

# 广义 Schur 分解的 QZ 算法

## 数值实验报告

梁子龙

数值代数讨论班 2018

2018 年 4 月 17 日

## 单步位移的 QZ 迭代

**参考** C. B. Moler and G. W. Stewart, *An algorithms for generalized matrix eigenvalue problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 10 (1973), pp. 241–256.

**实现** 见 `qziteration.m`.

# 实验：QZ 算法中的约化、迭代过程

**目的** 利用三个动画，回顾 QZ 算法中的约化、迭代过程。

**实现** 函数 `htreduction.m` 实现了上 Hessenberg – 上三角约化的过程；函数 `qziteration.m` 实现了一步单步位移 QZ 迭代或者双重步位移隐式 QZ 迭代。脚本 `experiments_qz.m` 中实现了通过动画显示以上三个过程的实验。

**结果** DEMO。

## 实验：单步位移和双重步位移的切换

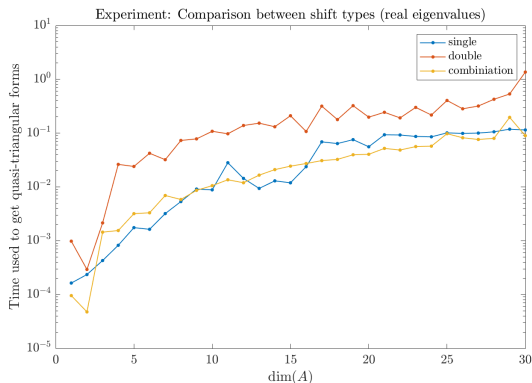
**目的** 对比单步位移、双重步位移以及切换位移的运行时间

**实现** 函数 `qziteration.m` 实现了一步单步位移 QZ 迭代或者双重步位移隐式 QZ 迭代。它可接受位移选取的类型 (`single`、`double` 或 `comb`)，当选取 `comb` 时，判断位移的实虚来选择迭代的类型。

**参考** R. C. Ward, *The combination shift QZ algorithms*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 12 (1975), pp. 835–853.

## 实验：单步位移和双重步位移的切换

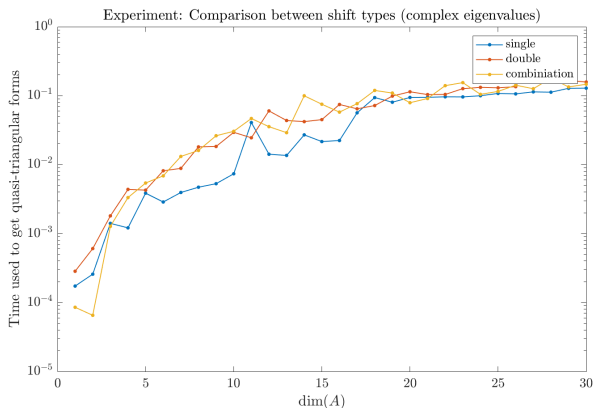
**结果** 我们分别对特征值全为实数的矩阵对和特征值为复数的矩阵对做了测试，并对每一阶重复若干次，结果如下两图所示。可以看到，**comb** 方法可以根据特征值类型来选取位移类型，且特征值均为实数时，选取单步位移明显快于双重步位移。



图：特征值均为实数情况下的实验结果

## 实验：单步位移和双重步位移的切换

而当实矩阵对的特征值为复数时，在我们的实现中单步与双重步算法的速度基本相近，这可能是由于我们实验的矩阵阶数过低导致，或者是因为双重步位移命令较多，在 MATLAB 中没有向量化的操作运行较慢导致（怀疑程序实现有误?）。



图：特征值为复数情况下的实验结果

Ward (1975) 设计了实验，测试了实特征值占不同比例下运用切换位移的方法所能节省的时间。

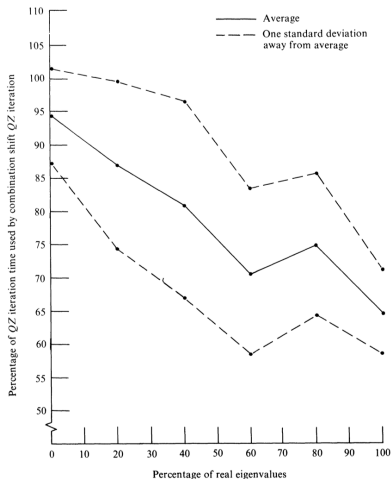


图: Ward (1975) 的实验结果图

# 实验：降阶技巧

**目的** 对比使用降阶和不使用降阶对特征值精度的影响

**实现** Moler and Stewart (1973) 选取了一个例子来阐明 QZ 算法不受无穷特征值的影响，可以将有界的特征值精确地算出。我们在 `emperiments_qz.m` 中再现了这个例子，并另举了一个  $B$  为非奇异矩阵的例子来说明这一点。



