EQUATION DE SCHRÖNGER :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$\hookrightarrow V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \text{ ou } x>L \\ -V_0 & \text{si } 0<x<L. \end{cases}$ (l'énergie est supposé positive $E>0$)

ZONE 1 et 3 :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k_1^2\psi(x) \quad \text{avec } k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

SOLUTION GÉNÉRAL : $\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$

$\psi_3(x) = F e^{ik_1x}$

ZONE 2 :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k_2^2\psi(x) \quad \text{avec } k_2 = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$$

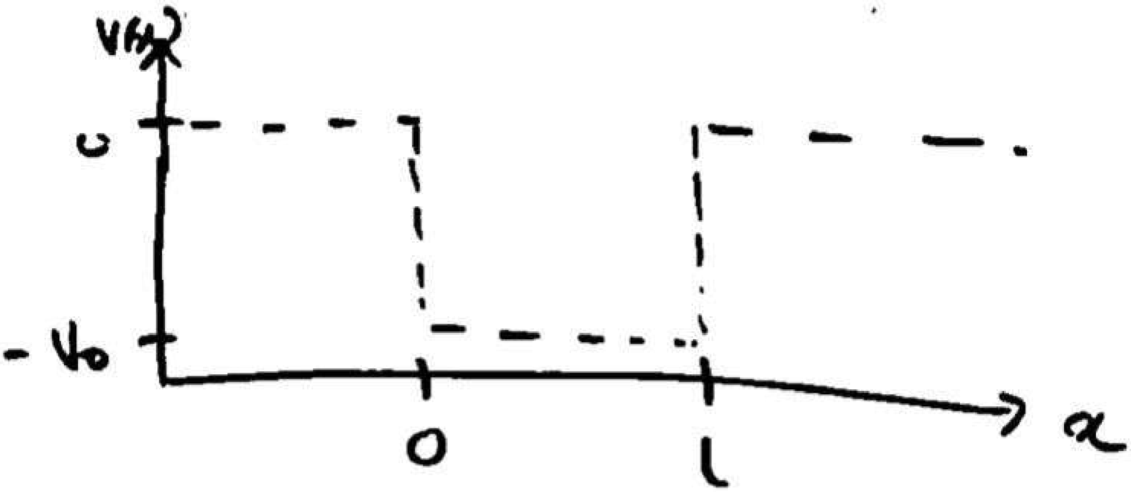
SOLUTION GÉNÉRAL : $\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$.

avec A : amplitude incidente qu'on fixera à 1

B : amplitude réflechie

C, D : amplitudes à l'intérieur du puits.

F : amplitude transmise.



CONDITION DE CONTINUITÉ :

=> pour $x=0$, • $\psi_1(0)=\psi_2(0)$ (1)

<=> $A+B=C+D$.

• $\psi_1'(0)=\psi_2'(0)$ (2)

<=> $ik_1(A-B)=ik_2(C-D)$.

=> pour $x=L$, • $\psi_2(L)=\psi_3(L)$ (3)

<=> $Ce^{ik_2L}+De^{-ik_2L}=Fe^{ik_1L}$

• $\psi_2'(L)=\psi_3'(L)$ (4)

<=> $ik_2(Ce^{ik_2L}-De^{-ik_2L})=ik_1Fe^{ik_1L}$.

RÉSOLUTION :

• (2) / ik_2 : $\frac{k_1}{k_2}(A-B)=C-D$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=C+D \ (i) \\ \frac{k_1}{k_2}(A-B)=C-D \ (ii) \end{cases} \underset{(ii)=(ii)-(i)}{\overset{(i)=(i)+(ii)}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} C=\left[\frac{A+B+\frac{k_1}{k_2}(A-B)}{2}\right] \\ D=\left[\frac{A+B-\frac{k_1}{k_2}(A-B)}{2}\right] \end{cases} (5$$

or $A=1$ donc

$$\begin{cases} C=\frac{1}{2}\left[(1+B)+\frac{k_1}{k_2}(1-B)\right] \\ D=\frac{1}{2}\left[(1+B)-\frac{k_1}{k_2}(1-B)\right] \end{cases}$$

et $e^{ik_2L}+e^{-ik_2L}=2\cos(k_2L)$

$e^{ik_2L}-e^{-ik_2L}=2i\sin(k_2L)$

• (3) et (4) : on remplace C et D et les exp par cos et sin

$$\begin{cases} (1+B)\cos(k_2L)+i\frac{k_1}{k_2}(1-B)\sin(k_2L)=Fe^{ik_1L} & (5) \\ -k_2(1+B)\sin(k_2L)+ik_1(1-B)\cos(k_2L) & (6) \\ =ik_1Fe^{ik_1L} \end{cases}$$

