Лекции по дискретной математике

Колесников Алексей Филяев Константин

Якубов Александр Перепелица Анатолий

Хренов Максим

2 ноября 2021 г.

Содержание

1 Дискретные функции и их представление. Индуктивное определение формулы. Полные системы. Критерий полноты.

Определение. Дискретной функцией называется любая функция, отображающая конечное множество A в конечное множество B.

Область определения дискретной функции часто представляется в виде декартового произведения множеств относительно небольшой мощности.

Если $f : A \to B$ - дискретная функция и $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, то f обозначают следующим образом $f(x_1; \ldots ; x_n)$ и называют дискретной функцией от n переменных $x_1, \ldots , x_n$. При этом x_i принимает всевозможные значения из A_i. Если $A_1 = \ldots = A_n = B$ и $B = \{0, 1\}$, то f называется булевой функцией.

Определение. Обозначим далее $\Omega = \{0, 1\}$, тогда булевой функцией от n переменных называется любое отображение $f : \Omega^n \to \Omega$.

0-местными булевыми функциями будем называть элементы $0, 1 \in \Omega$.

Замечание. Существуют функции k - значной логики.

Обозначать булеву функцию будем $f(x_1; \ldots ; x_n)$ или $f(\vec{x})$, если количество переменных известно из контекста.

Определение. Если $f(x_1; \ldots ; x_n)$ - булева функция и $\vec{\alpha} = (a_1; \ldots ; a_n) \in \Omega^n$, то образ $\vec{\alpha}$ при отображении f называют значением функции f на наборе $\vec{\alpha}$. Обозначение: $f(\vec{\alpha})$.

Определение. Если рассматривать 0 и 1 как числа $\in \mathbb{N}_0$, то для набора $\vec{\alpha} = (a_1; \ldots ; a_n)$ обозначим $||\vec{\alpha}|| = a_1 + \ldots + a_n$ - вес вектора $\vec{\alpha}$.

$\widetilde{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 2^{n-i}$ - лексикографический порядок.

Пример.

$$\vec{\alpha} = (1; 1; 0; 1) \Rightarrow ||\vec{\alpha}|| = 1 + 1 + 0 + 1 = 3.$$

Естественным образом задания является табличный, при этом координата i-вектора $f^{\downarrow}$ соответствует значению $f(\vec{\alpha})$, где $\widetilde{a} = i$.

Пример.

x_0	x_1	$f^{\downarrow}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Утверждение. $|F_2(n)| = 2^{2^n}$.

Определение. Весом булевой функции f называют величину $||f|| = |\{\vec{\alpha} \in \Omega^n \mid f(\vec{\alpha}) = 1\}|$. N_f - носитель булевой функции.

Определение. Функция от $n-1$ переменной, определяемая равенством $\varphi(a_1; \ldots ; a_{n-1}) = f'(a_1; \ldots ; a_{i-1}; b; a_{i+1}; \ldots ; a_{n-1})$, называется функцией полученной из f' фиксацией i-ой переменной значением b.

Обозначением $\varphi = f_i^b(x_1; \ldots ; x_n)$, аналогично фиксация k переменных значениями $b_1, \ldots , b_k : \varphi = f_{i_1;\ldots;i_n}^{b_1;\ldots;b_k}(x_1; \ldots ; x_n)$.

Общее название таких функци φ - подфункции f.

Если $f(a_1;\dots;a_{i-1};0;a_{i+1};\dots;a_n) = f(a_1;\dots;a_{i-1};1;a_{i+1};\dots;a_n), \forall a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n \in \Omega$, то переменная x_i называется несущественной переменной функции f, в противном случае - существенной.

Определение. Пусть x_i -несущественная(*фиктивная*) переменная функции f, g получена из f фиксацией x_i любой константой, тогда говорят, что g получена удалением из f несущественной переменной x_i, а f получена из g добавлением фиктивной переменной x_i.

Пусть задано множество функций $\mathbb{K} = \{f_i : i \in I\}$ и множество символов переменных $X = \{x_1;\dots;x_n\}$.

Определение.

1. Любой символ переменной есть формула над классом $\mathbb{K}$.
2. Если f_j - символ m - местной функции из $\mathbb{K}$, а $A_1,\dots,A_m$ - формулы над $\mathbb{K}$, то $f_j(A_1;\dots;A_m)$ - формула над $\mathbb{K}$.
3. Других формул нет.

Множество формул над $\mathbb{K}$ обозначается $\Phi(\mathbb{K})$. При $m = 0$ формула есть символ над $\mathbb{K}$, т.е. константа.

Определение. Число символов функций из $\mathbb{K}$, встречающихся в формуле A назовем рангом формулы A. Обозначение: $r(A)$.

Определение.

1. Подформула формулы x_i - только она сама.
2. Подформулы $f_j(A_1;\dots;A_n)$ - она сама и все подформулы формулы $A_1;\dots;A_n$.

Определение. Пусть A - произвольная формула, в ее записи присутствует только переменные $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$. Набор $x_{j_1},\dots,x_{j_m}$ называется допустимым, если $\{x_{i_1},\dots,x_{i_k}\} \subseteq \{x_{j_1},\dots,x_{j_m}\}$.

Каждой формуле при фиксированном допустимом наборе $(x_1;\dots;x_n)$ сопоставляется функция по следующему правилу:

1. Если A есть x_i, то ей сопоставляется функция f, значения которой определяются равенством $f(a_1;\dots;a_n) = a_i, (a_1;\dots;a_n) \in \Omega^n$.
2. Если A есть $f_j(A_1;\dots;A_m)$ и формулам $A_1,\dots,A_m$ сопоставлены функции $\varphi_1(x_1;\dots;x_n);\dots;\varphi_m(x_1;\dots;x_n)$, то формуле A сопоставляется функция f, значения которой определяются равенством $f(a_1;\dots;a_n) = f_j(b_1;\dots;b_m)$, где $b_\zeta = \varphi_\zeta(a_1;\dots;a_n), \zeta \in \overline{1,m}$.

Определение. Формулы A и B равносильны, если они представляют одну и ту же функцию на любом допустимом наборе. Обозначение: $A \equiv B$.

Определение. Пусть A - произвольная формула над классом $\mathbb{K} = \{\&, \vee, \bar{\ }\}$. Двойственной к A называется формула полученная из A заменой $\& \leftrightarrow \vee$. Обозначение: A^*.

Теорема. $A^*(x_1;\dots;x_n) = \overline{A(\overline{x_1};\dots;\overline{x_n})}$.

Следствие. $A \equiv B \Leftrightarrow A^* \equiv B^*$.

Определение. Замыканием системы $\mathbb{K}$ булевых функций называют множество всех булевых функций представимых формулами над $\mathbb{K}$. Обозначение: $[\mathbb{K}]$.

Утверждение.

1. $\mathbb{K} \subseteq [\mathbb{K}]$
2. $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \Rightarrow [\mathbb{K}_1] \subseteq [\mathbb{K}_2]$
3. $[[\mathbb{K}]] = [\mathbb{K}]$

Определение. Система $\mathbb{K}$ называется полной, если (замыкание) $[\mathbb{K}] = F_2$.

Пример.

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{K}_0 &= \{x_1 \cdot x_2; x_1 \vee x_2; \overline{x_1}\} \\ \mathbb{K}_5 &= \{x_1 \cdot x_2; x_1 \oplus x_2; 1\} \end{aligned}\right\} \text{Полные}$$

Определение. Класс булевых функций называется замкнутым, если $\mathbb{K} = [\mathbb{K}]$.

Говорят, что набор $\vec{\beta}$ мажорирует набор $\vec{\alpha}$, если $\forall i \in \overline{1,n} : a_i \le b_i$. Обозначение: $\vec{\alpha} \preccurlyeq \vec{\beta}$.

