Лекции по дискретной математике

me and boyz

4 октября 2021 г.

Содержание

1 Дискретные функции и их представление. Индуктивное определение формулы. Полные системы. Критерий полноты.

Определение. Дискретной функцией называется любая функция, отображающая конечное множество A в конечное множество B.

Область определения дискретной функции часто представляется в виде декартового произведения множеств относительно небольшой мощности.

Если $f : A \to B$ - дискретная функция и $A = A_1 \times \dots \times A_n$, то f обозначают следующим образом $f(x_1; \dots; x_n)$ и называют дискретной функцией от n переменных $x_1, \dots, x_n$. При этом x_i принимает всевозможные значения из A_i. Если $A_1 = \dots = A_n = B$ и $B = \{0, 1\}$, то f называется булевой функцией.

Определение. Обозначим далее $\Omega = \{0, 1\}$, тогда булевой функцией от n переменных называется любое отображение $f : \Omega^n \to \Omega$.

0-местными булевыми функциями будем называть элементы $0, 1 \in \Omega$.

Замечание. Существуют функции k - значной логики.

Обозначать булеву функцию будем $f(x_1; \dots; x_n)$ или $f(\vec{x})$, если количество переменных известно из контекста.

Определение. Если $f(x_1; \dots; x_n)$ - булева функция и $\vec{\alpha} = (a_1; \dots; a_n) \in \Omega^n$, то образ $\vec{\alpha}$ при отображении f называют значением функции f на наборе $\vec{\alpha}$. Обозначение: $f(\vec{\alpha})$.

Определение. Если рассматривать 0 и 1 как числа $\in \mathbb{N}_0$, то для набора $\vec{\alpha} = (a_1; \dots; a_n)$ обозначим $||\vec{\alpha}|| = a_1 + \dots + a_n$ - вес вектора $\vec{\alpha}$.

$\widetilde{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 2^{n-i}$ - лексикографический порядок.

Пример.

$$\vec{\alpha} = (1; 1; 0; 1) \Rightarrow ||\vec{\alpha}|| = 1 + 1 + 0 + 1 = 3.$$

Естественным образом задания является табличный, при этом координата i-вектора $f^{\downarrow}$ соответствует значению $f(\vec{\alpha})$, где $\widetilde{a} = i$.

Пример.

x_0	x_1	$f^{\downarrow}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Утверждение. $|F_2(n)| = 2^{2^n}$.

Определение. Весом булевой функции f называют величину $||f|| = |\{\vec{\alpha} \in \Omega^n \mid f(\vec{\alpha}) = 1\}|$.

Определение. Функция от $n-1$ переменной, определяемая равенством $\varphi(a_{i_n}; \dots; a_{i_n}) = f'(a_1; \dots; a_{i-1}; b; a_{i+1}; \dots; a_n)$, называется функцией полученной из f' фиксацией i-ой переменной значением b.

Обозначением $\varphi = f_i^b(x_1; \dots; x_n)$, аналогично фиксация k переменных значениями $b_1, \dots, b_k : \varphi = f_{i_1; \dots; i_n}^{b_1; \dots; b_k}(x_1; \dots; x_n)$.

Общее название таких функци φ - подфункции f.

Если $f(a_1; \dots; a_{i-1}; 0; a_{i+1}; \dots; a_n) = f(a_1; \dots; a_{i-1}; 1; a_{i+1}; \dots; a_n)$, то переменная x_i называется несущественной переменной функции f, в противном случае - существенной.

Определение. Пусть x_i -несущественная(*фиктивная*) переменная функции f, g получена из f фиксацией x_i любой константой, тогда говорят, что g получена удалением из f несущественной переменной x_i, а f получена из g добавлением фиктивной переменной x_i.

Пусть задано множество функций $\mathbb{K} = \{f_i : i \in I\}$ и множество символов переменных $X = \{x_1; \dots; x_n\}$.

Определение.

