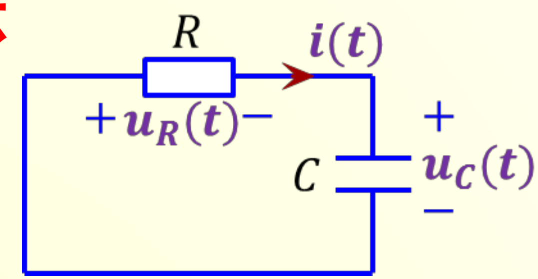
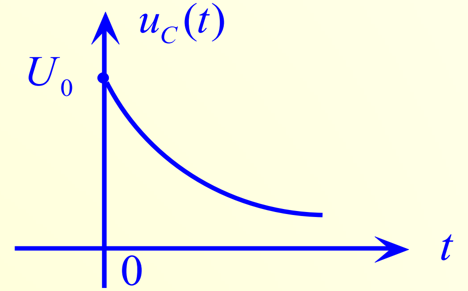
12.6 一阶电路经典分析法



一. RC电路

零输入响应:仅由初始条件激励所产生的响应

初始条件: $u_C(0^-) = U_0 \neq 0$

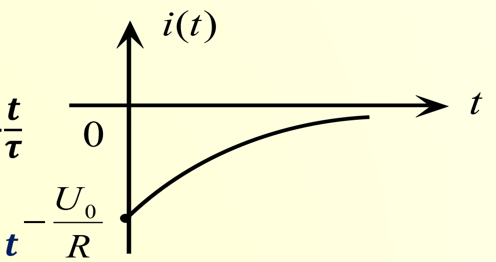


$$Ri(t) + u_C(t) = 0$$

$t > 0$时

$$\begin{cases} RC\dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0 \\ u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 \end{cases}$$

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

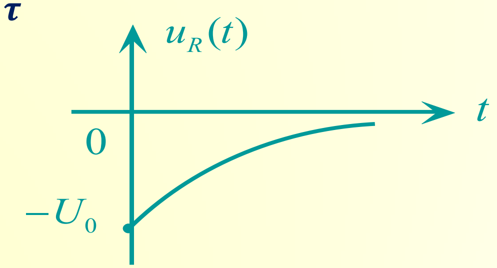


$$i(t) = C\frac{du_c}{dt} = -\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$RCp + 1 = 0$特征方程

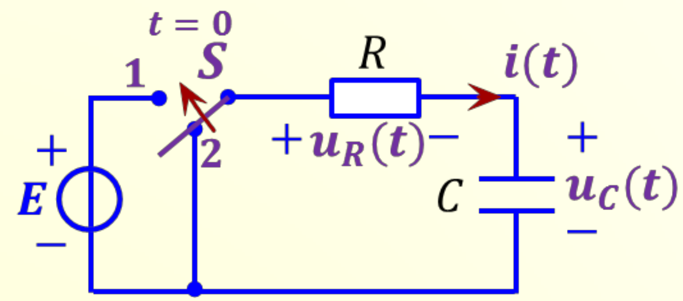
$$u_R(t) = Ri(t) = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$$



$\tau = RC$, RC电路的时间常数

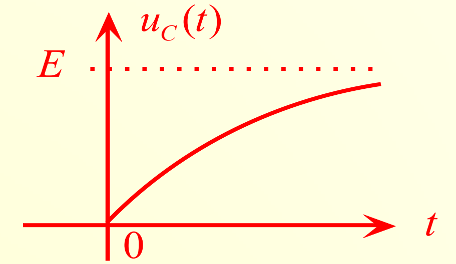
零状态响应：



初始条件为零的电路称为零状态电路。
仅由外加激励在零状态电路中产生的响应。

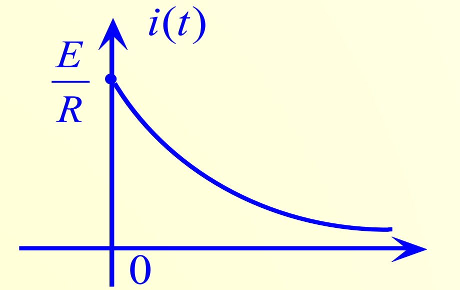
$t<0$时S在“2”，电路稳定，此时 $u_C(0^-)=0$

$t>0$时：
$$\begin{cases} RC\dfrac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=E \\ u_C(0^+)=u_C(0^-)=0 \end{cases}$$

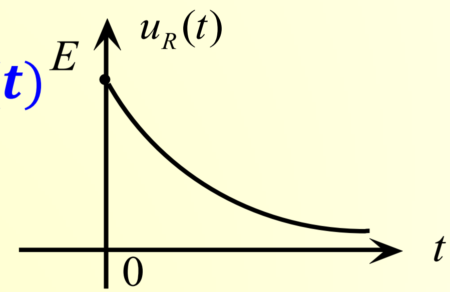


$RCp+1=0$ 特征方程

特征根 $p=-\dfrac{1}{RC}=-\dfrac{1}{\tau}$ $u_C(t)=E(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$