Пример.

$$T_0 = \{f(x_1;\dots;x_n) \mid f(0;\dots;0) = 0\}$$
$$T_1 = \{f(x_1;\dots;x_n) \mid f(1;\dots;1) = 1\}$$
$$L = \{f(x_1;\dots;x_n) = a_1x_1 \oplus \dots \oplus a_nx_n \mid a_i \in \Omega, i \in \overline{0,n}\} - \text{класс линейных функций}$$
$$S = \{f(x_1;\dots;x_n) \mid f(x_1;\dots;x_n) \equiv \overline{f(\overline{x_1};\dots;\overline{x_n})}\} - \text{класс самодвойственных функций}$$
$$M = \{f(x_1;\dots;x_n) \mid \text{верно } \vec{\alpha} \preccurlyeq \vec{\beta}, \text{то} f(\vec{\alpha} \le f(\vec{\beta}))\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \Omega^n\} - \text{класс монотонных функций}$$

Лемма. Булева функция $f(x_1;\dots;x_n)$ не является монотонной $\Leftrightarrow \exists \vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ отличающиеся только в одной координате (соседние наборы), такие что $\vec{\alpha} \preccurlyeq \vec{\beta}$ и $f(\vec{\alpha}) > f(\vec{\beta})$.

Теорема. T_0, T_1, M, S, L - замкнуты.

Теорема. (Критерий Поста)

Система булевых функций $\mathbb{K}$ полна $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}$ содержит функции из $F_2 \backslash T_0, F_2 \backslash T_1, F_2 \backslash M, F_2 \backslash S, F_2 \backslash L$.

Док-во:

<u>Необходимость</u>

$\forall$ произвольного замкнутого класса $G \neq F_2$, если $\mathbb{K}$ не содержит ни одной функции из $F \backslash G$, то $\mathbb{K} \subset G \Rightarrow [\mathbb{K}] \subset [G] \neq F_2 \Rightarrow \mathbb{K}$ - не является полной.

<u>Достаточность</u>

Рассмотрим функции $f_1 \notin T_0, f_2 \notin T_1, f_3 \notin L, f_4 \notin S, f_5 \notin M$. Покажем, что если $\mathbb{K} \nsubseteq G$, где $G \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$, то $\overline{x}$ и $x_1 \cdot x_2 \in [\mathbb{K}]$.

Рассмотрим 2 случая:

1. $f_1(1;\ldots;1)=1$, но тогда $f(x;\ldots;x)=1\in[\mathbb{K}]$. Т.к. $\mathbb{K}\nsubseteq T_1$, то $\exists f_2\in\mathbb{K}\mid f_2(1;\ldots;1)=0\in[\mathbb{K}]$. Покажем, что $\overline{x}\in[\mathbb{K}]$. Т.к. $\mathbb{K}\nsubseteq M$, то $\exists f_3\in\mathbb{K}\mid f_3\notin M$, т.е. $\exists\vec{\alpha}\preccurlyeq\vec{\beta}\mid f_3(\vec{\alpha})>f_3(\vec{\beta})$.

   Рассмотрим функцию $f_(a_1;\ldots;a_{j-1};x_j;a_{j+1};\ldots;a_n)\equiv\overline{x_j}$, т.к. 0 и 1 $\in[\mathbb{K}]$, то и $\overline{x}\in[\mathbb{K}]$.

2. $f_1(1;\ldots;1)=0$, то $f_1(x;\ldots;x)=\overline{x}\in[\mathbb{K}]$. Покажем, что 0 и 1 $\in[\mathbb{K}]$.

   Рассмотрим $f_4\in\mathbb{K}\mid f_4\notin S\Rightarrow\exists(a_1;\ldots;a_n)\mid f_4(a_1;\ldots;a_n)=f_4(\overline{a_1};\ldots;\overline{a_n})=$ $const\in\{0,1\}\in[\mathbb{K}]$. Т.к. $\overline{x}\in[\mathbb{K}]$, то 0 и 1 $\in[\mathbb{K}]$.

Покажем $x_1\cdot x_2\in[\mathbb{K}]$.

Т.к. $\mathbb{K}\notin L$, то $\exists f_5\in\mathbb{K}\mid f_5\notin L$, т.е. в ее многочлене Жегалкина $\exists$ *моном степени больше 1*(*) $\Rightarrow\exists$ моном, содержащий $x_1\cdot x_2$.

Рассмотрим многочлен Жегалкина функции f_5:

$$f_5(x_1;\ldots;x_n)=x_1\cdot x_2\cdot g_1(x_3;\ldots;x_n)\oplus x_1\cdot g_2(x_3;\ldots;x_n)\oplus x_2\cdot g_3(x_3;\ldots;x_n)\oplus g_4(x_3;\ldots;x_n).$$

Рассмотрим функцию f, полученную из f_5, следующим образом:

$$f(x_1;x_2)=f_5(x_1;x_2;a_3;\ldots;a_n)=x_1x_2C_1\oplus x_1C_2\oplus x_2C_3\oplus C_4.$$

$C_1=1$, т.к. см (*). Рассмотрим функцию $f(x_1\oplus C_3;x_2\oplus C_2)=x_1x_2\oplus C_2C_3\oplus C_4\Rightarrow x_1x_2\in[\mathbb{K}]$. ■

2 Классическое представление булевых функций. КНФ. ДНФ.

Рассмотрим класс $K_0 = \{\cdot, \vee, \bar{}\}$ Символом x^a, где $a \in \Omega$, обозначим функцию переменной x, принимающую значение 1, если $x = a$, и 0 в противном случае. Таким образом:

$$x^a = \begin{cases} \text{x, a = 1} \\ \bar{x}, a = 0 \end{cases}$$

Определение. Пусть $i_1, \ldots, i_k$ - различные натуральные числа. Формула вида $x_{i_1}^{a_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}^{a_k}$ называется элементарной дизъюнкцией ранга k.

Если заменить $\vee$ на &, то получаем элементарную конъюнкцию ранга k.

Если элементраная дизъюнкция рассматривается как формула от переменной $x_1, \ldots, x_n$ и её ранг равен n, то она назвается совершенной.

Определение. Конъюктивной нормальной формой (КНФ) называется $\forall$ формула представляющая собой конъюнкцию конечного числа элементарных дизъюнкций.

Теорема. $\forall$ булевая функция может быть представлена в виде $f(x_1, \ldots, x_n) = \&_{(b_1, \ldots, b_k) = \Omega^k} x_{i_1}^{\bar{b}_{i_1}}, \ldots, x_{i_k}^{\bar{b}_{i_k}} f_{i_1, \ldots, i_n}^{\bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_n}}(x_1, \ldots, x_n)$

Замечание. Аналогичным образом определяется элементарная дизъюнкция(ДНФ).

Теорема. $\forall$ булевой функции $k \leq n$ представима формулой $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(a_1, \ldots, a_k)} x_{i_1}^{a_{i_1}}, \ldots, x_{i_k}^{a_{i_k}} f_{i_1, \ldots, i_n}^{a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}}(x_1, \ldots, x_n)$

Следствие. $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \overline{x_1} f(0, x_2, \ldots, x_n) \vee x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n)$

В случае $k = n$ получаем совершенные КНФ и ДНФ, называемые СКНФ и СДНФ.

Утверждение. $\exists!$ СДНФ и СКНФ $\forall f \in F_2$.

Пример. (две ДНФ одной функции)

$\overline{x_1 x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \equiv \overline{x_1} x_3 \vee x_1 x_2$

Определение. Многочленом Жегалкина от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется формула над классом $K_5 = \{\oplus, \cdot, 1\}$ вида

$$a_0 \oplus \textstyle\sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}$$
$$1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n; a_0, a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in \Omega$$

Здесь знак суммы означает исключающее "или"и сумирование ведётся по всем непустым подмножествам $\{i_1, \ldots, i_k\}$ множества $\{1, \ldots, n\}$.

Определение. Элементарной конъюнкцией входящей в многочлен Жегалкина в качестве слогаемых называется одночлен (моном), элементы $a_{i_1, \ldots, i_k}$ коэффиценты многочлена, a_0 - свободный член. Ранг конъюнкции называется степенью одночлена.

Степенью неленейности функции представляемой многочленом Жегалкина называется максимальная из степеней многочлена, входящих в многочлен Жегалкина этой функции с коэффицентом 1.

Теорема. $\forall$ булевая функция однозначно представима многочленом Жегалкина.

Определение. Двоичным n-мерным кубом называют множество точек пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $a_1, \ldots, a_n$, где $a_i \in \Omega$

Для задания булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на n-мерном кубе отмечают вершины соответствующие носителю этой функции.

