 0$ 电感性

$X < 0,\ X_L < X_C, \varphi_Z < 0$ 电容性

3、Z的物理意义： $Z = |Z|\angle\varphi_z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U\angle\varphi_u}{I\angle\varphi_i} = \frac{U}{I}\angle(\varphi_u - \varphi_i)$

阻抗模为电压有效值与电流有效值之比

阻抗角反映了电压与电流的相位差

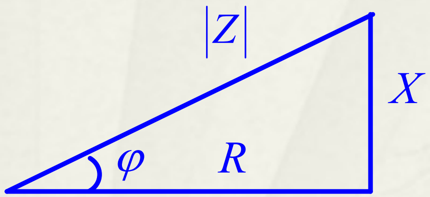
4、Z为复数，描述电路的频域模型，但不是相量。

阻抗是一个复数，故也可写为

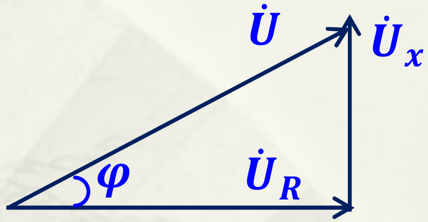
$$Z = R + jX = |Z|\angle\varphi_z$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$ 阻抗的模

$$\varphi_z = arctan\frac{X}{R}$$ 阻抗的辐角



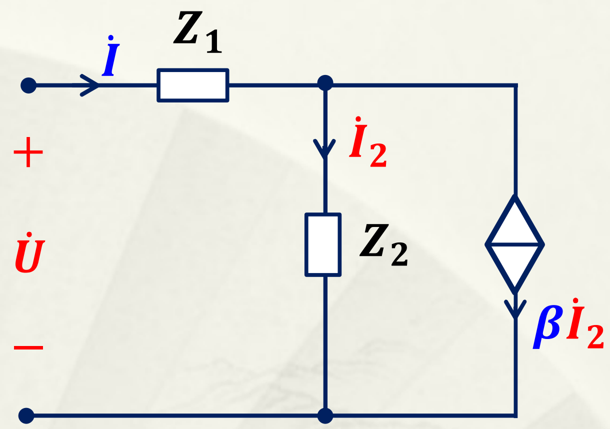
阻抗三角形



电压三角形

阻抗虽是复数，但它与相量不同。相量表示正弦量，而阻抗仅反映电路频域的性质，不代表正弦量，所以在上不加小黑点，以便与相量相区别。

例1 如图，$Z_1=(10+j50)\Omega$，$Z_2=(400-j100)\Omega$ ，求β为多大时$\dot{U}$和$\dot{I}_2$正交。



解：

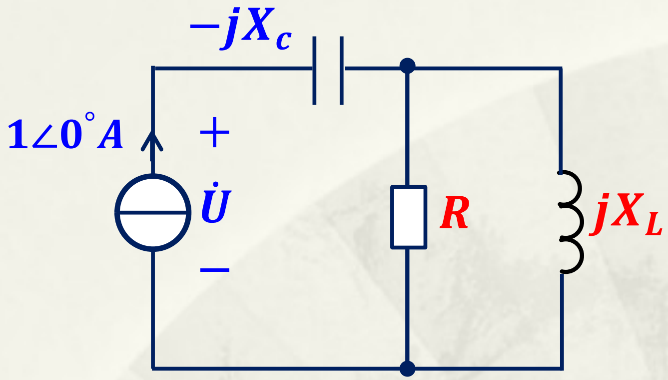
$$\dot{I}=(1+\beta)\dot{I}_2$$

$$\dot{U}=Z_1\dot{I}+Z_2\dot{I}_2=Z_1(1+\beta)\dot{I}_2+Z_2\dot{I}_2$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}_2}=Z_1(1+\beta)+Z_2=10(1+\beta)+400+j[50(1+\beta)-1000]$$

$$10(1+\beta)+400=0 \qquad \beta=-41$$

例2 如图，当$X_C = 1\Omega$时，$U = 1V$ ；$X_C = 2\Omega$ 时，$U = 1V$。求R, X_L 的值。



$$Z_1 = -j1 + \frac{jX_L R}{jX_L + R} = \frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2} - j(1 - \frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2})$$

$$Z_2 = -j2 + \frac{jX_L R}{jX_L + R} = \frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2} - j(2 - \frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2})$$

