矩陣

何承祐

July 2022

1 概要

- 矩陣是一組數字的排列。通常被() 或[] 包括起來。
- 矩陣有行及列，橫爲列，直爲行。先看横的再看直的，先列後行。
- 階數：矩陣A 爲$3X3$ 階矩陣，亦稱爲三階矩陣或三階方陣。矩陣B 爲$2X3$ 階矩陣。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 23 & 33 \\ 0.1 & 200 & 38 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 0.05 & 31 & 50 \end{bmatrix}$$

- 一般地，以

$$a_{ij}$$

表示某矩陣第i 列第j 行的數。

2 特殊矩陣

- 係數矩陣(A)及增廣矩陣(B)：給定

$$\begin{cases} x-2y+z & =3 \\ 2x-y+3z & =5 \\ 3x-3y+2z & =10 \end{cases}$$

則

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

- 簡化矩陣：將一矩陣進行列運算，可使每一個不爲零之列中，第一個不等於0的元所屬的行中只有這個元不等於0，如此之矩陣叫簡化矩陣。

- 單位矩陣：某一對角線全爲1 的矩陣。

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 轉置矩陣：看著列寫成行，或看著行寫成列。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

- 對稱矩陣：對於任一n 階方陣$A=(a_{ij})$，充要條件爲

$$a_{ij}=aji$$

，即數值對稱於由左上至右下的對角線。

- 反對稱矩陣：充要條件改爲

$$a_{ij} = -aji$$

的對稱矩陣。

- 特徵方程式：對於一矩陣X，將其主對角線每一項都減去X，得到矩陣X'，再設X' 之行列式等於零所得的方程式。

$$X = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \Longrightarrow X' = \begin{bmatrix} p-X & q \\ r & s-X \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} p-X & q \\ r & s-X \end{bmatrix} = (p-X)(s-X) - qr = X^2 - (p+q)X + (ps-qr)I = 0$$

- 轉移矩陣：

$$\begin{bmatrix} \text{第一、二天都是A 情況} & \text{第一天發生A 情況，第二天發生B} \\ \text{第一天發生A，第二天發生B} & \text{第一、二天都是B} \end{bmatrix}$$

通常每列兩數和爲1。

- 狀態矩陣：

$$\begin{bmatrix} \text{今天是A} \\ \text{今天是B} \end{bmatrix}$$

通常$A + B = 1$

- 實際應用：

$$\text{轉移矩陣} \cdot \text{狀態矩陣} = \text{新的狀態矩陣}$$

穩定狀態：

$$\text{轉移矩陣} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

- 反方陣A^{-1}：

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 將x 軸item 若對於一矩陣A，有$\det A=0$，則其反方陣不存在。

- 伸縮矩陣：以原點爲中心，將x 軸伸縮h 倍，y 軸伸縮k 倍，則

$$P(x,y)\Longrightarrow P(x',y')=P(hx,ky)\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

- 推移：有鉛直推移和水平推移兩種。推移前後圖形面積不變。

$$\text{鉛直：}\quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{鉛直：}\quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- 旋轉矩陣：原有

$$\begin{cases} x=r\cos\alpha \\ y=r\sin\alpha \end{cases}$$

將圖形旋轉θ，有

$$\begin{cases} x=r\cos\alpha \\ y=r\sin\alpha \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- 鏡射矩陣：

$$\text{鏡射矩陣}\cdot\text{座標矩陣}=\text{新座標矩陣}$$

1. 對$x = 0$:
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$
2. 對$y = 0$:
$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
3. 對$x = y$:
$$\begin{bmatrix}0 & \\ 1 & 0\end{bmatrix}$$
4. 對$x = 0$:
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$
5. 對$y = \tan\frac{\theta}{2}x$:
$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$$
6. 鏡射矩陣的反矩陣爲自身，且行列式值爲-1

3 列運算

一矩陣經過下列任一個列運算之後，其值不變。

1. 將任一列每一數改爲每一數的一非零數倍
2. 將任一列乘上一數後加上另一列。
3. 將某兩列互換位置。

不可以行做列運算。

4　矩陣的運算

- $r \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb & rc \\ rd & re & rf \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$
- 矩陣的乘法：$2\text{X}2 \cdot 2\text{X}1 \Longrightarrow 2\text{X}1 \quad 3\text{X}3 \cdot 3\text{X}4 \Longrightarrow 3\text{X}4$
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} \Longrightarrow$ **無解**
- $\begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca+db \\ ea+fb \end{bmatrix}$
- $A \cdot B \neq B \cdot A$，即矩陣**沒有交換律**。
- 若$\det A \neq 0 \quad AB = AC \Longleftrightarrow B = C$
- 矩陣的除法：對於兩矩陣A 及B：

$$Ax = B \Longrightarrow x = B \cdot A^{-1} xA = B \Longrightarrow x = B^{-1} \cdot A$$

注意交換律不成立。

- $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{bmatrix}$

- 三階方陣求反方陣：

  1. 求行列式值倒數
  2. 求子行列式

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + dhc + gfb - ceg - bdi - ahf$$

  3. 變號（正負交替）
  4. 轉置

速算法：

1. 轉置
2. 複製爲5X5
3. 去除第一行、第一列
4. 求原行列式值倒數，乘上由剩下的4X4 矩陣而來的3X3 矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \det A = 1 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$