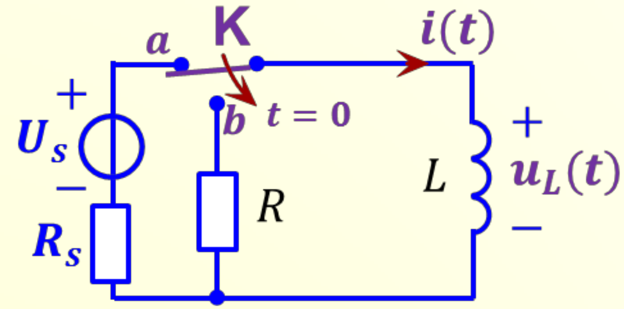


$$i(t)=C\frac{du_C}{dt}=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)$$



$$u_R(t)=E-u_C(t)=Ee^{-\frac{t}{\tau}}U(t)$$

二. RL电路



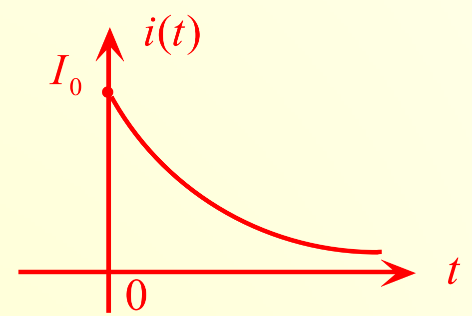
零输入响应

$t < 0$时K在a，电路稳定：$i(0^-) = I_0 \neq 0$

$t = 0$时K由a打到b，换路：

$t > 0$时K在b：

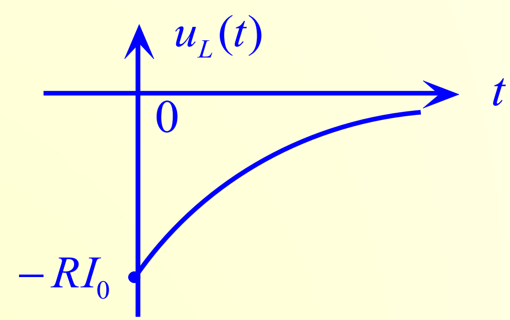
$$\begin{cases} L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \\ i(0^+) = i(0^-) = I_0 \end{cases} \qquad i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



特征方程 $Lp + R = 0$

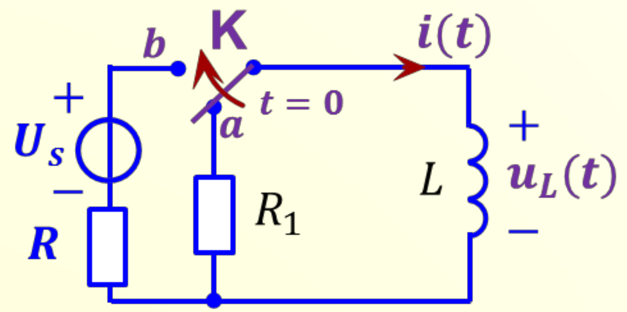
特征根 $p = -\dfrac{R}{L} = -\dfrac{1}{\tau}$

$\tau = \dfrac{L}{R}$ RL电路的时间常数



$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} U(t)$$

RL零状态响应



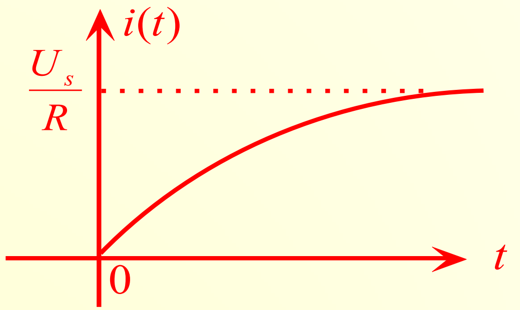
$t<0$时K在a，电路稳定：$i(0^-)=0$

$t=0$时K由a打到b，换路：

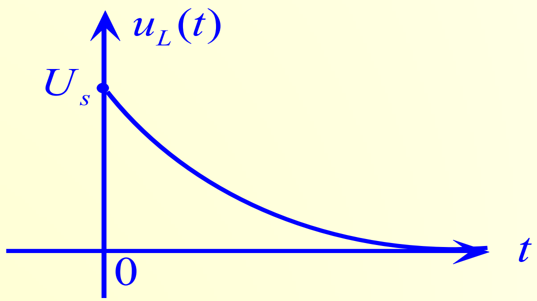
$t>0$时K在b：

$$\begin{cases} L\dfrac{di(t)}{dt}+Ri(t)=U_s \\ i(0^+)=i(0^-)=0 \end{cases}$$

$$i(t)=\frac{U_s}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



$$\tau=\frac{L}{R}$$ RL电路的时间常数



$$u_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}=U_s e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)$$