解： $U = |Z_1| \times 1 = 1\ V$

$$Z_1 = \frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2} - j(1 - \frac{3}{2}) \quad = \frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2} + j\frac{1}{2}$$

Z_1 和Z_2 必为共轭复数，有

$$1 - \frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2} = -(2 - \frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2})$$

$$|Z_1| = \sqrt{(\frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = 1$$

$$\frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

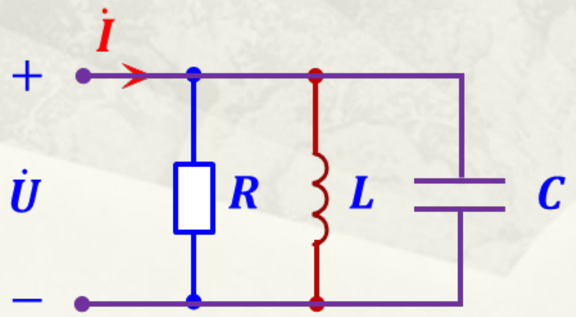
$$R = 2\sqrt{3}\ \Omega, X_L = 2\ \Omega$$

二. 导纳

阻抗的倒数为复导纳, 简称导纳，即 $Y=\dfrac{\dot{I}}{\dot{U}}=\dfrac{1}{Z}$ 单位：S

元件	R	L	C
Z	R	$j\omega L=jX_L$	$\dfrac{1}{j\omega C}=-jX_C$
Y	G	$\dfrac{1}{j\omega L}=-jB_L$	$j\omega C=jB_C$

$B_C=\omega C$称之为容纳，$B_L=\dfrac{1}{\omega L}$称之为感纳。



$$Y=G+j(\omega C-\frac{1}{\omega L})=G+j(B_C-B_L)$$

$$=G+jB=|Y|\angle\varphi_Y$$

G为导纳的电导，B为导纳的电纳

讨论：

1、复导纳取决于电路结构、元件参数和电路工作频率；

2、Y反映电路的固有特性：　$Y = G + jB$

$B = 0,\ Y = G,\ \varphi_Y = 0$　电阻性

$B < 0,\ B_L > B_C, \varphi_Y < 0$ 电感性

$B > 0,\ B_L < B_C, \varphi_Y > 0$ 电容性

3、Y的物理意义：

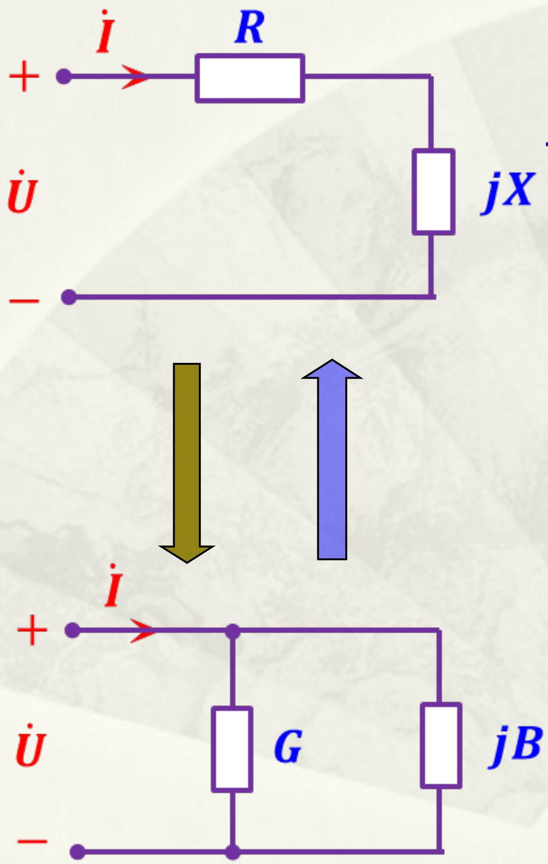
$$|Y| = \frac{|\dot{I}|}{|\dot{U}|} = \frac{1}{|Z|}$$

