TYPT 講義：震盪

嘉義高中何承祐

October 2023

簡介

震盪是物理一個很重要的現象。從震盪的週期、震幅、衰減速率等，我們從實驗就可以掌握很多物理參數。從簡單的SHM至受阻力影響的阻尼震盪，都在物辯經常出現，尤其是後者非常考驗先備知識，才不會在戰場上對方問某個現象是underdamping, overdamping 還是critical damping 的時候，手足無措，不知道怎麼回答(2023TYPT 切身經驗)。雖然除了簡諧運動以外的震盪都看起來很複雜，但其實都有跡可循，就像耦合震盪可以用簡正模頻率來描述。儘管最後面會用到一點矩陣，但都只是高中數學範圍，相信不會太難......?

Contents

1 數學基礎

希望你來這裡之前有學過基本的微分與積分。在阻尼震盪之前，大概只需要多項式的微積分而已。在這份講義中，我們會用下列的簡寫：

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y$$
$$\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dot{y}$$

2 簡諧運動

簡諧運動(SHM, Simple Harmonic Motion) 是一種簡單又諧和的運動模式。說到簡諧運動，我們就會想到彈簧。看著彈簧上下規律地震動，頓時感覺身心舒暢，萬物和諧。為甚麼彈簧會有簡諧運動呢? 沒錯，就是......

2.1 虎克定律!

只要符合

$$F = -kx$$

的任何物體，就會做簡諧運動。因為$F = ma$，而加速度和位置的關係是$a = \ddot{x}$，由

$$F = ma = m\ddot{x} = -kx$$

可知，能描述簡諧運動的方程式是

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1}$$

2.2 簡諧運動的微分方程

「微分方程」是[2]

含有某些未知函數及其導函數的方程式

的方程，因此(1) 就是一種微分方程(Differential Equation)。如果自變數(Independent Variable) 只有一個，如x，則又可稱為常微分方程(Ordinary Differential Equation)。

現在我們要解(1)。這個方程的特點是x 微分兩次後會和原本的自己的某個倍數消掉。國二時我看黑筆紅筆的影片，我只想得出

$$x = 0$$

這個顯而易見的零解(Trivial Solution)。想想看，還有甚麼函數能使x 符合這個性質呢? 如果是三角函數呢?

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$
$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$$

如果是這樣，

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

等等! 這不就和(1) 超像的嗎? 只要

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2}$$

就一模一樣了。這裡的ω 就是簡諧運動的角頻率。而

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{3}$$

叫做通解(General Solution)，兩個常數

$$A\text{是震幅}$$
$$\phi\text{是相位(Phase)}$$

得由初始條件(Initial Conditions) 判定。

3 阻尼震盪：黏滯的現實

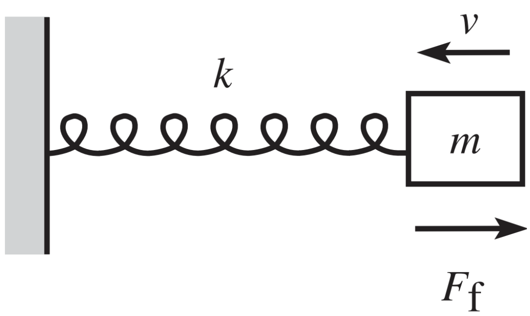

Figure 1: 阻尼震盪力圖

在現實中，由於摩擦力、空氣阻力、黏滯力等等的因素，理想的簡諧運動很難達成。因此，在物理的研究上，尤其是物辯，阻尼震盪就顯得十分重要。阻尼震盪是在運動過程中，會受到一個與速度方向相反的阻力

$$\vec{F_f} = -b\vec{v}$$

必須注意的一點是這個模型並不能模擬摩擦力，因為動摩擦力和速度並沒有關係。不過，因為大多數描述力的方程式都可以透過泰勒展開取得一次近似，因此和速度成正比的阻力就顯得值得探討。