三. 系统的全响应

由非零初始状态和外加激励共同作用在电路中产生的响应。

全响应=零输入响应+零状态响应

例：已知某线性时不变系统，当激励$f(t)=U(t)$，初始状态$x_1(0^-)=1$，$x_2(0^-)=2$时，响应$y_1(t)=6e^{-2t}-5e^{-3t}$；当激励$f(t)=3U(t)$，初始状态保持不变时，响应$y_2(t)=8e^{-2t}-7e^{-3t}$. 求：（1）激励$f(t)=0$，初始状态$x_1(0^-)=1$，$x_2(0^-)=2$时的响应$y_3(t)=?$（2）激励$f(t)=2U(t)$，初始状态为零时的响应$y_4(t)=?$

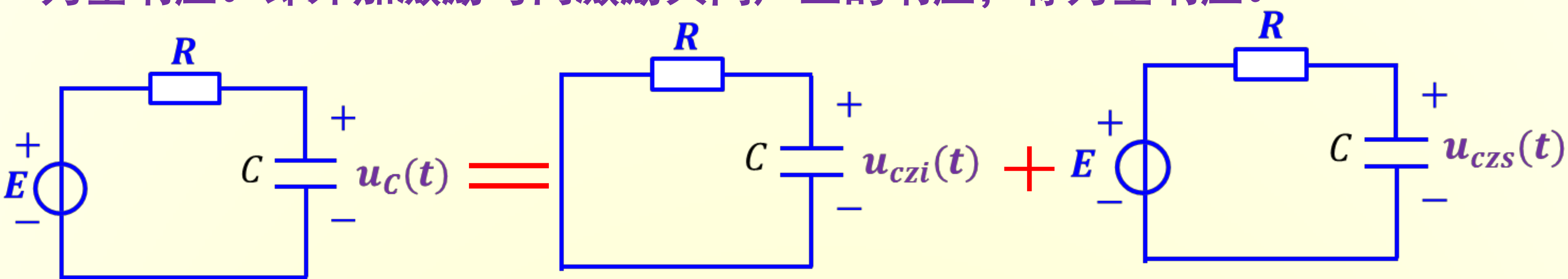
解： $y_1(t)=y_x(t)+y_f(t)=6e^{-2t}-5e^{-3t}$ $y_x(t)=5e^{-2t}-4e^{-3t}$

$y_2(t)=y_x(t)+3y_f(t)=8e^{-2t}-7e^{-3t}$ $y_f(t)=e^{-2t}-e^{-3t}$

$y_3(t)=y_x(t)=5e^{-2t}-4e^{-3t}$ $y_4(t)=2y_f(t)=2e^{-2t}-2e^{-3t}$

12.7 一阶电路全响应的三要素法

若电路中既有外加激励且初始条件（即内激励）也不为零，则电路中产生的响应称为全响应。即外加激励与内激励共同产生的响应，称为全响应。



(a)　　(b)　　(c)

$u_{czi}(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$　　$u_{czs} = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

初始条件 $u_C(0^-) = U_0 \neq 0$

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = E + (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}} = u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$u_C(\infty) = E$ 即为电容的稳态电压　　$\tau = RC$，RC电路的时间常数

$u_C(0^+) = U_0$电容的初始值　　三要素

对于一阶电路中的任何变量$y(t)$

$$y(t) = y(\infty) + [y(0^+) - y(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

$y(\infty)$为稳态值，由$t > 0$时的稳态电路求解；

$y(0^+)$为初始值，可根据$t = 0^+$等效电路求得；

$\tau = RC$或$\tau = \frac{L}{R}$为电路的时间常数 .