$$Y = |Y|\angle\varphi_Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I}{U}\angle(\varphi_i - \varphi_u)$$

$$\varphi_Y = \varphi_i - \varphi_u = -\varphi_z$$

4、Y为复数，描述电路的频域模型，但不是相量。

一般支路，阻抗 $Z = R + jX$



$$Y = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j\frac{-X}{R^2 + X^2} = G + jB$$

其中：

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

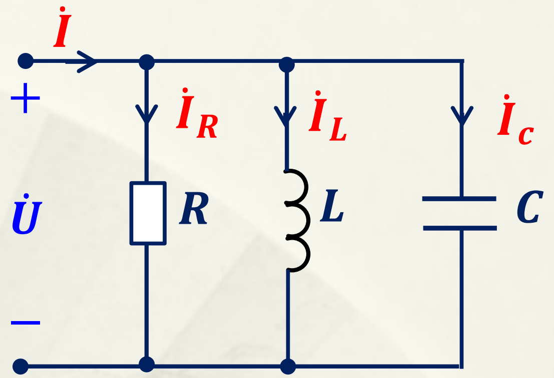
同理 $Y = G + jB$

$$Z = \frac{1}{G + jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j\frac{-B}{G^2 + B^2} = R + jX$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \qquad X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

例1 图示电路，已知$R=10\Omega, X_L=15\Omega$，$X_C=8\Omega$，电压$U=120V, f=50Hz$ 。

求电路的导纳；电流$\dot{I}_R, \dot{I}_L, \dot{I}_C$ 及总电流$\dot{I}$ ；画出相量图。



解： $\dot{U}=120\angle 0^\circ \ V$

$$Y=\frac{1}{R}+jB_C-jB_L=\frac{1}{R}+j\frac{1}{X_C}-j\frac{1}{X_L}$$

$$=0.1+j0.125-j0.067=0.1156\angle 30.11^\circ \ S$$

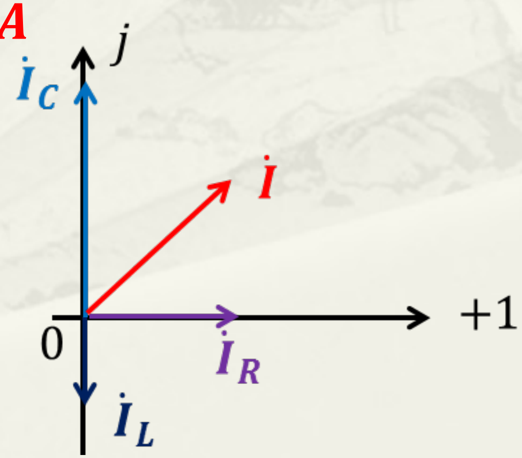
$$\dot{I}_R=\frac{\dot{U}}{R}=12\angle 0^\circ \ A$$

或 $\dot{I}=\dot{U}Y\approx 13.9\angle 30.3^\circ \ A$

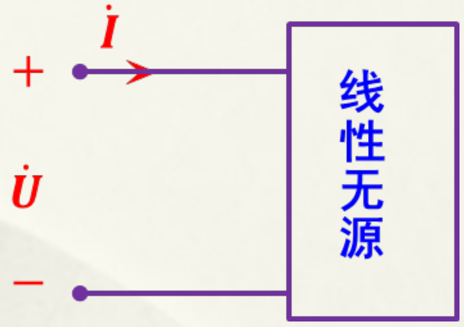
$$\dot{I}_L=\frac{\dot{U}}{jX_L}=-j8=8\angle -90^\circ \ A$$

$$\dot{I}_C=\frac{\dot{U}}{-jX_C}=j15=15\angle 90^\circ \ A$$

$$\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_L+\dot{I}_C\approx 13.9\angle 30.3^\circ \ A$$

