

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科別：物理與天文學科

作品名稱：旋轉吸管灑水器理論模型與實驗分析

關鍵詞：力學模型、摩擦因子、表面張力

編號：

摘要

為分析浸於水中旋轉的三角形吸管中噴出水珠的噴出速度，首先考慮簡化的質點力學模型。得出質點的運動方程式後，考慮黏滯力、表面張力等流體性質與空氣阻力，作為物理模型的修正。透過探討吸管沒入深度、管徑與三角形形狀對噴出初速的影響，發現理論與實驗吻合，且能透過理論模型得出使噴出速度最大化的條件。此裝置可做為簡易的灑水器，且本研究得出的理論可用以推算使灑水效益最佳的實驗參數。

壹、前言

一、研究動機

在校園或公園的草坪上，經常能看到定時啟動的灑水器。然而，對大眾而言，與其購買灑水設備，自行 DIY 是更方便的選擇。在網路上的一個影片中¹，只要把吸管折成一個三角形，把端點剪去，並將兩端接合處放在水中旋轉，水就會噴出，達到灑水的目的。如果再加上馬達，便能省去自己灑水的麻煩。這個現象十分有趣且非常實用，因此就對此進行了研究。除了了解旋轉吸管灑水器的原理外，也希望能優化裝置，達到更理想的噴水效果。

二、研究目的

- (一). 分析簡化的力學理論模型
- (二). 探討物理模型的修正項
- (三). 探討沒入深度對噴出初速的影響
- (四). 探討吸管管徑對噴出初速的影響
- (五). 探討吸管邊長對噴出初速的影響
- (六). 探討吸管側邊傾角對噴出初速的影響，並透過理論決定使噴出速度最大的傾角

¹ https://www.youtube.com/watch?v=LbS4w_DfS9Y&ab_channel=d%27ArtofScience

貳、研究設備及器材

一、器材列表

表 1：實驗器材列表。

名稱	數量	名稱	數量
板凳	2 個	長條木板	1 個
旋轉馬達	1 個	電源供應器	1 台
橡膠水管 (連接水源)	1 條	吸管	各種尺寸，見表 1
水桶	1 個	72cm 直尺	10 把
大型量角器	1 個	LED 燈板	1 個
相機架	1 個	錄影設備 (iPhone 7 Plus)	1 個

表 2：三角形吸管編號與詳細資料列表，見圖 2。

編號	管徑 $2a$ (mm)	側邊長 l (mm)	頂邊長 l_{top} (mm)
A	12	7	7
B	8	7	7
C ₁	6	7	7
C ₂	6	5	5
C ₃	6	3	3
D	4	7	7
E	6	7	10.5

二、實驗裝置圖

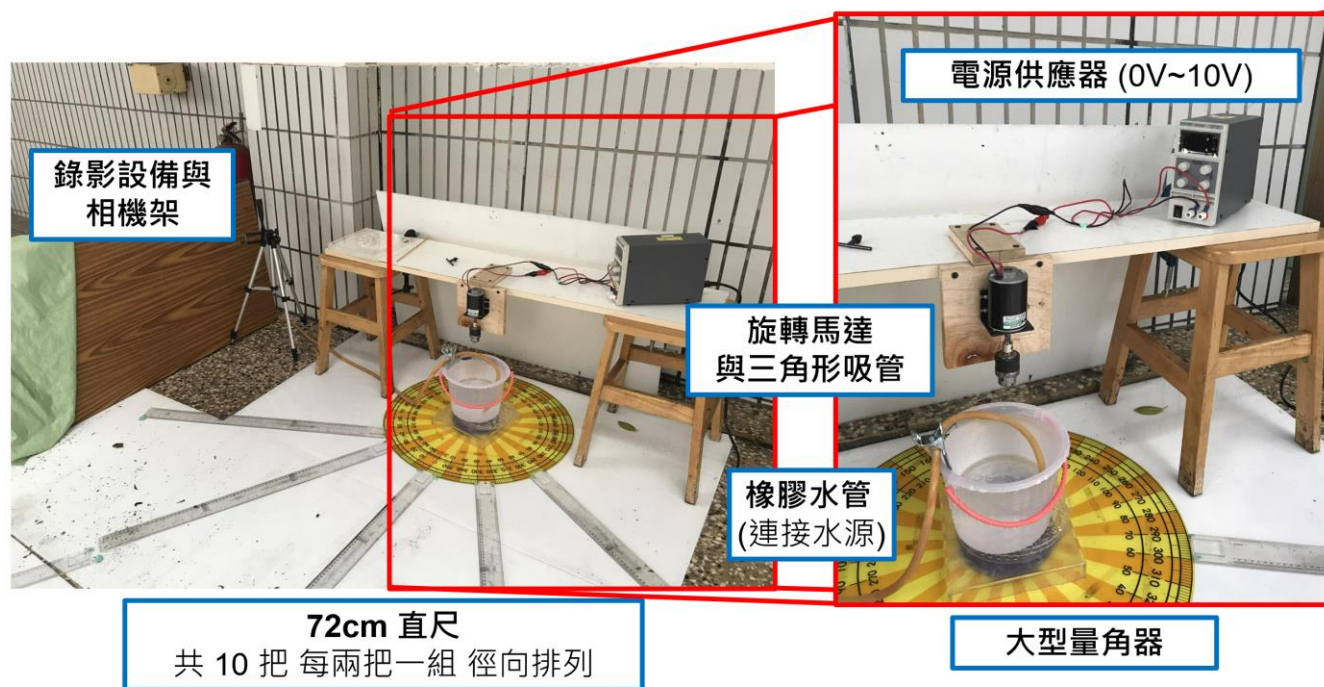


圖 1：實驗裝置圖



圖 2：三角形吸管與編號

三、物理量代號列表

表 3：物理量代號、單位與意義列表

符號	單位	意義
Ω	rad/s	馬達旋轉角速度 (實驗上由影片中得到)
l	m	三角形吸管側邊長
l_{top}	m	三角形吸管頂邊長
a	m	吸管半徑
h_0	m	吸管沒入深度
R	m	噴出水柱
v	m	出口速度，依下標有不同意義。 v_{exp} 為實驗上由射程反推得出口速度，而 v_{th} 則為給定其他參數，由理論模型得出的出口速度。
ϕ	rad	側邊傾角，可定義為 $\phi = \cos^{-1} \frac{l_{top}/2}{l}$ 。
H_E	m	實驗時水桶被架高的高度，使用於 v_{exp} 的計算中
H_W	m	實驗時水桶內的水深，使用於 v_{exp} 的計算中