R为$t > 0$时从动态元件两端看进去的戴维南等效电阻

$\boxed{\text{三要素法}}$

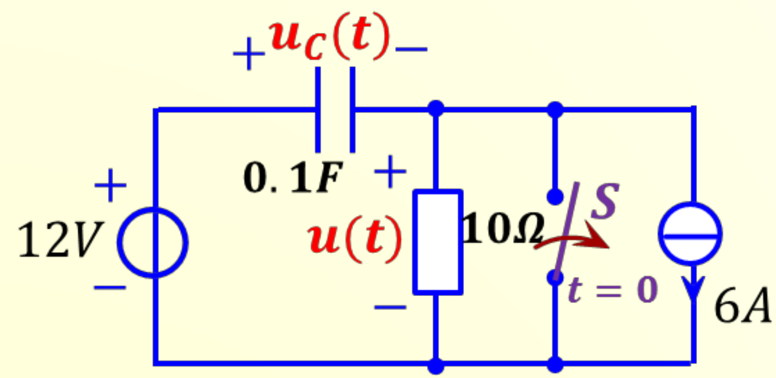
（1）三要素公式只适应于一阶电路；

（2）只适用于直流激励或阶跃激励；

（3）不论那个变量，只要是同一电路的，其时间常数相同；

（4）三要素公式不仅能求零状态响应，也能求零输入响应及全响应。

例1 图示电路，已知$t<0$时开关S闭合，电路已达稳态。$t=0$时刻打开S，求$t>0$时的响应$u_c(t),u(t)$ 。



解：

(1) 初始值 $u_C(0^-)=12V$

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=12V$$

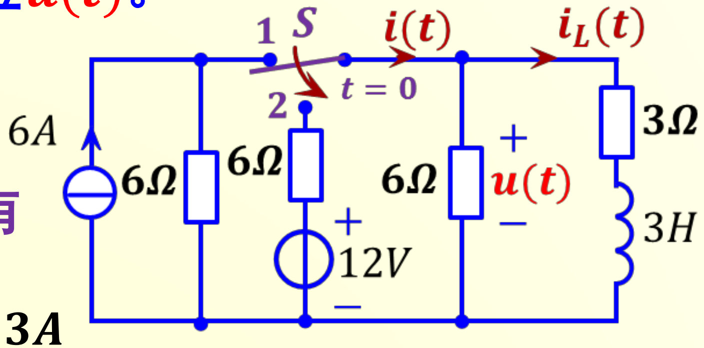
(2) 稳态值 $u_C(\infty)=12+10\times6=72V$

(3) 时间常数 $\tau=RC=1s$

$$u_c(t)=[72+(12-72)e^{-t}]U(t)=[72-60e^{-t}]U(t),V$$

$$u(t)=-u_c(t)+12=(-60+60e^{-t})U(t),V$$

例2 图示电路，已知$t<0$时开关S在“1”的位置，电路已达稳态。t=0时刻将开关S扳到“2”的位置。求t>0时的响应$u(t)$。



(1) 初始值

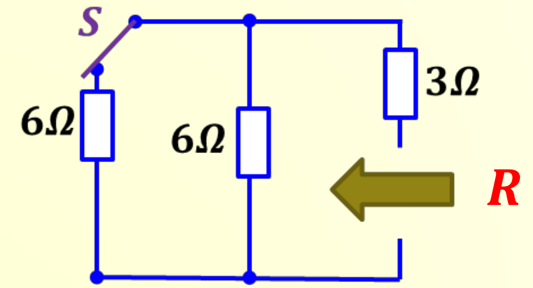
$t<0$时，电路已达稳态，电感相当于短路，有

$$i(0^-)=\frac{6}{6+2}\times 6=\frac{9}{2}A \qquad i_L(0^-)=\frac{6}{6+3}i(0^-)=3A$$

$t=0$时： $i_L(0^+)=i_L(0^-)=3A$

(2) 稳态值

$$i(\infty)=\frac{12}{6+2}=\frac{3}{2}A \qquad i_L(\infty)=\frac{6}{6+3}i(\infty)=1A$$



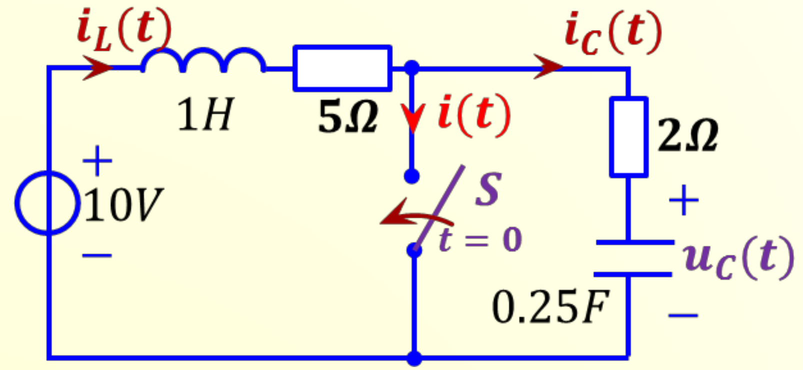
(3) 时间常数

$$R=3+\frac{6\times 6}{6+6}=6\Omega \qquad \tau=\frac{L}{R}=0.5s$$

$$i_L(t)=1+(3-1)e^{-2t}=\left(1+2e^{-2t}\right)U(t)$$

$$u(t)=3i_L(t)+3\frac{di_L(t)}{dt}=\left(3-6e^{-2t}\right)U(t)$$

例3 图示电路，$t<0$时开关S打开，电路已达稳态。$t=0$时刻将S闭合。求$t>0$时的响应$i(t)$。



$t<0$ 时S打开，电路稳态，C相当于断路，L相当于短路，有

$$i_L(0^-)=0 \qquad u_C(0^-)=10V$$

$t=0$时S闭合，有

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=0 \qquad u_C(0^+)=u_C(0^-)=10V$$

