

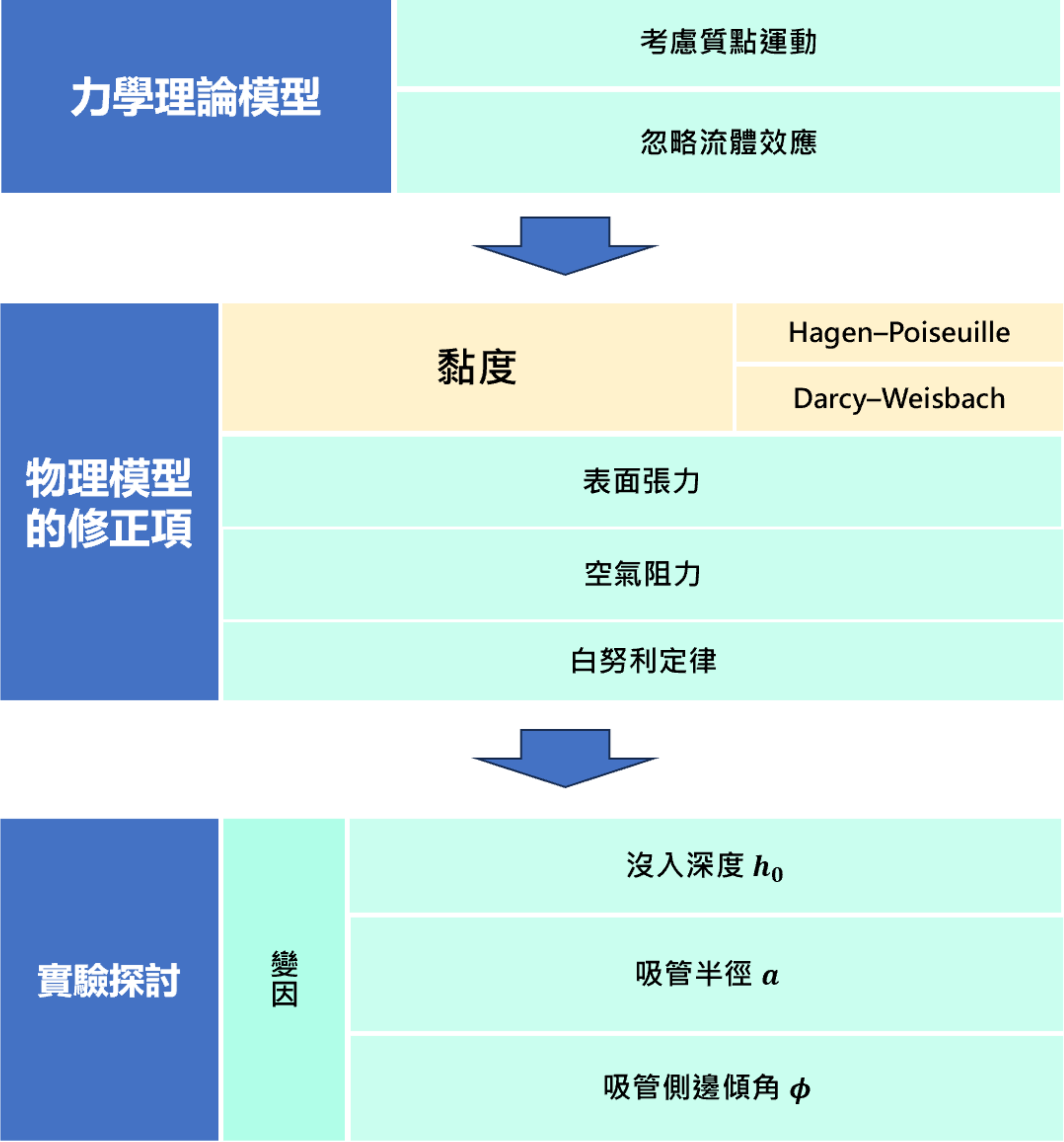
旋轉吸管灑水器理論模型與實驗分析

研究動機

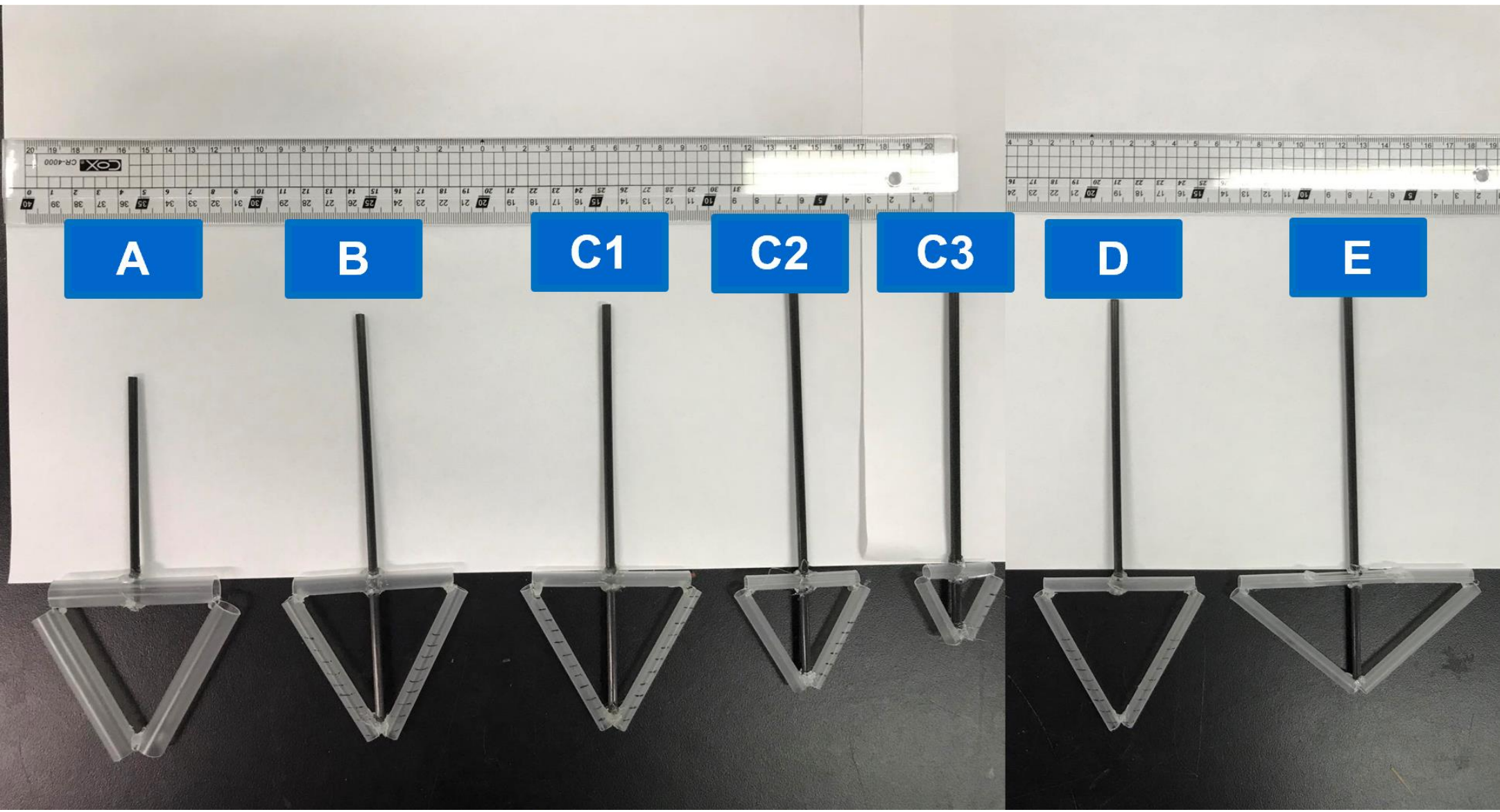
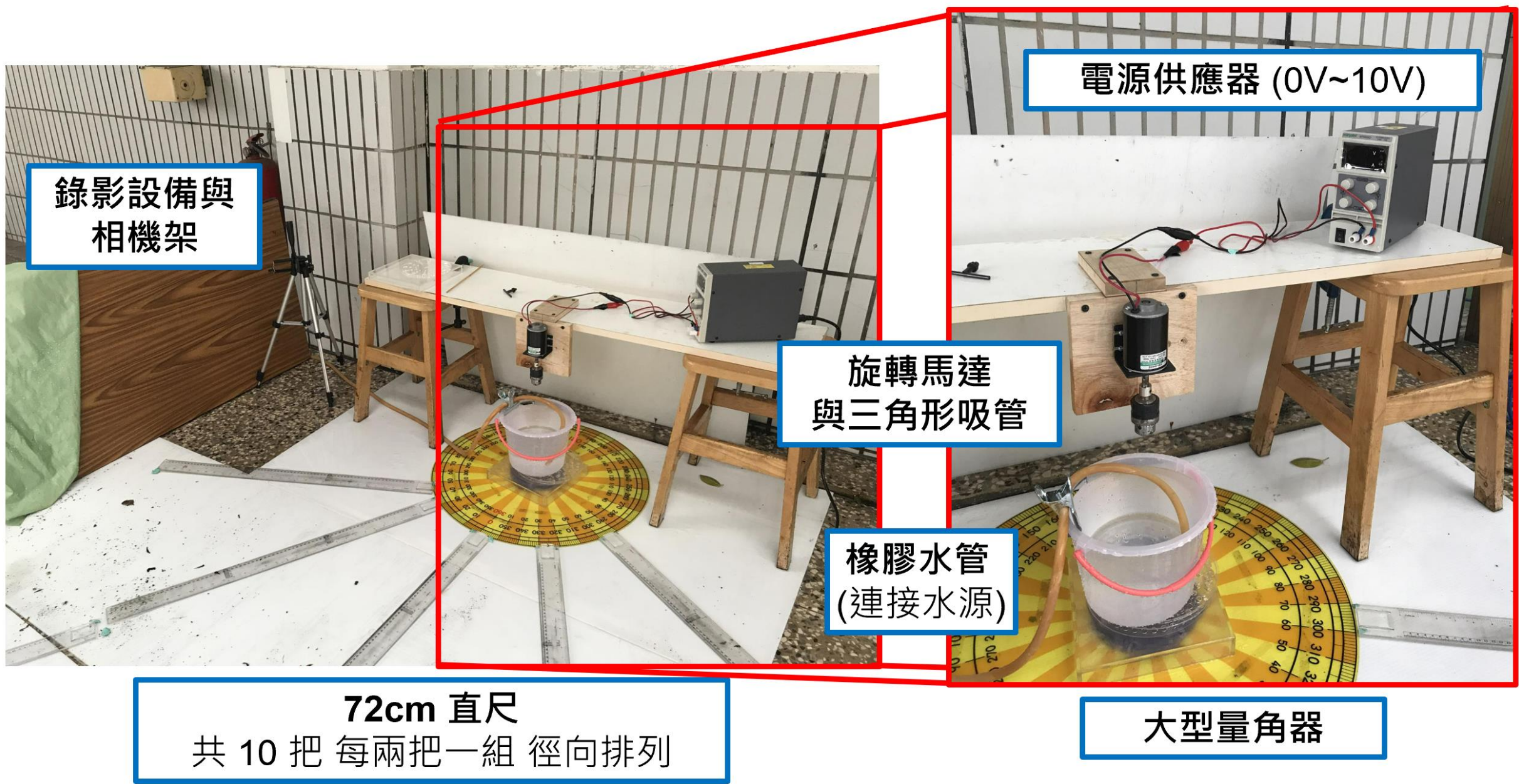
在校園或公園的草坪上，經常能看到定時啟動的灑水器。然而，對大眾而言，與其購買灑水設備，自行DIY是更方便的選擇。只要把吸管折成一個三角形，把端點剪去，並將兩端接合處放在水中旋轉，水就會噴出，達到灑水的目的。如果再加上馬達，便能省去自己灑水的麻煩。這個現象十分有趣且非常實用，因此就對此進行了研究。除了了解旋轉吸管灑水器的原理外，也希望能優化裝置，達到更理想的噴水效果。