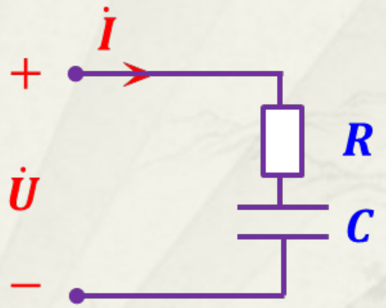


例2：图示二端网络，已知$u(t)=2\sqrt{2}cos(10^4t+30^\circ)V$，$i(t)=100\sqrt{2}cos(10^4t+60^\circ)mA$：求频域$Z$、$Y$及其等效元件参数。



解： $\dot{U}=2\angle 30^\circ\ V \quad \dot{I}=100\angle 60^\circ\ mA$

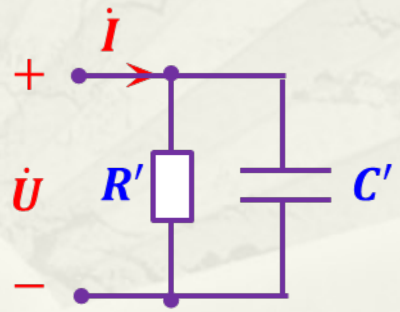
$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=20\angle -30^\circ=17.32-j10\ \Omega$$



$R=17.32\Omega$

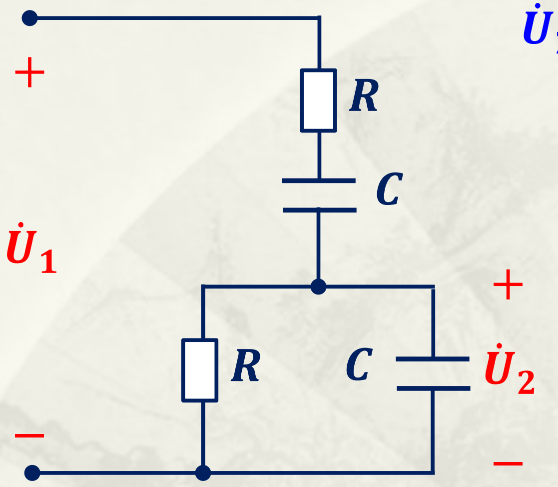
$C=10\mu F$

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=0.05\angle 30^\circ=0.0433+j0.025\ S$$



$$R'=\frac{1}{G'}=23.1\Omega \qquad C'=\frac{B'}{\omega}=2.5\mu F$$

例3 图示电路，求角频率多大时可使$\frac{U_2}{U_1}$的值最大，并求该最大值，说明相位关系。



$$\dot{U}_2=\frac{\dot{U}_1}{R+\frac{1}{j\omega C}+\frac{R\times\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}}\times\frac{R\times\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{\dot{U}_1 R}{3R+j\omega CR^2-j\frac{1}{\omega C}}$$

$$j\omega CR^2-j\frac{1}{\omega C}=0 \qquad \omega=\frac{1}{RC}$$

$$\left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{\max}=\frac{1}{3}$$

同相位

5.5 正弦稳态电路频域分析

基本分析思路:

(1) 从时域电路模型转化为频域模型:

正弦电流、电压用相量表示; 无源支路用复阻抗表示.

