Лекции по дискретной математике

me and boyz

30 сентября 2021 г.

Содержание

1 Дискретные функции и их представление. Индуктивное определение формулы. Полные системы. Критерий полноты.

Определение. Дискретной функцией называется любая функция, отображающая конечное множество A в конечное множество B.

Область определения дискретной функции часто представляется в виде декартового произведения множеств относительно небольшой мощности.

Если $f : A \to B$ - дискретная функция и $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, то f обозначают следующим образом $f(x_1; \ldots; x_n)$ и называют дискретной функцией от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. При этом x_i принимает всевозможные значения из A_i. Если $A_1 = \cdots = A_n = B$ и $B = \{0, 1\}$, то f называется булевой функцией.

Определение. Обозначим далее $\Omega = \{0, 1\}$, тогда булевой функцией от n переменных называется любое отображение $f : \Omega^n \to \Omega$.

0-местными булевыми функциями будем называть элементы $0, 1 \in \Omega$.

Замечание. Существуют функции k - значной логики.

Обозначать булеву функцию будем $f(x_1; \ldots; x_n)$ или $f(\vec{x})$, если количество переменных известно из контекста.

Определение. Если $f(x_1; \ldots; x_n)$ - булева функция и $\vec{\alpha} = (a_1; \ldots; a_n) \in \Omega^n$, то образ $\vec{\alpha}$ при отображении f называют значением функции f на наборе $\vec{\alpha}$. Обозначение: $f(\vec{\alpha})$.

Определение. Если рассматривать 0 и 1 как числа $\in \mathbb{N}_0$, то для набора $\vec{\alpha} = (a_1; \ldots; a_n)$ обозначим $||\vec{\alpha}|| = a_1 + \cdots + a_n$ - вес вектора $\vec{\alpha}$.

$\widetilde{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 2^{n-i}$ - лексикографический порядок.

Пример.

$$\vec{\alpha} = (1; 1; 0; 1) \Rightarrow ||\vec{\alpha}|| = 1 + 1 + 0 + 1 = 3.$$

Естественным образом задания является табличный, при этом координата i-вектора $f^{\downarrow}$ соответствует значению $f(\vec{\alpha})$, где $\widetilde{a} = i$.

Пример.

x_0	x_1	$f^{\downarrow}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1