研究目的

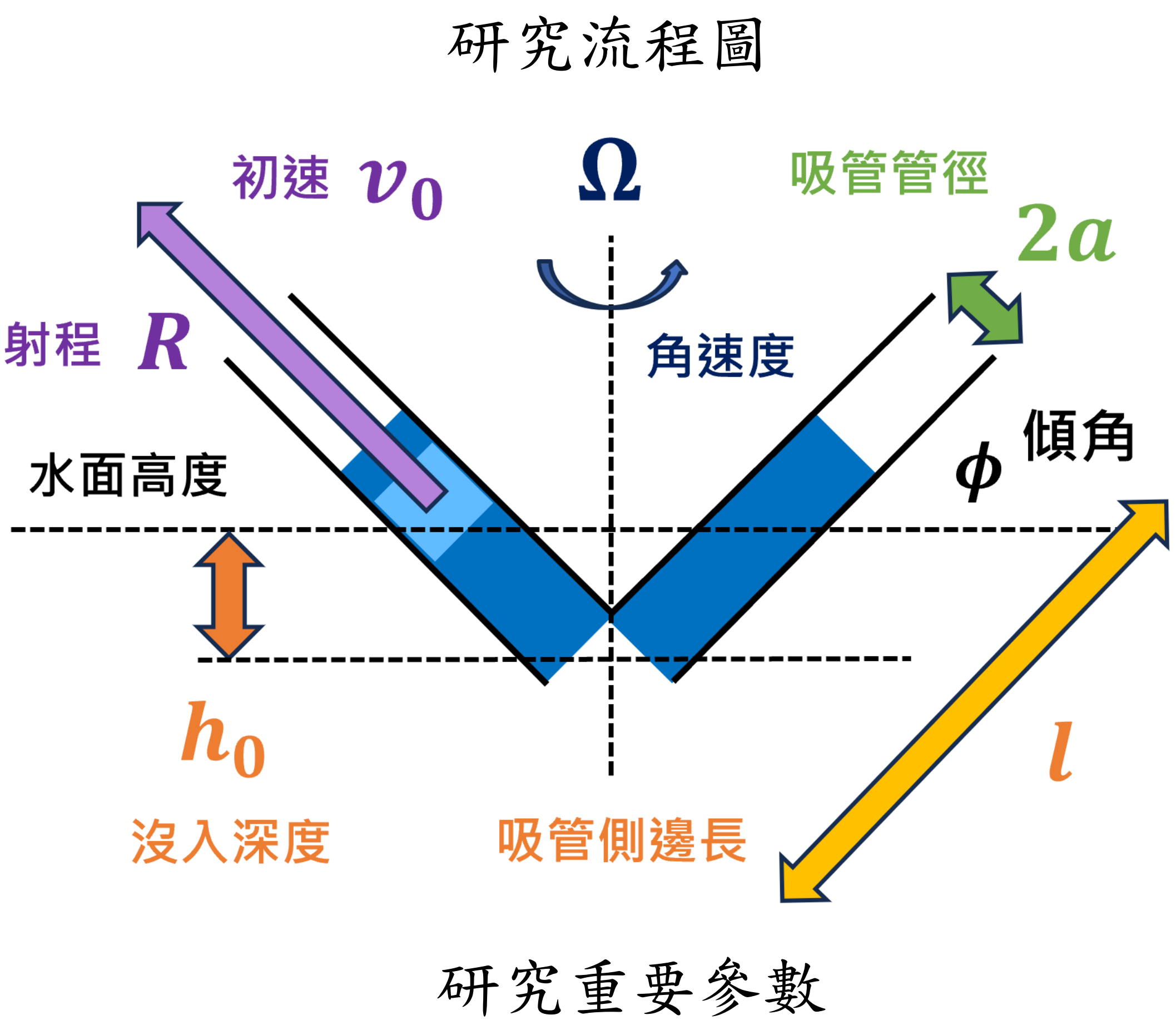
- 一. 分析簡化的力學理論模型
- 二. 探討物理模型的修正項
- 三. 探討沒入深度對噴出初速的影響
- 四. 探討吸管的管徑對噴出初速的影響
- 五. 探討吸管的邊長對噴出初速的影響
- 六. 探討吸管的側邊傾角對噴出初速的影響，並透過理論決定使噴出速度最大的傾角



研究器材與方法



實驗裝置圖(上)與各尺寸三角形吸管 (下)