1. Любой символ переменной есть формула над классом $\mathbb{K}$.
2. Если f_j - символ m - местной функции из $\mathbb{K}$, а $A_1, \dots, A_m$ - формулы над $\mathbb{K}$, то $f_j(A_1; \dots; A_m)$ - формула над $\mathbb{K}$.
3. Других формул нет.

Множество формул над $\mathbb{K}$ обозначается $\Phi(\mathbb{K})$. При $m = 0$ формула есть символ над $\mathbb{K}$, т.е. константа.

Определение. Число символов функций из $\mathbb{K}$, встречающихся в формуле A назовем рангом формулы A. Обозначение: $r(A)$.

Определение.

1. Подформула формулы x_i - только она сама.

2. Подформулы $f_j(A_1;\ldots;A_n)$ - на сама и все подформулы формулы $A_1;\ldots;A_n$.

Определение. Пусть A - произвольная формула, в ее записи присутствует только переменные $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$. Набор $x_{j_1},\ldots,x_{j_m}$ называется допустимым, если $\{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\}\subseteq\{x_{j_1},\ldots,x_{j_m}\}$.

Каждой формуле при фиксированном допустимом наборе $(x_1;\ldots;x_n)$ сопоставляется по следующему правилу:

1. Если A есть x_i, то ей сопоставляется функция f, значения которой определяются равенством $f(a_1;\ldots;a_n)=a_i,(a_1;\ldots;a_n)\in\Omega^n$.

2. Если A есть $f_j(A_1;\ldots;A_m)$ и формулам $A_1,\ldots,A_m$ сопоставлены функции $\varphi_1(x_1;\ldots;x_n);\ldots;\varphi_m(x_1;\ldots;x_n)$, то формуле A сопоставляется функция f, значения которой определяются равенством $f(a_1;\ldots;a_n)=f_j(b_1;\ldots;b_n)$, где $b_\zeta=\varphi_\zeta(a_1;\ldots;a_n),\zeta\in\overline{1,n}$.

Определение. Формулы A и B равносильны, если они представляют одну и ту же функцию на любом допустимом наборе. Обозначение: $A\equiv B$.

Определение. Пусть A - произвольная формула над классом $\mathbb{K}=(\&,\vee,\neg)$. Двойственной к A называется формула полученная из A заменой $\&\leftrightarrow\vee$. Обозначение: A^*.

Теорема. $A^*(x_1;\ldots;x_n)=\overline{A(\overline{x_1};\ldots;\overline{x_n})}$.

Следствие. $A\equiv B\Leftrightarrow A^*\equiv B^*$.

Определение. Замыканием системы $\mathbb{K}$ булевых функций называют множество всех булевых функций представимых формулами над $\mathbb{K}$. Обозначение: $[\mathbb{K}]$.

Утверждение.

1. $\mathbb{K}\subseteq[\mathbb{K}]$

2. $\mathbb{K}_1\subseteq\mathbb{K}_2\Rightarrow[\mathbb{K}_1]\subseteq[\mathbb{K}_2]$

3. $[[\mathbb{K}]]=[\mathbb{K}]$

Определение. Система $\mathbb{K}$ называется полной, если (замыкание) $[\mathbb{K}]=F_2$.

Пример.

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{K}_0&=\{x_1\cdot x_2;x_1\vee x_2;\overline{x_1}\}\\ \mathbb{K}_5&=\{x_1\cdot x_2;x_1\oplus x_2;1\}\end{aligned}\right\}\text{Полные}$$

Определение. Класс булевых функций называется замкнутым, если $\mathbb{K}=[\mathbb{K}]$.

Говорят, что набор $\vec{\beta}$ мажорирует набор $\vec{\alpha}$, если $\forall i\in\overline{1,n}:a_i\leq b_i$. Обозначение: $\vec{\alpha}\preccurlyeq\vec{\beta}$.

Пример.

