轉動例題彙編

何承祐

2023/08/12

1 反直覺的圓周運動

如圖所示，在一等角速度旋轉的轉盤上靜止放下一顆質量爲m，半徑爲a 的撞球。撞球不但不會直接受到離心力的作用而快速向外飛出，還會在圓盤上滾動。追蹤其軌跡可以發現撞球繞的是一個圓。

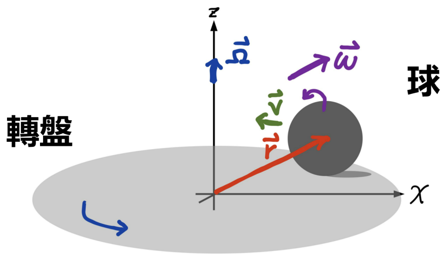

Figure 1: 圖(一)

假設轉盤旋轉的角速度爲$\vec{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$，球的半徑爲$a$，則

(a) 由於球進行純滾動，在其和圓盤的接觸面上會有一摩擦力$\vec{F}$。令球的旋轉角速度爲$\vec{\omega}$，平移速度爲$\vec{v}$，以轉動中心爲原點的位置向量爲$\mathbf{r}$，寫出$\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{dt}}$ 的表達式，以轉動慣量I 及已知參數表示之。

(b) 我們最後會期待得到圓周運動的解。我們可以把$\vec{a} = \vec{\Omega}' \times \vec{v}$ 寫成

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} = \Omega'\hat{\mathbf{z}} \times \vec{v}$$

其中Ω' 就是球進行圓周運動的角速度。以m, r, I, Ω 表示Ω'。

(c) 寫出此影片[2]出現(b) 得出的公式的時間。以_____分_____秒表示。答案不唯一，只要該瞬間畫面有出現都給分。

(d) 代入實心球的轉動慣量$I = \frac{2mr^2}{5}$，並求出「轉盤每轉一圈，球會進行圓周運動轉幾圈」？

(e) 以上便足以解釋我們看到的圓周運動。假設$t=0$時$\vec{v}=\vec{v_0}, \vec{r}=\vec{r_0}$，將(b) 的結果積分，並化爲

$$\vec{v}=\vec{\Omega}'\times(\vec{r}-\vec{r_c})$$

r_c 即爲球進行圓周運動的圓心。以$\vec{r_0}$ 與$\vec{v_0}$表示$\vec{r_c}$。

2 網球拍定理

想像你現在手中有一個網球拍，你拿著握柄，拍面朝上。你可以很輕鬆地讓球拍沿著通過握柄的軸旋轉，也可以讓它在拍面的平面旋轉(可能要比較用力)。不過，你卻無法讓它沿著下圖的x_2 軸旋轉，也就是說這個軸不穩定。這便是著名的網球拍定理(其實拿比較薄的書本也有這個現象)。下圖三個軸的標示是按照$I_1>I_2>I_3$ 的順序，其中I_k 是球拍繞軸x_k 的轉動慣量。

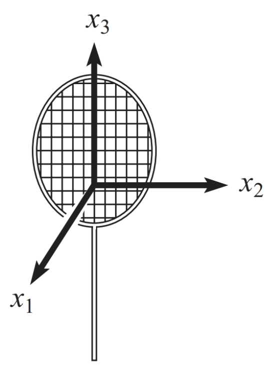

Figure 2: 圖(二) 網球拍[1]

我們將使用歐拉公式[3](轉動力學的，不是$e^{i\theta}=...$ 等等)來證明這件事，如下

$$\tau_1=I_1\dot{\omega_1}+(I_3-I_2)\omega_3\omega_2$$

$$\tau_2=I_2\dot{\omega_2}+(I_1-I_3)\omega_1\omega_3$$

$$\tau_3=I_3\dot{\omega_3}+(I_2-I_1)\omega_2\omega_1$$

這些公式有循環(Cyclic) 的關係。

(a) 考慮微分方程

$$\ddot{x}=kx$$

就實數k 的正負討論解的差異。

(b) 用$\frac{\partial\vec{L}}{\partial t}$ 和角速度ω 表示$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{dt}}$。

(c) 假設$\vec{\mathrm{L}}=(I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$，展開(b) 得到的結果，並化簡求出歐拉公式。

(d) 回到網球拍的轉動，假設我們先讓球拍以x_1 爲轉軸旋轉，則可以令$t=0$時$\omega_2=\epsilon_2$ 與$\omega_3=\epsilon_3$ 爲兩個無窮小量，代表微小的偏移。證明此轉動穩定。忽略重力。

(e) 同理，分析繞x_2 的轉動是否穩定。

(f) 同理，分析繞x_3 的轉動是否穩定。

(g) 前面三個小題有一個的結果不同，由已知條件解釋爲何會如此。

References

[1] David Morin. Introduction to classical mechanics with problems and solutions. pages 393–455, 2008.

[2] Steve Mould. The Turntable Paradox.

[3] Wikipedia. Euler's Equations (Rigid Body Dynamics).