理論模型

質點力學模型

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{z}\hat{\boldsymbol{z}}]$$

$$m(\ddot{r} - r(\Omega \cos \phi)^2) = -N \sin \phi = -g \sin \phi \cos \phi$$

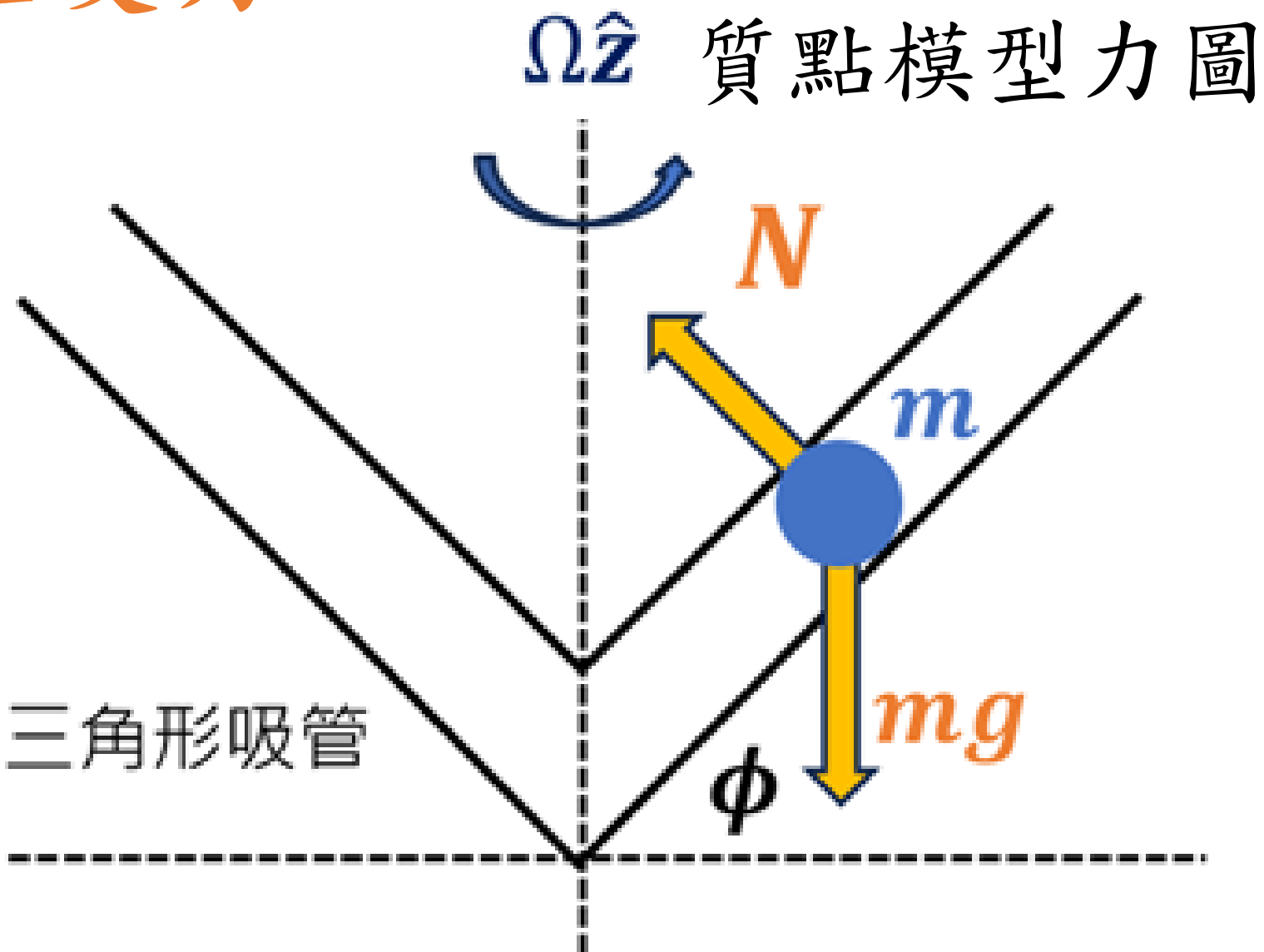
徑向加速度

質點受力

徑向運動方程 $r(t) = (r_0 - r_{0c}) \cosh \Omega' t + r_{0c}$

噴出初速 $v_{th} = \Omega(r_0 - r_{0c}) \sqrt{\left(\frac{l \cos \phi - r_{0c}}{r_0 - r_{0c}}\right)^2 - 1}$

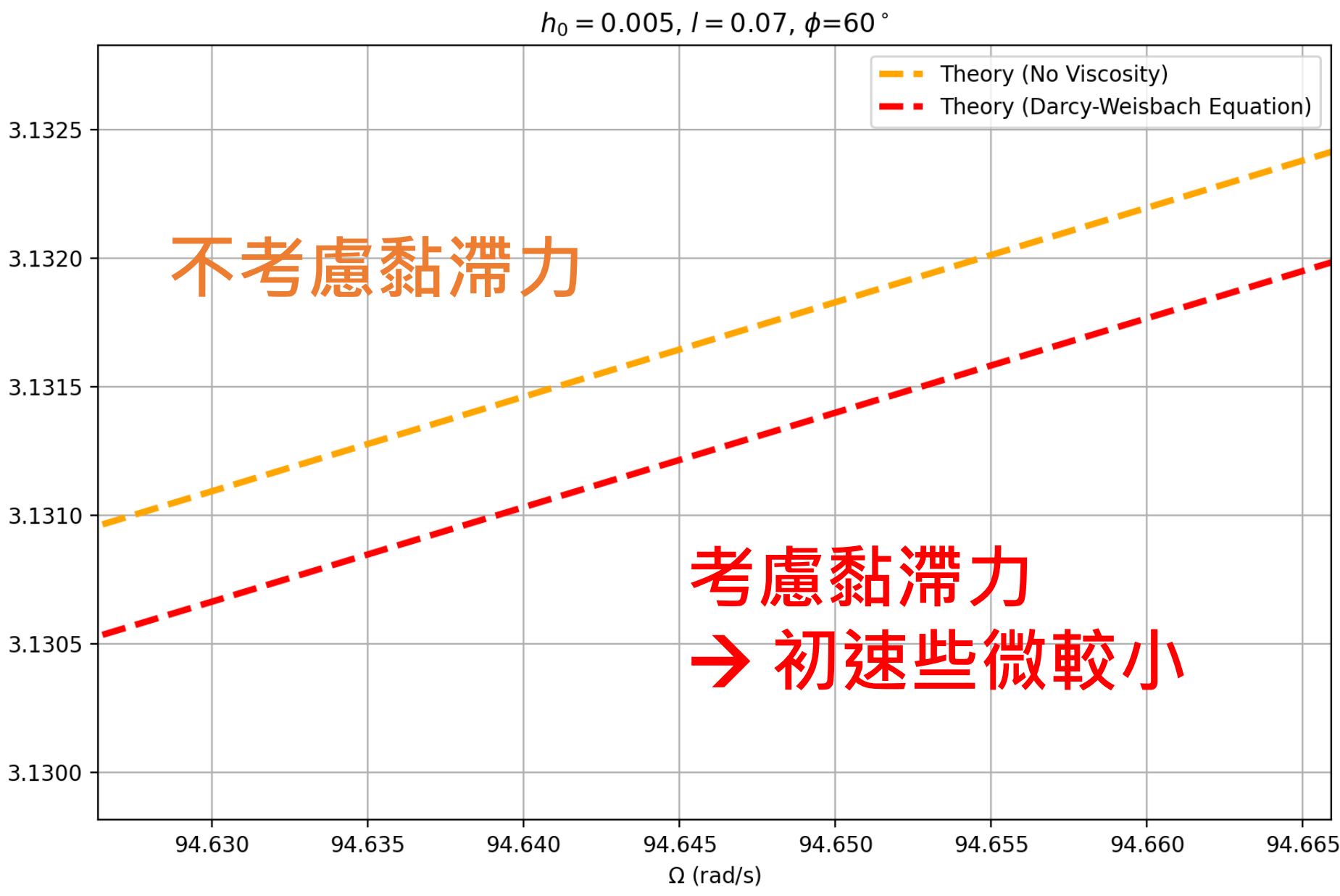
臨界徑向初始距離 $r_{0c} = \frac{g \sin 2\phi}{2\Omega'^2}$



模型修正

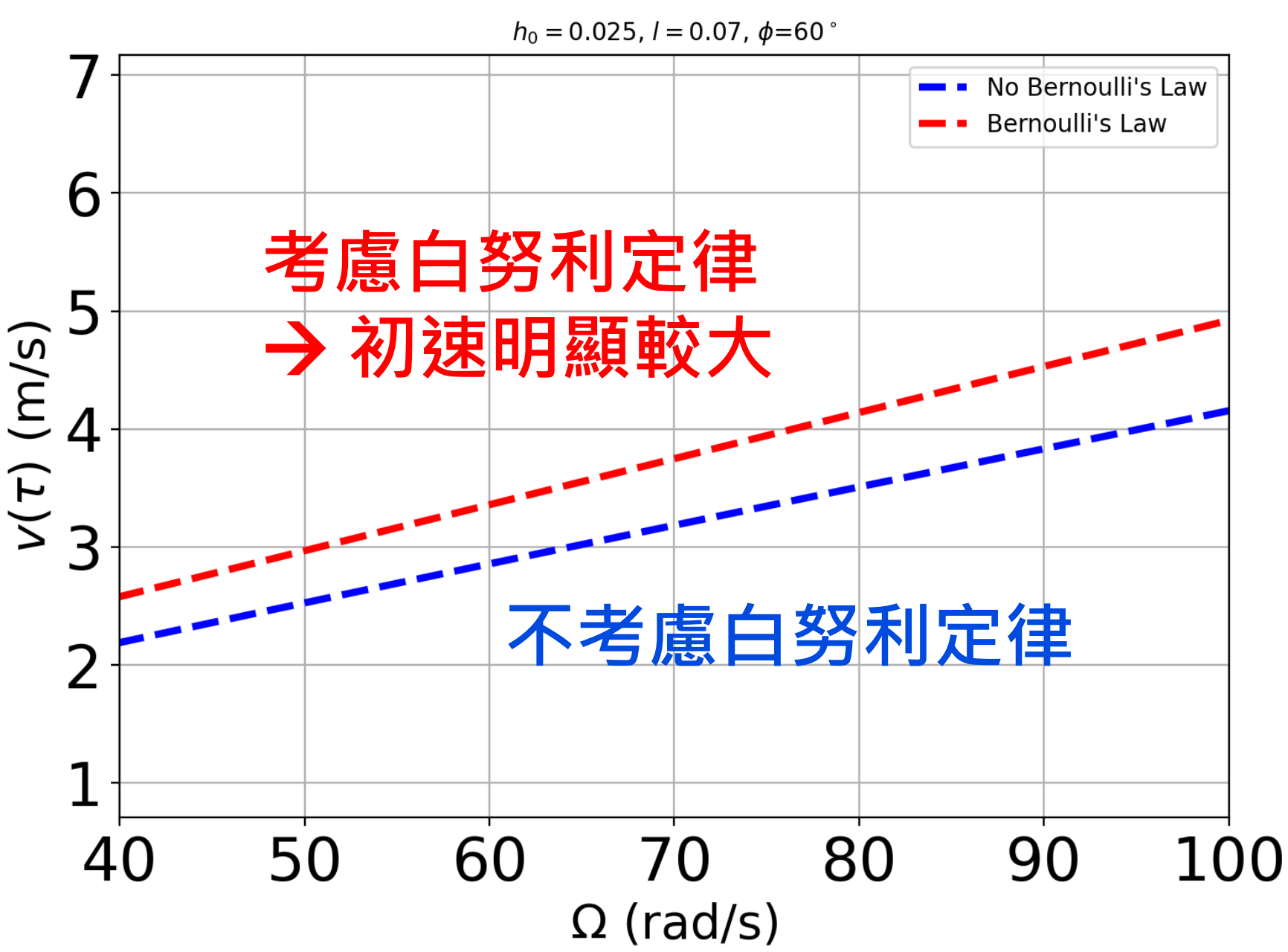
黏滯力：Darcy–Weisbach Equation

$$\frac{\Delta p}{L} = f_D \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \frac{v_{avg}^2}{D_H}$$