$T_0 = \{f(x_1;\ldots;x_n) \mid f(0;\ldots;0) = 0\}$
$T_1 = \{f(x_1;\ldots;x_n) \mid f(1;\ldots;1) = 1\}$
$L = \{f(x_1;\ldots;x_n) = a_1x_1 \oplus \cdots \oplus a_nx_n \mid a_i \in \Omega, i \in \overline{0,n}\}$ – класс линейных функций
$S = \{f(x_1;\ldots;x_n) \mid f(x_1;\ldots;x_n) \equiv \overline{f(\overline{x_1};\ldots;\overline{x_n})}\}$ – класс самодвойственных функций
$M = \{f(x_1;\ldots;x_n) \mid \text{верно} \vec{\alpha} \preccurlyeq \vec{\beta}, \text{то} f(\vec{\alpha} \leq f(\vec{\beta})) \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \Omega^n\}$ – класс монотонных функций

Лемма. Булева функция $f(x_1;\ldots;x_n)$ не является монотонной $\Leftrightarrow \exists \vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ отличающиеся только в одной координате (соседние наборы), такие что $\vec{\alpha} \preccurlyeq \vec{\beta}$ и $f(\vec{\alpha}) > f(\vec{\beta})$.

Теорема. T_0, T_1, M, S, L - замкнуты.

Теорема. (Критерий Поста)

Система булевых функций $\mathbb{K}$ полна $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}$ содержит функции из $F_2\backslash T_0, F_2\backslash T_1, F_2\backslash M, F_2\backslash S, F_2\backslash L$.

Док-во:

Необходимость

$\forall$ произвольного замкнутого класса $G \neq F_2$, если $\mathbb{K}$ не содержит ни одной функции из $F\backslash G$, то $\mathbb{K} \subset G \Rightarrow [\mathbb{K}] \subset [G] \neq F_2 \Rightarrow \mathbb{K}$ - не является полной.

Достаточность

Рассмотрим функции $f_1 \notin T_0, f_2 \notin T_1, f_3 \notin L, f_4 \notin S, f_5 \notin M$. Покажем, что если $\mathbb{K} \nsubseteq G$, где $G \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$, то $\overline{x}$ и $x_1 \cdot x_2 \in [\mathbb{K}]$.

Рассмотрим 2 случая:

1. $f_1(1;\ldots;1) = 1$, но тогда $f(x;\ldots;x) = 1 \in [\mathbb{K}]$. Т.к. $\mathbb{K} \nsubseteq T_1$, то $\exists f_2 \in \mathbb{K} \mid f_2(1;\ldots;1) = 0 \in [\mathbb{K}]$. Покажем, что $\overline{x} \in [\mathbb{K}]$. Т.к. $\mathbb{K} \nsubseteq M$, то $\exists f_3 \in \mathbb{K} \mid f_3 \notin M$, т.е. $\exists \vec{\alpha} \preccurlyeq \vec{\beta} \mid f_3(\vec{\alpha}) > f_3(\vec{\beta})$.

   Рассмотрим функцию $f_(a_1;\ldots;a_{j-1};x_j;a_{j+1};\ldots;a_n) \equiv \overline{x_j}$, т.к. 0 и 1 $\in [\mathbb{K}]$, то и $\overline{x} \in [\mathbb{K}]$.

2. $f_1(1;\ldots;1) = 0$, то $f_1(x;\ldots;x) = \overline{x} \in [\mathbb{K}]$. Покажем, что 0 и 1 $\in [\mathbb{K}]$.

   Рассмотрим $f_4 \in \mathbb{K} \mid f_4 \notin S \Rightarrow \exists(a_1;\ldots;a_n) \mid f_4(a_1;\ldots;a_n) = f_4(\overline{a_1};\ldots;\overline{a_n}) = const \in \{0,1\} \in [\mathbb{K}]$. Т.к. $\overline{x} \in [\mathbb{K}]$, то 0 и 1 $\in [\mathbb{K}]$.

Покажем $x_1 \cdot x_2 \in [\mathbb{K}]$.

