离散数学

西北工业大学

2023年4月17日星期一

Lecture7 Function

7.0 内容提要

1. What is Function
2. Some Specials
3. Composition
4. Inverse

7.1 本章学习要求

重点掌握 → 一般掌握 → 了解

1 重点掌握

1 函数的概念
2 单射、满射和双射函数的概念
3 函数的复合运算和逆运算

2 一般掌握

1 单射、满射和双射函数的证明
2 置换的定义

3 了解

1 置换的计算

7.2 Function

函数也叫映射、变换或对应。

函数是数学的一个基本概念。这里将高等数学中连续函数的概念推广到对离散量的讨论，即将函数看作是一种特殊的二元关系。

函数的概念在日常生活和计算机科学中非常重要。

如各种高级程序语言中使用了大量的函数。实际上，计算机的任何输出都可看成是某些输入的函数。

7.2.1 Definition

定义7.2.1 设f是集合A到B的关系，如果对每个x∈A，都存在惟一的y∈B，使得<x, y>∈f，则称关系f为A到B的函数(Function)(或映射(Mapping)、变换(Transform))，记为f:A→B。

A为函数f的定义域，记为domf=A；

f(A)为函数f的值域，记为ranf。

函数定义的示意图见图7.2.1。

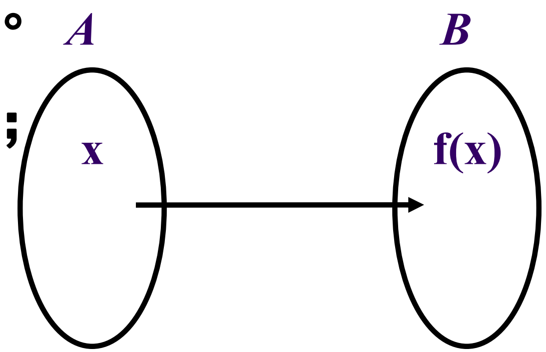


图7.2.1

结论

（1）$\langle x,y\rangle \in f \Leftrightarrow y=f(x)$；

（2）$\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x,z\rangle \in f \Rightarrow y=z$；

（3）$|f|=|A|$；

（4）f(x)表示一个变值，f代表一个集合，因此$f \neq f(x)$。

如果关系f具备下列两种情况之一，那么f就不是函数：

（1）存在元素$a\in A$，在B中没有象；

（2）存在元素$a\in A$，有两个及两个以上的象。

例7.2.1

设A={1, 2, 3, 4}, B={a, b, c, d}，试判断下列关系哪些是函数。如果是函数，请写出它的值域。

（1）$f_1=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, d\rangle, \langle 4, c\rangle\}$；

（2）$f_2=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, d\rangle, \langle 4, c\rangle\}$；

（3）$f_3=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, d\rangle, \langle 4, c\rangle\}$；

（4）$f_4=\{\langle 2, b\rangle, \langle 3, d\rangle, \langle 4, c\rangle\}$。

例7.2.2

设P是接受一个整数作为输入并产生一个整数作为输出的计算机程序。令A=B=Z，则由P确定的关系f_p定义如下：

如果$\langle m,n\rangle \in f_p$当且仅当输入m时，由程序P所产生的输出是n。

请判断f_p是否为一函数。

例7.2.2 解

显然，f_p是一个函数。因为，任意一个特殊的输入对应唯一的输出。

可用任意一个可能的输入集合A对应输出集合B而推广到一般情形的程序。所以，通常把**函数看做输入一输出的关系。**

例7.2.3

设A={a,b},B={1,2}，请分别写出A到B的不同关系和不同函数。

解 因为|A|=2,|B|=2，所以|A×B|=|A|×|B|=4，即A×B={<a,1>,<a,2>，<b,1>,<b,2>}，此时从A到B的不同的关系有2^4=16个。

例7.2.3 解（续）

分别如下：

$R_0=\Phi$； $R_1=\{\langle a, 1\rangle\}$，$R_2=\{\langle a, 2\rangle\}$，$R_3=\{\langle b, 1\rangle\}$，