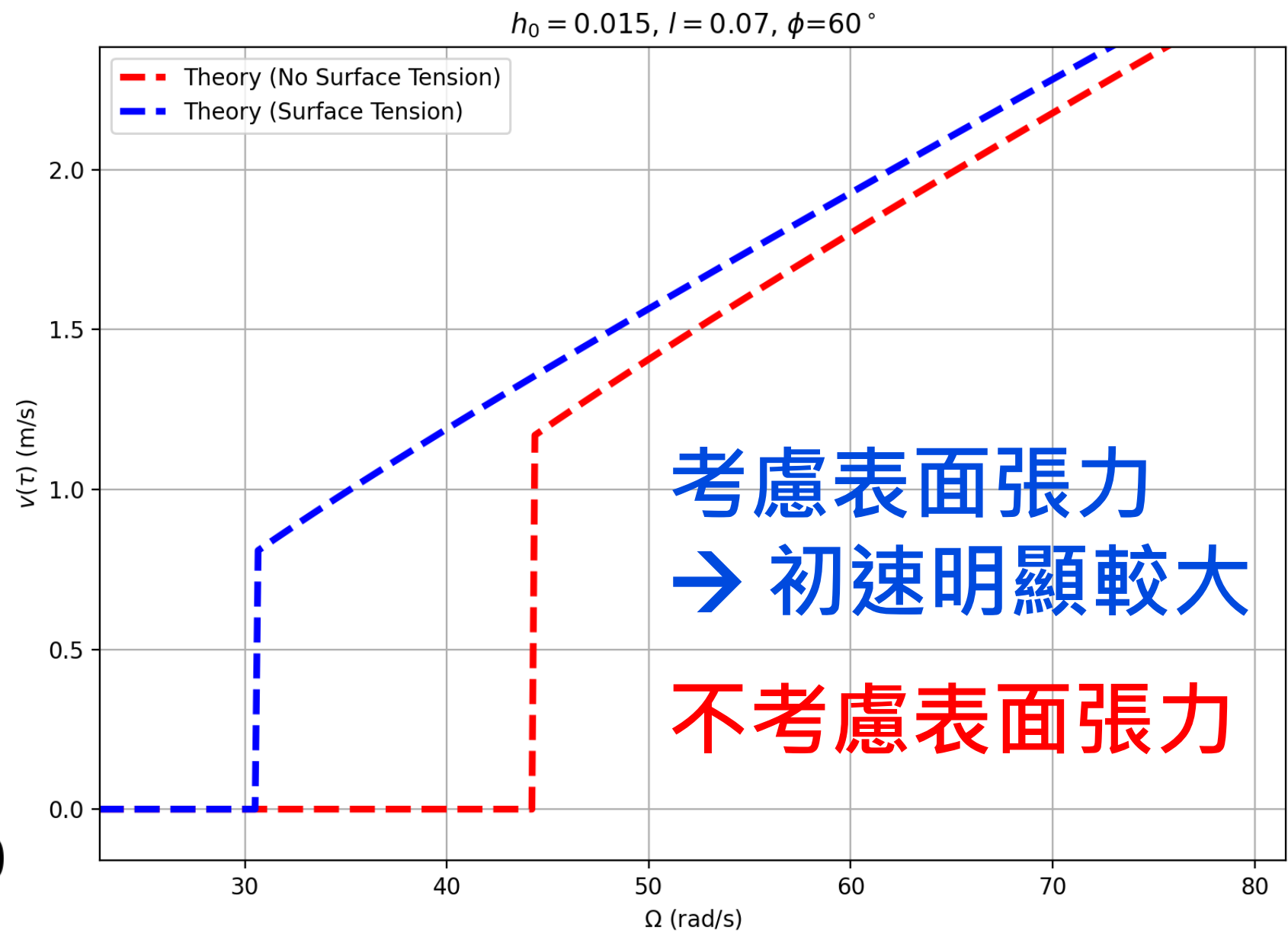
白努利定律

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho v(\tau)^2 + \rho gh$$



表面張力

$$T = 2\pi a\gamma$$



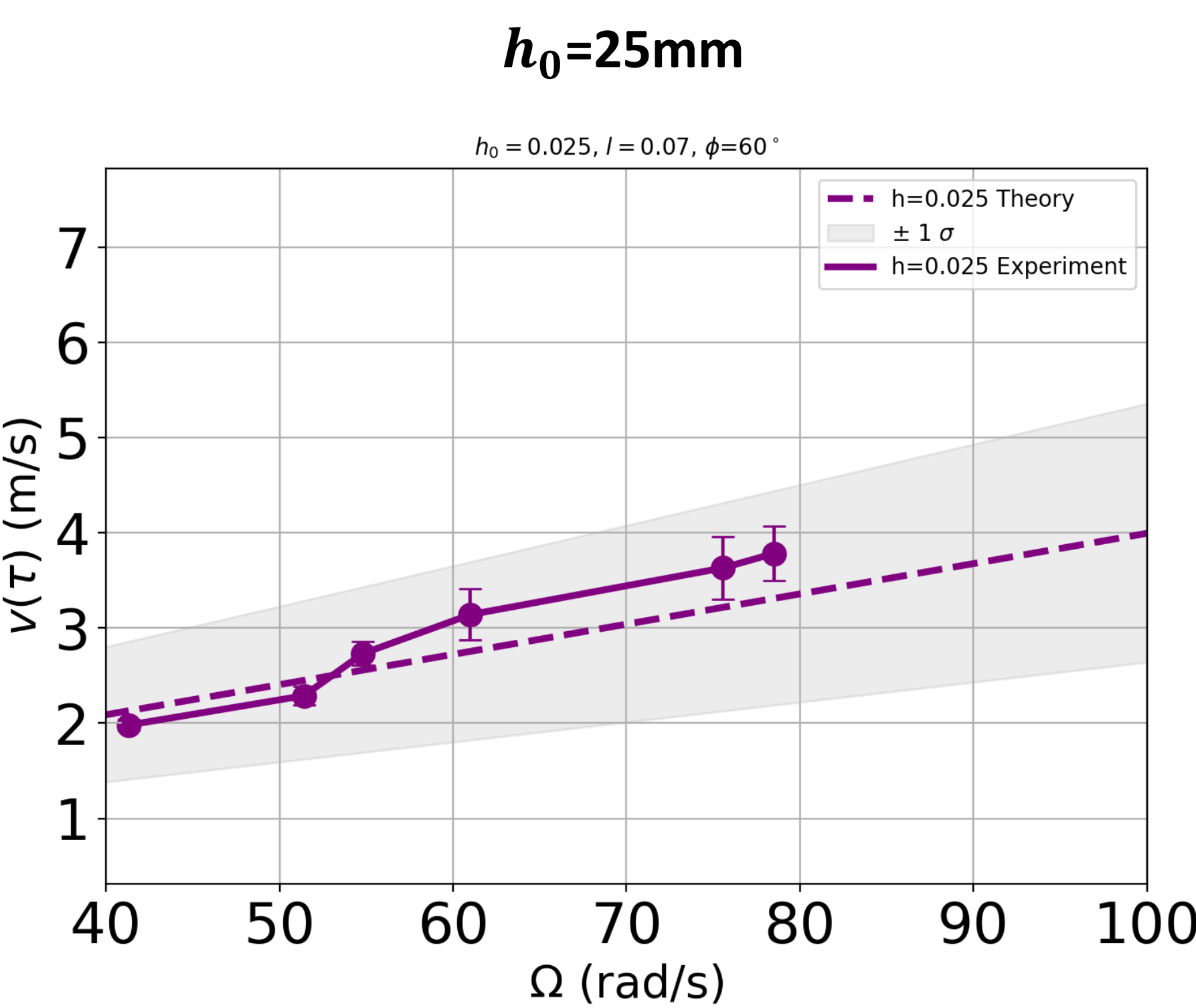