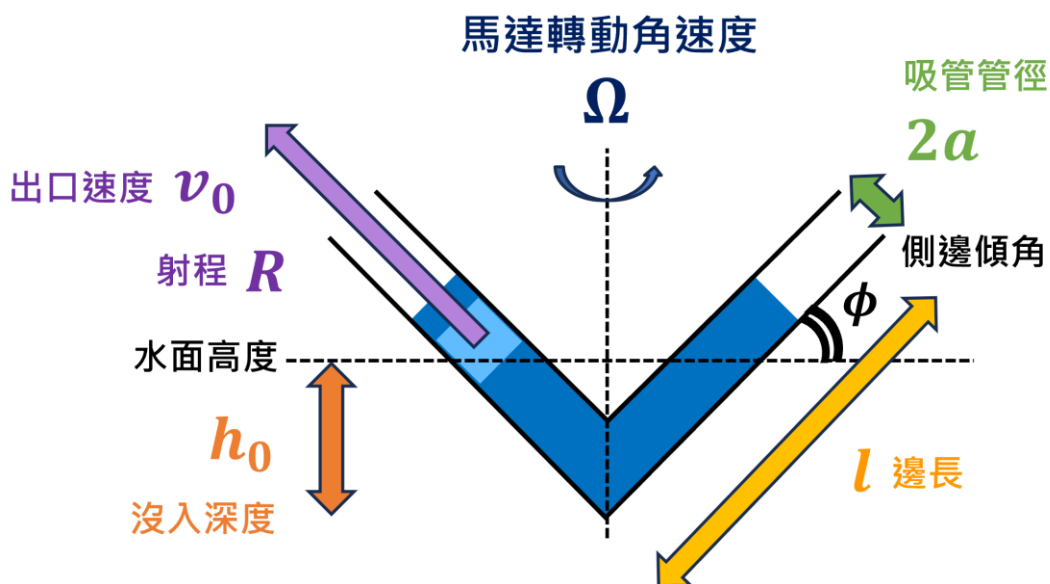
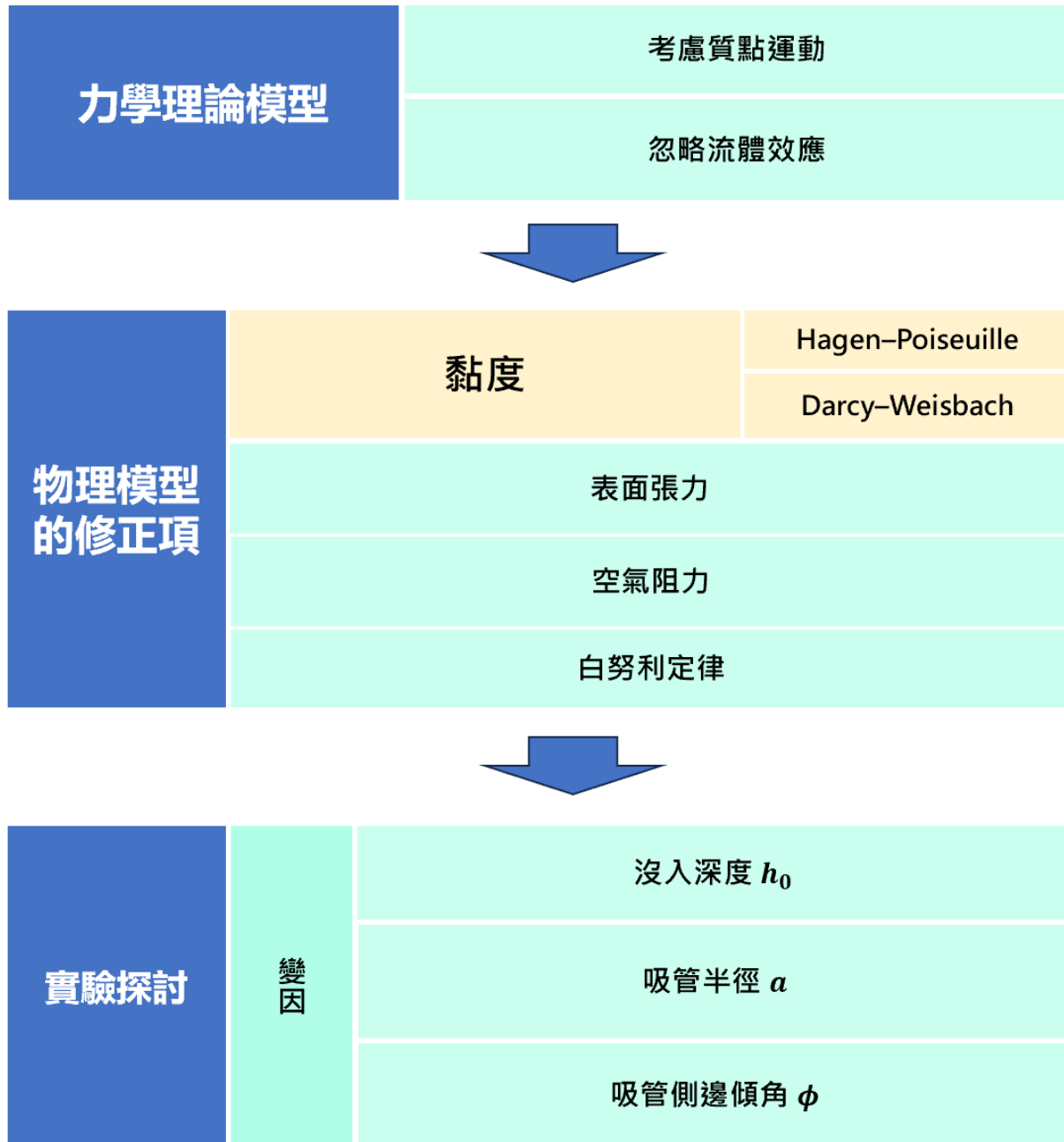


圖 3：各物理量意義示意圖。V 型圖案為三角形吸管的二維截面 (頂邊省略)。

參、研究過程與方法

一、研究流程圖



二、實驗方法

1. 架設實驗裝置如圖 1。
2. 將三角形吸管 (見圖 2 與表 2) 的黑色長柄拴緊至馬達底部。
3. 由 0V 開始，調整電源供應器電壓，紀錄各電壓與對應的噴出水珠射程。由於噴出的水珠落在地面上有一範圍，應紀錄水滴落下的最近點與最遠點，以其平均值作為射程的測量值，並以兩者之差的一半作為誤差。
4. 由錄影設備 (以 240fps、720p) 錄製的影片分析並記錄各電壓下的轉速 Ω 。
5. 將實驗的轉速 Ω 與射程 R 數據轉為噴出速度 v ，和理論進行比較與討論。

肆、研究結果與討論

一、力學理論模型

考慮一位於三角形吸管兩側邊中的質點 m ，且吸管以角速度 Ω 繞其中心軸旋轉。在此系統中建立柱狀坐標系，以旋轉軸為 z 軸，質點到旋轉軸的垂直距離為 r 且方向角為 θ 。牛頓第二運動定律的形式為

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}] + \dot{z}\hat{\mathbf{z}} \quad (1)$$