BIC Velleda

RÉSOLUTION (SUITE) :

$$\frac{(6)}{(5)} : \frac{-k_2(1+B)\sin(k_2L) + i\,k_1(1-B)\cos(k_2L)}{(1+B)\cos(k_2L) + i\,\frac{k_1}{k_2}(1-B)\sin(k_2L)} = ik_1\frac{fe^{ik_1L}}{fe^{ik_1L}}$$

$$\Leftrightarrow -k_2(1+B)\sin(k_2L) + ik_1(1-B)\cos(k_2L) - ik_1\left[(1+B)\cos(k_2L) + \frac{ik_1}{k_2}(1-B)\sin(k_2L)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -k_2(1+B)\sin(k_2L) + ik_1(1-B)\cos(k_2L) - ik_1(1+B)\cos(k_2L) + \frac{k_1^2}{k_2}(1-B)\sin(k_2L) = 0$$

$$\Leftrightarrow -k_2\sin(k_2L) - Bk_2\sin(k_2L) + ik_1\cos(k_2L) - Bik_1\cos(k_2L) - ik_1\cos(k_2L) - Bik_1\cos(k_2L) + \frac{k_1^2}{k_2}\sin(k_2L) - B\frac{k_1^2}{k_2}\sin(k_2L)$$

$$\Leftrightarrow -B\sin(k_2L)\frac{k_2^2+k_1^2}{k_2} - B2ik_1\cos(k_2L) + \frac{k_1^2-k_2^2}{k_2}\sin(k_2L) = 0$$

$\times k_2$

$$\Leftrightarrow B\left[\sin(k_2L)(k_2^2+k_1^2) + 2ik_1k_2\cos(k_2L)\right] + (k_1^2-k_2^2)\sin(k_2L) = 0$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{(k_1^2-k_2^2)\sin(k_2L)}{\sin(k_2L)(k_2^2+k_1^2) + 2ik_1k_2\cos(k_2L)}$$

On reprend (5) :

$$(1+B)\cos(k_2L) + i\frac{k_1}{k_2}(1-B)\sin(k_2L) = Fe^{ik_1L}$$

Calcul de $(1+B)$ et $(1-B)$:

$$1+B = \frac{(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2L) + 2ik_1k_2\cos(k_2L) + (k_1^2-k_2^2)\sin(k_2L)}{(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2L) + 2ik_1k_2\cos(k_2L)}$$

$$= \frac{2k_1^2\sin(k_2L) + 2ik_1k_2\cos(k_2L)}{(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2L) + 2ik_1k_2\cos(k_2L)}$$

$$= \frac{2k_1\left(k_1\sin(k_2L) + ik_2\cos(k_2L)\right)}{(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2L) + 2ik_1k_2\cos(k_2L)}$$

$$1-B = \frac{2k_2\left(k_2\sin(k_2L) + ik_1\cos(k_2L)\right)}{(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2L) + 2ik_1k_2\cos(k_2L)}$$