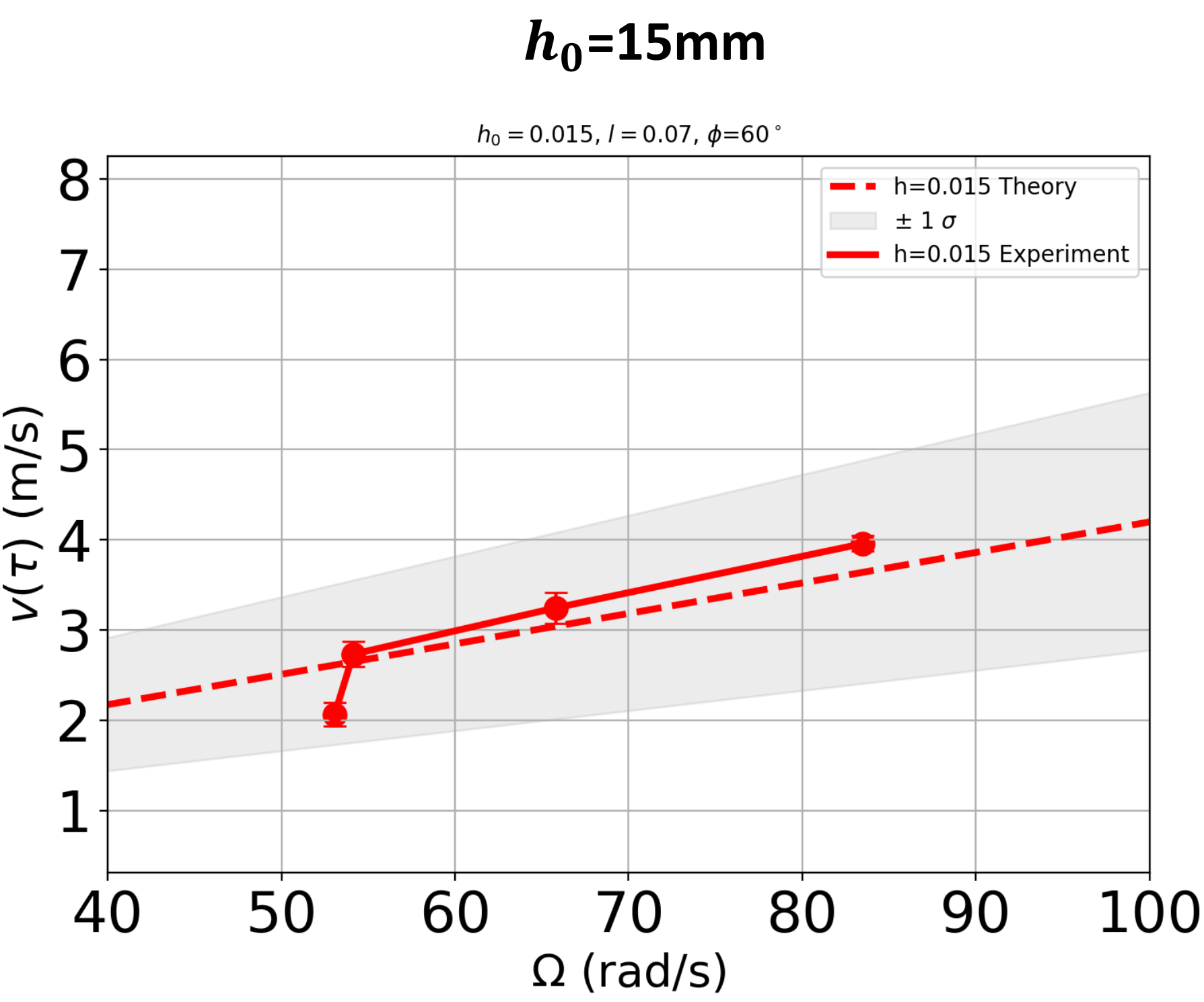
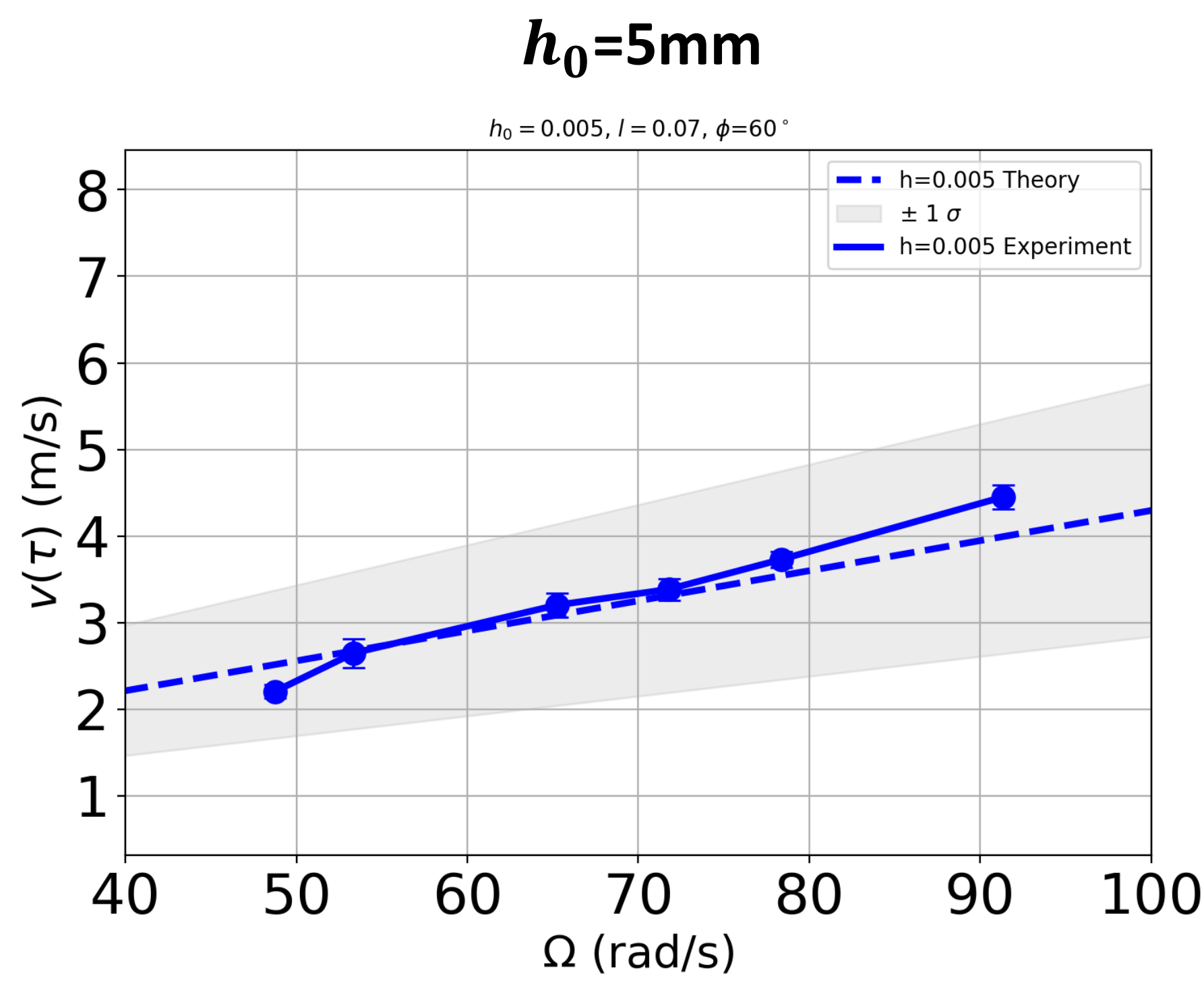
考慮流體力學修正的等效重力 $g' = g + \frac{f_D \rho v^2(\tau)}{16a} - \frac{2\gamma}{al_{eff}\rho} - \frac{\Delta p_{bern}}{\rho gl}$