$R_4=\{\langle b, 2\rangle\}$，$R_5=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle\}$，$R_6=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$，

$R_7=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\}$，$R_8=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle\}$，

$R_9=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle\}$，$R_{10}=\{\langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$，

从A到B的不同的函数仅有$2^2=4$个。分别如下：

$f_1=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle\}$，$f_2=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$，

$f_3=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\}$，$f_4=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle\}$。

函数与关系的差别

函数是一种特殊的关系，它与一般关系比较具备如下差别：

1） 从A到B的不同的关系有$2^{|A|\times|B|}$个；但从A到B的不同的函数却仅有$|B|^{|A|}$个。（个数差别）

2） 关系的第一个元素可以相同；函数的第一元素一定是互不相同的。

（集合元素的第一个元素存在差别）

3） 每一个函数的基数都为$|A|$个($|f|=|A|$)，但关系的基数却为从零一直到$|A|\times|B|$。

（集合基数的差别）

7.2.2函数的类型

定义7.2.2 设f是从A到B的函数，

对任意$x_1, x_2 \in A$，如果$x_1 \neq x_2$，有$f(x_1) \neq f(x_2)$，

则称f为从A到B的单射injection，（不同的x对应不同的y）；

如果ranf＝B，则称f为从A到B的满射onto, surjection；

若f是满射且是单射，则称f为从A到B的双射bijection。

若A＝B，则称f为A上的函数；当A上的函数f是双射时，称f为一个变换。

将定义7.2.2的描述数学化为

（1）f:A→B是单射当且仅当对$x_1, x_2 \in A$，若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) \neq f(x_2)$；

（2）f:A→B是满射当且仅当对$y \in B$，一定存在$x \in A$，使得$f(x)=y$；

（3）f:A→B是双射当且仅当f既是单射，又是满射；

（4）f:A→B是变换当且仅当f是双射且A=B。

例7.2.4

确定下列函数的类型。

（1）设A={1, 2, 3, 4, 5}，B={a, b, c, d}。f:A→B定义为：

{<1, a>, <2, c>, <3, b>, <4, a>, <5, d>}；

（2）设A={1, 2, 3}，B={a, b, c, d}。f:A→B定义为：

f={<1, a>, <2, c>, <3, b>}；

（3）设A={1, 2, 3}，B={1, 2, 3}。f:A→B定义为

f={<1, 2>, <2, 3>, <3, 1>}；

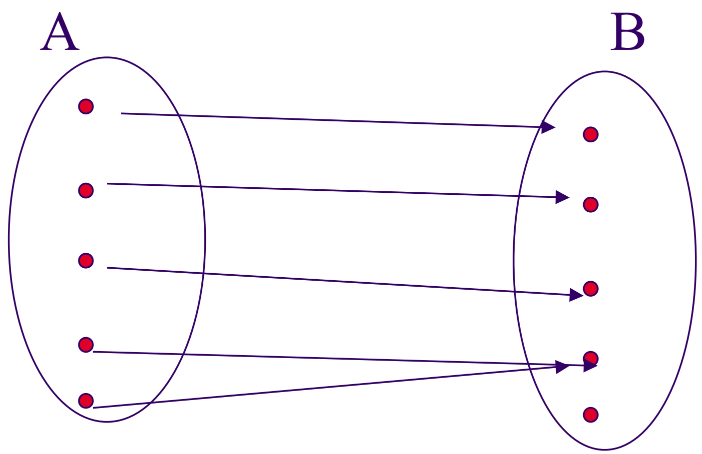
结 论

设A，B为有限集合，f是从A到B的函数，则：

f是单射的必要条件为|A|≤|B|；

f是满射的必要条件为|B|≤|A|；

f是双射的必要条件为|A|=|B|。



定理7.2.1

设A，B是有限集合，且|A|=|B|，f是A到B的函数，则f是单射当且仅当f是满射。

证明必要性($\Rightarrow$)：

设f是单射。因为，f是单射，故|A|=|f(A)|。又因为|f(A)|=|B|，且$f(A)\subseteq B$，得f(A)=B，故f是A到B的满射。

定理7.2.1（续）

充分性(⇐)：

设f是满射。任取$x_1, x_2 \in A$，$x_1 \neq x_2$，假设$f(x_1)=f(x_2)$，由于f是A到B的满射，所以f也是$A-\{x_1\}$到B的满射，故$|A-\{x_1\}| \geqslant |B|$，即$|A|-1 \geqslant |B|$，这与$|A|=|B|$矛盾。因此$f(x_1) \neq f(x_2)$，故f是A到B的单射。