其中吸管的旋轉使 $\dot{\theta} = \Omega$ 且 $\ddot{\theta} = 0$ 。由圖 4，此質點受到重力 mg 與正向力 N 。

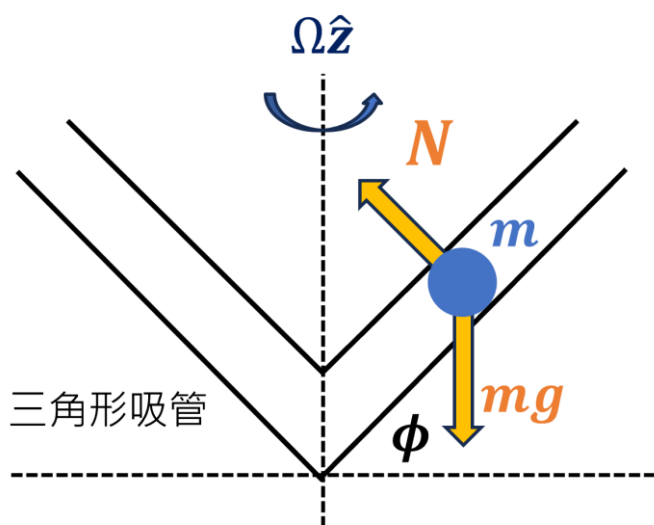


圖 4：質點 m 的受力分析

在 \hat{r} 方向

$$\ddot{r} - r\Omega^2 = -\frac{N}{m}\sin\phi \quad (2)$$

且在 \hat{z} 方向

$$N\cos\phi - mg = m\ddot{z} \quad (3)$$

另外由於質點被限制在吸管内

$$\tan\phi = \frac{\dot{z}}{\dot{r}} \quad (4)$$

整理 (2)、(3)、(4) 可得

$$\ddot{r} - r(\Omega\cos\phi)^2 = -g\sin\phi\cos\phi \quad (5)$$

此式的通解為

$$r(t) = A'\sinh\Omega't + B'\cosh\Omega't + \frac{g\sin 2\phi}{2(\Omega\cos\phi)^2} \quad (6)$$

假設 $t = 0$ 時 $r(t = 0) \neq 0$ ，設 $r(t = 0) = r_0, z = \dot{r} = \dot{z} = 0$ ，則

$$r(t) = \left(r_0 - \frac{g\sin 2\phi}{2\Omega'^2}\right)\cosh\Omega't + \frac{g\sin 2\phi}{2\Omega'^2} \quad (7)$$

其中 $\Omega' = \Omega\cos\phi$ 。定義

$$r_{0c} = \frac{g\sin 2\phi}{2\Omega'^2} \quad (8)$$

則

$$r(t) = (r_0 - r_{0c})\cosh\Omega't + r_{0c} \quad (9)$$

(9) 即為描述質點運動的方程式。由(8)可知，質點若能向上運動，對初始條件的限制為

$$r(t = 0) > r_{0c} \quad (10)$$

設球離開吸管時 $t = \tau$ ，則 $r(\tau) = l\cos\phi$ ，解得

$$\tau = \frac{1}{\Omega'}\cosh^{-1}\left(\frac{l\cos\phi - r_{0c}}{r_0 - r_{0c}}\right) \quad (11)$$

為探討出口速度，將 $r(t)$ 微分得徑向速度

$$\dot{r}(t) = \left(r_0 - \frac{g \sin 2\phi}{2\Omega'^2} \right) \Omega' \sinh \Omega' t \quad (12)$$

由於 $\dot{z} = \dot{r} \tan \phi$, $v = \sqrt{\dot{z}^2 + \dot{r}^2} = \dot{r} / \cos \phi$ ，沿著吸管方向 (即 $\hat{r} \cos \phi + \hat{z} \sin \phi$) 的速度為

$$v(t) = \left(r_0 - \frac{g \sin 2\phi}{2\Omega'^2} \right) \frac{\Omega'}{\cos \phi} \sinh \Omega' t \quad (13)$$

離開吸管時 $t = \tau$ ，將 (11) 代入 (13) 得到出口速度 v_{th} 的表達式：

$$\begin{aligned} v_{th} = v(\tau) &= \left(r_0 - \frac{g \sin 2\phi}{2\Omega'^2} \right) \frac{\Omega'}{\cos \phi} \sinh \left[\cosh^{-1} \left(\frac{l \cos \phi - r_{0c}}{r_0 - r_{0c}} \right) \right] \\ &= \left(r_0 - \frac{g \sin 2\phi}{2\Omega'^2} \right) \frac{\Omega'}{\cos \phi} \sqrt{\left(\frac{l \cos \phi - r_{0c}}{r_0 - r_{0c}} \right)^2 - 1} \end{aligned} \quad (14)$$

將上述討論的質點換成吸管内一段微小的水塊，即為本現象的物理模型。考慮水的運動，除了出口速度外，亦可決定流率

$$Q = \rho(\pi a^2) v(\tau) = \rho \pi a^2 \left(r_0 - \frac{g \sin 2\phi}{2\Omega'^2} \right) \frac{\Omega'}{\cos \phi} \sqrt{\left(\frac{l \cos \phi - r_{0c}}{r_0 - r_{0c}} \right)^2 - 1} \quad (15)$$

實驗上，為了驗證上述理論模型，可量測噴出水珠的射程反推出口速度 v_{exp} ，進而和理論值 v_{th} 。令噴出的水珠花了 Δt 落地，忽略空氣阻力，由運動學可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 - v \Delta t \sin \phi &= H_E + H_w - h + l \sin \phi \equiv H \\ v t \cos \phi &= R \end{aligned} \quad (16)$$

相關符號的意義請見表 3。求解 (17) 式得到

$$v_{exp} = \sqrt{\frac{g R^2}{2 \cos^2 \phi (H + R \tan \phi)}} \quad (17)$$

上式中 $H = H_E + H_w - h + l \sin \phi$ 。

二、物理模型的修正項

單純使用質點力學模型擬和實驗數據，發現兩者不甚吻合，因而發現必須考慮有關流體與阻力的修正。

1. Darcy–Weisbach equation²

當流體通過水力直徑 (hydraulic diameter) D_H 的管道時，壓力差 Δp 滿足

$$\frac{\Delta p}{L} = f_D \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \frac{v_{avg}^2}{D_H} \quad (18)$$

其中 v_{avg} 是平均流速， f_D 稱為摩擦因子 (Darcy friction factor)。層流情況下

$$f_{D,lam} = \frac{64}{Re} \quad (19)$$

其中雷諾數 Re (Reynold's number) 定義為

$$Re = \frac{\rho v_{avg} D_H}{\mu} \quad (20)$$

紊流時，若管壁光滑 (smooth-pipe regime)，由經驗公式 Kármán–Prandtl resistance equation³

$$\frac{1}{\sqrt{f_{D,turb}}} = 1.930 \log(Re \sqrt{f_{D,turb}}) - 0.537 \quad (21)$$

代入符合實驗情形的參數 $h_0 = 5 \times 10^{-3}$ m 並使用吸管 D 的其他參數，由 (20) 得 $Re \approx 11500$ 。因 $Re > 3500$ ，以下分析將以紊流為主，即用 Python 數值解 (21) 得出係數 f_D 。管道截面為半徑 a 的圓形時 $D_H = 2a$ ， $Re = \frac{2\rho v_{avg} a}{\mu}$ 。

考慮黏度，設 $v_{avg} = v(\tau)/2$ ，由 (18)

$$\Delta p = \frac{f_D \rho L v^2(\tau)}{16a} \quad (22)$$

此壓力差可視為在力學理論模型上一個額外的力 $F_p = \pi a^2 \Delta p = \frac{\pi a f_D \rho l v^2(\tau)}{16}$ ，方向沿吸管。在 \hat{z} 方向上可視為等效重力

$$\begin{aligned} \pi a^2 l g' &= \pi a^2 l g + F_p \sin \phi \\ g' &= g + \frac{f_D \rho v^2(\tau)}{16a} \end{aligned} \quad (23)$$

² Howell, Glen (1970-02-01).

