

2022 物理奧林匹亞複選

一、水星軌道近日點的進動

若某行星及太陽的質量分別為 m 及 M ，且其他行星的效應可忽略，則由牛頓萬有引力定律可得知：此行星在太陽的重力作用下，其角動量 ℓ 及能量 E 的守恆式分別為

$$mr^2\dot{\theta} = \ell \quad \text{及} \quad \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E, \quad \text{其中 } r \text{ 為行星與太陽的距離, } G \text{ 為重力常數,}$$

且行星的運動軌跡為一橢圓，而太陽位於該橢圓的一個焦點。

(A) 假設已知廣義相對論的修正會使能量守恆式變為：

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GM\ell^2}{mc^2r^3} - \frac{GMm}{r} = E + \frac{E^2}{2mc^2}. \quad \text{若此系統容許兩個圓軌道, 則角動量 } \ell$$

必須滿足什麼條件?並求出這兩個圓軌道的半徑 $r_+, r_- (r_+ > r_-)$ 。

(B) 承(A)小題，判斷 $r = r_+$ 及 $r = r_-$ 這兩個圓軌道是否為穩定軌道。

(C) 假設 $r = r_+$ 這個圓軌道為穩定軌道，考慮行星稍微偏離 $r = r_+$ 這個圓軌道的徑向運動，即 $r = r_+ + \delta r$ ，且 $|\delta r| \ll r_+$ 。行星會在徑向作簡諧運動，求徑向運動的角頻率 ω_r ，以 G, M, r_+, r_- 表示之。

提示：

- 不要被廣義相對論嚇到!
- 什麼是「圓」軌道?
- 什麼是「穩定」軌道?
- 簡諧運動的方程式是什麼?

以平面極座標描述二維運動¹

在二維極座標中，使用 \hat{r} 與 $\hat{\theta}$ 單位向量描述方向，任一點的位置可由 $[r, \theta]$ 給出。單位向量的大小不隨時間改變。當某物體在時間 Δt 內轉過角度 $\Delta\theta$ ，其角速度 (angular velocity) 定義為

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

您可能會需要微分的乘法律 (product rule)，

$$\frac{d}{dx}[f \cdot g] = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

1. 在下方繪製極座標示意圖，選定一個點，並標示 r, θ, \hat{r} 與 $\hat{\theta}$
2. 以 ω 與單位向量表示 \hat{r} 與 $\hat{\theta}$ 隨時間的變化率，即 $\frac{d\hat{r}}{dt}$ 與 $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$ 。
3. 以 $r, \theta, \hat{r}, \hat{\theta}$ 與其對時間的導數表示速度 v 。
4. 將速度微分，得到加速度 a 。您僅能用 $r, \theta, \hat{r}, \hat{\theta}$ 與其對時間的一次與二次導數表示之。
5. 加速度的徑向部分包含線性加速度(Translation acceleration)與向心加速度(Centrifugal acceleration)，切向部分則包含科氏加速度(Coriolis acceleration)與尤拉加速度(Azimuthal acceleration)²。寫出這四項的表達式。

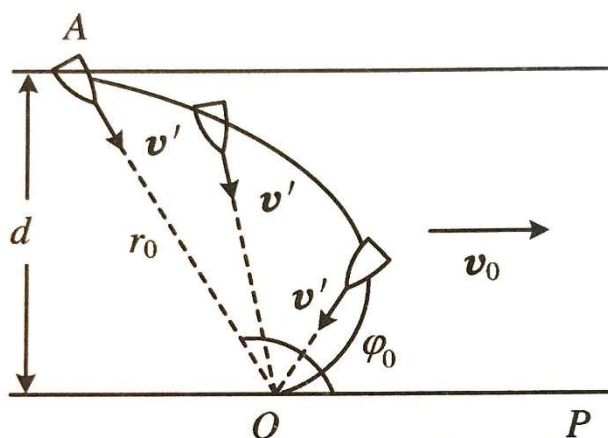
¹ 2009 年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊選訓教材 第一冊

² Introduction to Classical Mechanics With Problems and Solutions. David Morin, 2008.

湍流中固定指向的小船³

如圖，一小船 A 在水流流速 v_0 ，寬 d 的河道中，時時刻刻皆朝 O 點以固定速率 v' 移動。已知 $\overline{AO} = r_0$ 、 $\angle AOP = \phi_0$ ，試求船由 A 至 O 的軌跡方程式。

提示：以 O 為原點，建立極座標。



³ 物理學難題集萃 上冊。舒幼生、胡望雨、陳秉乾。