SICP 問題1.45

n乗根を求めるために平均緩和法を使う場合、何回適用すれば十分か。

ググってカンニングすると $\log_2 n$ の小数点以下切上げ・切り捨て、四捨五入したものなどが出てきたが、理由が書いてあるものが見つからなかったので、理由を考察してみた。

・準備

定数mのn乗根を求めるための不動点探索用関数を以下のように定義する。

$$g_n(x)=\frac{m}{x^{n-1}}$$

$g_n(x)$ に平均緩和法をk回適用した関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
f_{n,k}(x)&=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}(x+\cdots\frac{1}{2}(x+g_n(x))\cdots))\\
&=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}(x+\cdots\frac{1}{2}(x+\frac{m}{x^{n-1}})\cdots))\\
&=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^k})x+\frac{1}{2^k}\frac{m}{x^{n-1}}\\
&=\frac{2^k-1}{2^k}x+\frac{1}{2^k}\frac{m}{x^{n-1}}\\
&=\frac{1}{2^k}((2^k-1)x+\frac{m}{x^{n-1}})
\end{aligned}$$

$f_{n,k}$ の最下点をしらべたい。最下点のx座標が不動点以下になるようなkを求めたい。

微分して値が0となるxを求める。

$$f_{n,k}(x)=\frac{1}{2^k}((2^k-1)x+\frac{m}{x^{n-1}})$$

$$Df_{n,k}(x)=\frac{1}{2^k}(2^k-1+(1-n)\frac{m}{x^n})$$

$$\frac{1}{2^k}(2^k-1+(1-n)\frac{m}{x^n})=0$$

$$2^k-1+(1-n)\frac{m}{x^n}=0$$

$$\frac{m}{x^n}=\frac{1-2^k}{1-n}\quad\cdots(A)$$

$f_{n,k}$ の不動点は $\sqrt[n]{m}$ である。不動点のとき、式（A）の左辺は 1 になる。
最下点が不動点以下になる k を求めるため、以下の式を解く。

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1-2^k}{1-n} \\
1-n &= 1-2^k \\
n &= 2^k \\
\log_2 n &= \log_2 2^k \\
\log_2 n &= k log_2 2 = k \\
\log_2 n &= k
\end{aligned}
$$

求める k は回数なので整数化する必要がある。 $\log_2 n$ を整数化する場合、小数点以下を切り上げる場合と切り捨てる場合のどちらがよいか。

・切り上げる場合

式（A）の右辺は 1 より大きくなる。その場合左辺の x は不動点 $\sqrt[n]{m}$ より小さい値で無くてはならない。

・切り捨てる場合

式（A）の右辺は 1 より小さくなる。その場合左辺の x は不動点 $\sqrt[n]{m}$ より大きい値で無くてはならない。

最下点の x 座標は不動点以下のほうが良いので、切り上げるが良い。

まとめると、n 乗根を求める際の平均緩和法適用回数 k は、 $\log_2 n$ を小数点切り上げ（ceiling）したものである。

$$k = \lfloor \log_2 n \rfloor$$

以上。