³ Rouse, H. (1946).

探討此修正的效應，如圖 5，比較不考慮黏滯力 (Theory (No Viscosity)，僅以式 (14)) 與考慮黏度 (Theory (Darcy-Weisbach Equation)，式 (23)) 的 $v_{th}(\Omega)$ 線比較。兩者差異小，放大刻度才能觀察出差異，可發現此修正對速率 $v_{th}(\Omega)$ 的影響不高。

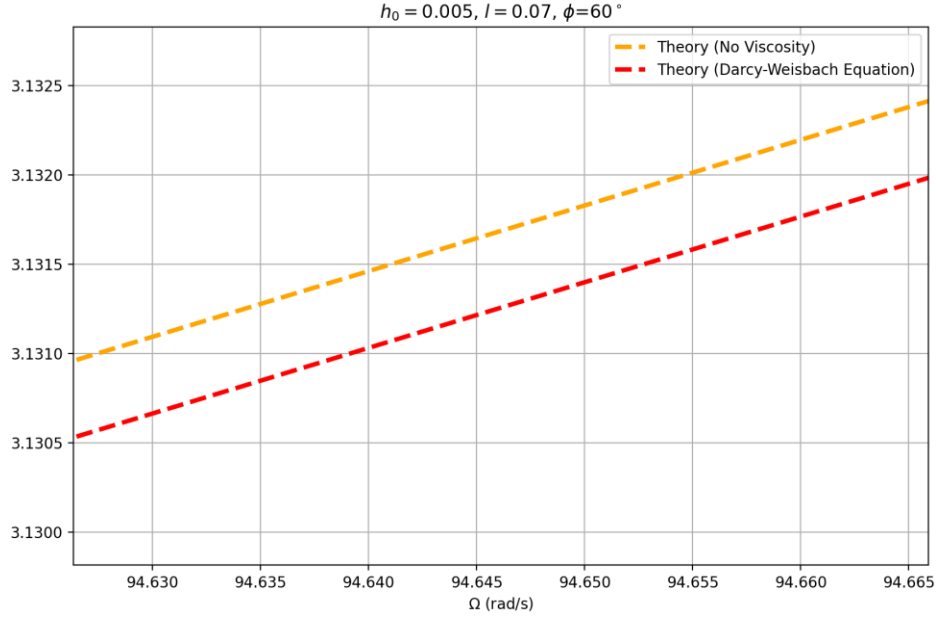


圖 5：不考慮黏滯力與考慮黏度的 $v_{th}(\Omega)$ 線比較

2. 表面張力

若吸管的液體垂直管壁，在吸管中液體將受到恆定的表面張力

$$T = 2\pi a\gamma \quad (24)$$

其中水的表面張力 $\gamma = 72 \text{ mN/m}$ 。由於此力恆定，亦可視為對重力加速度 g 的修正。若表面張力造成的修正等效於施加在長度 l_{eff} 水柱之加速度，即

$$a_\gamma = \frac{T}{\pi a^2 l_{eff} \rho} = \frac{2\gamma}{a l_{eff} \rho} \quad (25)$$

則繼 (23)，修正 g 為 g'' ，其中

$$g' = g + \frac{f_D \rho v^2(\tau)}{16a} - \frac{2\gamma}{a l_{eff} \rho} \quad (26)$$

其中 l_{eff} 亦可修正吸管内液面不垂直管壁，接觸邊長大於 $2\pi a$ ，以致於表面張力比 (24) 預測的高的情形。以 (26) 給出的等效重力加速度 (選擇 $l_{eff} = l/9$) 和 (23) 式的理論線比較，可得圖

6。比較不考慮表面張力 (Theory (No Surface Tension) ，式 (23))) 與考慮表面張力 (Theory (Surface Tension) ，式 (26)) 的 $v_{th}(\Omega)$ 線比較，可發現兩者差異顯著，表面張力效應不容忽略，推論是表面張力的作用有二：

1. 由於提供額外的上升力，其減少了水柱能向上運動的門檻，即降低了 r_{0c} ，故可觀察到在較小的 Ω 水珠即能噴出。
2. 向上的表面張力使水珠往 $+\hat{z}$ 加速時能獲得更多速度，故 $v_{th}(\tau)$ 提高。

3. 空氣阻力

由於實驗上測量水珠噴出距離決定 v_{exp} ，必須考慮水珠在飛行過程中受空氣阻力

$$F_D = \frac{1}{2} \rho_{air} v^2 C_D A \quad (27)$$

的影響，其中 A 為截面積，將水珠近似為半徑 r_{drop} 的球體，則

$$A = \pi r_{drop}^2 \quad (28)$$

$\rho_{air} = 1.293 \text{ kg/m}^3$ 為空氣密度，而 C_D 為阻力係數。對一球體⁴， $C_D = 0.47$ 。水滴的質量為

$$m_{drop} = \frac{4}{3} \pi r_{drop}^3 \rho_{H_2O} \quad (29)$$

水滴的運動方程式為

$$\begin{cases} m_{drop} \frac{dv_x}{dt} = -kv_x^2 \\ m_{drop} \frac{dv_y}{dt} = -kv_y^2 - m_{drop}g \end{cases} \quad (30)$$

其中 $k = \frac{1}{2} \rho_{air} C_D \pi r_{drop}^2$ 。將符合實驗狀況的數值 $r_{drop} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$ 、 $v_y = 5 \text{ m/s}$ 得 $k = 3.82 \times 10^{-6}$ 、 $m = 3.35 \times 10^{-5}$ 。由此可得 $mg = 3.28 \times 10^{-4}$ 及 $kv_y^2 = 9.55 \times 10^{-5}$ ，兩者數量級相近，因此後者相對於重力不可忽略。然而，由於求解 (30) 並推算射程的困難性，空氣阻力難以精算。將上述數值代入 (22)，可得空氣阻力 F_D 造成得速度變化在 $2.3 \text{ m/s} \sim 10^0$ 的數量級。分析實驗數據後，發現若將以下將數值模擬的結果加上速度修正項

$$\Delta v_D \approx 2 \text{ m/s} \quad (31)$$

⁴ Baker, W.E. (1983).