## 实验：降阶技巧

$$A = \begin{bmatrix} 50 & -60 & 50 & -27 & 6 & 6 \\ 38 & -28 & 27 & -17 & 5 & 5 \\ 27 & -17 & 27 & -17 & 5 & 5 \\ 27 & -28 & 38 & -17 & 5 & 5 \\ 27 & -28 & 27 & -17 & 16 & 5 \\ 27 & -28 & 27 & -17 & 5 & 16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 16 & 5 & 5 & 5 & -6 & 5 \\ 5 & 16 & 5 & 5 & -6 & 5 \\ 5 & 5 & 16 & 5 & -6 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 16 & -6 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & -6 & 16 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \infty;$$

$$\lambda_3 = \lambda_5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\lambda_4 = \lambda_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

## 实验：降阶技巧

**结果** 使用不带降阶的 QZ 算法，两个无穷特征值计算出的结果为  $10^{15}$  量级，而四个有限特征值与真实值的误差最大模仅为  $10^{-8}$  量级。

我们另外补充了这个实验，取  $A, B$  为随机生成的矩阵，并令  $B$  的某一行为零以得到奇异矩阵。使用不带降阶的 QZ 算法计算无穷特征值的结果在  $10^{16}$  量级，而其他的有限特征值对比带降阶的 QZ 算法，最大模仅在  $10^{-14}$  量级。

## 实验：Polynomial Eigenvalue Problem

广义特征值问题的一个应用是 Polynomial Eigenvalue Problem.

给定矩阵  $A_0, \dots, A_d \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 寻找值  $\lambda \in \mathbb{C}$  与  $x \in \mathbb{C}^n$  ( $x \neq 0$ ), 使得

$$P(\lambda)x = 0,$$

其中

$$P(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \dots + \lambda^d A_d.$$

## 实验：Polynomial Eigenvalue Problem

以三次问题为例，类似友矩阵的形式，有

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_0 \\ -I & 0 & A_1 \\ 0 & -I & A_2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}.$$

如果有

$$L(\lambda) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ x \end{bmatrix} = 0,$$

那么

$$\begin{aligned} 0 &= A_0 x + \lambda u_1 \\ &= A_0 + \lambda(A_1 x + \lambda u_2) \\ &= A_0 + \lambda(A_1 x + \lambda(A_2 + \lambda A_3))x \\ &= P(\lambda)x. \end{aligned}$$

## 实验：Polynomial Eigenvalue Problem

因此，我们只需解以

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_0 \\ -I & 0 & A_1 \\ 0 & -I & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

为矩阵对的广义特征值问题即可.

# 实验：Polynomial Eigenvalue Problem

**目的** 作为一个真实的算例，选取一个 PEP 问题的例子进行求解

**实现** 脚本 `experiments_qz.m` 中的辅助函数 `pepmat` 实现了从 PEP 到广义特征值问题的转换。我们参考了 (Berhanu, 2005) 对刚刚在数理方程中学到的波动方程进行求解。依照文中方法，波动方程的求解可以转化为一个二次特征值问题

$$Q(\lambda)x = 0,$$

其中

$$Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K.$$

**结果**  $n = 50$  的计算结果如图所示。

## 实验：Polynomial Eigenvalue Problem

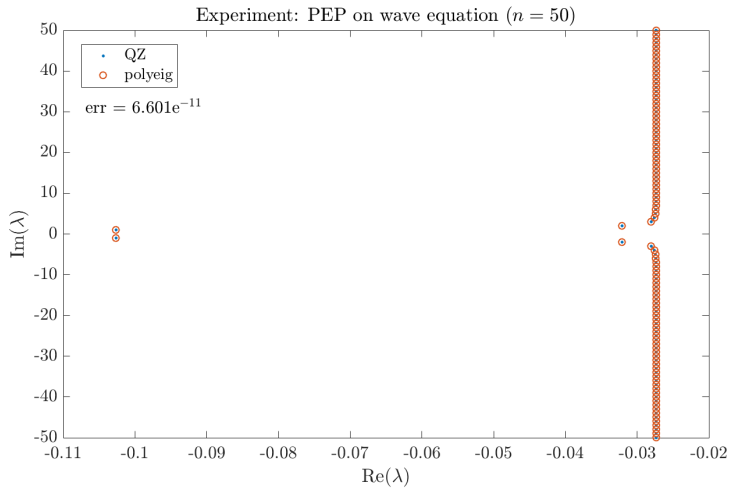






图: PEP 问题的实验结果

# 几点疑问

1. 做降阶时如何选取 `tol`，判断  $B$  的对角元为 0.
2. Moler and Stewart (1973) 讲到单步位移的 QZ 算法可能数值不稳定，具体原因是什么.
- 3.



-  M. BERHANU, *The polynomial eigenvalue problem*, Numer Linear Algebra Appl, 31 (2005), pp. 2835–2839.
-  G. H. GOLUB AND C. F. VAN LOAN, *Matrix computations*, vol. 3, JHU Press, 2012.
-  C. B. MOLER AND G. W. STEWART, *An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 10 (1973), pp. 241–256.
-  R. C. WARD, *The combination shift qz algorithm*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 12 (1975), pp. 835–853.