Т.к. $\mathbb{K} \notin L$, то $\exists f_5 \in \mathbb{K} \mid f_5 \notin L$, т.е. в ее многочлене Жегалкина $\exists$ *моном степени больше 1* (*) $\Rightarrow \exists$ моном, содержащий $x_1 \cdot x_2$.

Рассмотрим многочлен Жегалкина функции f_5:

$$f_5(x_1;\ldots;x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot g_1(x_3;\ldots;x_n) \oplus x_1 \cdot g_2(x_3;\ldots;x_n) \oplus x_2 \cdot g_3(x_3;\ldots;x_n) \oplus g_4(x_3;\ldots;x_n).$$

Рассмотрим функцию f, полученную из f_5, следующим образом:

$$f(x_1;x_2) = f_5(x_1;x_2;a_3;\ldots;a_n) = x_1x_2C_1 \oplus x_1C_2 \oplus x_2C_3 \oplus C_4.$$

$C_1 = 1$, т.к. см (*). Рассмотрим функцию $f(x_1 \oplus C_3; x_2 \oplus C_2) = x_1x_2 \oplus C_2C_3 \oplus C_4 \Rightarrow x_1x_2 \in [\mathbb{K}]$. ■

2 Классическое представление булевых функций. КНФ. ДНФ.

Рассмотрим класс $K_0 = \{\cdot, \vee, ^-\}$ Символом x^a, где $a \in \Omega$, обозначим функцию переменной x, принимающую значение 1, если $x = a$, и 0 в противном случае. Таким образом:

$$x^a = \begin{cases} \text{x, a} = 1 \\ \bar{x}, a = 0 \end{cases}$$

Определение. Пусть $i_1, \ldots, i_k$ - различные натуральные числа. Формула вида $x_{i_1}^{a_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}^{a_k}$ называется элементарной дизъюнкцией ранга k.

Если заменить $\vee$ на &, то получаем элементарную конъюнкцию ранга k.

Если элементраная дизъюнкция рассматривается как формула от переменной $x_1, \ldots, x_n$ и её ранг равен n, то она назвается совершенной.

Определение. Конъюктивной нормальной формой (КНФ) называется $\forall$ формула представляющая собой конъюнкцию конечного числа элементарных дизъюнкций.

Теорема. $\forall$ булевая функция может быть представлена в виде $f(x_1, \ldots, x_n) = \&_{(b_1, \ldots, b_k) = \Omega^k} x_{i_1}^{\bar{b}_{i_1}}, \ldots, x_{i_k}^{\bar{b}_{i_k}} f_{i_1, \ldots, i_n}^{\bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_n}}(x_1, \ldots, x_n)$

Замечание. Аналогичным образом определяется элементарная дизъюнкция(ДНФ).

Теорема. $\forall$ булевой функции $k \leq n$ представима формулой $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(a_1, \ldots, a_k)} x_{i_1}^{a_{i_1}}, \ldots, x_{i_k}^{a_{i_k}} f_{i_1, \ldots, i_n}^{a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}}(x_1, \ldots, x_n)$

Следствие. $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \overline{x_1} f(0, x_2, \ldots, x_n) \vee x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n)$

В случае $k = n$ получаем совершенные КНФ и ДНФ, называемые СКНФ и СДНФ.

Утверждение. $\exists!$ СДНФ и СКНФ $\forall f \in F_2$.

Пример. (две ДНФ одной функции)

$\overline{x_1 x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \equiv \overline{x_1} x_3 \vee x_1 x_2$

Определение. Многочленом Жегалкина от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется формула над классом $K_5 = \{\oplus, \cdot, 1\}$ вида

$$a_0 \oplus \sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}$$
$$1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n; a_0, a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in \Omega$$

Здесь знак суммы означает исключающее "или"и сумирование ведётся по всем непустым подмножествам $\{i_1, \ldots, i_k\}$ множества $\{1, \ldots, n\}$.

Определение. Элементарной конъюнкцией входящей в многочлен Жегалкина в качестве слогаемых называется одночлен (моном), элементы $a_{i_1, \ldots, i_k}$ коэффиценты многочлена, a_0 - свободный член. Ранг конъюнкции называется степенью одночлена.