實驗與理論將會較為吻合。由於此修正項不隨討論的變因而需要巨幅改變，此應被視為合理的修正。

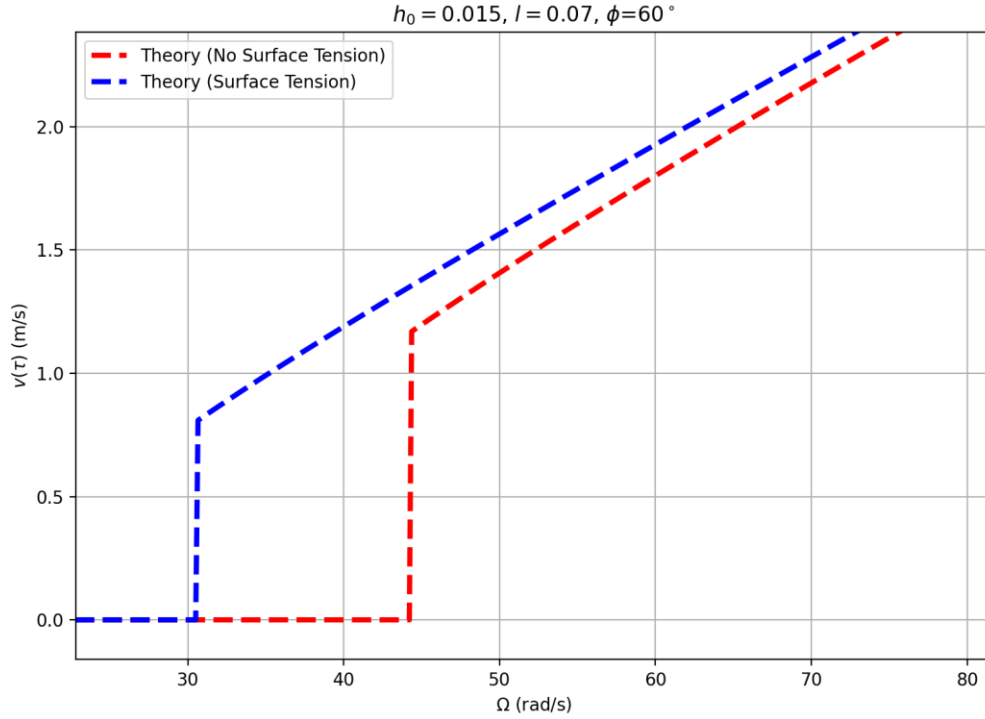


圖 6：不考慮表面張力與考慮表面張力的 $v_{th}(\Omega)$ 線比較

4. 白努利定律 Bernoulli's Law

由白努利定律，吸管內的水若在壓力 p_1 、高度 $h_1 = 0$ 、流速 $v_1 = 0$ 處，上升至壓力 p_2 、高度 $h_2 = l \sin \phi$ 、流速 $v = v(\tau)$ 處，將有壓力差

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho v(\tau)^2 + \rho g h \quad (32)$$

等效重力可修正為

$$g' = g + \frac{f_D \rho v^2(\tau)}{16a} - \frac{2\gamma}{a l_{eff} \rho} - \frac{\Delta p_{bern}}{\rho g l} \quad (33)$$

(33) 等號右方的四項分別代表重力加速度、黏度修正項、表面張力修正項與白努利定律修正項。由圖 7 可知白努利定律的修正不容忽略。

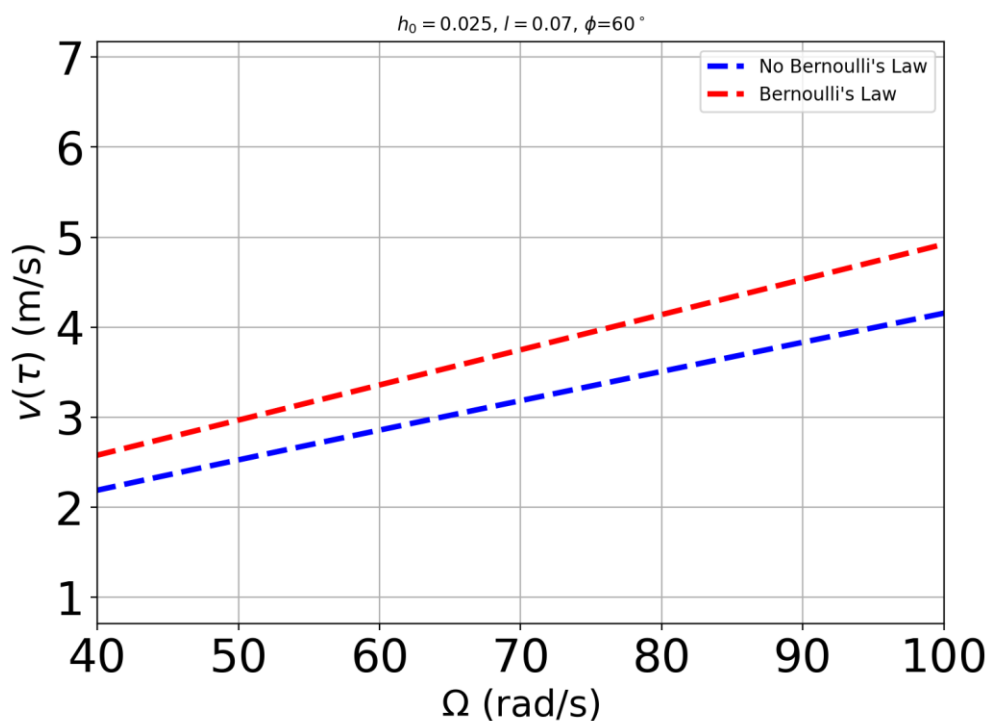


圖 7：不考慮白努利定律與考慮白努利定律的 $v_{th}(\Omega)$ 線比較

三、探討沒入深度對噴出初速的影響

使用編號 D (管徑 $2a = 4\text{mm}$) 正三角形吸管，沒入水中 $h = 5\text{mm}, 15\text{mm}, 25\text{mm}$ ，調整電源供應器電壓，測量不同轉速時的射程 R ，並反推初速 v 與理論比較。

