TYPT 講義：傅立葉分析[2]

嘉義高中何承祐

2023/09

1 簡介

絕對音感很秀。雖然你/妳不是音樂班的，但您知道要怎麼得到一個音的頻率嗎?

臺灣青年學生物理辯論競賽(TYPT) 的選題中，經常會和波動或聲音有關。其中，一些能夠表現出一個波的物理量便是大家熟悉的波速、頻率、波長、震幅等。其中，我們經常對頻率特別感興趣，因爲在不同的條件下，會有變化的通常是頻率，而非波速等。另外，震幅(對聲波而言就是音量) 容易受到實驗規模與外在環境影響，通常不是討論的對象。總而言之，頻率很重要。

物理實驗中的波通常不是由單一頻率組成，而是在有一個基本頻率f (基頻，Fundamental Frequency) 的波之基礎下，由許多其他波疊加而成。扣除掉很煩的雜訊後，這些額外的波的頻率通常是f 的正整數倍，也就是頻率爲$2f$, $3f$, $4f$ 等等。這些波叫做泛音(Harmonics)。

麥克風可以偵測每一個時間的音量強度。因此，我們用麥克風收到的音訊可以做成一個橫軸是時間，縱軸是音量大小的圖(這叫做時域Time Domain)。但是，這張圖告訴我們的是比較沒用的振幅資訊。若我們使用傅立葉分析(Fourier Transform, FT)，便能將這張圖轉成縱軸是音訊強度，橫軸是頻率的圖(頻域Frequency Domain)。有了頻域的圖，我們就可以知道每一個頻率的強度了!

因此，這份講義就是要由淺入深(I hope)，介紹傅立葉分析的原理。另外，傅立葉分析可以用Audacity, Python 等實作。

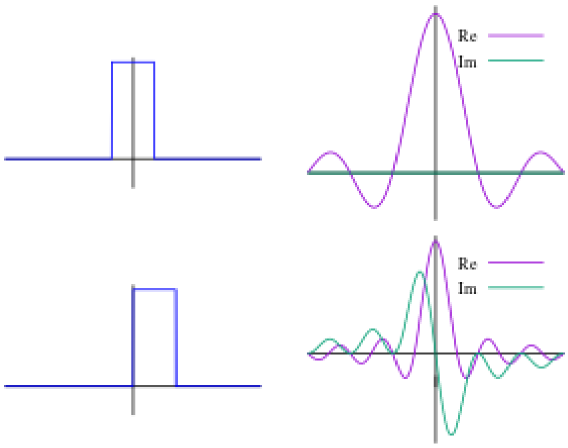

Figure 1: 左圖經過傅立葉轉換會變成右圖

Contents

2 波的一般式

三角函數很常用來表示波。在

$$F(t) = a\cos(\omega t)$$

中，

$$a\text{是震幅}$$
$$\omega = 2\pi f\text{是角速度}$$
$$t\text{是時間}$$

還記得泛音嗎? 上面這個式子只有基音，而泛音是頻率爲f 整數倍的波，因此角頻率也會是ω 的整數倍，也就是2ω, 3ω 等等。於是我們就把這些波加上去，變成

$$F(t) = a_0 + a_1\cos(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + a_3\cos(3\omega t) + ...$$

我們可以一直加下去。這樣寫手很酸，所以把他寫成

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\cos(n\omega t)$$

是的，n 當然可以是負的，畢竟這是「一般」式。爲了讓這個表達式更一般，以適用於所有情境，我們可以加上正弦的部分。另一種說法是，如果我們當初從

$$F(t) = a\sin(\omega t)$$

開始討論也行，反正最一般的$F(t)$ 是

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right) \tag{1}$$

這個式子比較麻煩的地方是負的n。我們可以假設

$$A_n = a_n + a_{-n}$$
$$B_n = b_n - b_{-n}$$

就可以化爲

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)) \tag{2}$$

3 找出係數

上面我們都只有時域。要得到頻率的資訊，其實只要找出三角函數前面的係數(A_n 和B_n，代表震幅) 即可。你先算算看

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t)\, dt$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t)\, dt$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t)\, dt$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ 是指一個週期。n, m 是整數。

你可以用「積化和差」

$$2\sin(A)\sin(B) = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$
$$2\cos(A)\cos(B) = \cos(A-B) + \cos(A+B)$$
$$2\sin(A)\cos(B) = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

如果$n \neq m$，你可以用積化和差把整個積分換成兩個獨立的三角函數積分。但是

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)\, dt = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \sin(t)\, dt = 0$$