$$i_L(\infty)=\frac{10}{5}=2\ A \qquad u_C(\infty)=0$$

$t>0$时有两个相互独立的回路，时间常数

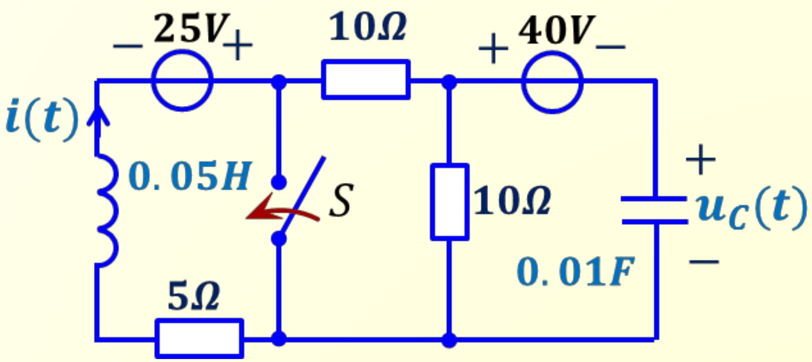
$$\tau_1=\frac{L}{R_1}=\frac{1}{5}s \qquad \tau_2=R_2C=0.5s$$

$$i_L(t)=2+(0-2)e^{-\frac{t}{\tau_1}}=\left(2-2e^{-5t}\right)U(t)$$

$$u_C(t)=0+(10-0)e^{-\frac{t}{\tau_2}}=10e^{-2t}U(t)$$

$$i(t)=i_L(t)-i_C(t)=i_L(t)-0.25\frac{du_C(t)}{dt}=\left(2-2e^{-5t}\right)U(t)+5e^{-2t}U(t)$$

例4 如图，t<0时电路稳定。t=0时闭合S。求t>0时的$u_c(t)$ 和$i(t)$ 。



（1）求初始值

$$i(0^-)=\frac{25}{5+10+10}=1A$$

$$u_C=-40+10i(0^-)=-30\ V$$

$$i(0^+)=i(0^-)=1\ A$$

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=-30\ V$$

（2）求稳态值

$$i(\infty)=\frac{25}{5}=5A \qquad u_C(\infty)=-40V$$

（3）求时间常数

$$\tau_1=\frac{L}{R}=0.01s$$

$$\tau_2=RC=(10\ //10)C=0.05s$$

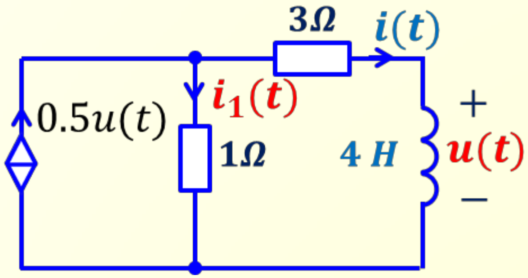
$$i(t)=5-(5-1)e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

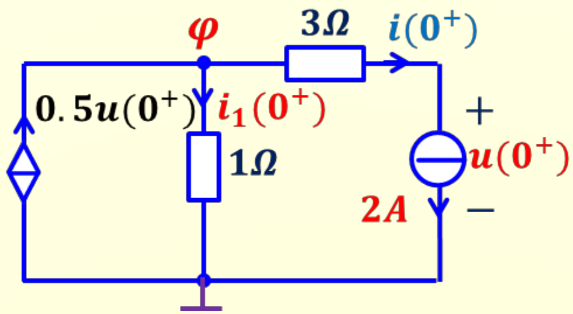
$$=\left(5-4e^{-100t}\right)U(t)\ \ A$$

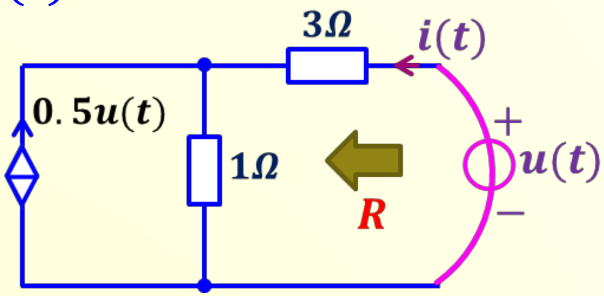
$$u_c(t)=-40-(-40+30)e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