Определение. Гранью n-мерного куба ранга k (или иначе разморности $n-k$) называется множество его вершин, соответсвующее N_φ, где φ - произвольная элементарная конъюнкция ранга k, т.е. $\varphi = x_{i_1}^{a_1}, \ldots, x_{i_n}^{a_k}$

Утверждение. (свойства)

1. $f = \varphi \Leftrightarrow N_f = N_\varphi$
2. $N_{f \cdot \varphi} = N_f \cap N_\varphi$
3. $N_{f \cup \varphi} = N_f \cup N_\varphi$
4. $f \cup \varphi \equiv f \Leftrightarrow N_\varphi \subseteq N_f$
5. $f \equiv \bigvee_{i=1}^{m} \varphi_i \Leftrightarrow N_f = \bigcup_{i=1}^{m} N_{\varphi_i}$

Определение. Длиной ДНФ называется сумма рангов входящих в неё элементарных конъюнкций. ДНФ с минимальной длиной называется минимальной ДНФ (МДНФ).

Определение. Элементарная конъюнкция $\psi = x_{i_1}^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^{a_k}$ называется имплекантой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если она входит в некоторую ДНФ представляющую функцию f.

Утверждение. (эквивалентно)

1. ψ - имплеканта функции f
2. $\psi \cup f \equiv f$
3. $\psi \to f \equiv 1$
4. $\psi \cdot f = \psi$

Определение. Говорят, что g поглащается функцией f, если $g \vee f \equiv f$, т.е. имплеканта это элементарная конъюнкция, поглощаемая функцией f.

Определение. Имплеканта функции f называется простой, если никакая её собственная часть не поглощается функцией f.

Пример.

$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_2 x_3}$

$\overline{x_2 x_3}$ - простая.

$x_1 x_2$ - нет, т.к. x_1 поглощается f.

Лемма. Пусть φ_1 и φ_2 имплеканты f, φ_1 поглощает $\varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1$ - часть φ_2

Теорема. $\forall$ имплеканта функции f, содержащаяся в какой-либо МДНФ функции f является простой.

Теорема. Пусть $\varphi_1 \cup \ldots \cup \varphi_m$ - дизъюнкция всех простых имплекант функции f, тогда $f \leq \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_m$

Определение. Дизъюнкция всех простых имплекант функции f называется сокращенной ДНФ.

Определение. ДНФ $\varphi_1 \cup \ldots \cup \varphi_m$ функции f называется тупиковой, если все $\varphi_i, i \in \overline{1,k}$, входящие в неё, являются простыми имплекантами f и φ.

Всюду далее $f - n$-местная булевая функция отличается от константы.

2.1 Метод Блейка

Метод Блейка строит из ДНФ сокращённую ДНФ.

Основной операцией данного алгоритма является операция неполного склеивания, в основе которого лежит тождество:

$$x\varphi_1 \vee \bar{x}\varphi_2 \equiv x\varphi_1 \vee \bar{x}\varphi_2 \vee \varphi_1\varphi_2$$

Вход: ДНФ
Выход: Сокращённая ДНФ

Этап 1 В исходной ДНФ нааходим пару имплекант, в которой некоторая переменная входит в разных степенях: $\varphi_i = x_k\varphi_i'$ и $\varphi_j = \overline{x_k}\varphi_j'$.

Формируем $\varphi_1\varphi_2$ и добавляем её в ДНФ, повторяем до тех пор, пока не перестанут повялятся новые имплеканты.

Этап 2 В полученной ДНФ применяем операцию поглащения используя тождество $\varphi\psi \vee \varphi \equiv \varphi$ до тех пор пока это возможно.

Теорема. Полученная на выходе алгоритма ДНФ является сокращённой ДНФ.

Док-во: Покажем, что ДНФ, полученная на Этапе 1 содержит все простые имплеканты функции f(индукция по n).

Пусть $n = 1$. Утверждение очевидно, т.к. ДНФ функции одной переменной отличной от константы есть x_1 или $\overline{x_1}$.

Пусть $\forall$ ДНФ и для $\forall$ функции от n-1 переменной после Этапа 1 образуется ДНФ, содержащая все простые имплеканты.

Пусть теперь f - функция от n переменных и φ её имплеканта

а) Если ранг φ равен n, то φ содержится в $\forall$ ДНФ функции f.

   Действительно пусть $\varphi = x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$, тогда она принемает значения $1 \Leftrightarrow$ все x_i равны a_i в любой ДНФ функции f должна присутствовать имплеканта φ', принимающая значение 1 на $(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow$ все переменные входят в неё в тех же степенях, что и в φ, но

б) Если ранг φ меньше, то $\exists x_i$ не входящее в φ.

   Представим f в виде $f = x_i h \vee \overline{x_i} g \vee t$, где h, g, t - некоторые булевые функции, независящие от x_i. Т.к. φ - имплекация функции f, то $\varphi \vee x_i h \vee \overline{x_i} g \vee t$ совпадает с $x_i h \vee \overline{x_i} g \vee t$. Полагая $x_i = 0$ или 1 имеем $\varphi \vee g \vee t \equiv g \vee t$ и $\varphi \vee h \vee t \equiv h \vee t$ соответственно. Возьмём конъюнкцию этих тождеств и применим к левой части закон дистрибутвности. Получим $\varphi \vee (g \vee t)(h \vee t) \equiv (g \vee t)(h \vee t) \Rightarrow \varphi$ является имплекантой функции $f_1 = (h \vee t)(g \vee t) \equiv hg \vee t$.

ДНФ этой функции получается с помощью операции "неполного склеивания"из имплекант, входящих в ДНФ функции $x_i h \vee \overline{x_i} g \vee t$. При этом φ - простоая для f, т.к. φ - простая для f_1, а f поглащает f_1.

Тогда по предположению индукции φ содержится в ДНФ, полученной после Этапа 1, применнёного к ДНФ функции f_1, но $\varphi \in$ аналогичной ДНФ функции f, т.к. $\forall$ непростая имплеканта поглащается некоторой простой, то после Этапа 2 в ДНФ окажутся только простые имплеканты.

Лемма. Путь ДНФ $A = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i$ поглащает элементарную конъюнкцию φ и $\varphi\varphi_k \equiv 0$. Тогда φ поглащается ДНФ $A^1 = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i$

Определение. Функции f_1 и f_2 называются ортогональными, если $f_1 f_2 \equiv 0$

Теорема. (Критерий поглощения)

Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{k} u_i$ - ДНФ некоторой функции, φ_0 - элементарная конъюнкция не ортогональная ни одной из конъюнкций $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Обозначим φ_{0_i} - конъюнкцию членов входящих в φ_0 и в φ_i, а φ_{1_i} - конъюнкция членов φ_i, невходящих в φ_0 (если $\varphi_i = \varphi_{0_i}, \varphi_{1_i} = 1$) ДНФ поглощает $\varphi \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{k} \varphi_{1_i} \equiv 1$

Утверждение. Если f монотонна, то сокращённая ДНФ = МДНФ.

2.2 Метод Квайна

Составляется таблица, строчки которой обозначают всеми простыми имлекантами длиной функции, столбцы - наборами, на которых функция принимает значение 1. На пересечении ставится значение имплеканты на соответствующем наборе. Для построения ДНФ или МДНФ надо удалять строки так, чтобы в каждом столбце была хотя бы одна 1.

3 Эквивалентность функций относительно групп преобразований.

3.1 Группы инерции

Определение. Подстановкой непустого множества M называют любое биективное отображение M на себя. При известном n будем обозначать: $f(x_1; \ldots, x_n) = f(\vec{x})$.

Определение. Пусть $f(\vec{x})$ и $h(\vec{x})$ - функции из $F_k(n)$ и G - произвольная группа подстановок множества Ω_k^n. Говорят, что f эквивалентно h относительно группы G, если существует подстановка $g \in G \mid \forall \vec{\alpha} \in \Omega_k^n$ выполняется:

$$f(\vec{\alpha}) = h(g(\vec{\alpha})).$$

Обозначение : $f \overset{G}{\sim} h$.

Утверждение.

1. $f \overset{G}{\sim} f$
2. $f \overset{G}{\sim} h \Leftrightarrow h \overset{G}{\sim} f$
3. $f \overset{G}{\sim} h,\ h \overset{G}{\sim} r \Rightarrow f \overset{G}{\sim} r$

$\overset{G}{\sim}$ - отношение эквивалентности.

Таким образом $F_k(n)$ разбивается на классы эквивалентности. Класс, содержащий функию f, будем называть $[f]_G$. Очевидно $1 \leq |[f]_G| \leq |G|$.