因此兩個小積分都變0。但是，當$n = m$，

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(n\omega t) \cdot \sin(n\omega t)\, dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(n\omega t)\, dt$$

因爲

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx = \pi$$

所以

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(n\omega t)\cdot\sin(n\omega t)\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{\omega}\sin^2(nx)\,dx = \frac{\pi}{\omega}$$

只有$n=m$積分才不是零。另外，

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(n\omega t)\cdot\cos(n\omega t)\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{\omega}\cos^2(nx)\,dx = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(n\omega t)\cdot\cos(n\omega t)\,dt = 0$$

最後一個積分在$n=m$ 時還是零，因爲沒辦法化成平方，積化和差出來和$n\neq m$ 十分類似。總結一下，

$$\int_0^{T} \sin(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{if } n\neq m \\ \frac{\pi}{\omega} & \text{if } n=m \end{cases}$$

$$\int_0^{T} \cos(n\omega t)\cdot\cos(m\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{if } n\neq m \\ \frac{\pi}{\omega} & \text{if } n=m \end{cases}$$

$$\int_0^{T} \sin(n\omega t)\cdot\cos(m\omega t)\,dt = 0$$

這和係數有甚麼關係呢? 我們把(2) 兩邊(技巧性的) 乘以$\sin(m\omega t)$，並積分變成

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(t)\sin(m\omega t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(n\omega t)+B_n\sin(n\omega t))\right)\sin(m\omega t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{A_0}{2}\sin(m\omega t)\,dt \\
&\quad + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(n\omega t)+B_n\sin(n\omega t))\sin(m\omega t)\,dt \\
&= \frac{A_0}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(m\omega t)\,dt \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt + B_n\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt\right)
\end{aligned}$$

第一項是一個正弦函數經過一個週期的積分，也就是0，所以右邊第一項不見了。右邊第二項和第三項是否有點眼熟呢？第二項之前說過，由積化和差直接消失了。第三項則只有在$n = m$ 時才不是零。因此，消掉一大堆東西，變成

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(t)\sin(m\omega t)\,dt = B_m\frac{\pi}{\omega} = B_m\frac{T}{2}$$

所以

$$B_m = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(m\omega t)\,dt \tag{3}$$

這樣我們就能直接從$F(t)$ 求出振福了。如果你要求$\sin(m\omega t)$ 的係數，只要算上面這個式子就好。同理，

$$A_m = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(m\omega t)\,dt \tag{4}$$

4 傅立葉轉換FT

前面我們知道給定頻率怎麼求震幅的係數。但是，我們並不知道這個音是甚麼，怎麼會事先知道頻率呢？爲此，我們把原本的係數a_n 寫成$\int a(\nu)d\nu$，也就是把它寫成連續的形式，而非離散的數字。於是，

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\nu)\,d\nu\cos(2\pi\nu t) + \int_{-\infty}^{\infty} b(\nu)\,d\nu\sin(2\pi\nu t)$$

如果我們定義

$$r\cos\phi = a(\nu)$$
$$r\sin\phi = b(\nu)$$

就可以用類似三角函數疊合的技巧，化成

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\nu)\,d\nu\cos(2\pi\nu t + \phi(t))$$

反正都是從負無限積分到正無限，其實相位沒有差，我們再把一些物理量寫成習慣的符號，得到

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\nu)\,e^{j2\pi\nu t}\,d\nu \tag{5}$$

這裡我們用了

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

其中$j=\sqrt{-1}$。這是有名的尤拉公式。其實，我們應該要寫成

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\nu)\,\cos(j2\pi\nu t)\,d\nu$$

才對，用尤拉公式會多虛數的項。但是，因爲指數比較好計算，物理上遇到的波$F(t)$ 也都是實數(畢竟虛數沒有實質物理意義)，因此寫成比較好算的(5) 也沒問題。如此一來，我們就完成傅立葉轉換了! 我們說

$F(t)$ 和 $\Phi(\nu)$ 互爲傅立葉配對(Fourier Pair)

也可以用F(t) $\Longleftrightarrow$ $\Phi(\nu)$ 表示。

5 離散傅立葉轉換DFT

當我們要使用(5) 時，我們必須知道一個連續的時域函數，才能進行積分。然而，受限於採樣率(Sampling Rate)，在物辯等實際應用上，我們只有每隔一段時間T 的時域函數數值，因此根本不能用上面的方法。不過，因爲積分最基本的概念是面積，我們可以近似使用離散的數據點進行傅立葉分析，這便是離散傅立葉轉換(DFT, Discrete Fourier Transform)[1]。