黏滯力 表面張力 白努利定律

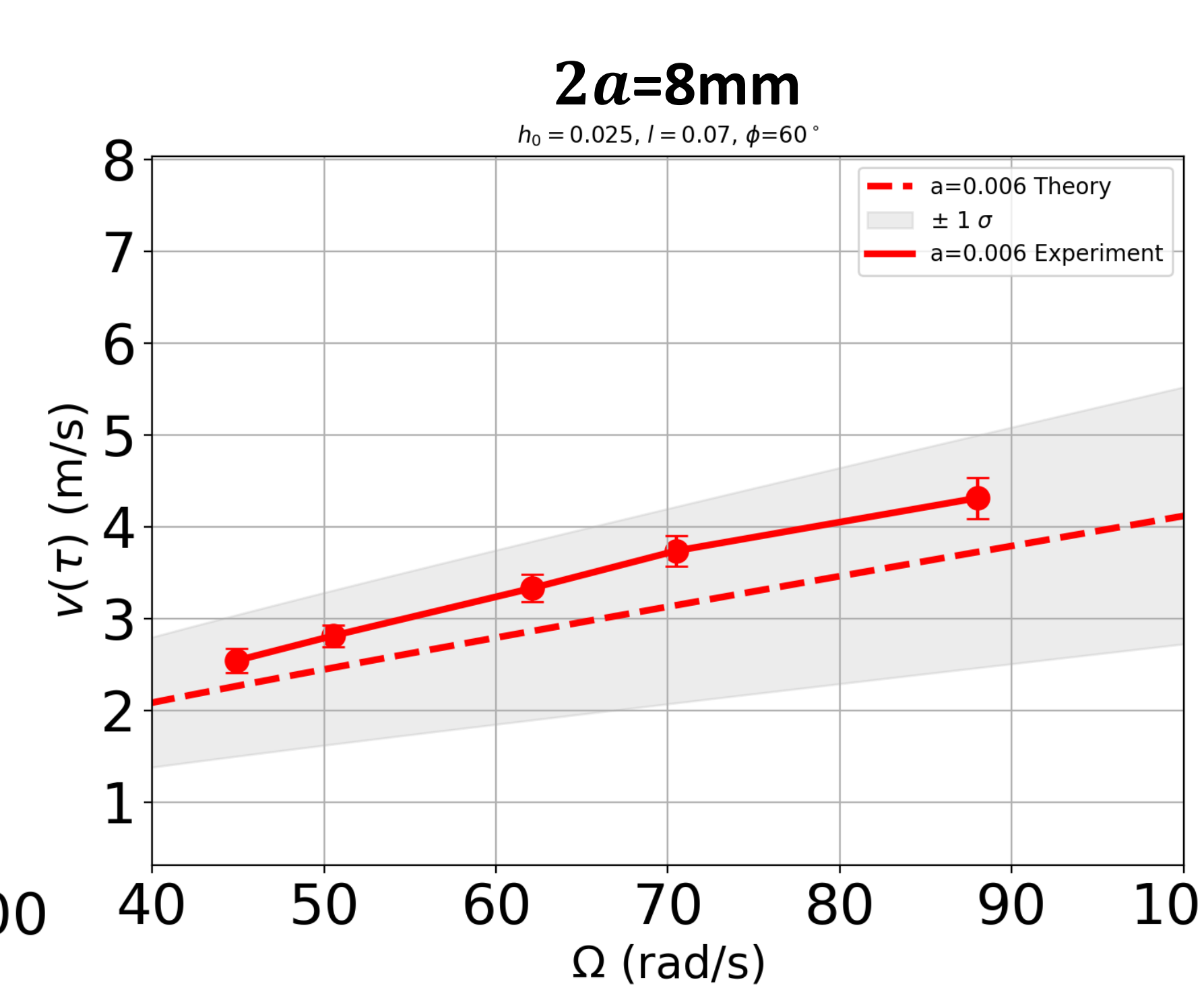
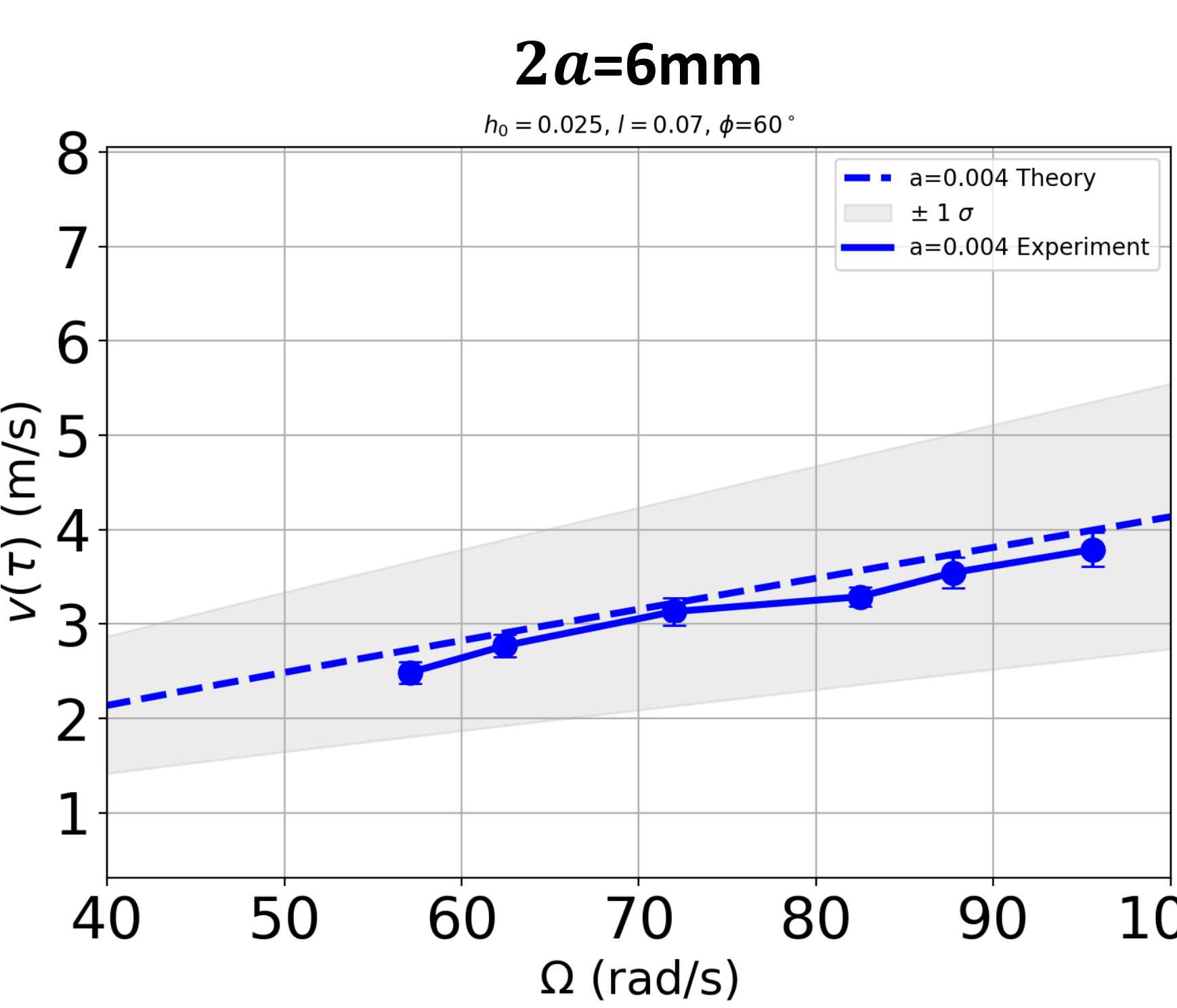
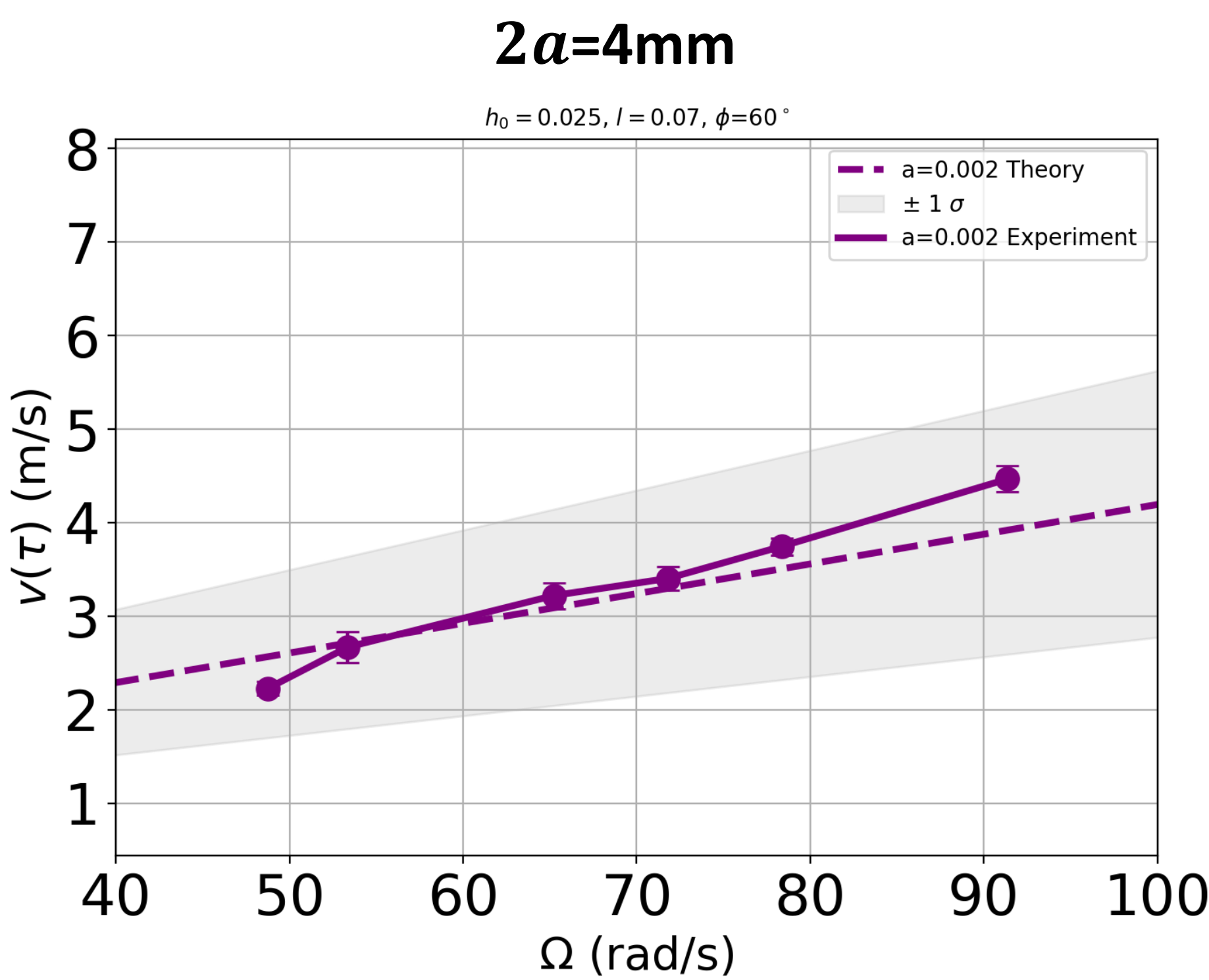
實驗結果