Определение. Функция $f(\vec{x}) \in F_k(n)$ - называется инвариантной относительно подстановки $g \in G < S_{\Omega_k^n}$, если $f(g(\vec{x})) = f(\vec{x})$, относительно группы G, если она инвариантна относительно любой подстановки из этой группы.

Утверждение. Множество подстановок $g \in G$, относительно которых функция f инвариантна образует подгруппу в группе G.

Определение. Подгруппа, определенная в утверждении, несёт название - Группа инерции - функции f в группе G. Обозначение: $I_G(f)$.

Теорема. Если $f \in F_k(n)$ и $G < S_{\Omega^k}$, то $|[f]_G| = \frac{|G|}{|I_G(f)|}$

Определение. Орбитой группы подстановок $G < S_{\Omega^k}$, содержащей элемент α, называется множество

$$\triangle_\alpha = \{\beta \in \Omega_k^n \mid \exists g \in G \mid \beta = g(\alpha)\}.$$

Утверждение. f инвариантна относительно группы $G \Leftrightarrow$ на элементах каждоой орбиты она принимает постоянные значения. То есть $\forall p \in \triangle_\alpha \mid f(\beta) = f(\alpha)$.

Следствие. G- транзитивна $\Leftrightarrow f$ инвариантна $\Leftrightarrow f \equiv \text{const}$.

Следствие. Число функций k - значной логики инвариантно относительно группы G равно $k^{\nu(G)}$, где $\nu(G)$ - число орбит группы G.

Пример.

1. Группа подстановок координат векторов $\alpha \in \Omega_k^n$:

   $$g_s(a_1, \dots, a_n) = a_{i_1}; \dots; a_{i_n} \text{в соответсвии с перестановкой } g_s = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

   Обозначение: S_n.

2. Группа сдвигов: Σ_n. Пусть $\alpha = (a_1; \dots; a_n) \in \Omega_k^n$, тогда

   $$\Sigma_n = \{g_\alpha \mid g_\alpha(c_1; \dots; c_n) = (c_1 + a_1; \dots; c_n + a_n); \alpha, \vec{c} \in \Omega_k^n\}$$

   Суммирование ведется по модулю k.

3. Группа Джевонса Q_n:

   $$Q_n =< \Sigma_n; S_n > .$$

4. $GL(n;k)$ - полная линейная группа. Пусть A - невырожденная матрица размеров $n \times n$ над $\mathbb{Z}_k$, тогда

   $$GL(n;k) = \{q_A \mid q_A(a_1; \dots; a_n) = (a_1; \dots; a_n) \cdot A; A \in (\mathbb{Z}_k)^*_{n \times n}\}$$

5. Полная афинная группа $AGL(n;k) =< GL(n;k); \Sigma_n >$.

Диаграмма вложения группы:

$$\begin{tikzcd}
S_n \arrow[r] \arrow[ddr] & GL(n;k) \arrow[dr] & \\
& & AGL(n;k) \\
\Sigma_n \arrow[r] & Q_n \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\Sigma_n; Q_n; AGL(n;k)$ - транзитивные $\Rightarrow$ инвариантны относительно них только константы.

Орбитами группы S_n являются множества векторов одинакового веса. Число функций одинакового веса инвариантных относительноS_n ровно $k^{\binom{k+n-1}{k-1}}$.

Теорема. Орбитами группы $GL(n;k)$ являются все множества $M_\alpha = \{(a_1; \dots; a_n) \in \Omega_k^n | \text{НОД}(a_1; \dots; a_n; k) = d\}$, где $d|k$.

Следствие. Число функций n - значной логики (от n-переменных), инвариантных относительно $GL(n;k)$ равно $k^{\nu(k)}$,где $\nu(k)$ - число делителей k.

Теорема. Пусть $T_k(n)$-множество всех функций k-значной логики с тривиальной группой инерции в $AGL(n;k)$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|T_n(k)|}{|F_k(n)|} = 1$$

.

Док-во: 1)Оценим сверху число неподвижных точек нетождественного афинного преобразования $g \in AGL(n;k)$. Рассмотрим уравнение $g(\vec{x}) = \vec{x}A+\alpha; \alpha \in Z_k^n$; A-невырожденная матрица над Z_k; В матричном виде уравнение перепишется следующим образом:
$\vec{x}(E-A) = \alpha$.
Если $A = E$,то $\nexists$ решений, так как $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ (g - нетождественное преобразование). Пусть $C = (C_{ij})_{n\times n} = E - A \neq 0$.

Не ограниченная общность $c_{11} \neq 0$, тогда $c_{11}x_1 + \ldots + c_{n1}x_n = a_1$ - слогаемые системы, если зафиксировать $x_2; \ldots ; x_n$ произвольными значениями из Z_k, то полученное уравнение будет иметь не более $(C_n; k)$ решений, а так как $C_{11} \neq 0$, то число решений при произвольной фиксации $x_2; \ldots ; x_n \leqslant \frac{k}{2} \rightarrow$ для всего уравнения имеем $(\frac{k}{2})^n$. (то есть число решений $\vec{x}(E-A) = \alpha$, не превосходит $(\frac{k}{2})^n \leqslant \frac{k^n}{2}$.)
2)Поскольку количество точек (неподвижных) афинной подстановки ($k^{l(g)}$, где $l(g)$-число циклов) не превосзодят $\frac{k^n}{2}$, то количество независимых циклов в её разложении может превосходить $\frac{3k^n}{4}$. ($\frac{k^n}{2}$ - циклов длины 1; $\frac{k^n}{4}$ - циклов длины 2)
$\rightarrow$ количество функций инвариантных относительно фиксированных подстановок g не провосходят $k^{\frac{3k^n}{4}}$, так как функция должна принимать одинаковые значения на элементах каждой орбиты.
3)

$$|AGL(n;k)| \leqslant k^{n^2+n} \rightarrow k^{\frac{3k^n}{4}+n^2+n} \rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{|T_n(k)|}{|F_k(n)|} = \frac{k^{k^n} - k^{\frac{3k^n}{n}+n^2+n}}{k^{k^n}} = 1$$

Классы эквивалентности по $\overset{G}{\sim}$ назовем G-типом. Для осуществления полной классификации необходимо построить список представителей G типов. $f^{(1)}; \ldots ; f^{l(G)}; l(g)$- число G-типов. Строится последовательность $f_1; f_2; \ldots$. Среди них могу быть одинаковые представители из какого-то класса. Полагаем $f^{(1)} = f_1$ и считаем:
$|I_G(f^{(1)})|$, проверяем $f_2 \in I_G(f^{(2)})$; если нет, то считаем:
$|I_G(f^{(2)})|, f^{(2)} = f_2$ и так далее ...
Останавливаемся, когда :

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{|G|}{|I_G(f^{(2)})|} = k^{k^n}$$

то есть необходимость вычисления порядка групп инерции. Значение параметра $l(G)$ упрощает метод. Задача поиска этого параметра носит название задачи перечисления G - типов.

3.2 Инварианты, нахождение групп инерции и проверка экваивалентности.

Определение. Отображение φ - называется инвариантом группы G, если для любого $g \in G$ и произвольной $m \in M$ справедливо равенство:
$\varphi(g(m)) = \varphi(m)$.
Инвариант φ называется полным, если из $\varphi(m_1) = \varphi(m_2) \to$ что элементы m_1 и m_2 лежат на одной орбите группы G. Принимая во внимание факт, что для G, действующей на $F_k(n)$, орбита будет являться G - типом, сформируем правило проверки эквивалентности f_1 и $f_2 \in F_k(n)$.
Пусть φ - инвариант группы G, действующей на $F_k(n)$, если φ -полный, то $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$ равносильно тому, что $f_1 \overset{G}{\sim} f_2$;
Если φ неполный инвариант, то $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$ - только необходимое условие эквивалентности. В случае, когда равенство выполнено, надо проверять другие инваринты:

$\sqsupset k =?$

1. Для $AGL(n;k); S_n; \sum_n; Q_n$ инварианты - вес, степени нелинейности.
2. Q_n - число простых импликант, число существенных переменных.
3. S_n - число одночленов в многочлене Жегалкина.