$$=\left(-40+10e^{-20t}\right)U(t)$$

例5 图示电路，$i(0^-)=2A$，求电压$u(t)$ ，电流$i_1(t)$ 。







$i(0^+)=i(0^-)=2A$

$u(0^+)=-16V$

$i_1(0^+)=-10A$

$$\varphi=\frac{0.5u(0^+)-i(0^+)}{1}$$

$$u(0^+)=\varphi-3i(0^+)$$

$$u(t)=3i(t)+[0.5u(t)+i(t)]\times 1$$

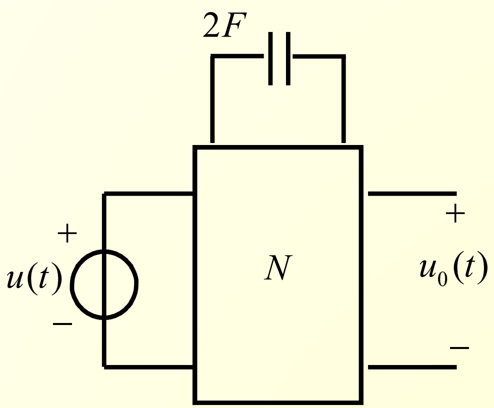
$$R=\frac{u(t)}{i(t)}=8\Omega$$

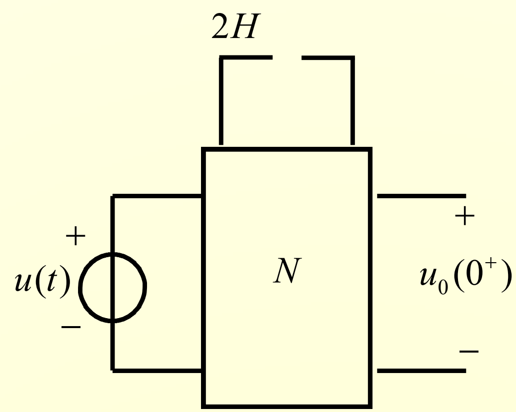
$t>0$稳态时，L短路，故

$u(\infty)=0$ $i_1(\infty)=0$ $\tau=\dfrac{L}{R}=0.5s$

$u(t)=-16e^{-2t}U(t)\ V$ $i_1(t)=-10e^{-2t}U(t)\ A$

习题12-11 N内部只含有直流电源和电阻，零状态响应 $u_0(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}e^{-0.25t}\right)U(t)V$ **把2F电容换成2H的电感，求** $u_0(t)$



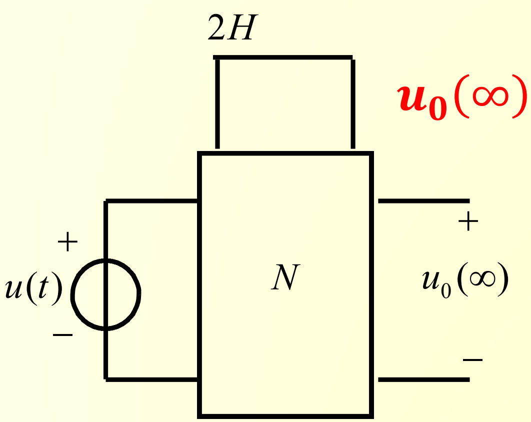


接电感时的初始值等于接电容时的稳态值

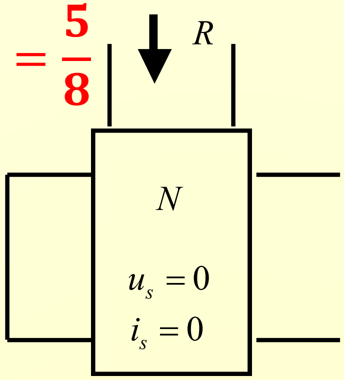
$$u_0(0^+)=\frac{1}{2}$$

$$\tau=RC=4, R=2\Omega$$

$$\tau=\frac{L}{R}=1s$$



$$u_0(\infty)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$



$$u_0(t)=\left[\frac{5}{8}-\frac{1}{8}e^{-t}\right]U(t)$$

接电感时的稳态值等于接电容时的初始值

12.8　一阶电路冲激响应

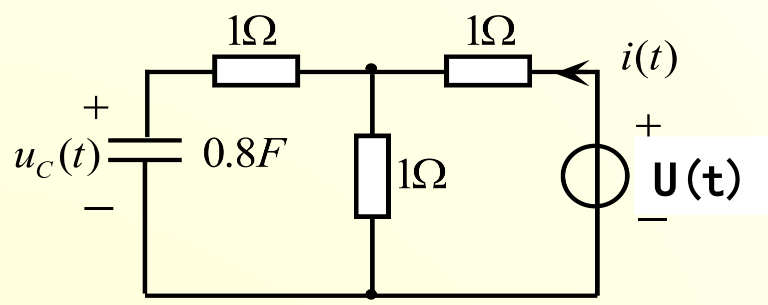
冲激响应：激励为冲激信号时电路的零状态响应。

求法：（1）阶跃响应法；

（2）等效初值法；

（3）系数平衡法。

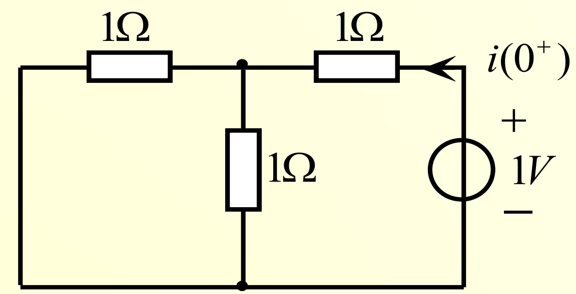
一、阶跃响应法：



$U(t) \to g(t)$ $\quad\quad$ $\delta(t) \to h(t)$

$$\delta(t) = \frac{dU(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

例1　图示电路，求冲激响应$i(t)$。



（1）当阶跃信号作用时，三要素法

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad i(0^+) = \frac{2}{3}A \quad i(\infty) = \frac{1}{2}A$$