(2) 选择适当的电路分析方法:

等效变换法（阻抗等效变换、电源等效变换）、 网孔法、节点法、 应用电路定理分析法等;

(3) 频域求解（复数运算）得到相量解;

(4) 频域解转化为时域解。

一. 无源电路的等效电路

n个阻抗串联，其等效阻抗（即输入阻抗）为

$$Z=\sum_{k=1}^{n} Z_k \quad (k=1,2,3,\cdots,n)$$

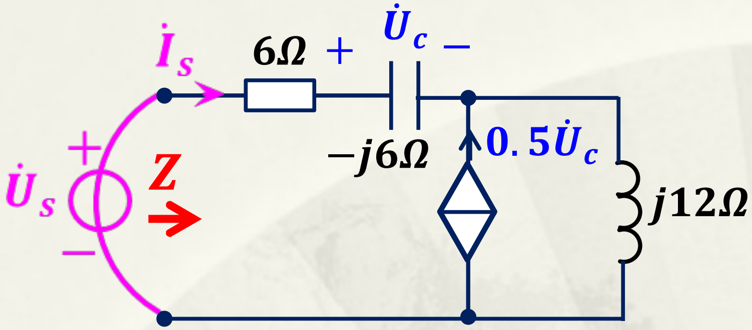
n个阻抗并联，其等效导纳（即输入导纳）为

$$Y=\sum_{k=1}^{n} Y_k \quad (k=1,2,3,\cdots,n)$$

线性无独立源的单口电路，其输入阻抗与输入导纳的定义分别为

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}} \qquad Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=\frac{1}{Z}$$

例1 图示电路，求输入阻抗Z。



解： 用外施电压源法求

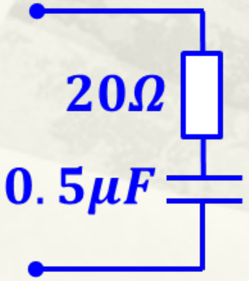
可列出KVL方程为

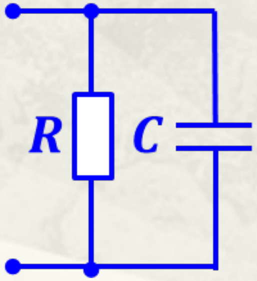
$$\dot{U}_s = (6 - j6)\dot{I}_s + j12(\dot{I}_s + 0.5\dot{U}_c)$$

又 $\dot{U}_c = -j6\dot{I}_s$

$$Z = \frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_s} = 42.4\angle 8.13^\circ \ \Omega$$

例2 图示电路，求$\omega = 10^5 rad/s$时的并联等效电路。





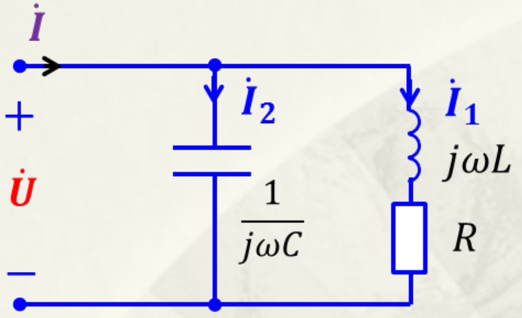
$$Z = 20 - j20\ \Omega$$

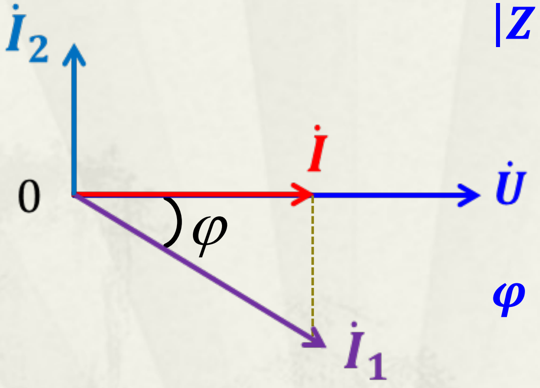
$$Y = \frac{1}{Z} = 0.25 + j0.025\ S \qquad Y = \frac{1}{R} + j\omega C$$

$$\frac{1}{R} + j\omega C = 0.25 + j0.025\ S$$

$R = 40\Omega$, $C = 0.25\mu F$

例3 图示电路，$U=160V, \omega=10^3 rad/s, I_1=10A, I$ =6A ，$\dot{U}$与$\dot{I}$同相位 ，求R, L, C, I_2 的值。