探討沒入深度 h_0 對噴出初速的影響

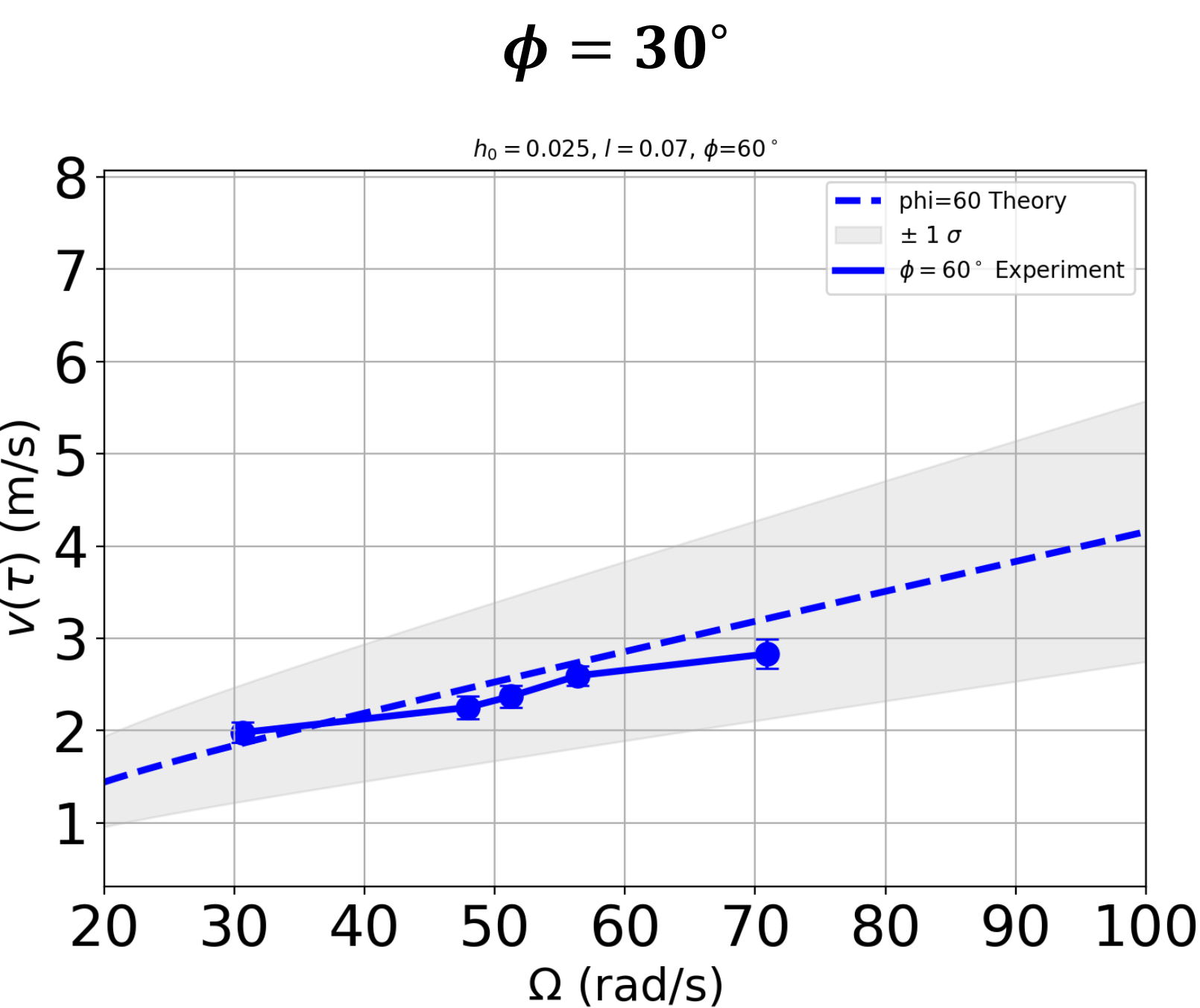
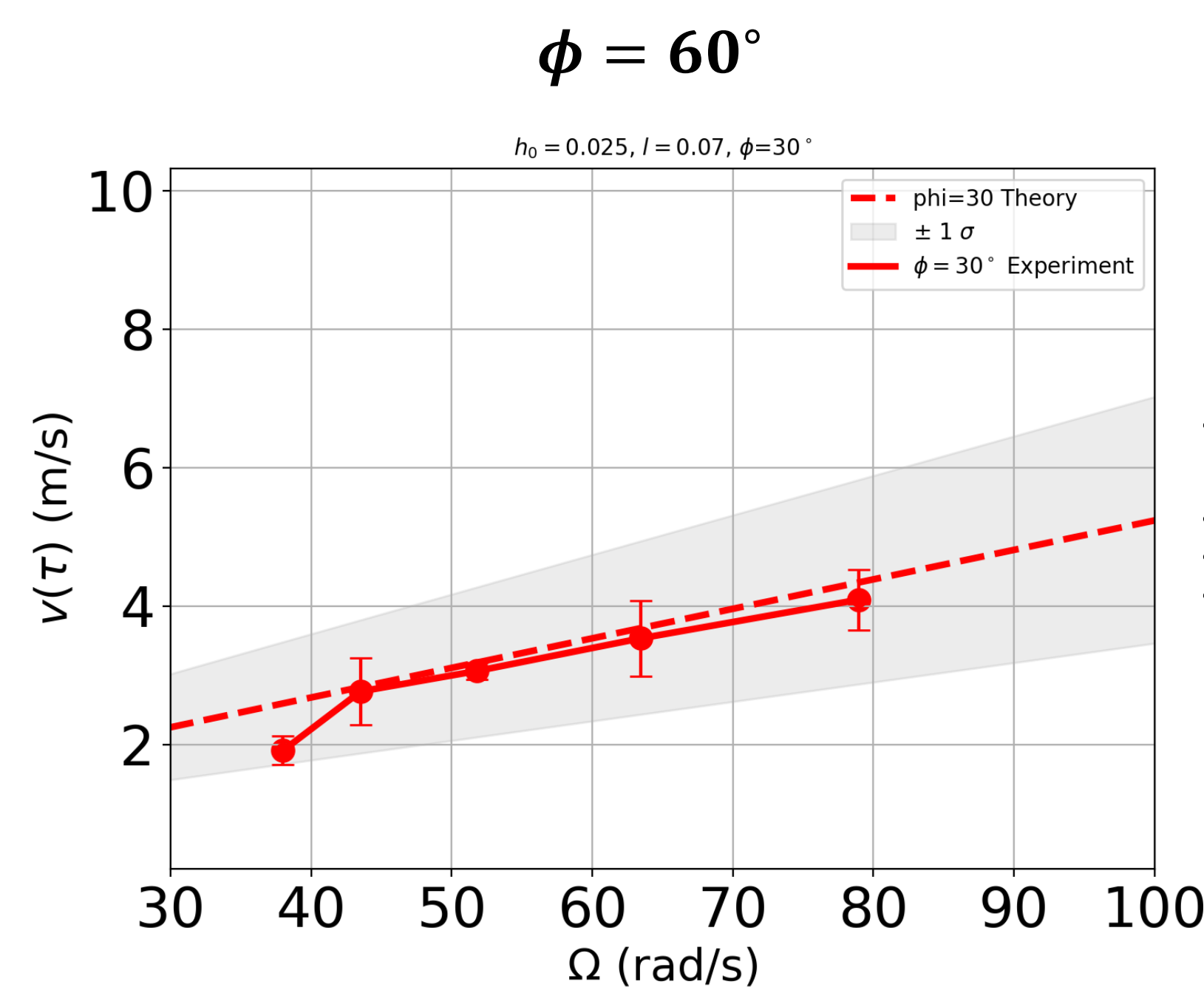
實線：實驗數據 虛線：理論預測