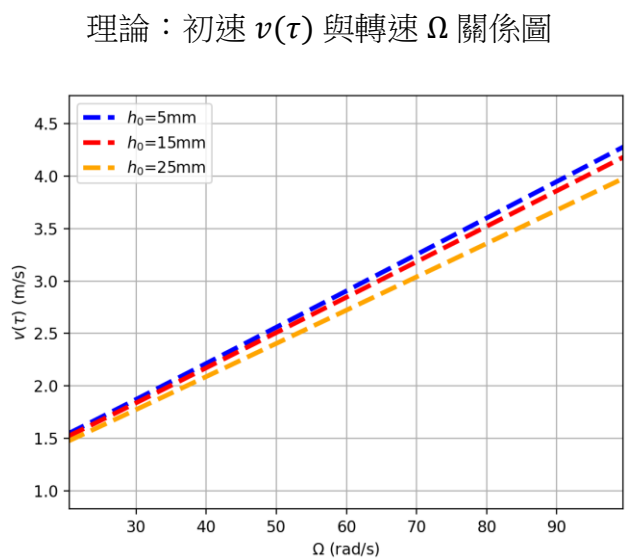
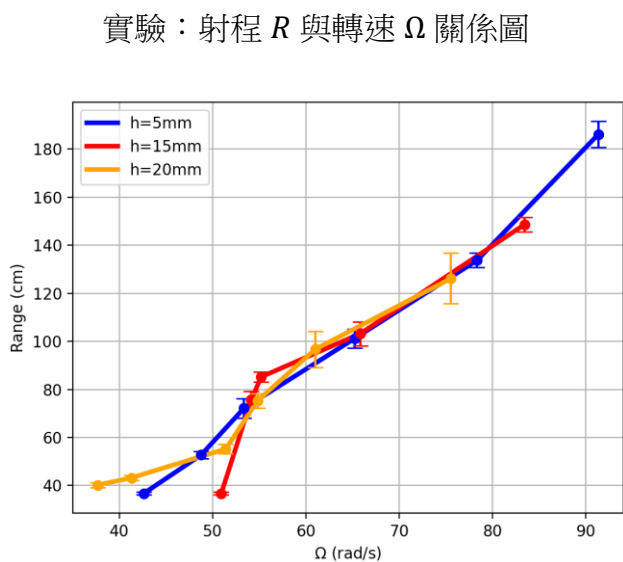


圖 8：不同沒入深度之實驗與理論數值趨勢圖

由上圖發現不同沒入深度似乎對射程 R 或初速 $v(\tau)$ 影響不大。使用 (17) 式由實驗得到的射程反推初速，並將實驗與理論疊合得下圖。為展示空氣阻力修正項的必要性，圖 9 是未加上 (31) 式修正的結果，而圖 10 是加上修正的結果。由此可見經過修正後，理論與實驗吻合。以下數據的理論線皆呈現完整修正後的結果。

圖 9：不同沒入深度之實驗與理論數值未加上(33)式修正的結果疊合，其中虛線是 (26) 預測的理論線，附上誤差槓的實心數據點則是實驗數據

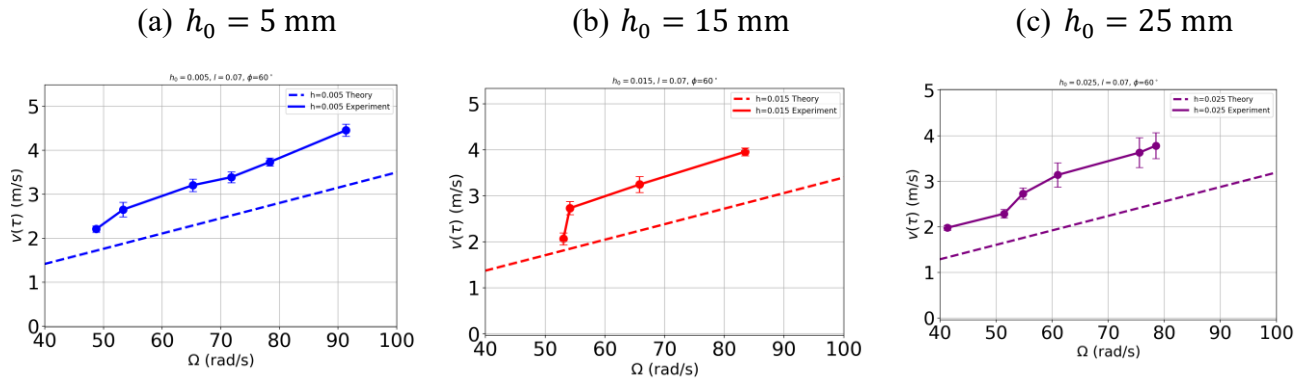
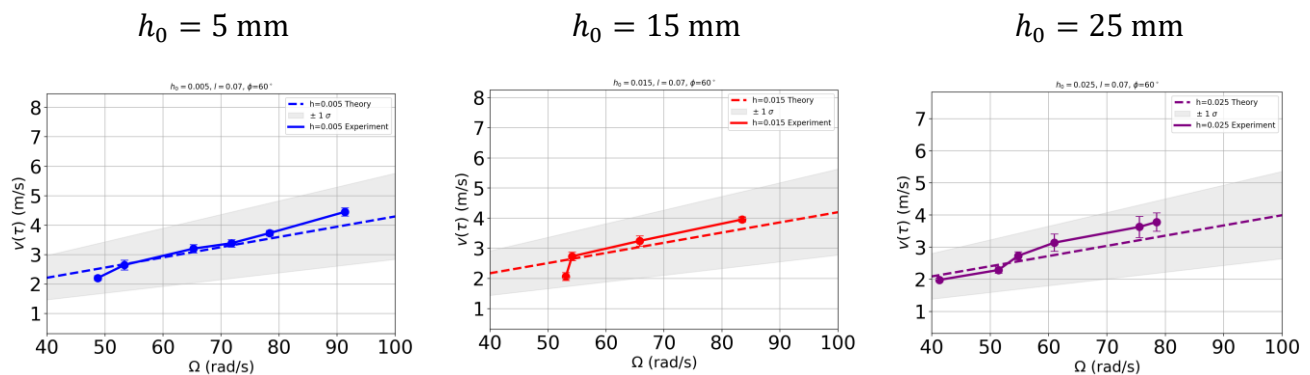


圖 10：不同沒入深度之實驗與理論數值加上(33)式修正的結果疊合，其中虛線是 (26) 預測的理論線，附上誤差槓的實心數據點則是實驗數據，灰色區域為 $\pm 1\sigma$ 的信心水準。