Пример. Пусть $f(x_1;x_2;x_3) = x_1 \oplus x_2$
$f_2(x_1;x_2;x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
Они не эквивалентны относительно $S_n; Q_n$, но $f_2(x_1;x_2;x_3) = f_1((x_1;x_2;x_3)A)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \oplus x_2; x_1; x_3.$

Теорема. Для любого натурального $m \geqslant 2$ и произвольной группы G: $|G| = m, \exists n$ и $f \in F_2(n) \mid I_{S_n}(f) \cong G$.

4 Представление дискретных функций в базисах функциональных пространств. Алгоритм БПФ.

Определение. Пусть К - произвольное поле, 0 и 1 - нуль и единица поля К соответствует псевдобулевой функции от n переменных называется произвольное отображение $f : \{0,1\}^n \longrightarrow K$. (Обобщение $GF(p)^n \longrightarrow K$). Множества таких функций будем называть $K_p(n)$. На $K_p(n)$ естественным образом задаются операции $+$ и $\cdot$ на элементах поля.

Утверждение. $K_p(n)$ - векторное пространство над K размерности p^n

Теорема. Множеству всех различных гомоморфизмов $\varphi : (GF(p)^n, +) \longrightarrow (\mathbb{C}, *)$ состоит из p^n различных гомоморфизмов $\mathcal{X}_\alpha$; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in GF(p)^n$, каждый из которых однозначно определяется своим действием на вектора стандартного базиса $e_j, j \in \overline{1,n}$ следующим образом $\mathcal{X}_\alpha(e_j) = \exp(\frac{2\pi i}{p} \cdot \alpha_j)$.

Утверждение. Для любых $\alpha, \beta \in GF(p)^n$ верно $\frac{1}{p^n} \sum_{\gamma \in GF(p)^n}^{n} \mathcal{X}_\alpha(\gamma)\overline{\mathcal{X}_\beta(\gamma)} = \delta_{\alpha,\beta}$, т.е.

$$\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, \alpha = \beta \\ 0, \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Теорема. $\{\mathcal{X}_\alpha \mid \alpha \in (GF(p))^n\}$ - базис $\mathbb{C}_p(n)$

Определение. Разложение произвольной функции $f \in \mathbb{C}_p(n)$ по базису характера $\{\mathcal{X}_\alpha \mid \alpha \in (GF(p))^n\} : f(\vec{x}) = \sum_{\alpha \in GF(p)^n} C_\alpha^f \mathcal{X}_\alpha(\vec{x})$ называется разложением f в ряд Фурье, соответствующий набору α. Комплексное число C_α^f - коэффициент Фурье функциий f, соотвествующий набору α.

Определение. Преобразование из $\mathbb{C}_p(n)$ в $\mathbb{C}^{p^n}$, ставящее в соответствие каждой функции ее коэффициенты Фурье(«Спектр Фурье»), будем называть преобразование Фурье.

Утверждение.

1. Пусть $\gamma \in GF(p)^n$, тогда $C_\gamma^f = \frac{1}{p^n} \sum_{\beta \in GF(p)^n} f(\beta)\overline{\mathcal{X}_\alpha(\beta)}$.
2. Пусть f - булева функция, тогда $C_0^f = \frac{1}{2^n} ||(f(\vec{x})||$.

В некоторых случаях вместо функции f удобно рассматривать свойства функции $F(\vec{x}) = (-1)^{f(\vec{x})}$. Коэффиценты Фурье такой функции называется коэффициентом Уолша-Адамара второго рода функции $f(\vec{x})$. Обозначается $C_\alpha^F = W_\alpha^f$.

Свойства:

1. $W_\alpha^f = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} ||f(\vec{x}) \oplus < \alpha, \vec{x} > ||$, где $< \alpha, \vec{x} > = \alpha_1 x_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n x_n$.
2. $$W_\alpha^f = \begin{cases} -2C_\alpha^f : \alpha \neq \vec{0} \\ 1 - 2C_\alpha^f : \alpha = \vec{0} \end{cases}$$

3. $\sum_{\alpha\in\Omega_2^n} W_\alpha^f = (-1)^{f(\overline{0})}$

4. $\sum_{\alpha\in\Omega_2^n} (W_\alpha^f)^2 = 1$

5. $\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \le \max_{\alpha\in\Omega_2^n} |W_\alpha^f| \le 1$

Зафиксируем некоторую обратимую $2^n \times 2^n$ матрицу A над полем K. Пусть $f^\downarrow$ - вектор столбцов значений f из $K_2(n)$. $\widetilde{f^\downarrow} = A^{-1}f^\downarrow$, тогда задано биективное отображение из $K_2(n)$ в K^{2^n}. Вектор $\widetilde{f^\downarrow}$ - представление функции f. Если столбцы матрицы A занумеровать наборами из Ω_2^n, то $f^\downarrow = \sum_{\alpha\in\Omega_2^n} g_\alpha^\downarrow \widetilde{f}(\alpha)$. Каждый столбец $g_\alpha^\downarrow$ есть задание некоторой функции из $K_2(n)$, A - невырожденная $\Rightarrow \{g_\alpha\}_{\alpha\in\Omega_2^n}$ - базис $K_2(n)$.

Определение. Пусть A и B - матрицы над размеров $m\times m$ и $n \times n$ над полем K соответственно. Тензорным произведением матриц A и B называется матрица $= A\otimes B$ следующего вида:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta & \alpha_{12}\beta & \dots & \alpha_{1m}\beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}\beta & \alpha_{m2}\beta & \dots & \alpha_{mn}\beta \end{pmatrix} - \text{размерность } mn \times mn.$$

Утверждение.

1. $A\otimes(B\otimes C) = (A\otimes B)\otimes C$

2. $(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$ $(m=n)$
   $A\otimes(B+C) = A\otimes B + A\otimes C$

3. $A, C \in K_{m;m}, B, D\in K_{n;n} \Rightarrow (A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD$

4. $A\oplus B$ обратимо $\Leftrightarrow$ A и B обратимы, причем $(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}$

Лемма. Пусть A - матрица размера $2^n\times 2^n$ над K и $A = B\otimes A'$, где $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, $a,b,c,d\in K$, а A - матрица размером $2^{n-1}\times 2^{n-1}$ причем обе матрицы B и A' невырожденные. Пусть столбцы матриц A и A' задают базисы функциональных пространств $K_2(n), K_2(n-1)$, функции из которых обозначаются g_α и ${g'}_\alpha$ соответственно. Тогда $\forall\alpha\in\Omega_2^{n-1}$ верно:

$g_\alpha(0,\alpha') = (a\overline{x_1} + cx_1)g_{\alpha'}(x_2;\dots;x_n)$
$g_\alpha(1,\alpha') = (b\overline{x_1} + dx_1)g_{\alpha'}(x_2;\dots;x_n)$.

Теорема. Пусть A - тензорное произведение матриц $B_i \in K^*_{2\times 2}$ вида $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i\end{pmatrix}$, т.е. $A = \otimes\prod_{i=1}^n B_i$, тогда базисная функция g_ω, соотвествующая столбцу A и занумерованная набором $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n)$ имеет вид $g_\omega(x_1;\dots;x_n) = \prod_{i=1}^n \overline{\omega_i}(a_ix_i + c_ix_i) + \omega_i(b_i\overline{x_i} + d_i\overline{x_i})$.

Пример.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} - \text{тождественное преобразование.}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ – многочлен Жегалкина.}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ – коэффициент Фурье.}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ – вырожденная матрица.}$$

Теорема. Пусть B - невырожденная матрица размера 2×2 над K, $A = B^{[n]}$, где $[n]$ - тензорная степень. Тогда существует алгоритм вычисления $\widetilde{f^{\downarrow}}$ по вектору $f^{\downarrow}$, имеющий сложность $O(n \cdot 2^n)$ операций поля K

Док-во: Пусть $B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Из свойств тензорного произведения матриц вытекает, что $A^{-1} = (B^{-1})^{[n]} = D_n \cdot D_{n-1} \cdot \ldots \cdot D_1$, где D_i - матрица вида:

$$D_i = \left(E_2^{[n-i]} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes E_2^{[i-1]} \right), \text{где } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $f_0^{\downarrow} = f^{\downarrow}$ и $\forall i \in \overline{1,n} \mid f_i^{\downarrow} = D_i \cdot f_{i-1}^{\downarrow}$, тогда $\widetilde{f^{\downarrow}} = f_n^{\downarrow}$.