例7.2.5

设$X=\{0, 1, 2, \cdots\}$，$Y=\{1, 1/2, 1/3, \cdots\}$，

$f:X\rightarrow Y$的定义如下：

(1) $f_1=\{\langle 0, 1/2\rangle, \langle 1, 1/3\rangle, \cdots, \langle n, 1/(n+2)\rangle, \cdots\}$

(2) $f_2=\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1/2\rangle, \cdots, \langle n, 1/n\rangle, \cdots\}$

(3) $f_3=\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1/2\rangle, \cdots, \langle n, 1/(n+1)\rangle, \cdots\}$。

试判断它们的类型。

例7.2.6

设A=B=R(实数集)。试判断下列函数的类型。

(1) $f_1=\{\langle x, x^2\rangle \mid x\in R\}$;

(2) $f_2=\{\langle x, x+1\rangle \mid x\in R\}$;

(3) $f_3=\{\langle x, e^x\rangle \mid x\in R\}$;

解 (1) f_1仅是一般函数;

(2) f_2是双射函数;

(3) f_3是单射函数。

小结

1、函数($f:A\rightarrow B$)的定义

(1) f是集合A到B的关系，

(2) 对每个$x\in A$，都存在惟一的$y\in B$，使得$\langle x,y\rangle\in f$。

2、函数与关系的区别与联系

3、函数($f:A\rightarrow B$)的类型

(1) f是单射$\Leftrightarrow$对$x_1,x_2\in A$，若$x_1\neq x_2$，则$f(x_1)\neq f(x_2)$

(2) f是满射$\Leftrightarrow$对$y\in B$，一定存在$x\in B$，使得$f(x)=y$；

(3) f是双射$\Leftrightarrow$ f既是单射，又是满射；

(4) f是变换$\Leftrightarrow$ f是双射且$A=B$。

例7.2.7

典型(自然)映射。设R是集合A上的一个等价关系，

g：A→A/R称为A对商集A/R的典型(自然)映射，

其定义为$g(a)=[a]_R$，$a\in A$.

证明：典型映射是一个满射。

分析：由等价类的定义，对任意

$[a]_R\in A/R, a\in[a]_R$，即任意A/R中的元素都有原象，

所以典型映射是满射。

7.2.3常用函数

定义7.2.3

（1）如果A=B，且对$\forall x \in A$，都有$f(x)=x$，则称f为A上的**恒等函数**，记为I_A。

（2）如果$\exists b \in B$，且对$\forall x \in A$，都有$f(x)=b$，则称f为**常值函数**。

（3）设A是全集$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$的一个子集，则子集A的**特征函数**定义为从U到{0,1}的一个函数，且