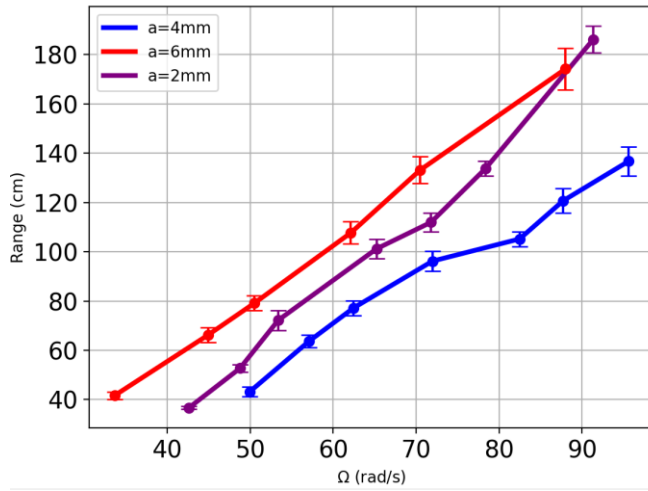


四、探討吸管管徑對噴出初速的影響

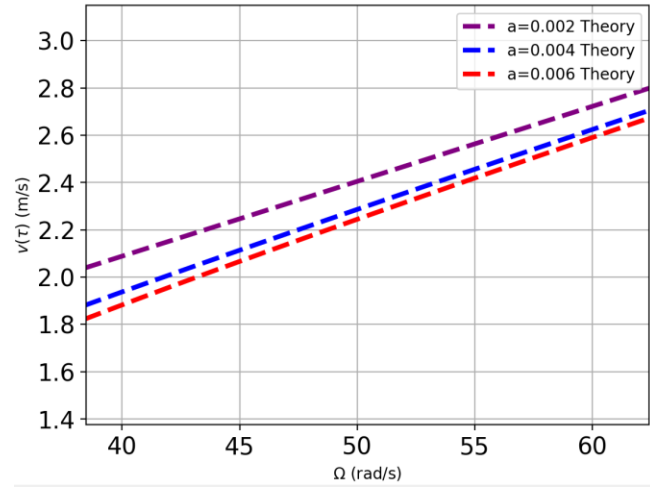
使用編號 B (管徑 $2a = 8\text{mm}$)、編號 A (管徑 $2a = 12\text{mm}$)，綜合先前編號 D 吸管的相關數據，正三角形吸管，沒入水中 $h = 25\text{mm}$ ，調整電源供應器電壓，測量不同轉速時的射程 R ，並反推初速 v 與理論比較。

圖 11：不同吸管管徑之實驗與理論數值趨勢圖

實驗：射程 R 與轉速 Ω 關係圖

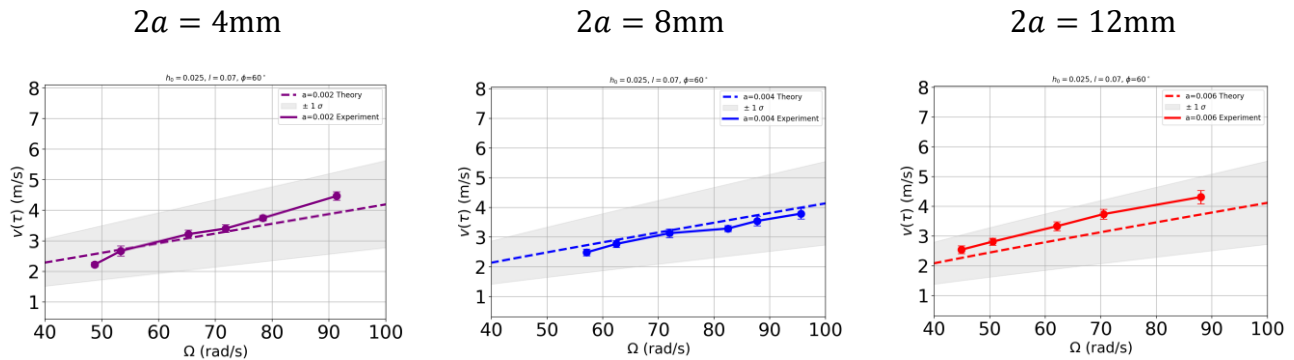


理論：初速 $v(\tau)$ 與轉速 Ω 關係圖



由於管徑的效應在表面張力修正中，由圖 11 發現管徑越小，液體受到的表面張力越大，使出口速度 $v(\tau)$ 上升。由圖 12 可發現理論與實驗吻合。

圖 12：不同吸管管徑之實驗與理論數值加上 (33) 式修正的結果疊合，其中虛線是 (26) 預測的理論線，附上誤差槓的實心數據點則是實驗數據，灰色區域為 $\pm 1\sigma$ 的信心水準。

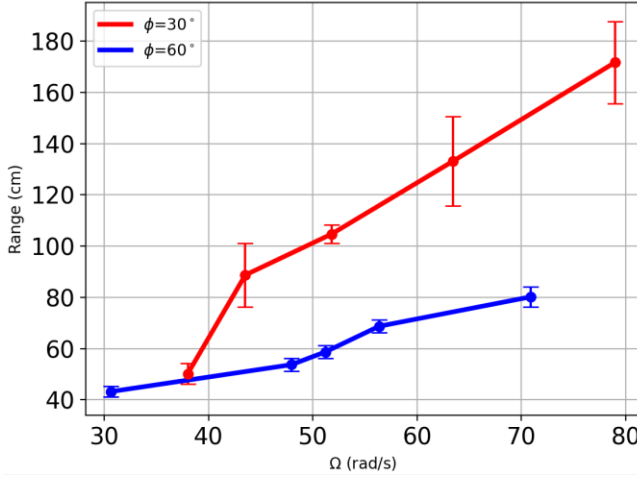


五、探討吸管側邊傾角對噴出初速的影響

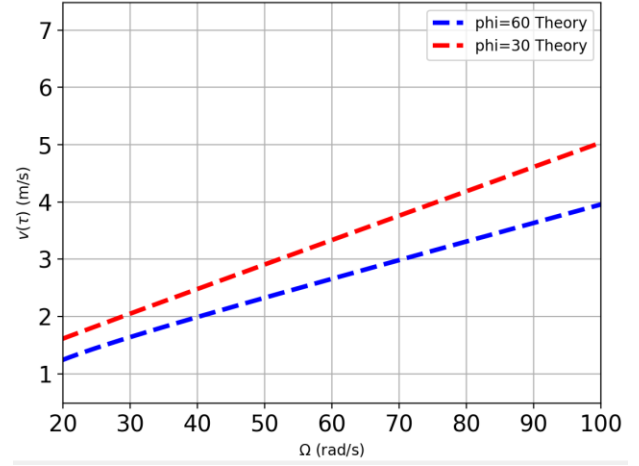
使用編號 E 吸管 (側邊傾角 $\phi = 30^\circ$)，綜合先前編號 D ($\phi = 60^\circ$) 吸管的相關數據，正三角形吸管，沒入水中 $h = 25\text{mm}$ ，調整電源供應器電壓，測量不同轉速時的射程 R ，並反推初速 v 與理論比較。

圖 13：不同吸管側邊傾角之實驗與理論數值趨勢圖

實驗：射程 R 與轉速 Ω 關係圖



理論：初速 $v(\tau)$ 與轉速 Ω 關係圖



由圖 13 知傾角較大者噴出速度較大。將 (13) 式繪圖，帶入 $h_0 = 25\text{mm}$, $l = 7\text{cm}$ 等數值，觀察在 $\Omega = 100$ 時，噴出速度與 ϕ 的關係，可發現在某一臨界 $\phi = \phi_c$ ，噴出初速有最大值。為了能讓灑水的範圍盡可能地大，使用 (13) 式可決定使噴出速度最大的吸管傾角。

圖 14：不同吸管側邊傾角之實驗與理論數值加上 (33) 式修正的結果疊合，其中虛線是 (26) 預測的理論線，附上誤差槓的實心數據點則是實驗數據，灰色區域為 $\pm 1\sigma$ 的信心水準。