Покажем, что каждое из умножений D_i на $f_{i-1}^{\downarrow}$ может быть выполнено за $O(2^n)$ операций поля K. Тогда общее количество операций, необходимое для вычисления $\widetilde{f^{\downarrow}}$ по $f^{\downarrow}$ будет составлять $0(n2^n)$ операций.

$$D = \left(E_{2^{n-i}} \otimes \begin{pmatrix} aE_{2^{i-i}} & bE_{2^{i-i}} \\ cE_{2^{i-i}} & dE_{2^{i-i}} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \hat{D}_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{D}_i \end{pmatrix}$$

$\hat{D}_i$ - матрица размера $2^i \times 2^i$ вида

$$\begin{pmatrix} aE_{2^{i-1}} & bE_{2^{i-1}} \\ cE_{2^{i-1}} & dE_{2^{i-1}} \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $\mathfrak{X}^{\downarrow}$ произвольный вектор длины 2^n над полем K. Опишем алгоритм умножения D_i на $\mathfrak{X}^{\downarrow}$.

1. Разобьем $X^{\downarrow}$ на 2^{n-1} частей длины 2^i, тогда

$$\mathfrak{X}^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_1^{\downarrow} \\ \vdots \\ \mathfrak{X}_{2^{n-i}}^{\downarrow} \end{pmatrix}, \text{тогда } D_i \mathfrak{X}^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \hat{D}_i \mathfrak{X}_1^{\downarrow} \\ \vdots \\ \hat{D}_i \mathfrak{X}_{2^{n-i}}^{\downarrow} \end{pmatrix}.$$

2. Каждый из векторов $\mathfrak{X}_j^{\downarrow}$ разбиваем на 2 подвектора равной длины.

$$\mathfrak{X}_j^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_{j_0}^{\downarrow} \\ \mathfrak{X}_{j_1}^{\downarrow} \end{pmatrix}, \text{тогда } D_i \mathfrak{X}_j^{\downarrow} = \begin{pmatrix} aE_{2^{i-1}} & bE_{2^{i-1}} \\ cE_{2^{i-1}} & dE_{2^{i-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_{j_0}^{\downarrow} \\ \mathfrak{X}_{j_1}^{\downarrow} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} aE_{2^{i-1}} \mathfrak{X}_{j_0}^{\downarrow} + bE_{2^{i-1}} \mathfrak{X}_{j_0}^{\downarrow} \\ cE_{2^{i-1}} \mathfrak{X}_{j_1}^{\downarrow} + dE_{2^{i-1}} \mathfrak{X}_{j_1}^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mathfrak{X}_{j_0}^{\downarrow} + b\mathfrak{X}_{j_0}^{\downarrow} \\ c\mathfrak{X}_{j_1}^{\downarrow} + d\mathfrak{X}_{j_1}^{\downarrow} \end{pmatrix}.$$

Таким образом для вычисления $\widetilde{f^{\downarrow}}$ необходимо $O(n \cdot 2^n)$ операций.

5 Трансверсали.

Определение. Пусть 2^X - булеан множества X, т.е. совокупность всех подмножеств множества X. Пусть $(X_1; \dots ; X_n)$ - некоторая n-выборка из булеана. Вектор $(x_1; \dots ; x_n)$, состоящий из элементов множества X, называется трансверсалью семейства $(X_1; \dots ; X_n)$, если выполнены следующие отношения:

1. $x_i \in X_i$; $1 \le i \le n$;
2. $x_i \ne x_j$; $i \ne j$; $1 \le i,\, j \le n$.

Иными словами имеем систему различных представителей семейства $(X_1; \dots ; X_n)$.
Обозначается $(x_1; \dots ; x_n)$ тр. $(X_1; \dots ; X_n)$

Теорема. **(Критерий Ф.Холла)** Для того, чтобы семейство $(X_1; \dots ; X_n)$ имело трансверсаль, необходимо и достаточно, чтобы $\forall$ k $\in \overline{1,n}$ и $\forall$ k-сочетания $i \le j_1 \le \dots \le j_k \le n$ выполнялось условие:

$$|X_{j_1} \cup \dots \cup X_{j_k}| \ge k. \; (*)$$

Доказательство:

Необходимость:
Пусть $\exists (x_1; \dots ; x_n)$ тр. $(X_1; \dots ; X_n)$. Тогда $\forall k \in \overline{1,n}$ и $\forall$ набора $1 \le j_1 \le \dots \le j_k \le n$ имеем $x_{j_1} \in X_{j_1}, \dots , x_{j_k} \in X_{j_k}$ и $x_{j_s} \ne x_{j_t}$ при $j_t \ne j_s \Rightarrow |X_{j_1} \cup \dots \cup X_{j_k}| \ge k = |x_1; \dots ; x_k|$.

Достаточность:
Индукция по n. Пусть $n = 1$, тогда $|X_1| \ge 1 \Rightarrow x_1$ тр X_1 . Предположение индукции: $\forall n' < n$ из условия (*) $\Rightarrow \exists$ трансверсали для n' множеств.

Рассмотрим 2 случая:

а) Для всех $1 \le k \le n-1$ и $\forall j_1 < \dots < j_k \le n$ верно $|X_{j_1} \cup \dots \cup X_{j_k}| \ge k+1$ (**) При $k = 1$ $|X_1| \ge 2 \Rightarrow \exists$ трансверсаль x_1 тр. X.

Рассмотрим семейство $(X'_2; \dots ; X'_n)$, где $X'_i = X_i \setminus \{x_i\}, 2 \le i \le n$. Согласно (**) для этого семейства при $\forall 1 \le k < n$ и $\forall 2 \le j_1 < \dots < j_k \le n$ имеем $|X'_{j_1} \cup \dots \cup X'_{j_k}| \ge k$ и по предположению индукции существует $(x_2; \dots ; x_n)$ тр. $(X'_2; \dots ; X'_n)$, но тогда $(x_1, x_2, \dots , x_n)$ тр. $(X_1; \dots ; X_n)$.

б) $\exists k$ и такое сочетание $1 \le j_1 < \dots < j_k \le n$, что $|X_{j_1} \cup \dots \cup X_{j_k}| = k$.

Т.к. можно перенумеровать подмножества, то не ограничивая общности считаем $|X_1 \cup \dots \cup X_k| = k$. По предположению индукции $\exists$ трансверсаль $(x_1; \dots ; x_k)$ тр. $(X_1; \dots ; X_k)$, т.к. $k < n$ и $\{x_1; \dots ; x_k\} = |X_1 \cup \dots \cup X_k|$.

Рассмотрим семейство множеств $(X'_{k+1}; \dots ; X'_n)$, где $X'_i = X_i \setminus \{x_1; \dots ; x_k\}, k+1 \le i \le n$. Для этого семейства верно условие (*), т.к. $\forall 1 \le l \le k$ и $\forall 1 \le \nu_1 < \dots < \nu_l \le n-k$ имеем $|X'_{k+\nu_1} \cup \dots \cup X'_{k+\nu_l} \cup X_1 \dots \cup X_k| - k \ge$ (Штрихи можно снять, т.к. $\{x_1; \dots ; x_k\}$ и так содержится в $X_1 \cup \dots \cup X_k$).

$\geq k+l-k=1$, т.к. верно условие (*) для нештрихованных множеств. Таким образом $\exists(x_{k+1};\dots;x_n)$ тр. $(X'_{k+1};\dots;X'_n) \Rightarrow \exists(x_1;\dots;x_n)$ тр. $(X_1;\dots;X_n)$.

Пример. 1. Представители различных классов эквивалентности

Пример. 2. Остовное дерево графа. Его ребра - трансверсали множества рёбер графа.

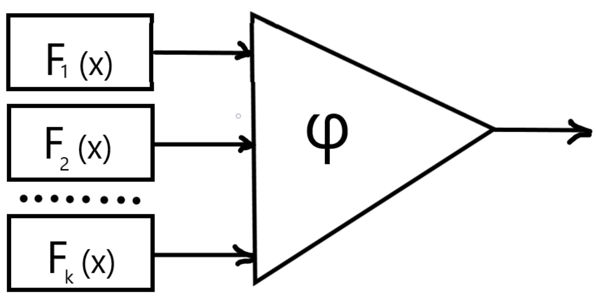
Определение. Пусть $P = GF(q)$ - конечное поле из q элементов, $q = p^d$, где $p \in \mathbb{P}$ (простое). Пусть $F(x)$ - реверсивный многочлен (т.е. $F(0) \neq 0$) над P. Найдутся $a \in P$ и $k \in \mathbb{N} : F(x)|x^k - a$. Наименьшее k с таким свойством назовём редуцированным периодом (Обозначение: $T_{red}(F)$). Элемент a назовём мультипликатором многочлена $F(x)$. Обозначение $(Mult(F))$ - множество всех мультипликаторов.