$$|Z|=\frac{U}{I_1}=\frac{160}{10}=16\ \Omega$$

$$\varphi=arctan\frac{I_2}{I}=arctan\frac{8}{6}=53.1^\circ$$

解： 设：$\dot{U}=160\angle 0^\circ\ \ V$

$$R=|Z|cos\varphi=16cos53.1^\circ=12.8\Omega$$

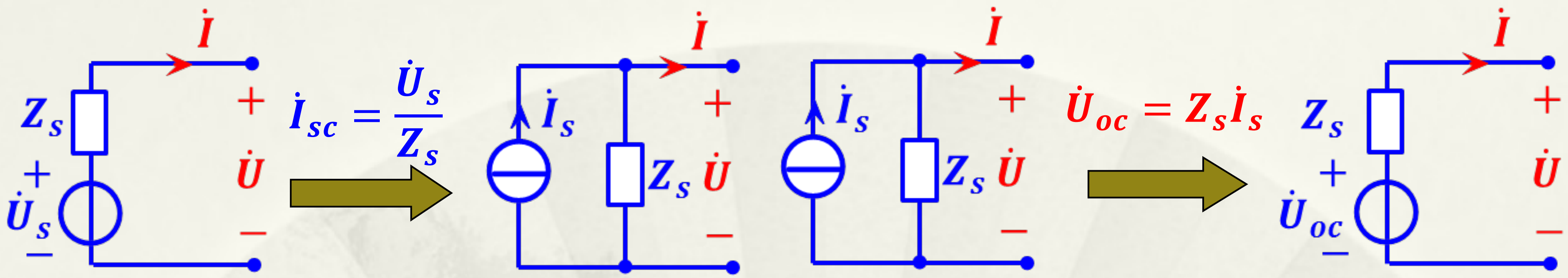
$$I_1^2=I^2+I_2^2 \Rightarrow I_2=8\ A$$

$$\omega L=|Z|sin\varphi=16sin53.1^\circ$$

$$I_2=\frac{U}{\frac{1}{\omega C}} \Rightarrow C=\frac{I_2}{\omega U}=50\mu F$$

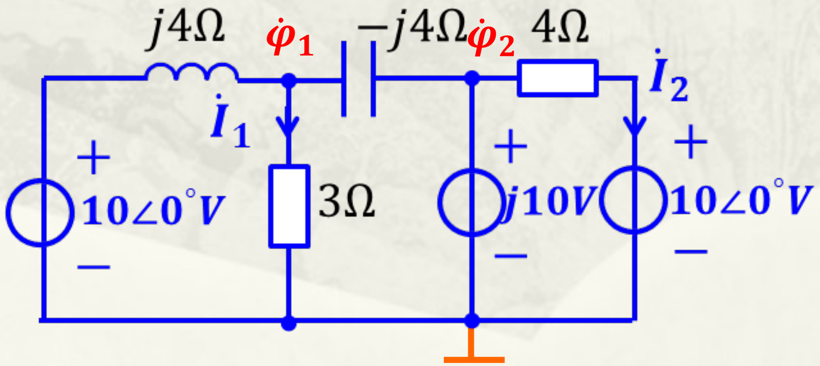
$$L=12.8\ mH$$

二. 电压源与电流源的等效变换



三. 网孔法、节点法、电路定理等的应用

例4 用节点法求图示电路的电流。



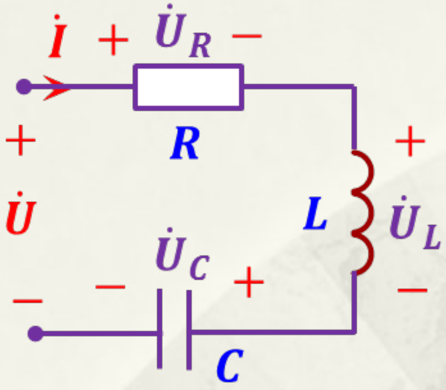
$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{j4}+\frac{1}{-j4}\right)\dot{\varphi}_1-\frac{1}{-j4}\dot{\varphi}_2=\frac{10\angle0^\circ}{j4}$$

$$\dot{\varphi}_2=j10 \qquad \dot{\varphi}_1=10.6\angle-135^\circ\ A$$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{\varphi}_1}{3}=3.53\angle-135^\circ\ A$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{\varphi}_2-10}{4}=2.5\sqrt{2}\angle135^\circ\ A$$