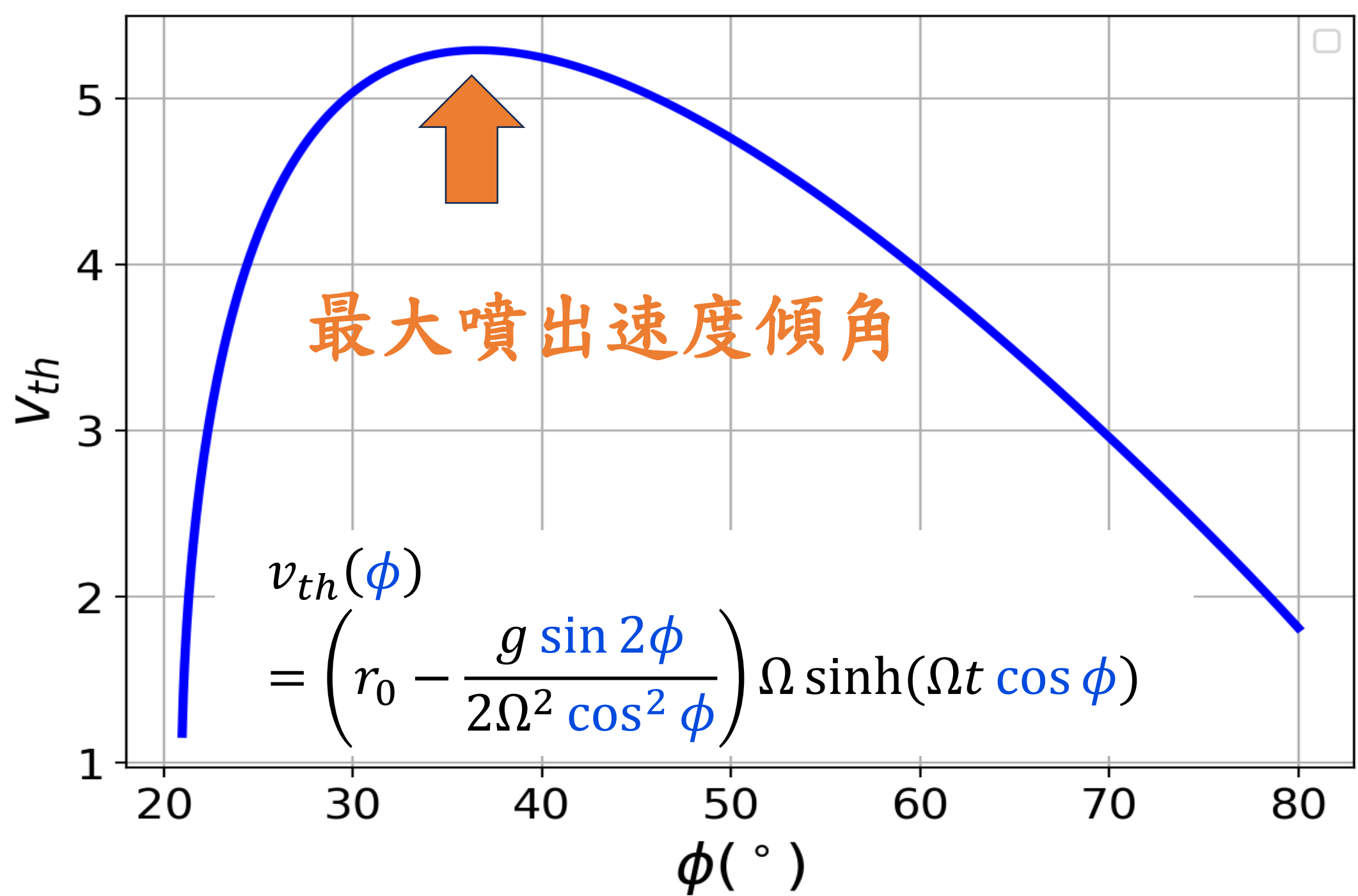
探討吸管管徑 $2a$ 對噴出初速的影響

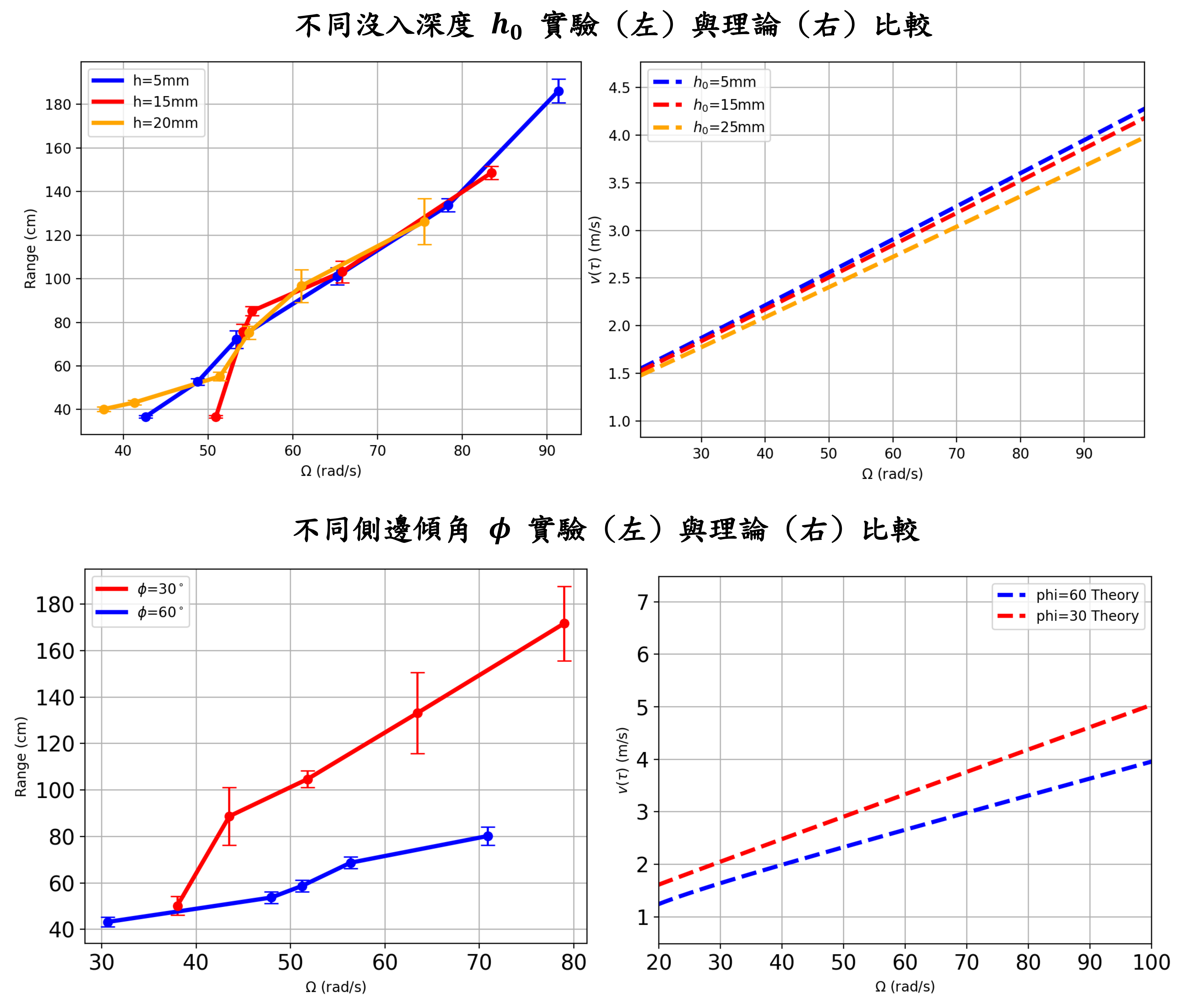


探討吸管側邊傾角 ϕ 對噴出初速的影響



使噴出速度最大的傾角





結論

- 為分析水在旋轉吸管內的行為，首先透過一個簡化的力學模型，暫時忽略流體效應，分析質點在吸管中的運動。由此可解出質點的運動方程，進而推廣至水的運動。
- 將質點模型進行修正。考慮黏滯力、白努利定律與表面張力等流體的效應，並將重力加速度修正為等效加速度代回質點力學模型，發現黏滯力效應不顯著，但後兩者卻不可忽略。
- 由於實驗上由噴出射程反推初速，亦考慮水珠飛出時受到的空氣阻力影響，但由於水珠相關參數不易決定，此修正項為根據實驗調整的結果。
- 實驗上首先探討不同吸管沒入深度對水珠噴出初速的影響，發現其影響小，各組實驗數據皆十分接近。探討吸管管徑的影響時，觀察到管徑較小者由於表面張力較大，吸管內的水噴出初速較大。若將吸管剪成頂角不同的其他三角形，發現噴出初速亦不同。由理論公式分析不同側邊傾角下的噴出初速，能得到使初速最高的傾角，因實驗條件而異。

流體與阻力效應對質點力學模型的修正		各參數對初速影響	
黏滯力	初速負偏差（效應極小）	較深沒入深度 h_0	較大初速
表面張力	初速正偏差	較高角速度 Ω	
白努利定律	初速正偏差	較小管徑 $2a$	
空氣阻力	初速負偏差	恰當的傾角 ϕ	

參考資料

- Pfitzner, J. (1976). Poiseuille and his law. Anaesthesia. 31 (2): 273–275.
- IYPT 2024 Problems. <https://www.iypt.org/problems/problems-iypt-2024/>
- Howell, Glen (1970-02-01). "3.9.2". Aerospace Fluid Component Designers' Handbook. Vol. I. Redondo Beach CA: TRW Systems Group. p. 87, equation 3.9.2.1e.
- Rouse, H. (1946). Elementary Mechanics of Fluids. John Wiley & Sons.
- Baker, W.E. (1983). Explosion Hazards and Evaluation, Volume 5. Elsevier Science.