$$f_A(u_i)=\begin{cases}1 & u_i \in A \\ 0 & u_i \notin A\end{cases}$$

定义7.2.3（续）

（4）对有理数x，f(x)为大于等于x的最小的整数，则称f(x)为上取整函数(强取整函数)，记为 $f(x)=\lceil x \rceil$；

（5）对有理数x，f(x)为小于等于x的最大的整数，则称f(x)为下取整函数(弱取整函数)，记为 $f(x)=\lfloor x \rfloor$；

（6）如果f(x)是集合A到集合B={0,1}上的函数，则称f(x)为布尔函数。

例7.2.10

设A=B=R（实数集）。试指出下列函数的类型。

（1）$f_1=\{\langle x, x\rangle \mid x\in R\}$；

（2）$f_2=\{\langle x, a\rangle \mid x\in R, a\in R\}$；

（3）$f_3=\{\langle x, \lceil x\rceil \rangle \mid x\in R\}$；

（4）$f_4=\{\langle x, \lfloor x\rfloor \rangle \mid x\in R\}$。

解（1）f_1是恒等函数，（2）f_2是常值函数，

（3）f_3是上取整函数，（4）f_4是下取整函数。

7.2.5 函数的应用

例7.2.11 设$A_n=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$是n个元素的有限集，$B_n=\{b_1 b_2 b_3\ldots b_n | b_i\in\{0,1\}\}$，试建立$P(A_n)$到$B_n$的一个双射。

解 $P(A_n)$到B_n可以按照如下的方式建立关系：

对任意$S\in P(A_n)$，令

$$f(S)=b_1b_2b_3\ldots b_n,$$

其中：

$$b_i=\begin{cases}1, & \text{当}a_i\in S,\\ 0, & \text{当}a_i\notin S,\end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n.$$

例7.2.11(续)

(2) 证明f是双射。

1) 证f是映射。显然，f是$P(A_n)$到B_n的映射。

2) 证f是单射：任取$S_1, S_2 \in P(A_n)$，$S_1 \neq S_2$，

则存在某a_j，

$a_j \in S_1, a_j \notin S_2$或$a_j \in S_2, a_j \notin S_1$。

从而$f(S_1) = b_1b_2b_3 \cdots b_n$中必有$b_j = 1$，

$f(S_2) = c_1c_2c_3 \cdots c_n$必有$c_j = 0$

或 $f(S_1) = b_1b_2b_3 \cdots b_n$中必有$b_j = 0$，

$f(S_2) = c_1c_2c_3 \cdots c_n$必有$c_j = 1$。所以

$f(S_1) \neq f(S_2)$，即f是单射。

例7.2.11(续)

3) 证f是满射。

任取二进制数$b_1b_2...b_n \in B_n$，

建立对应的集合

$S \subseteq A_n$，$S=\{a_i \mid 若b_i=1\}$

(即若$b_i=1$，令$a_i \in S$，否则$a_i \notin S$)，

例如$A_3=\{a_1, a_2, a_3\}$，则有：

$\Phi \mapsto 000$，$\{a_1\} \mapsto 100$，$\{a_2\} \mapsto 010$，
$\{a_3\} \mapsto 001$，$\{a_1, a_2\} \mapsto 110$，$\{a_1, a_3\} \mapsto 101$，
$\{a_2, a_3\} \mapsto 011$，$\{a_1, a_2, a_3\} \mapsto 111$。

例7.2.12

在异步传输模式(ATM)下，**数据按53字节分组，每组称为一个信元。**以速率每秒500千bit传输数据的连接上一分钟能传输多少个ATM信元。

解 因为一分钟能够传输的字节数为

$$\frac{500000\times 60}{8}=3750000,$$

所以一分钟能传输的信元数为

$$\left\lfloor \frac{3750000}{53} \right\rfloor = 70754$$

7.3 函数的运算

7.3.1函数的复合运算

定义7.3.1 考虑f：A→B，g：B→C是两个函数，则f与g的复合运算

$$f \circ g = \{\langle x, z\rangle \mid x \in A \text{且} z \in C \text{且} (\exists y)(y \in B \text{且} x f y \text{且} y g z)\}$$

是从A到C的函数，记为fog：A→C ，称为函数f与g的复合函数。

例7.3.1

设A={1, 2, 3, 4, 5}, B={a, b, c, d}, C={1, 2, 3, 4, 5}, 函数f:A→B, g:B→C定义如下:

f={<1, a>, <2, a>, <3, d>, <4, c>, <5, b>};

g={<a, 1>, <b, 3>, <c, 5>, <d, 2>}。

求fog。

解 fog={<1, 1>, <2, 1>, <3, 2>, <4, 5>, <5, 3>}

例7.3.2

设$f:R\rightarrow R, g:R\rightarrow R, h:R\rightarrow R$，满足$f(x)=2x, g(x)=(x+1)^2, h(x)=x/2$。计算：