例5：已知：图示电路中电压有效值 $U_R = 6V, U_L = 18V, U_c = 10V$。求$U = ?$



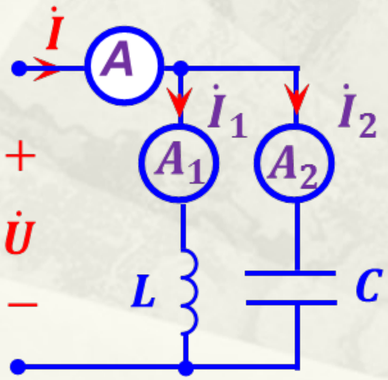
解： 设$\dot{I} = I\angle 0^\circ\ A$（参考相量）

$$\dot{U}_R = 6\angle 0^\circ\ V \quad \dot{U}_L = 18\angle 90^\circ\ V \quad \dot{U}_C = 10\angle -90^\circ\ V$$

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = 6 + j18 - j10 = 10\angle 53.1^\circ\ V$$

$$U = 10\ V$$

例6：已知图示电路中电流表A1、A2读数均为10A。求电流表A的读数。



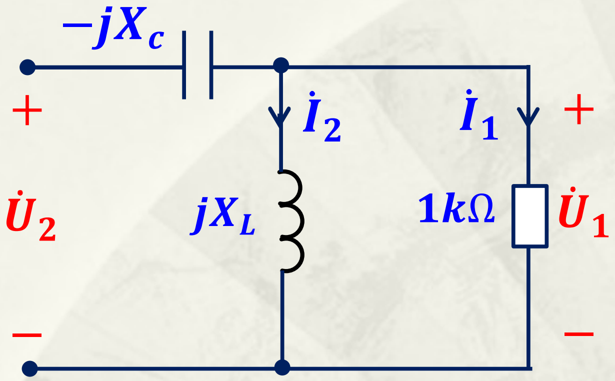
解： 设 $\dot{U} = U\angle 0^\circ\ V$（参考相量）

$$\dot{I}_1 = 10\angle -90^\circ\ A \quad \dot{I}_2 = 10\angle 90^\circ\ A$$

$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0$ 电流表A的读数为零。

说明：（1）参考相量选择：串联电路可选电流、并联电路可选电压作为参考相量；（2）有效值不满足KCL、KVL。

例7 图示电路，电路的频率$\omega = 1000rad/s, C = 4\mu F, \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{3}$。求$\dot{U}_1$在相位上超前$\dot{U}_2$的角度。



解：

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = 250\Omega$$

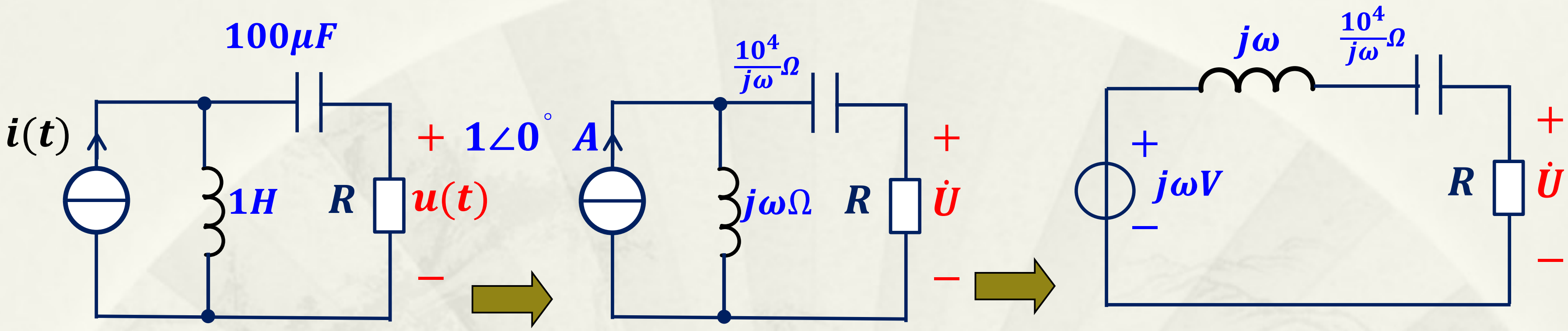
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{U_1}{R}}{\frac{U_1}{X_L}} = \frac{X_L}{R} = \frac{1}{3} \Rightarrow X_L = \frac{1000}{3}\Omega$$