Степенью неленейности функции представляемой многочленом Жегалкина называется максимальная из степеней многочлена, входящих в многочлен Жегалкина этой функции с коэффицентом 1.

Теорема. $\forall$ булевая функция однозначно представима многочленом Жегалкина.

Определение. Двоичным n-мерным кубом называют множество точек пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $a_1, \ldots, a_n$, где $a_i \in \Omega$

Для задания булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на n-мерном кубе отмечают вершины соответствующие носителю этой функции.

Определение. Гранью n-мерного куба ранга k (или иначе разморности $n-k$) называется множество его вершин, соответсвующее N_φ, где φ - произвольная элементарная конъюнкция ранга k, т.е. $\varphi = x_{i_1}^{a_1}, \ldots, x_{i_n}^{a_k}$

Утверждение. (свойства)

1. $f = \varphi \Leftrightarrow N_f = N_\varphi$
2. $N_{f \cdot \varphi} = N_f \cap N_\varphi$
3. $N_{f \cup \varphi} = N_f \cup N_\varphi$
4. $f \cup \varphi \equiv f \Leftrightarrow N_\varphi \subseteq N_f$
5. $f \equiv \bigvee_{i=1}^m \varphi_i \Leftrightarrow N_f = \bigcup_{i=1}^m N_{\varphi_i}$

Определение. Длиной ДНФ называется сумма рангов входящих в неё элементарных конъюнкций. ДНФ с минимальной длиной называется минимальной ДНФ (МДНФ).

Определение. Элементарная конъюнкция $\psi = x_{i_1}^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^{a_k}$ называется имплекантой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если она входит в некоторую ДНФ представляющую функцию f.

Утверждение. (эквивалентно)

1. ψ - имплеканта функции f
2. $\psi \cup f \equiv f$
3. $\psi \to f \equiv 1$
4. $\psi \cdot f = \psi$

Определение. Говорят, что g поглащается функцией f, если $g \vee f \equiv f$, т.е. имплеканта это элементарная конъюнкция, поглощаемая функцией f.

Определение. Имплеканта функции f называется простой, если никакая её собственная часть не поглощается функцией f.

Пример.
$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_2 x_3}$
$\overline{x_2 x_3}$ - простая.
$x_1 x_2$ - нет, т.к. x_1 поглощается f.

Лемма. Пусть φ_1 и φ_2 имплеканты f, φ_1 поглощает $\varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1$ - часть φ_2

Теорема. $\forall$ имплеканта функции f, содержащаяся в какой-либо МДНФ функции f является простой.

Теорема. Пусть $\varphi_1 \cup \ldots \cup \varphi_m$ - дизъюнкция всех простых имплекант функции f, тогда $f \leq \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_m$

Определение. Дизъюнкция всех простых имплекант функции f называется сокращенной ДНФ.

Определение. ДНФ $\varphi_1 \cup \ldots \cup \varphi_m$ функции f называется тупиковой, если все $\varphi_i, i \in \overline{1,k}$, входящие в неё, являются простыми имплекантами f и φ.

Всюду далее $f - n$-местная булевая функция отличается от константы.

3 Метод Блейка

Метод Блейка строит из ДНФ сокращённую ДНФ.

Основной операцией данного алгоритма является операция неполного склеивания, в основе которого лежит тождество:

$$x\varphi_1 \vee \bar{x}\varphi_2 \equiv x\varphi_1 \vee \bar{x}\varphi_2 \vee \varphi_1\varphi_2$$

Вход: ДНФ
Выход: Сокращённая ДНФ

Этап 1 В исходной ДНФ нааходим пару имплекант, в которой некоторая переменная входит в разных степенях: $\varphi_i = x_k\varphi_i'$ и $\varphi_j = \overline{x_k}\varphi_j'$.

Формируем $\varphi_1\varphi_2$ и добавляем её в ДНФ, повторяем до тех пор, пока не перестанут появлятся новые имплеканты.

