

SICP 問題 1.45

n 乗根を求めるために平均緩和法を使う場合、何回適用すれば十分か。

ググってカンニングすると $\log_2 n$ の小数点以下切上げ・切り捨て、四捨五入したものなどが出てきたが、理由が書いてあるものが見つからなかったので、理由を考察してみた。

・準備

定数 m の n 乗根を求めるための不動点探索用関数を以下のように定義する。

$$g_n(x) = \frac{m}{x^{n-1}}$$

$g_n(x)$ に平均緩和法を k 回適用した関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} f_{n,k}(x) &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \left(x + \cdots \frac{1}{2} \left(x + g_n(x) \right) \cdots \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \left(x + \cdots \frac{1}{2} \left(x + \frac{m}{x^{n-1}} \right) \cdots \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} \right) x + \frac{1}{2^k} \frac{m}{x^{n-1}} \\ &= \frac{2^k - 1}{2^k} x + \frac{1}{2^k} \frac{m}{x^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^k} \left((2^k - 1)x + \frac{m}{x^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

$f_{n,k}$ の最下点をしらべたい。最下点の x 座標が不動点以下になるような k を求めたい。

微分して値が 0 となる x を求める。

$$\begin{aligned} f_{n,k}(x) &= \frac{1}{2^k} \left((2^k - 1)x + \frac{m}{x^{n-1}} \right) \\ Df_{n,k}(x) &= \frac{1}{2^k} \left(2^k - 1 + (1-n) \frac{m}{x^n} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2^k} (2^k - 1 + (1-n) \frac{m}{x^n}) = 0$$

$$2^k - 1 + (1-n) \frac{m}{x^n} = 0$$

$$\frac{m}{x^n} = \frac{1 - 2^k}{1 - n} \quad \cdots (A)$$

$f_{n,k}$ の不動点は $\sqrt[n]{m}$ である。不動点のとき、式 (A) の左辺は 1 になる。
 最下点が不動点以下になる k を求めるため、以下の式を解く。

$$1 = \frac{1-2^k}{1-n}$$

$$1-n = 1-2^k$$

$$n = 2^k$$

$$\log_2 n = \log_2 2^k$$

$$\log_2 n = k \log_2 2 = k$$

$$\log_2 n = k$$

求める k は回数なので整数化する必要がある。 $\log_2 n$ を整数化する場合、小数点以下を切り上げる場合と切り捨てる場合のどちらがよいか。

・切り上げる場合

式 (A) の右辺は 1 より大きくなる。その場合左辺の x は不動点 $\sqrt[n]{m}$ より小さい値で無くてはならない。

・切り捨てる場合

式 (A) の右辺は 1 より小さくなる。その場合左辺の x は不動点 $\sqrt[n]{m}$ より大きい値で無くてはならない。

最下点の x 座標は不動点以下のほうが良いので、切り上げるが良い。

まとめると、 n 乗根を求める際の平均緩和法適用回数 k は、 $\log_2 n$ を小数点切り上げ (ceiling) したものである。

$$k = \lceil \log_2 n \rceil$$

以上。