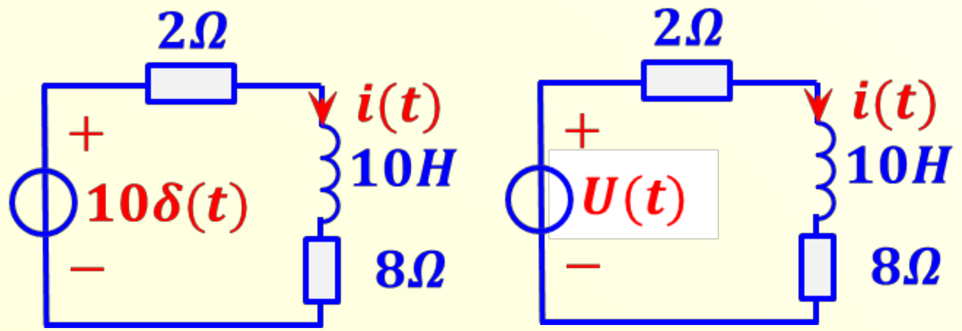
$$\tau = RC = 1.2s$$

$$g(t) = i(t) = \left[0.5 + \left(\frac{2}{3} - 0.5\right)e^{-\frac{t}{1.2}}\right]U(t)A$$

（2）当冲激信号作用时，有

$$i(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \frac{2}{3}\delta(t) - \frac{5}{36}e^{-\frac{t}{1.2}}U(t),\mathrm{A}$$

例2：图示电路，求$i(t)$ 。



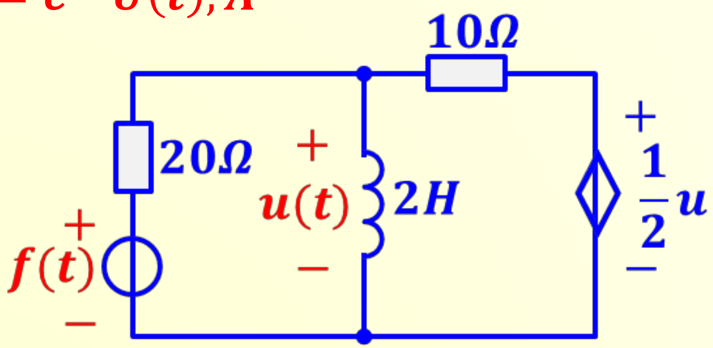
解：当激励为$U(t)$时

$$i(t) = 0.1(1 - e^{-t})U(t), A = g(t)$$

当激励为$10\delta(t)$时

$$i(t) = 10h(t) = 10\frac{dg(t)}{dt} = e^{-t}U(t), A$$

例3：图示电路，求单位冲激响应$u(t)$。



解：当$f(t) = U(t)$时，单位阶跃响应为

$$u(t) = \frac{1}{2}e^{-5t}U(t), V$$

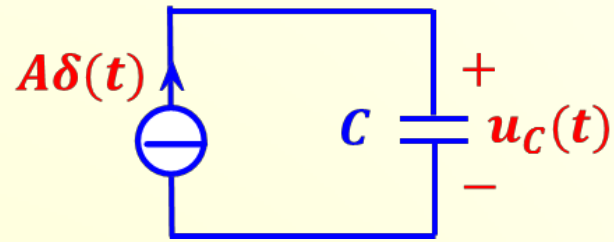
所以，当$f(t) = \delta(t)$时，单位冲激响应为

$$u(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{5}{2}e^{-5t}U(t), V$$

二、等效初始值法

1、单个元件等效初值：

(1) $u_c(0^-) = 0$ $\qquad C\dfrac{du_c(t)}{dt} = A\delta(t)$

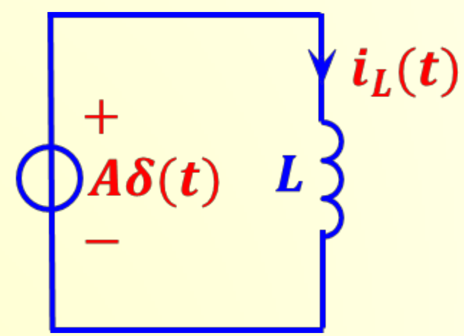


$$\int_{0^-}^{0^+}\left[C\frac{du_c(t)}{dt}\right]dt = \int_{0^-}^{0^+} A\delta(t)dt \qquad Cu_c(0^+) - Cu_c(0^-) = A$$

