SICP 問題 1.45

n 乗根を求めるために平均緩和法を使う場合、何回適用すれば十分か。

・準備

定数 m の n 乗根を求めるための不動点探索用関数を以下のように定義する。

$$g_n(x)=\frac{m}{x^{n-1}}$$

$g_n(x)$ に平均緩和法を k 回適用した関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}f_{n,k}(x)&=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\left(x+\cdots\frac{1}{2}\left(x+\frac{m}{x^{n-1}}\right)\cdots\right)\right)\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)x+\frac{1}{2^k}\frac{m}{x^{n-1}}\\&=\frac{2^k-1}{2^k}x+\frac{1}{2^k}\frac{m}{x^{n-1}}\\&=\frac{1}{2^k}\left((2^k-1)x+\frac{m}{x^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

$f_{n,k}$ の最下点をしらべたい。最下点が不動点以下になるような k を求めたい。

微分して値が 0 となる x を求める。

$$f_{n,k}(x)=\frac{1}{2^k}\left((2^k-1)x+\frac{m}{x^{n-1}}\right)$$

$$Df_{n,k}(x)=\frac{1}{2^k}\left(2^k-1+(1-n)\frac{m}{x^n}\right)$$

$$\frac{1}{2^k}\left(2^k-1+(1-n)\frac{m}{x^n}\right)=0$$

$$2^k-1+(1-n)\frac{m}{x^n}=0$$

$$\frac{m}{x^n}=\frac{1-2^k}{1-n}\quad\cdots(A)$$

$f_{n,k}$ の不動点は $\sqrt[n]{m}$ である。不動点のとき、式（A）の左辺は 1 になる。
最下点が不動点以下になる k を求めるため、以下の式を解く。

$$1 \le \frac{1-2^k}{1-n}$$
$$1-n \le 1-2^k$$
$$n \ge 2^k$$
$$\log_2 n \ge \log_2 2^k$$
$$\log_2 n \ge k log_2 2 = k$$
$$\log_2 n \ge k$$

式（A)の右辺の分子分母に-1 を掛けたら、こう変わる。

$$1 \le \frac{2^k-1}{n-1}$$
$$n-1 \le 2^k-1$$
$$n \le 2^k$$
$$\log_2 n \le \log_2 2^k$$
$$\log_2 n \le k$$

まとめると、n 乗根を求める際の平均緩和法適用回数 k は次のどちら。

$k_1 \le \log_2 n \le k_2$（ただしk_1, k_1は整数）

$\log_2 n$ を整数化するときに小数点以下をどうするかということだけど、自分の場合は念のため切り上げ（ceiling）しておいた。

以上。