On remplace dans (5) :

$$\frac{2k_1(k_1\sin(k_2L) + ik_2\cos(k_2L))}{(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2L) + 2ik_1k_2\cos(k_2L)}\cos(k_2L) + i\frac{k_1}{k_2}\frac{2k_2(k_2\sin(k_2L) + ik_1\cos)}{(k_1^2+k_2^2)\sin + 2ik_1k_2\cos}\cdot\sin(k_2L) = Fe^{ik_1L}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k_1\left[(k_1\sin + ik_2\cos)\cos + (k_2\sin + ik_1\cos)\sin i\right]}{(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2L) + 2ik_1k_2\cos(k_2L)} = Fe^{ik_1L}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k_1\left[k_1\sin\cos - k_1\sin\cos + ik_2(\cos^2+\sin^2)\right]}{''} = Fe^{ik_1L}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2ik_1k_2}{(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2L) + 2ik_1k_2\cos(k_2L)} = Fe^{ik_1L}$$

or $(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2L)+2ik_1k_2\cos(k_2L)$

$$=(k_1^2+k_2^2)\left(\frac{e^{ik_2L}-e^{-ik_2L}}{2i}\right)+2ik_1k_2\left(\frac{e^{ik_2L}+e^{-ik_2L}}{2}\right)$$

$$=\frac{(k_1+k_2)^2e^{ik_2L}-(k_1-k_2)^2e^{-ik_2L}}{2i}$$

donc on a : $$\frac{2ik_1k_2\cdot 2i}{(k_1+k_2)^2e^{ik_2L}-(k_1-k_2)^2e^{-ik_2L}}=\frac{-4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2e^{ik_2L}-(k_1-k_2)^2e^{-ik_2L}}=Fe^{ik_1L}$$

$$\Leftrightarrow F=\frac{-4k_1k_2\,e^{-ik_1L}}{\underbrace{(k_1+k_2)^2e^{ik_2L}-(k_1-k_2)^2e^{-ik_2L}}_{\Delta}}$$

$$\Delta=(k_1+k_2)^2[\cos+i\sin]-(k_1-k_2)^2[\cos-i\sin]$$

$$=[\underbrace{(k_1+k_2)^2-(k_1-k_2)^2}_{4k_1k_2}]\cos(k_2L)+i\,[\underbrace{(k_1+k_2)^2+(k_1-k_2)^2}_{2(k_1^2+k_2^2)}]\sin(k_2L)$$

$$=4k_1k_2\cos(k_2L)+i\,2(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2L)$$

$$|\Delta|^2=16k_1^2k_2^2\cos^2(k_2L)+4(k_2^2+k^2)^2\sin^2(k_2L)$$

$$|F|^2=\frac{16k_1^2k_2^2}{16k_1^2k_2^2\cos^2(k_2L)+4(k_1^2+k_2^2)^2\sin^2(k_2L)}$$

$$=\frac{4k_1^2k_2^2}{4k_1^2k_2^2\cos^2(k_2L)+(k_1^2+k^2)^2\sin^2(k_2L)}$$

$$=\frac{4k_1^2k_2^2}{4k_1^2k_2^2\left[\cos^2(k_2L)+\frac{(k_1^2+k_2^2)^2}{4k_1^2k_2^2}\sin^2(k_2L)\right]}$$

$$|F|^2 = \frac{1}{\cos^2(k_2L) + \frac{(k_1^2+k_2^2)^2}{4k_1^2k_2^2}\sin^2(k_2L)}$$

$$= \frac{1}{1-\sin^2(k_2L) + \frac{(k_1^2+k_2^2)^2}{4k_1^2k_2^2}\sin^2(k_2L)}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{(k_1^2+k_2^2)^2}{4k_1^2k_2^2}\sin^2(k_2L)}$$

car $(k_1^2+k_2^2)^2 = (k_1^2-k_2^2)^2 + 4k_1^2k_2^2$

$$\Rightarrow T = |F|^2 = \frac{1}{1 - \frac{(k_1^2+k_2^2)^2}{4k_1^2k_2^2}\sin^2(k_2L)}$$

T est le coefficient de transmission

Pour que $T = 1$, $\sin(k_2L) = 0 \Leftrightarrow k_2L = n\pi$

on a donc un maxima de réflexion $\Leftrightarrow L = \frac{n\pi}{k_2}$

$\Rightarrow$ une particule peut donc traverser un obstacle sans réflexion selon les énergies. $\Rightarrow$ Effet Ramsauer-Townsend

On a $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $k_2^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$, $(k_1^2-k_2^2)^2 = \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4}$

$4k_1^2k_2^2 = \frac{16m^2E(E+V_0)}{\hbar^4}$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\sin^2\left(\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}L\right)}$$