等效初始值：$u_c(0^+) = \dfrac{A}{C}$

(2) $i_L(0^-) = 0$ $\qquad L\dfrac{di_L(t)}{dt} = A\delta(t)$

$$\int_{0^-}^{0^+}\left[L\frac{di_L(t)}{dt}\right]dt = \int_{0^-}^{0^+} A\delta(t)dt$$



$$Li_L(0^+) - Li_L(0^-) = A$$

等效初始值：$i_L(0^+) = \dfrac{A}{L}$

2、冲激作用下等效初始值求法：

（1）在t=0时将电容短路，求其冲激电流 $i_c(t)=A\delta(t)$

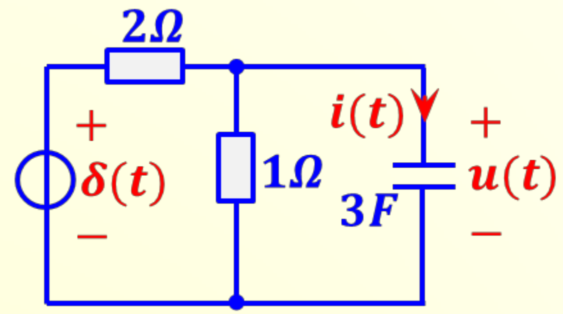
则 $u_c(0^+)=\dfrac{A}{C}$

（2）在t=0时将电感开路，求其冲激电压 $u_L(t)=A\delta(t)$

则 $i_L(0^+)=\dfrac{A}{L}$

3、用“三要素”法求冲激响应

例4：图示电路，求u和i。



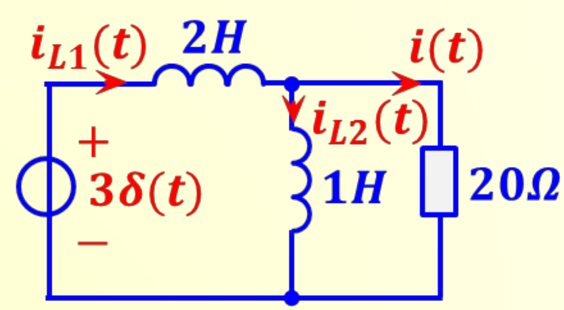
解：在$t=0$时将电容短路，有 $i=0.5\delta(t)$

$$u(0^+)=\frac{A}{C}=\frac{1}{6}\ V$$

$$u(t)=\frac{1}{6}e^{-\frac{t}{2}}U(t),V \qquad i(t)=\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}}U(t),V$$

例5 图示电路，$i_{L1}(0^-)=i_{L2}(0^-)=0$，求$i_{L1}(0^+)$、$i_{L2}(0^+)$和$i(0^+)$。

解： 在t=0时将电感开路，有



$$u_{L1}(t)=3\delta(t) \qquad u_{L2}(t)=0$$

则 $i_{L1}(0^+)=B/L=3/2A$

$$i_{L2}(0^+)=0 \qquad i(0^+)=3/2A$$

三、系数平衡法

例6 已知描述某系统的微分方程如下，求$f(t)=\delta(t)$时的零状态响应$h(t)$。

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{1}{2}\frac{df(t)}{dt}+2f(t)$$

解：系统自然频率为 $p_1=-1, p_2=-2$

单位冲激响应形式与零输入响应形式相同，即

$$h(t)=\left(K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}\right)U(t)$$

$$h'(t)=\left(-K_1e^{-t}-2K_2e^{-2t}\right)U(t)+(K_1+K_2)\delta(t)$$

$$h''(t)=\left(K_1e^{-t}+4K_2e^{-2t}\right)U(t)+(-K_1-2K_2)\delta(t)+(K_1+K_2)\delta'(t)$$

以$h(t)=y(t)$，$f(t)=\delta(t)$代入方程:

$$h''(t)+3h'(t)+2h(t)=\frac{1}{2}\delta'(t)+2\delta(t)$$

$$K_1+K_2=\frac{1}{2}$$

$$2K_1+K_2=2$$

$$K_1=\frac{3}{2}, K_2=-1$$

$$h(t)=\left(\frac{3}{2}e^{-t}-e^{-2t}\right)U(t)$$

12.9 一阶电路正弦响应

正弦响应：激励为正弦信号时电路的响应。

正弦激励下一阶电路的三要素公式:

$$y(t)=y_{稳态}(t)+[y(0^{+})-y_{稳态}(0^{-})]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

主要内容

1. 常用信号及其特性

2. 换路定律（电感、电容），磁链守恒及电荷守恒定律

3. 电路初始值的求法：

（1）根据换路前的电路，求出$i_L(0^-)$及$u_C(0^-)$；

（2）应用换路定律或电荷守恒磁链守恒定律求$i_L(0^+)$及$u_C(0^+)$；

（3）画出$t=0^+$时的等效电路；

（4）根据$t=0^+$时的等效电路，求出电路中待求的电压和电流的初始值。

4.一阶电路的零输入响应、零状态响应、全响应的概念

5. 求解一阶电路全响应、阶跃响应的三要素方法

$y(0^+)$ $y(\infty)$ τ $y(t)=y(\infty)+[y(0^+)-y(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}t}$

6. 了解一阶电路的正弦响应、冲激响应的求法

重点与难点

1 换路定律的内容及适用的条件。

2 电路初始值的求解方法。

3 用三要素法求解一阶电路的时域分析方法。

。

4 $\tau = RC, \tau = \frac{L}{R}$的求解方法。