3.1 阻尼震盪的數學

我們可以把阻尼震盪的牛頓第二運動定律寫成

$$F = ma = m\ddot{x} = -bv - kx = -b\dot{x} - kx$$

移項之後我們就會得到

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

我們可以把它寫成

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{4}$$

其中$\gamma = \frac{b}{2m} > 0$ ，$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$。

$$x = Ae^{-\alpha t}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2 = 0 \\
\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = \alpha_+, \alpha_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= Ae^{\alpha_+ t} + Be^{-\alpha_- t} \\
&= e^{-\gamma t}\left(Ae^{t\sqrt{\gamma^2-\omega^2}} + Be^{-t\sqrt{\gamma^2-\omega^2}}\right) \\
&= e^{-\gamma t}\left(Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}\right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \tag{6}
$$

因為這裡有根號，所以我們需要討論情況。

3.1.1 Underdamping $\Omega^2 < 0$

因為

$$
\gamma < \omega
$$

所以定義

$$
\omega' = \omega^2 - \gamma^2
$$

把Ω 寫成

$$
\Omega = i\omega'
$$

代回原本的式子有

$$
\begin{aligned}
x &= e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\omega' t} + Be^{-i\omega' t}\right) \\
&= e^{-\gamma t}\left(A\cos(\omega' t) + iA\sin(\omega' t) + B\cos(-\omega' t) + iB\sin(-\omega' t)\right) \\
&= e^{-\gamma t}\left((A+B)\cos(\omega' t) + i(A-B)\sin(\omega' t)\right) \\
&= e^{-\gamma t}C\cos(\omega' t)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

這是一個振福指數衰減的簡諧震盪，在物辯中是最重要的。其中

$$
C = A + B
$$

是一個常數，也就是震幅。

3.1.2 Overdamping $\Omega^2 > 0$

$$
\begin{aligned}
x &= e^{-\gamma t}\left(Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}\right) \\
&= Ae^{(\Omega-\gamma)t} + Be^{(-\Omega-\gamma)t}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

這個是兩個指數項的和。

因為

$$
\gamma > \Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}
$$

兩個指數項都是指數遞減的函數，因此加起來還是指數遞減。

3.1.3 Critical Damping $\Omega^2 = 0$

$$
\Omega = 0 \Longrightarrow \gamma = \omega
$$

這個其實和指數衰減沒兩樣，只是

$$
x = e^{-\gamma t} \tag{9}
$$

而已。

3.2 重要的參數

時間常數

時間常數τ 是描述一個指數衰減函數隨時間衰減快慢的指標。在Underdamping 的時候有

$$x = e^{-\gamma t} C \cos(\omega' t)$$

而時間常數就定義為

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \tag{10}$$

自然頻率

自然頻率是在沒有黏滯力的影響下的震盪頻率。因此

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11}$$

震盪頻率

因為$\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$，所以在Underdamping 的情況下：

阻尼震盪的頻率比沒有阻尼的情況的頻率低

4 耦合震盪

在耦合震盪中，兩個或多個振動系統彼此相互作用，導致它們之間能量的交換和周期性振盪(ChatGPT 3.5)。我們用一個例子說明：2023 TYPT Problem 6. Magnetic-Mechanical Oscillator.

> Secure the lower ends of two identical leaf springs to a non-magnetic base and attach magnets to the upper ends such that they repel and are free to move. Investigate how the movement of the springs depends on relevant parameters.

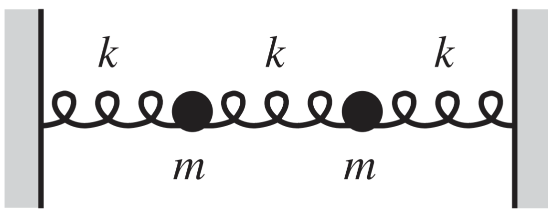

Figure 2: 耦合震盪示意圖

4.1 聯立的微分方程

[1] 我們可以把兩個磁鐵間的作用力簡化為彈簧的作用力，如圖。為了說明簡單，暫時假設三個彈簧的彈力常數都是k 且兩個板簧(Leaf Spring) 是質量m 的質點。令左邊那個m 是1, 右邊是2。定義x_1 是物體1 從平衡位置偏移的位移，x_2 是物體2 從平衡位置偏移的位移，則

$$F_1 = m\ddot{x_1} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$F_2 = m\ddot{x_2} = -kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

請自行畫圖想像為什麼正負號要這樣放。這兩個是連力的微分方程，聽起來好複雜......