（1）$f\circ g$，$g\circ f$；

（2）$f\circ g\circ h$，$f\circ(g\circ h)$；

（3）$f\circ h$，$h\circ f$。

解 （1）$f\circ g(x)=g(f(x))=g(2x)=(2x+1)^2$；

$g\circ f(x)=f(g(x))=f((x+1)^2)=2(x+1)^2$；

例7.3.2 （续）

（2） $(f\circ g\circ h)(x)=h((f\circ g)(x))=h(g(f(x)))$

$=h(g(2x))=h((2x+1)^2)=(2x+1)^2/2$；

$(f\circ(g\circ h))(x)=(g\circ h)(f(x))$

$(g\circ h)(x)=(x+1)^2/2$ ， $f(x)=2x$,

$(g\circ h)(f(x))=(2x+1)^2/2$ ；

（3） $f\circ h(x)=h(f(x))=h(2x)=x$；

$h\circ f(x)=f(h(x))=f(x/2)=x$；

函数的复合不满足交换律，但满足结合律。

定理7.3.1

设f和g分别是A到B和从B到C的函数，则：

如f,g是满射，则fog也是从A到C满射；

如f,g是单射，则fog也是从A到C单射；

如f,g是双射，则fog也是从A到C双射。

定理7.3.1

证明：如f, g是满射，则fog也是从A到C满射；

证明：1） 对$\forall c \in C$，

由于g是满射，所以存在$b \in B$，使得$g(b)=c$。

对于$b \in B$，

又因f是满射，所以存在$a \in A$，使得$f(a)=b$。

从而有$f\circ g(a)=g(f(a))=g(b)=c$。

即存在$a \in A$，使得：$f\circ g(a)=c$，

所以fog是满射。

定理7.3.1(续)

证明：如f,g是单射，则fog也是从A到C单射；

2) 对任意$a_1, a_2 \in A$，$a_1 \neq a_2$，

由于f是单射，所以

$f(a_1) \neq f(a_2)$。令$b_1 = f(a_1)$，$b_2 = f(a_2)$，

由于g是单射，所以

$g(b_1) \neq g(b_2)$，即$g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$。

从而有$fog(a_1) \neq fog(a_2)$，

所以fog是单射。

3)是1)、2)的直接结果。■

定理7.3.2

设f和g分别是从A到B和从B到C的函数，则

（1）如fog是从A到C的满射，则g是从B到C的满射；

（2）如fog是从A到C的单射，则f是从A到B的单射；

（3）如fog是从A到C的双射，则g是从B到C的满射，f是从A到B的单射。

7.3.2 函数的逆运算

定义7.3.2设$f:A\rightarrow B$的函数。如果

$$f^{-1}=\{\langle y,x\rangle \mid x\in A\land y\in B\land \langle x,y\rangle\in f\}$$

是从B到A的函数，则称f^{-1}：$B\rightarrow A$的反函数(或逆函数)。

由定义7.3.2可以看出，一个函数的逆运算也是函数。

即反函数f^{-1}存在当且仅当f是双射。

例7.3.3

试求出下列函数的逆函数。

（1）设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,3\}$。$f_1: A \to B$定义为
$f_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$；

（2）$f_2=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,1/2\rangle,\cdots,\langle n,1/(n+1)\rangle,\cdots\}$