Этап 2 В полученной ДНФ применяем операцию поглащения используя тождество $\varphi\psi \vee \varphi \equiv \varphi$ до тех пор пока это возможно.

Теорема. Полученная на выходе алгоритма ДНФ является сокращённой ДНФ.

Док-во: Покажем, что ДНФ, полученная на Этапе 1 содержит все простые имплеканты функции f(индукция по n).

Пусть $n = 1$. Утверждение очевидно, т.к. ДНФ функции одной переменной отличной от константы есть x_1 или $\overline{x_1}$.

Пусть $\forall$ ДНФ и для $\forall$ функции от n-1 переменной после Этапа 1 образуется ДНФ, содержащая все простые имплеканты.

Пусть теперь f - функция от n переменных и φ её имплеканта

а) Если ранг φ равен n, то φ содержится в $\forall$ ДНФ функции f.

   Действительно пусть $\varphi = x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$, тогда она принемает значения $1 \Leftrightarrow$ все x_i равны a_i в любой ДНФ функции f должна присутствовать имплеканта φ', принимающая значение 1 на $(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow$ все переменные входят в неё в тех же степенях, что и в φ, но

б) Если ранг φ меньше, то $\exists x_i$ не входящее в φ.

   Представим f в виде $f = x_i h \vee \overline{x_i} g \vee t$, где h, g, t - некоторые булевые функции, независящие от x_i. Т.к. φ - имплекация функции f, то $\varphi \vee x_i h \vee \overline{x_i} g \vee t$ совпадает с $x_i h \vee \overline{x_i} g \vee t$. Полагая $x_i = 0$ или 1 имеем $\varphi \vee g \vee t \equiv$

$g \vee t$ и $\varphi \vee h \vee t \equiv h \vee t$ соответственно. Возьмём конъюнкцию этих тождеств и применим к левой части закон дистрибутвности. Получим $\varphi \vee (g \vee t)(h \vee t) \equiv (g \vee t)(h \vee t) \Rightarrow \varphi$ является имплекантой функции $f_1 = (h \vee t)(g \vee t) \equiv hg \vee t$.

ДНФ этой функции получается с помощью операции "неполного склеивания"из имплекант, входящих в ДНФ функции $x_i h \vee \overline{x_i} g \vee t$. При этом φ - простоая для f, т.к. φ - простая для f_1, а f поглащает f_1.

Тогда по предположению индукции φ содержится в ДНФ, полученной после Этапа 1, применнёного к ДНФ функции f_1, но $\varphi \in$ аналогичной ДНФ функции f, т.к. $\forall$ непростая имплеканта поглащается некоторой простой, то после Этапа 2 в ДНФ окажутся только простые имплеканты.

Лемма. Путь ДНФ $A = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i$ поглащает элементарную конъюнкцию φ и $\varphi\varphi_k \equiv 0$. Тогда φ поглащается ДНФ $A^1 = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i$

Определение. Функции f_1 и f_2 называются ортогональными, если $f_1 f_2 \equiv 0$

Теорема. (Критерий поглощения)

Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{k} u_i$ - ДНФ некоторой функции, φ_0 - элементарная конъюнкция не ортогональная ни одной из конъюнкций $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Обозначим φ_{0_i} - конъюнкцию членов входящих в φ_0 и в φ_i, а φ_{1_i} - конъюнкция членов φ_i, невходящих в φ_0 (если $\varphi_i = \varphi_{0_i}, \varphi_{1_i} = 1$) ДНФ поглощает $\varphi \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{k} \varphi_{1_i} \equiv 1$

Утверждение. Если f монотонна, то сокращённая ДНФ = МДНФ.

4 Метод Квайна

Составляется таблица, строчки которой обозначают всеми простыми имлекантами длиной функции, столбцы - наборами, на которых функция принимает значение 1. На пересечении ставится значение имплеканты на соответствующем наборе. Для построения ДНФ или МДНФ надо удалять строки так, чтобы в каждом столбце была хотя бы одна 1.