

# 物理讀書會講義：火箭與行星軌道

## 活力公式 Vis-viva Equation

“Vis viva” 在拉丁文中是 living force，即活力的意思，據說一開始代稱動能。「顧名思義」，Vis-viva Equation 是軌道力學中描述能量的關係式。以下考慮質量為  $m$  的行星繞質量  $M$  的恆星公轉。

- 證明等面積定律，即克卜勒第二定律，並求出  $\frac{dA}{dt}$ 。
- 由能量守恆證明 Vis-viva Equation，

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

其中  $v$  為行星的公轉速度， $r$  為該時刻行星與恆星的距離， $a$  為軌道半長軸 ( $b$  為半短軸)。

- 寫下橢圓軌道能量與角動量的表達式。

$$E = -\frac{GMm}{2a}, \quad L = mb\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

## Tsiolkovsky 火箭方程式 [請參考選訓教材第一冊]

考慮一個受到外力  $F$  作用的火箭。火箭在時刻  $t$  時速度為  $V$ 。經過  $\Delta t$  後，其以相對速度  $V_e$  向後噴出質量  $\Delta m$  的燃料，並加速至  $V + \Delta V$ 。

- 證明  $F = m \frac{dv}{dt} - V_e \frac{dm}{dt}$
- 假設一起始質量  $M_i$  的火箭在空無一物的外太空中，攜帶質量  $M_i - M_f$  的燃料。求火箭能達到的最大速度。

$$\Delta v_{ma} = V_e \ln \frac{M_f}{M_i}$$

- 承 (b)，若已知  $b_0 = -\frac{dm}{dt} > 0$ ，且火箭在地球重力場  $g$  的作用下，以燃料燒完的時間  $T$  及已知參數表示飛行最大高度  $H$ 。[2023 學科全國]