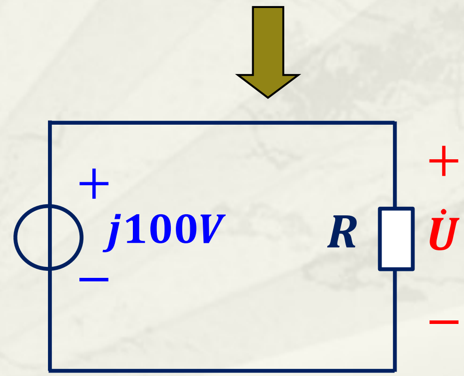
$$\dot{U}_1 = \frac{\frac{R\cdot jX_L}{R+jX_L}}{-jX_C + \frac{R\cdot jX_L}{R+jX_L}}\dot{U}_2 = \frac{RX_L}{RX_L - RX_C - jX_L^2}\dot{U}_2$$

$$= 2\sqrt{2}\angle 45^\circ\ \dot{U}_2$$

$$\varphi = 45^\circ$$

例8 如图，$i(t)=\sqrt{2}cos\omega tA$，求$\omega$ 为何值时，$u(t)$与电阻R（R不等于0）无关，并求此时的$u(t)$。





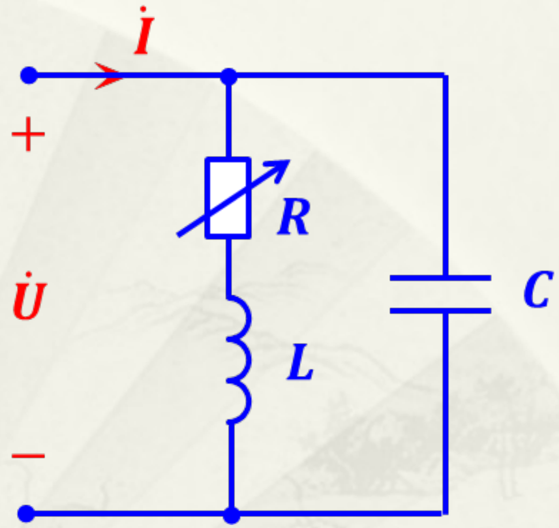
解：

$$j\omega+\frac{10^4}{j\omega}=0 \qquad \omega=100rad/s$$

$$\dot{U}=j100=100\angle 90^\circ \ V$$

$$u(t)=100\sqrt{2}\cos(100t+90^\circ)\ V$$

例9 图示电路。改变R，要求电流I不变。求L、C、ω应满足何种关系？



解： 当$R=0$时： $\dot{I}=j(\omega C-\frac{1}{\omega L})\dot{U}$

当$R=\infty$时： $\dot{I}=j\omega C\dot{U}$

依题意，有 $\left|\omega C-\frac{1}{\omega L}\right|=\omega C$

$$\omega C-\frac{1}{\omega L}=\omega C \quad \text{（无解）}$$

$$\frac{1}{\omega L}-\omega C=\omega C \qquad \omega=\sqrt{\frac{1}{2LC}}$$