4.2 一加一減，答案出現

不過，一個很巧妙的事情是，我們可以把這兩個式子加起來

$$(\ddot{x_1} + \ddot{x_2}) + \omega^2(x_1 + x_2) = 0$$

也可以把他們相減

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \frac{3\omega^2}{2}(x_1 - x_2) = 0$$

這兩個式子竟然是簡諧運動的形式! 只不過他們是位移的和與差罷了。用我們學過的SHM可以解出

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= A^+ \cos(\omega t + \phi^+) \\ x_1 - x_2 &= A^- \cos\left(\sqrt{3}\omega t + \phi^-\right) \end{aligned}$$

其中$A^\pm$ 與$\phi^\pm$ 是根據起始條件(Initial Conditions) 決定的常數。把這兩式相加減即得

$$x_1(t) = B^+ \cos(\omega t + \phi^+) + B^- \cos\left(\sqrt{3}\omega t + \phi^-\right) \tag{12}$$

$$x_2(t) = B^+ \cos(\omega t + \phi^+) - B^- \cos\left(\sqrt{3}\omega t + \phi^-\right) \tag{13}$$

其中$B^\pm$ 是未知常數。

4.3 簡正模頻率

剛剛我們解出的x_1, x_2 是兩個餘弦函數組成的。這兩個餘弦函數的頻率不一樣，但是他們是很特別的頻率，分別是$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 和$\sqrt{3}\omega$。我們就叫這些頻率「簡正模頻率(Normal Mode Frequencies)」，而之前一加一減的$(x + y)$ 和$(x - y)$ 就叫做簡正模座標(Normal Coordinates)。

4.4 行列式法

除了這個一加一減的方法，還有另一種方法可以更快地求出Normal Mode。我們考慮

$$\begin{aligned} 2\ddot{x} + \omega^2(5x - 3y) &= 0 \\ 2\ddot{y} + \omega^2(5y - 3x) &= 0 \end{aligned}$$

一加一減當然管用，但我們式式看另一個方法。最後解出來x, y 應該是SHM，也就是三角函數，而三角函數又可以用尤拉公式表示，另外，兩個未知數的解會有一樣的三角函數。因此我們大膽假設

$$x = Ae^{i\alpha t} \qquad y = Be^{i\alpha t}$$

用矩陣寫就是

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{i\alpha t}$$

把我們猜的解帶入一開始那兩個微分方程，我們消掉指數後得到

$$2A(-\alpha^2) + 5A\omega^2 - 3B\omega^2 = 0 \tag{14}$$
$$2B(-\alpha^2) + 5B\omega^2 - 3A\omega^2 = 0 \tag{15}$$

我們巧妙地把它寫成

$$\begin{bmatrix} -2\alpha^2 + 5\omega^2 & -3\omega^2 \\ -3\omega^2 & -2\alpha^2 + 5\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

我們希望可以得到A, B 的解，因此需要在等號兩邊乘以

$$M = \begin{bmatrix} -2\alpha^2 + 5\omega^2 & -3\omega^2 \\ -3\omega^2 & -2\alpha^2 + 5\omega^2 \end{bmatrix}$$

的反矩陣M^{-1}，也就是

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} M^{-1}$$

但是，如果這個反矩陣存在的話，因為前面的$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，我們只會得到

$$A = 0 \qquad B = 0$$

這無疑是一個失望的結局(俗稱爛尾)。因此，

”如果某個特別的頻率α 能使M^{-1} 不存在，則A, B 才有非零解。”

所以，我們要挑選這個頻率，使矩陣M的行列式值為零，亦即

$$0 = \det \begin{bmatrix} -2\alpha^2 + 5\omega^2 & -3\omega^2 \\ -3\omega^2 & -2\alpha^2 + 5\omega^2 \end{bmatrix} \tag{17}$$
$$= 4\alpha^4 - 20\alpha^2\omega^2 + 16\omega^4 \tag{18}$$
$$= 4(\alpha^2 - \omega^2)(\alpha^2 - 4\omega^2) \tag{19}$$

這裡就能解出兩個Normal Mode: $\alpha = \pm\omega, \pm 2\omega$。$x, y$ 的解和前一個例子差不多。

References

[1] David Morin. Introduction to classical mechanics with problems and solutions. pages 101–120, 2008.

[2] 五南官網. 何謂微分方程.