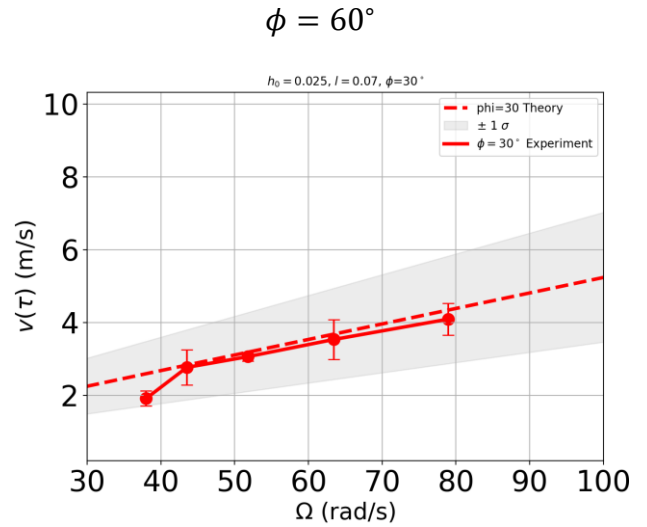
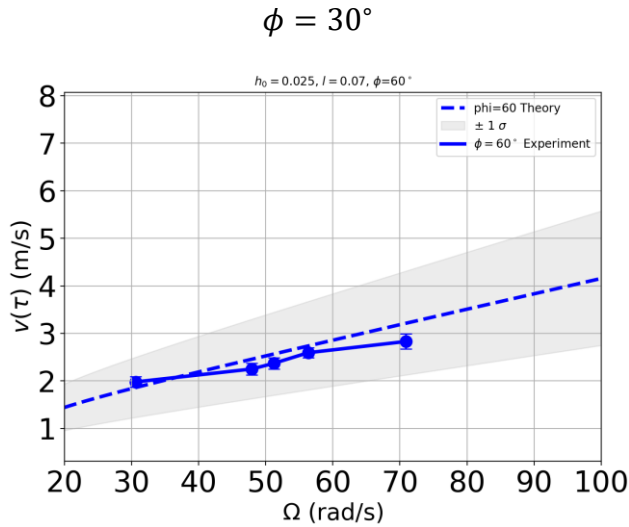
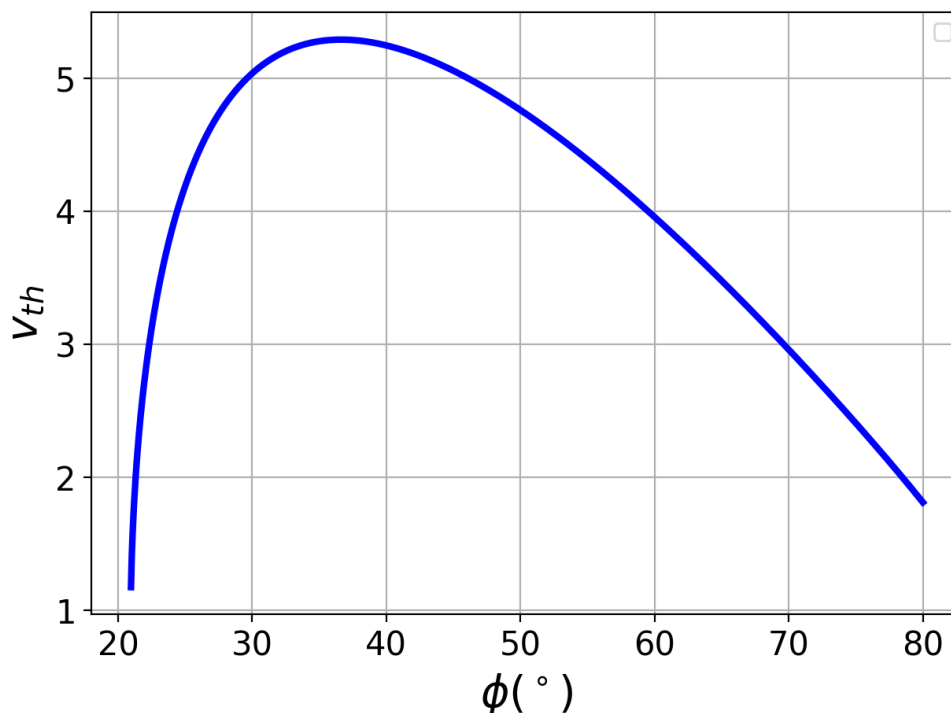


圖 15：由 (13) 式繪得的噴出速度與 ϕ 關係圖。可觀察到在 $\phi = \phi_c \approx 36.6^\circ$ 有噴出速度的最大值，具有應用上的實際效益。



伍、結論

為分析水在旋轉吸管內的行為，首先透過一個簡化的力學模型，暫時忽略流體效應，分析質點在吸管中的運動。由此可解出質點的運動方程，進而推廣至水的運動。接著，將質點模型進行修正。考慮黏滯力、白努利定律與表面張力等流體的效應，並將重力加速度修正為(33)式的等效加速度代回質點力學模型，發現黏滯力效應不顯著，但後兩者卻不可忽略。此外，由於實驗上由噴出射程反推初速，亦考慮水珠飛出時受到的空氣阻力影響，但由於水珠相關參數不易決定，此修正項為根據實驗調整的結果。

實驗上首先探討不同吸管沒入深度對水珠噴出初速的影響，發現其影響小，各組實驗數據皆十分接近。探討吸管的管徑的影響時，觀察到管徑較小者由於表面張力較大，吸管內的水噴出初速較大。若將吸管剪成頂角不同的其他三角形，發現噴出初速亦不同。由理論公式分析不同側邊傾角下的噴出初速，能得到使初速最高的傾角，因實驗條件而異，圖 15 中的 $\phi_c = 36.6^\circ$ 。將以

上各變因的實驗數據和理論疊圖比較，發現兩者十分吻合，實驗數據皆落在正負一個標準差內。

陸、未來展望

1. 由於水珠所受的空氣阻力難以量化，可將高速攝影機或其他設備架於吸管旁，透過分析影片，直接得到噴出初速，而不以射程反推。然而，有關架設方式、精確度等將會是技術上的挑戰。
2. 除了本研究探討有關吸管的三項變因外，和流體相關的參數亦值得探究，包括噴出液體不是水時，表面張力、密度等流體性質變化對噴出初速的影響，為未來可延伸探討的項目。

參考資料

1. Pfitzner, J. (1976). *Poiseuille and his law*. *Anaesthesia*. 31 (2): 273–275.
2. Howell, Glen (1970-02-01). "3.9.2". *Aerospace Fluid Component Designers' Handbook*. Vol. I. Redondo Beach CA: TRW Systems Group. p. 87, equation 3.9.2.1e.
3. Rouse, H. (1946). *Elementary Mechanics of Fluids*. John Wiley & Sons.
4. Baker, W.E. (1983). *Explosion Hazards and Evaluation*, Volume 5. Elsevier Science.