（3）$f_3=\{\langle x,x+1\rangle \mid x\in R\}$。

定理7.3.3

设f是A到B的双射函数，则：

$f \circ f^{-1} = I_A = \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$；

$f^{-1} \circ f = I_B = \{\langle b, b\rangle \mid b \in B\}$；

$I_A \circ f = f \circ I_B = f$。

定理7.3.4

若f是A到B的双射，则f的逆函数f^{-1}也是B到A的双射。

证明（1）证明f^{-1}是满射。

因为$\mathrm{ran}f^{-1}=\mathrm{dom}f=A$，所以$f^{-1}$是B到A的满射。

定理7.3.4 证明（续）

（2）f^{-1}是单射。

对任意$b_1, b_2 \in B$，$b_1 \neq b_2$，

假设$f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2)$，即存在$a \in A$，使得

$\langle b_1, a\rangle \in f^{-1}, \langle b_2, a\rangle \in f^{-1}$，即

$\langle a, b_1\rangle \in f, \langle a, b_2\rangle \in f$，

这与f是函数矛盾，

因此$f^{-1}(b_1) \neq f^{-1}(b_2)$，

故f^{-1}是B到A的单射。

综上，f^{-1}是B到A的双射。

7.3.4函数运算的应用

例7.3.4 假设f是的定义如下表。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
D	E	S	T	I	N	Y	A	B	C	F	G	H
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
J	K	L	M	O	P	Q	R	U	V	W	X	Z

即f(A)=D, f(B)=E, f(C)=S, …等等。

试找出给定密文“QAIQORSFDOOBUIPQKJBYAQ”对应的明文。

7.3.4函数运算的应用

解由表7.3.1知，f^{-1}如如下表所示。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
H	I	J	A	B	K	L	M	E	N	O	P	Q
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
F	R	S	T	U	C	D	V	W	X	Y	G	Z

将密文“QAIQORSFDOOBUIPQKJBYAQ”中的每一个字母在f^{-1}中找出其对应的象就可得出对应的明文：“THETRUCKARRIVESTONIGHT”。

例7.3.5

设按顺序排列的13张红心纸牌，

A2345678910JQK

经过1次洗牌后牌的顺序变为

38KA410QJ57629

再经两次同样方式的洗牌后牌的顺序是怎样的？

例7.3.5 解

对应结果见下表。

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
f	3	8	K	A	4	10	Q	J	5	7	6	2	9
fof	K	J	9	3	A	7	2	6	4	Q	10	8	5
fofof	9	6	5	K	3	Q	8	10	A	2	7	J	4

7.4置换函数

当A是有限集合时，这种情况具有特殊重要性。有限集合上的双射函数在数学、计算机科学和物理学中有着非常广泛的应用。

7.4.1基本概念

定义7.4.1 设$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是有限集合。从A到A的双射函数称为A上的置换或排列(Permutation)，记为$P:A\to A$，n称为置换的阶(Order)。

n阶置换P:A→A常表示为:

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ P(a_1) & P(a_2) & P(a_3) & \cdots & P(a_n) \end{pmatrix}$$

第一行是集合A的元素按顺序列出,

第二行是A中元素对应的函数值。

显然序列$P(a_1), P(a_2), \cdots, P(a_n)$恰好是A中元素的重排,恰好对应N的一个排列。

7.4.3置换函数的应用

例7.4.3 等边三角形如图7.4.1所示。求经过旋转和翻转能使之重合的所有置换函数。

解 能使三角形重合的置换有6个：

（1）三角形绕中心A反时针旋转120°、240°和360°对应的置换分别为:

$$P_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\qquad P_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\qquad P_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

（2）绕中线1A，2A，3A翻转对应的置换分别为：

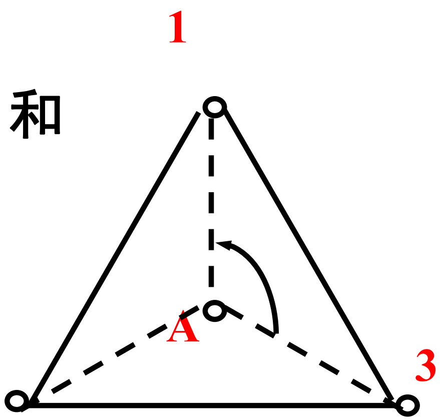


图7.4.1

$$P_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\qquad P_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\qquad P_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

7.5 本章总结

（1）函数的概念。注意函数与关系的区别和联系；

（2）单射、满射和双射函数的概念，数学描述形式；

（3）特殊函数的基本概念；

（4）函数的复合运算，逆运算及运算性质。

Thank You !