Hola Profesor Nelson,

Quedé intrigado por el punto del examen sobre el número posible para conformar una matriz de orden n en la forma canónica de Jordan.

En ése punto (lamentablemente para mí), se me pasó una posible forma para la matriz de 4x4. Después de la entrega, me quedé hasta muy tarde pensando sobre el asunto y quisiera que usted me revisara esta expresión que deduje para el número posible de formas canónicas de Jordan.

Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$

La cuestión con los bloques de Jordan se centra en asociar en grupos los elementos de la diagonal. Esto se puede ver más fácil linealmente, sacando como conjunto los elementos de la diagonal. Por facilidad se simplifica la notación:

$$D\colon \{a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; \cdots \;\; a_n\}$$

Este conjunto se puede agrupar en "tarritos" de diversas maneras. Por ejemplo, si a cada "tarrito" le cabe un solo elemento, uno obtiene la Forma Canónica trivial, o sea, la matriz diagonal (sin "unos" encima. Nótese que se excluyen elementos ceros (dos barras separadoras consecutivas).

$$D\colon \{a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid \cdots \mid a_n\}$$

Si a cada "tarrito" le caben hasta dos elementos, pueden conformarse de varias maneras:

$$D\colon \{a_1 \;\; a_2 \mid a_3 \mid \cdots \mid a_n\}$$

$$D\colon \{a_1 \mid a_2 \;\; a_3 \mid \cdots \mid a_n\}$$

Y así sucesivamente hasta llegar al último:

$$D\colon \{a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid \cdots \mid a_{n-1} \; a_n\}$$

Con 3 tarritos, a modo de ejemplo, empezaría así:

$$D\colon \{a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \mid \cdots \mid a_n\}$$

$$D\colon \{a_1 \mid a_2 \;\; a_3 \;\; a_4 \mid \cdots \mid a_n\}$$

Y así sucesivamente…

Ahora bien, el número posible de combinaciones para un conjunto de tamaño n, con k tarritos, está dado por

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[n-1-k+1]!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

Entonces, para hallar el número total de formas posibles, de una matriz de tamaño n, se calcula la suma de las posibles combinaciones con 1 tarrito, con 2 tarritos, con 3, y así hasta llegar a n (inclusive).

$$n_{Jordan} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$$

Para n=1

$$n_{Jordan} = \frac{(1-1)!}{(1-1)!\,(1-1)!} = 1$$

Parece que va bien, porque una matriz de tamaño 1, solo tiene una forma posible.

Para n=2

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$n_{Jordan} = \frac{(2-1)!}{(1-1)!\,(2-1)!} + \frac{(2-1)!}{(2-1)!\,(2-2)!} = 1 + 1 = 2$$

Para n=3

$$n_{Jordan} = \frac{(3-1)!}{(1-1)!\,(3-1)!} + \frac{(3-1)!}{(2-1)!\,(3-2)!} + \frac{(3-1)!}{(3-1)!\,(3-3)!} = 1 + 2 + 1 = 4$$

Para n=4

$$n_{Jordan} = \frac{(4-1)!}{(1-1)!\,(4-1)!} + \frac{(4-1)!}{(2-1)!\,(4-2)!} + \frac{(4-1)!}{(3-1)!\,(4-3)!} + \frac{(4-1)!}{(4-1)!\,(4-4)!}$$
$$= 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

Simplificación:

$$n_{Jordan} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

Otra forma fácil de determinar los coeficientes sería el triángulo de Pascal.

Cada uno de los términos de la suma parece corresponder a los elementos del triángulo de Pascal:

```
Para n=1:                            1                     n_jordan=1
Para n=2:                          1   1                   n_jordan=2
Para n=3:                       1    2   1                 n_jordan=2
Para n=4:                    1    3    3     1             n_jordan=8
Para n=5:                 1    4     6     4    1          n_jordan=16
Para n=6:              1    5     10    10    5   1        n_jordan=32
Para n=7:           1    6     15    20     15  6   1     n_jordan=64
```