Пусть $F(x)|x^t - b$, где $t = T_{red}(F)$.

Утверждение.

1. $Mult(F) =< b >$;
2. $t * |Mult(F)| = T_{red}(F)$;
3. Если f - примитивный, то $t = \frac{q^m-1}{q-1}$, где $m = deg(f(x)), Multi(F) = P^*, b = F(0)$.

Рассмотрим следующую модель ДСЧ (Датчик случайных чисел).



Пусть $F_1, \dots, F_k$ - многочлены попарно взаимопростых степеней $m_1, \dots m_k$.

Тогда $T = [T(F_1), \dots, T(F_k)] = \frac{(q^{m_1}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{m_k}-1)}{(q-1)^{k-1}}$.

$(q^{m_1}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{m_k}-1)$, каждый из них лежит на цикле длины T и таких циклов $(q-1)^{k-1}$. Будем считать, что начальное состояние $\vec{\alpha_0} = (u_1(0), \dots, u_1(m_1-i), u_2(0), \dots, u_2(m_2-1), \dots, u_k(0), \dots, u_k(m_k-1))$ выбирается из множества S всех состояний, тогда $\vec{\alpha_i} = (u_i(i), \dots, u_i(i+m_1-1), \dots, u_k(i), \dots, u_k(i+m_k-1) \in S$. Последовательность $((\vec{\alpha_i})_{i=0}^{\infty})$ - чисто периодическая с периодом T. Каждый вектор $\vec{\alpha} \in S$ запишем в виде $\vec{\alpha} = (\vec{\alpha}(1);\dots;\vec{\alpha}(k))$, где $\vec{\alpha}(j) \in P^{m_j} \backslash \{\vec{0}\}$.

Зададим отношение $\sim$: $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}\ \vec{\alpha} \sim \vec{\beta} \Leftrightarrow \exists c_1, \dots, c_k \in P^* | \vec{\alpha}(j) = c_j \vec{\beta}(j) \forall j \in \overline{1,k}$

Пусть a_j - корень многочлена $F_j(x)$ в расширении $GF(q^{m_j})$ поля P, где $j \in \overline{1,k}$. Из пункта 3 утверждения следует, что $b_j = a_j{}^{\frac{q^{m_j}-1}{q-1}} = a_j^{T_{red}(F_j)}, i \in \overline{1,k}$, т.е. имеем мультипликатор многочлена $F_j(x)$. Пусть $m = m_1; \ldots; m_k$, положим $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \, \vec{\alpha} \overset{red}{\sim} \vec{\beta} \Leftrightarrow \exists i \in \{0, \ldots, q-2\} | \vec{\alpha}(j) = \vec{\beta}(j) * b^{m-i/n_j}, \forall j \in \overline{1,k}$.

Для любого вектора $\exists$ ровно $q-1$ вектор, находящийся с ним в отношении $\overset{red}{\sim}$.

Теорема. Пусть $\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2} \in S$, тогда

1) $\vec{\gamma_1} \sim \vec{\gamma_2}$

2) $\vec{\gamma_1} \overset{red}{\nsim} \vec{\gamma_2}$

Тогда $\vec{\gamma_1}$ и $\vec{\gamma_2}$ лежат на различных циклах.

6 Латинские квадраты

Для элементов симметрической группы подстановок определим понятие противоречивости.

Определение. Подстановки S и S' - противоречивы, если $S(i) \neq S'(i) \forall i \in \overline{1,n}$. Обозначается $S \uparrow S'$.

Определим метрику Хемминга как функцию на множестве $N_m^n = \{S = S(1), \dots, S(n) \mid S(i) \in N_m\}$, где $N_m = \{1, \dots, m\}$

Расстоянием между подстановками назовём $\rho(S', S) = |\{i : S(i) \neq S'(i); 1 \leq i \leq n\}|$ Функция ρ является метрикой Хемминга.

Свойства:

1. $\rho(S, S') \geq 0$ и $\rho(S, S') = 0 \Leftrightarrow S = S'$
2. $\rho(S, S') = \rho(S', S)$
3. $\rho(S, S'') \leq \rho(S, S') + \rho(S', S'')$

Утверждение. $S \uparrow S' \Leftrightarrow \rho(S, S') = n$

Определение. Последовательнoть из m подстановок степени n, $2 \leq m \leq n$, обозначаемая $[S_1, S_2, \dots, S_m]_n$ образует латинский прямоугольник размеров $m \times n$, если $S_i \uparrow S_j \ \forall i \neq j$. Любая последовательность из одной подстановки образует латинский прямоугольник размеров $1 \times n$.

Если $m = n$, то латинский прямоугольник становится квадратом.

Таблицей латинского прямоугольника $[S_1]_n$ является нижняя строка подстановки S_1.

В общем случае имеем: $\begin{pmatrix} S_1(1) & S_1(2) & \dots & S_1(n) \\ S_2(1) & S_2(2) & \dots & S_2(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_m(1) & S_m(2) & \dots & S_m(n) \end{pmatrix}$

Свойства:

1. В любой строке и любом столбце элементы попарно различны.
2. В латинском квадрате в любой тройке $(i, j, S_i(j))$ 2 элемента однозначно определяют третий.

Теорема 1. $\forall$ латинского прямоугольника $[S_1, \dots, S_m]_n; 1 \leq m < n, \exists S_{m+1} | S_{m+1} \uparrow S_i, \ i \in \overline{1,n}$ добавление которой даёт латинский прямоугольник размеров $(m+1) \times n$

Теорема 2. $\forall$ латинского прямоугольника $[S_1, \dots, S_m]_n$ существует латинский прямоугольник $[S_{m+1}, \dots, S_n]_n \mid [S_1, \dots, S_n]_n$ - латинский квадрат.

Док-во Теоремы 1:

$\triangleright$Рассмотрим семейство подмножеств $(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n)$ множества $\mathfrak{X} = N_n$. Положим $\mathfrak{X}_j = N_n \setminus \{S_1(j), \dots, S_m(j)\}$, $1 \leq j \leq n$.

Докажем, что $\exists (x_1, \dots, x_n)$ тр. $(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n)$. Т.к. подстановки $S_1, \dots, S_m$ попарно противоречивы, то $|\mathfrak{X}_i| = n - m$, $i \in \overline{1,n}$. Рассмотрим мультимножество $(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n)$ с порождающим множеством $\mathfrak{X}$, где $[x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n}]$ его первичная спецификация. $\sum\limits_i a_i = n(n-m)$. Покажем, что $\forall i$, $a_i = n - m \ (*)$

Зафиксируем $i = 1, \ldots, n$ $\forall r = 1, \ldots, m$ однозначно определяется элемент $j_r \in N_n | S_r(j_r) = x_i$, т.к. $S_1, \ldots, S_m$ попарно противоречивы, то элементы $j_1, \ldots, j_m$ - попарно различны $\Rightarrow$ по определению $\mathfrak{X}_j$, $x_i \in \mathfrak{X}_{j_r}$ $r = 1, \ldots, m$; $x_i \in \mathfrak{X}_j; \notin \{j_1, \ldots, j_m\} \Rightarrow$ верно (*).