我們通常是把時域的$f(t)$轉成頻域的$F(\omega)$，因此寫成

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \tag{6}$$

其中$j=\sqrt{-1}$。

當我們的$f(t)$ 不連續時，就只有N個點的數值。在(6) 中，可以把

$$f(t)\,e^{-j\omega t}$$

當成是高，dt 當成是寬(如果不知道我在說甚麼請回憶積分和級數和的意義)。我們用$f[k]$ 表示第k 個數據點的"高"到下一個數據點所形成矩形的面積。因此$f[k]$ 代替了$f(t)dt$，所以

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{0}^{(N-1)T}f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt\\&=f[0]e^{-j\cdot 0}+f[1]e^{-j\cdot\omega(T)}+f[2]e^{-j\cdot\omega(2T)}+\dots\\&=\sum_{k=0}^{N-1}f[k]\,e^{-j\omega kT}\end{aligned}$$

理論上，我們可以計算每一個角頻率的數值。不過您可以想想看，如果我的最小取樣間隔是T，我怎麼知道在T 時間之內發生的事情呢? 也就是說，我無法得知任何最小時間間隔是$0.5T$，$0.32T$ 或$0.02T$ 的資訊，因爲取樣間隔太大了。由$\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$，我們只能求

$$\omega = 0, \frac{2\pi}{NT}, \frac{2\pi}{NT} \times 2, \frac{2\pi}{NT} \times 3, \ldots, \frac{2\pi}{NT} \times (N-1)$$

的角頻率。故原本的積分變成加總：

$$F\left[\omega = \frac{2\pi n}{N}\right] = F[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \tag{7}$$

如果$W = e^{-j2\pi/N}$，則

$$F[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] \cdot W^{nk}$$

這裡的n 可以從0 到$N-1$ 以代表所有的ω。

6 快速傅立葉轉換FFT

分治：「一刀均分左右，兩邊各自遞迴，返回合併之日，解答浮現之時。」[3]

在DFT 的基礎上，FFT 使用「二分法(分治演算法 DoC, Divide and Conquer)」將DFT 的效率優化了。如果你在程式的領域上頗有研究的話，詳細來說就是時間複雜度(Big-O Time Complexity) 從$O(N^2)$ 變成$O(N \log N)$ 。我們之後用Python 也是用FFT，而非一般的FT 或DFT。

這到底是怎麼做到的呢? 我們把原本的級數和分成奇數項和偶數項。先把W 寫成

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

令$m = \frac{k}{2}$ 與$p = \frac{k-1}{2}$，則

$$\begin{aligned} F[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} f[k] \cdot W_N^{nk} \\ &= F[n] = \sum_{m=0}^{N/2-1} f[2m] \cdot W_N^{2mn} + \sum_{p=0}^{N/2-1} f[2p+1] \cdot W_N^{(2p+1)n} \end{aligned}$$

所以前面的Σ 是偶數項，後面是奇數項。因爲W 的「週期性」，

$$W_N^{2mn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2mn} = W_{N/2}^{mn}$$

所以

$$\begin{aligned}
F[n] &= \sum_{m=0}^{N/2-1} f[2m] \cdot W_N^{2mn} + \sum_{p=0}^{N/2-1} f[2p+1] \cdot W_N^{(2p+1)n} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} f[2m] \cdot W_{N/2}^{mn} + W_N^n \sum_{p=0}^{N/2-1} f[2p+1] \cdot W_N^{(2p)n} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} f[2m] \cdot W_{N/2}^{mn} + W_N^n \sum_{p=0}^{N/2-1} f[2p+1] \cdot W_{N/2}^{pn} \\
&= G[n] + W_N^n H[n]
\end{aligned}$$

我們把原本的$F[n]$ 拆成了兩個較小的函數$G[n]$ 和$H[n]$，而這兩個函數的N 變成了$N/2$。當$N = 2^k$ 時，只要我們一直重複，就會有

$$N \longrightarrow N/2 \longrightarrow N/4 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 1$$

總而言之，我們全部只需要計算約$\log_2 N$ 次傅立葉轉換，效率上當然比要做N 次的話快很多。這便是FFT 快的原因!!

References

[1] University of Oxford. Lecture 7 - The Discrete Fourier Transform.

[2] PhysLab. A Student's Guide to Fourier Transforms.

[3] 吳邦一. 從apcs 實作題檢測三級到五級ap325 v1.4.