課後練習：基礎向量分析

馬克士威方程組 Maxwell's Equations

相信你之前可能有聽過傳說中的馬克士威方程組。它描述了電場 $\boldsymbol{E}$ 與磁場 $\boldsymbol{B}$ 的特性。在真空中，其微分形式為

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4}$$

其中 ρ 是單位體積的帶電量，即電荷密度，$\boldsymbol{J}$ 是單位面積的電流，又稱電流密度，而 μ_0 與 ϵ_0 為兩個常數，分別稱為真空磁導率與真空介電常數。看起來難度 MAX! Well，學過基本的向量分析後，使用散度定理、旋度定理噢先備知識，請嘗試解讀這些公式的意義：

a) 通量 (flux) 是通過一表面的某物理量，如國中學過的「磁通量」就是磁場乘以面積，更精確地說是

$$\text{Flux}=\iint_{\text{某個面積}}\text{某個物理量}\cdot d\boldsymbol{A}$$

考慮一邊長 a 的正方形，一磁場 B 以入射角 θ 照射在正方形上。求通過此正方形的磁通量，注意正負號。

b) 使用一半徑 R 的球將一點電荷 q 包圍。由此證明電磁學中的高斯定律，即通過該球電通量為其包含電荷 (enclosed charge) 的 $1/\epsilon_0$ 倍。

c) 由 (2) 說明磁單極 (magnetic monopole) 不存在 (提示：回想(a)小題並思考為何點電荷存在)

d) 於一平面上，考慮一個半徑 R 的圓形。在此平面上有各點相同、垂直平面，但隨時間變化的磁場 $B_0(t)$。

(i) 說明為何在任一時刻，沿此圓形邊長的感應電場皆相同，和方位角無關。

(ii) 使用 (3) 式求出此感應電場，以磁場 B_0 與半徑 R 表示。

(iii) 假設 $B_0(t)=kt^2$，並將圓形由原本方位沿某一直徑旋轉 30°，求出感應電場隨時間的函數 $E_{ind}(t)$。

e) 將變動的磁場移除。將一通有穩定電流 I 的導線穿過該圓形區域，而電流勢必會造成圓形區域邊長上存在磁場。使用類似 (d) 的方法，利用 (4) 式求出此磁場。

f) 承 (e)，在該平面上加上各點相同、垂直平面且隨時間變動的電場 $E_0(t)$。變化的電場會造成額外的磁場。為此，修正 (e) 的答案，以 $E_0(t)$ 、其時間導數與已知參數表示。

由上述的討論，國中時學到的「變化的磁場產生電流、變化的電場產生磁場」的概念被證實了，而馬克士威方程組背後的意義也不言而喻。

解答：

a) 通量進入正方形，取負號。Flux $= \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = -BA\cos\theta = -Ba^2\cos\theta$

b) $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Longrightarrow \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{dV} = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0}dV \Longrightarrow \oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{A} = Q/\epsilon_0$

c) 重複 (b) 的討論，可得磁學中相當於電學的電荷 Q 為零，代表不存在單純的 N 或 S 極，亦即磁單極不存在。

d) (i) 由對稱性，如果和方位角有關，將整個形狀旋轉，物理狀況相同，因此感應電場必須相同，產生矛盾。

(ii)由 Stoke's Theorem，

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \Longrightarrow \oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} \Longrightarrow 2\pi rE = -\frac{\partial}{\partial t}(\pi r^2 B) = \pi r^2\frac{\partial B}{\partial t}$$

上式將環積分計算於半徑 r 的圓形上。取 $r = R$，得

$$E = \frac{R}{2}\frac{\partial B_0(t)}{\partial t}$$

(iii) $B_0(t) = kt^2 \Longrightarrow \frac{\partial B_0}{\partial t} = 2kt$

旋轉 30° 後，有效截面積只剩原本的 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$，感應電場也會以相同的比例減少，所以

$$E(t) = \frac{R}{2}\frac{\partial B_0(t)}{\partial t}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}R}{2}kt$$

e) 由於電流恆定，此系統的電場不隨時間變化，即 $\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$，因此

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\boldsymbol{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{J} \Longrightarrow \oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0\iint \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{A} = \mu_0 I_{enc}$$

其中 $I_{enc} = \iint \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{A}$ 是環積分邊境所包含的淨電流 (net enclosed current)。此系統 $I_{enc} = I$，在導線外 r 處取一圓環包圍之，則

$$2\pi rB = \mu_0 I \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}I$$

f) 此時

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E_0(t)}{\partial t}$$

(e) 修正為

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\boldsymbol{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{J} \Longrightarrow \oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0\iint \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{A} + \mu_0\epsilon_0\iint\frac{\partial\boldsymbol{E_0}(t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{A}$$

同上小題取一圓環討論，則 $\iint\frac{\partial\boldsymbol{E_0}(t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{A} = \pi r^2\frac{\partial E_0(t)}{\partial t}$，因此

$$2\pi rB = \mu_0 I + \pi r^2\frac{\partial E_0(t)}{\partial t} \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}I + \frac{r}{2}\frac{\partial E_0(t)}{\partial t}$$