Покажем, что $\underline{(\mathfrak{X}_1}, \ldots, \mathfrak{X}_n)$ удовлетворяет условиям критерия Ф.Холла. Зафиксируем $k \in \overline{1, n}$ и $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$. Положим $z = |\mathfrak{X}_{j_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{X}_{j_k}|$. Рассмотрим мультмножества $(\mathfrak{X}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{X}_{j_k})$ с порождающим множеством $\mathfrak{X}$, оно включено в большее мультимножество $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n (**)$. $[x_1^{a'_1}, \ldots, x_n^{a'_n}]$ - его первичная спецификация, тогда $t' = a'_1 + \ldots + a'_n = k(n-m)$ т.к. (**)$\forall i \in 1, \ldots, n$ имеет место неравенство $a'_i \leq a_i \Rightarrow a'_i \leq (n-m)$

Т.к. $\mathfrak{X}_{j_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{X}_{j_k}$ - носитель мультимножества $(\mathfrak{X}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{X}_{j_k})$, то $z = |\mathfrak{X}_{j_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{X}_{j_k}| = |\{i | a'_i > 0; i \in 1, \ldots, n\}| \Rightarrow t' = \sum\limits_i a'_i \leq z(n-m) \Rightarrow z \geq k$ и выполянется условие критерия Ф.Холла $\Rightarrow \exists (x_1, \ldots, x_n)$тр.$\underline{(\mathfrak{X}_1}, \ldots, \mathfrak{X}_n)$. Определим S_{m+1} равенством $S_{m+1}(j) = x$; $S_{m+1} \uparrow S_i$ $\forall i \in \overline{1, m}$ т.к. $x_j \in N_n \setminus \{S_1(j), \ldots, S_m(j)\} \triangleleft$

Определение. 2 латинских квадрата называются ортогональными, если $\{S_i(j), S'_i(j)\} = N_n \times N_n$, т.е. при наложении таблиц получаем всевозможные пары.

Теорема. Если n - нечетное или n делится на 4, то $\exists$ пара ортогональных латинских квадратов порядка $n \times n$

В случае n - нечётное

$$\left.\begin{array}{r} S_i(j) = k \equiv i + j (mod\, n) \\ S'_i(j) = l \equiv i - j (mod\, n) \end{array}\right\} (***)$$

т.к. n-нечётное, то $\exists !$ пара i и j удовлетворяющих (***).

Пример. Используется в протокле с разделённым секретом.

7 Перманенты. Формула Райзера

Рассмотрим матрицу $A = [a_{i_j}]_{n\times m}$,
$i \in \{1, \ldots, n\} = N_n$, $j \in \{1, \ldots, m\} = N_m$, $n \le m$, с элементами a_{i_j} из некоторого коммутационного кольца.

Определение. Перманент матрицы A определяется равенством

$$PerA = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_n\le m} a_{1_{j_1}}, a_{2_{j_2}}, \ldots, a_{n_{j_n}},$$

или иначе

$$PerA = \sum_{\sigma: N_n \to N_m} a_1\sigma(1) \cdot \ldots \cdot a_n\sigma(n)$$

Суммирование ведется по всем инъективным отображениям
$\sigma : N_n \to N_m$.
Свойства:

1. ***Определение.*** элементы a_{i_j} и a_{k_l} неколлинеарны, если $i \neq k$ и $j \neq l$. Тогда перманент A равен сумме произведений (всех) по n неколлинеарных элементов матрицы A.

2. Если в A $\exists$ нулевая строка или $m-n+1$ нулевых столбцов, то $PerA = 0$.

3. Если $m = n$, то $PerA^T = PerA$.

4. $Per\Pi A\Pi'$, где Π' и Π- подстановочные матрицы порядков n и m.

5. При умножении строки матрицы на некоторый элемент её перманент умножается на этот элемент.

6. $PerA = PerA^0{}_{i_j} - a_{i_j}Per(A(i|j))$.
   $A^0{}_{i_j}$ - матрица A с нулём на месте элемента a_{i_j}. $(A(i|j))$ - матрица, полученная из A вычёркиванием i-строки и j-столбца.

7. $PerA = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{i_j} PerA(i|j)$

8. $\sqsupset \mathfrak{X}_1; \ldots; \mathfrak{X}_n$ - подмножества m-множества X,
   $R(\mathfrak{X}_1; \ldots; \mathfrak{X}_n) = |\{\underline{(x_1; \ldots; x_n)} : (x_1; \ldots; x_n) \text{ трансверсали } (\mathfrak{X}_1; \ldots; \mathfrak{X}_n)\}|$
   и $A = [a_{i_j}]_{n\times m}, i \in \overline{1;n}, j \in \overline{1;m}$,

   $$a_{i_j} = \begin{cases} 1 & x_j \in \mathfrak{X}_i \\ 0 & x_j \notin \mathfrak{X}_i \end{cases}$$

   тогда $R(\mathfrak{X}_1; \ldots; \mathfrak{X}_n) = PerA$

9. Число подстановок, противоречивых с k заданным
   $\sqsupset S_1; \ldots; S_k \in S_n$, $\pi_1; \ldots; \pi_k$ - их подстановочные матрицы.
   Тогда $\sqsupset M_n(S_1; \ldots; S_k) = |\{S : S \uparrow S_1, S \uparrow S_k; S \in S_n\}| = Per(\overline{j} - (\Pi_1 \vee \ldots \vee \Pi_k))$ ($\overline{j}$ - матрица из всех единиц, $\Pi_1 \vee \ldots \vee \Pi_k$ - поэлементная дизъюнкция)

10. Если в условии пункта 9 подстановки S_t и S_l, $t \neq l \in \overline{1;k}$ попарно противоречивы, то
$M_n(S_1;\ldots;S_k) = (\bar{j} - \Pi_1 - \ldots - \Pi_k))$

11. Задачи о встречах и беспорядках - суть:
вычисление $h_n = |\{S : S \uparrow e,\ S \in S_n\}|$, $n \geq 1$.
$h_n = Per(\bar{j} - E) = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{k!}$ (n писем n адресатам подписывает конверты и случайным образом вкладывает письма).

12. $\sqsupset$ S_1 и S_2 - подстановки степени n, Π_1 и Π_2 - их матрицы.
$Per(a\Pi_1 + b\Pi_2) = \prod\limits_{i=1}^{k}(a^{li} + b^{li})$, где $l_1; l_2; \ldots; l_k$ - длины циклов подстановок $S_1^{-1}S_2$ и $a; b \in \mathbb{C}$

Теорема. **(Формула Райзера)**

$PerA = \sum\limits_{k=m-n}^{m}(-1)^{k-(m-n)}C_k^{m-n}S_k.$

$S_k = \sum\limits_{\substack{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq n\\ 1\leq k\leq n}} \prod\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{i_j} - \sum\limits_{(j_e)} a_{i_{j_e}})$. $S_0 = \prod\limits_{i=1}^{n}(a_{i_1} + \ldots + a_{i_m})$.

Док-во: $\triangleright$ Имеем $PerA_1 = \sum\limits_{\sigma: N_n \to N_m} \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$, где суммирование ведётся по всем инъективным отображениям σ. Вес элемента σ равен $a_{1_{j_1}} a_{2_{j_2}} \ldots a_{n_{j_n}}$. Будем говорить, что σ обладает свойством A_j, если в её двухстрочной записи нет элемента $j \in N_m$. Покажем $PerA_2 = M(m-n) = \sum\limits_{r=m-n}^{n}(-1)^{r-m+n}C_r^{m-n}S_r$.
$S_0 = \sum\limits_{(i)}^{n}$; $S_r = \sum\limits_{1\leq j_1<\ldots<j_r\leq n} M(A_{j_1};\ldots;A_{j_r})$ (Метод включения исключения).
$M(m-n)$ - сумма весов отображений σ таких, что в нижнем ряду их двухстрочной записи отсутствуют ровно $m-n$ элементов из N_m, то есть $\exists$ ровно n элементов из N_m (различных) $\Rightarrow$ σ-инъективное $\Rightarrow$ ($PerA_1 \Rightarrow PerA_2$).
$S_0 = \sum\limits_{1\leq j_1<\ldots<j_r\leq m} a_{1_{j_1}} \ldots a_{n_{j_n}} = \prod\limits_{i=1}^{n}(a_{i_1};\ldots;a_{i_m})$ - вес всех отображений $\{\sigma\}$.
Вес отображений σ, у котороых в нижней строке двухстрочной записи нет элементов $j_1;\ldots;j_r$ это вес отображений, обладающих свойствами $A_{j_1}\ldots A_{j_r}$. Этот вес $M(A_{j_1};\ldots;A_{j_r})$ получается выбрасыванием из S_0 в каждой из скобок производных элементов матрицы с № $j_1 - j_r$. Или иначе - вычитанием $\sum\limits_{l=1}^{r} a + i \neq l$, $1 \leq i \leq n \Rightarrow$ Теорема доказана. $\triangleleft$

Теорема. **(Кёнига - Фробениуса)**

$\forall$ необратной матрицы размерности $m \times n$ $PerA = 0 \Leftrightarrow \exists\theta_{p\times q}|p+q > m$.